

24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı **A**

1. $AB \parallel CD$ ve $|AB| > |CD|$ olan bir $ABCD$ yamuğunda AC ve BD köşegenlerinin kesişim noktası E dir. DEC üçgeninin çevrel çemberine E noktasında teğet olan doğru $[AB$ ışını F noktasında kesiyor. $|AF| = 9$, $|AB| = 5$ ise $|EF|$ kaçtır?

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

2. $n^2 + mn + 14 = 7n + 3m$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

3. $abc = 2$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $a^2 + 2b^2 + 4c^2 - 6b$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) Hiçbiri

4. 24×24 satranç tahtasının bazı birim karelerine birer taş nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, her taşı k renkten birine, aynı satır veya aynı sütun üzerinde olup aralarında başka taş bulunmayan herhangi iki taşın rengi farklı olacak şekilde boyayabiliyorsak, k nin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

13. Bir ABC üçgeninin BC kenarına ait dış teğet çemberinin merkezi O olsun. O dan geçen bir doğru AB ve AC doğrularını sırasıyla D ve E de kesiyor. $|AD| > |AB|$, $|AE| > |AC|$, $|AD| = |AE|$, $|BD| = 9$, $|OD| = 8$, $|OC| = 4$ ise $|OB|$ kaçtır?
- a) 4 b) $\frac{9}{2}$ c) 5 d) $\frac{11}{2}$ e) 6
14. 3, 5, 7, 11, 13 sayılarından kaç tanesi $(n + 3)(n + 7)(n + 11)(n + 15) + 257$ ifadesini hiçbir n tam sayısı için tam bölemez?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
15. $1 \leq |a|, |b|, |c| \leq 10$, $a \neq c$ ve $b^2 \geq 4ac$ koşullarını sağlayan a, b, c tam sayıları için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin en küçük kökü ile $cx^2 + bx + a = 0$ denkleminin en büyük kökü birbirine eşitse (a, b, c) üçlüsüne *karesel üçlü* diyelim. Kaç farklı karesel üçlü vardır?
- a) 20 b) 40 c) 50 d) 60 e) 80
16. $1, 2, \dots, 2016$ sayılarının her biri k renkten birine, $a \mid b$ ve $b \mid c$ koşullarını sağlayan herhangi üç farklı a, b ve c sayıları aynı renkte olmayacak şekilde boyanabiliyorsa, k en az kaç olabilir?
- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı **A**

17. Dar açılı bir ABC üçgeninin AD kenarortayı, BE yüksekliği ve CF iç açıortayı noktadaştır. $|BC| = 10$, $|CA| = 6$ ise $|AB|$ kaçtır?

- a) $4\sqrt{5}$ b) 9 c) $\sqrt{85}$ d) $3\sqrt{10}$ e) $\sqrt{91}$

18. n bir pozitif tam sayı, p bir asal sayı, d_1 ve d_2 ise n sayısının birbirinden farklı iki pozitif tam böleni olmak üzere $n = p(d_1 + d_2)$ biçiminde yazılabiliyorsa n sayısına *dengeli sayı* diyelim. 100 den küçük kaç dengeli sayı vardır?

- a) 11 b) 17 c) 24 d) 30 e) Hiçbiri

19. Gerçek katsayılı bir P polinomu $P(1) = 1$ ve her x, y gerçel sayıları için $P(x) + P(y) = P(x + y) - 2xy + 1$ koşullarını sağlıyor. Buna göre $P(x)$ in alabileceği en küçük değer nedir?

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

20. Kaç $n \in \{12, 18, 42, 60, 72\}$ değeri için $1, 2, \dots, n$ sayıları herhangi iki komşu sayının toplamı asal sayı olacak şekilde sıraya dizilebilir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

21. $|AB| = 13$, $|BC| = 4$, $|CA| = 15$ olan bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin merkezi I ve BC kenarının orta noktası M dir. IM doğrusu BC kenarına ait yüksekliği K de kesiyor. Buna göre $|AK|$ kaçtır?

- a) $\frac{3}{2}$ b) 2 c) $\frac{5}{2}$ d) 3 e) $\frac{7}{2}$

22. Pozitif tam sayılardan oluşan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin terimleri her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^3 + 1376$ eşitliğini sağlamaktadır. Buna göre bu dizinin terimleri arasında en fazla kaç tane tam kare olabilir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

23. Tüm terimleri birbirinden ve sıfırdan farklı bir $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_0 = \sqrt{2}$ ve her $n \geq 1$ için $a_n a_{n+1} + \frac{4}{a_n a_{n-1}} = 2 \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \right)$ koşulunu sağlıyor. Buna göre $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2016}$ çarpımının alabileceği kaç farklı değer vardır?

- a) 1 b) 2 c) 4 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

24. Elimizde 12 kırmızı ve 12 beyaz top bulunuyor. Bir doğru üzerindeki 6 boş kutunun her birine bu toplardan 2 tanesi, herhangi iki komşu kutuda aynı renkli top bulunması koşuluyla kaç farklı biçimde dağıtılabilir?

- a) 204 b) 216 c) 228 d) 239 e) 251

29. $m(\widehat{ABD}) = 45^\circ$ koşulunu sağlayan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde CD doğrusu $[BA$ ışını E de kesiyor. $|AB| + |BD| = |AE|$ ve $|ED| = 2|AC|$ ise $m(\widehat{DEB})$ nedir?
- a) 15° b) 22.5° c) 30° d) 37.5° e) 45°
30. 23, 29, 31, 37, 41 sayılarından kaç tanesi en az bir (m, n) pozitif tam sayı ikilisi için $m^7 - n^7 - 3$ sayısını tam böler?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
31. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ ifadesi $2016^{-2}, 2016^{-1}, 1, 2016$ sayılarından kaç tanesine eşit olabilir?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4
32. Aslı ve Berk başlangıçta birkaç sayı yazılmış tahtada sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu tahtadaki bir sayıyı siliyor veya tahtadaki bir sayıyı silip yerine o sayının bir fazlasını, tahtadaki tüm sayıların birbirinden farklı olması ve hiçbirinin 24 ü aşmaması koşuluyla yazıyor. Oyunu son hamleyi yapan oyuncu kazanıyor. Oyuna her seferinde Aslı başlamak üzere, oyun tahtadaki sayılar $\{2, 3, 22, 23\}$, $\{1, 2, 3, 21, 22, 23\}$, $\{1, 7, 12, 13, 19, 24\}$, $\{5, 6, 11, 17, 18\}$ ve $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ olarak birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaçını kazanmayı garantileyebilir?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5