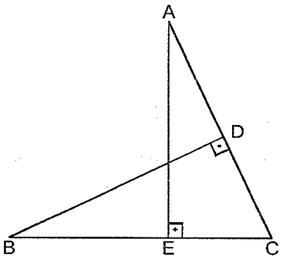
8. ve 9. sınıflar

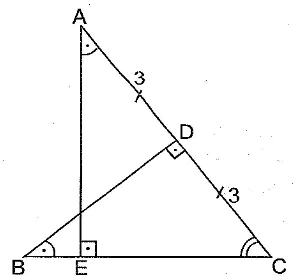
1.



Şekilde AEC ve BDC birer dik üçgen,
|AC| = 6 cm, [AC] nın orta noktası D ve
|BD|= 4 cm ise |AE| kaç cm dir?

A) 5,2 B) 5 C) 4,8 D) 4,5 E) 4

ÇÖZÜM:



|AC| = 6 cm ,
|BD| = 4 cm
BDC üçgeninde Pisagor teoreminden |BC| = 5 cm dir.

$\overset{\Delta}{AEC} \sim \overset{\Delta}{BDC}$ (A.A.)

$$\frac{|AE|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow \frac{|AE|}{4}=\frac{6}{5} \Rightarrow |AE|=4{,}8\,\text{cm} \text{ dir.}$$

Yanıt : C

2. $\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4-\frac{4}{x}}=3-\sqrt{9-\frac{9}{x}}$ eşitliğini sağlayan x sayısı için, $x+\frac{2}{3}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 4 B) 3 C) $\frac{8}{3}$ D) 2 E) $\frac{5}{3}$

ÇÖZÜM:

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4(1-\frac{1}{x})}=3-\sqrt{9(1-\frac{1}{x})},$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}}=3-3\sqrt{1-\frac{1}{x}} \text{ ve}$$

$$6\sqrt{1-\frac{1}{x}}=3 \text{ den } 1-\frac{1}{x}=\frac{1}{4},$$

$x=\frac{4}{3}$ tür. $x+\frac{2}{3}=2$ bulunur.

Yanıt : D

3. 210 ile en büyük ortak böleni 1 den büyük olan ve $1 \le n \le 25$ koşulunu sağlayan n tam sayılarının toplamı nedir?

A) 325 B) 308 C) 283 D) 264 E) 241

ÇÖZÜM:

210 = 2.3.5.7 dir. $1 \le n \le 25$ koşulunu sağlayan tamsayılardan, içinde 2, 3, 5 veya 7 çarpanlarını bulunduranların 210 ile ortak böleni 1'den büyüktür. Bu sayıların dışında kalanlar ise 210 ile aralarında asal olan sayılardır.

Bu sayıların toplamı,

1 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 84 tür.

$1+2+...+25=\frac{25.26}{2}=325$ olduğundan,

istenen özellikteki sayıların toplamı

325 – 84 = 241 dir.

Yanıt : D

4. Üç musluklu bir havuz, birinci ve ikinci musluklar açılırsa 4 saatte, ikinci ve üçüncü musluklar açılırsa 5 saatte, birinci ve üçüncü musluklar açılırsa 6 saatte doluyor.

Üçüncü musluk tek başına havuzu kaç saatte doldurur?

A) $\frac{120}{7}$ B) 12 C) 11 D) $\frac{120}{11}$ E) $\frac{7}{2}$

ÇÖZÜM:

Üç musluğun havuzu doldurma süreleri sırasıyla a, b ve c saat olsun.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{5}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{37}{120}$ bulunur.

Bu eşitlikte $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}$ yazılarak $\frac{1}{4}+\frac{1}{c}=\frac{37}{120}$ den, $c=\frac{120}{7}$ saat bulunur.

Yanıt : A

5. 16 kişilik bir grup içinden rastgele seçilen 6 kişi, 6 sandalyeden oluşan bir sıraya rastgele oturtuluyor. Ahmet ve Betül bu 16 kişiden ikisi ise, yan yana oturtulmuş olmaları olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{6}$ E) Hiçbiri

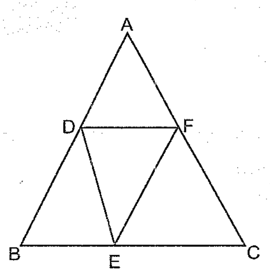
ÇÖZÜM:

16 kişiden seçilen 6 kişi, 6 sandalyeye P(16,6) sayıda oturabilir. Ahmet ve Betül'ün dışındaki 4 kişi, kalan 14 kişiden $\binom{14}{4}$ sayıda seçilir. Bu 4 kişi ile yanyana oturan (Ahmet, Betül) ikilisi sandalyelere 5! biçimde otururlar. Ahmet ile Betül aralarında 2! = 2 türlü yer değiştirebilir. İstenen durumların sayısı $\binom{14}{4}$. 5! .2 ve tüm durumlar P(16, 6) olduğundan bu olasılık

$$P(x)=\frac{\binom{14}{4}5!.2}{P(16,6)}=\frac{1}{24}$$ bulunur.

Yanıt : A

6.

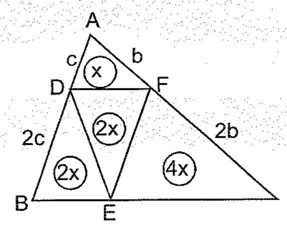


Şekilde DF doğrusu BC ye, FE doğrusu da AB ye paraleldir. |BD| = 2|DA| ise

DEF üçgeninin alanının, ABC üçgeninin alanına oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{9}$

ÇÖZÜM:



$\frac{|BD|}{|DA|}=\frac{|CF|}{|FA|}=2$ ve BEFD paralelkenar

A(ADF)= x olsun. $\overset{\Delta}{ADF} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ (A.A.) den

$$\frac{x}{A(ABC)}=\left(\frac{c}{3c}\right)^2 \Rightarrow A(\overset{\Delta}{ABC})=9x \text{ olur.}$$

$$\overset{\Delta}{ADF} \sim \overset{\Delta}{FEC} \Rightarrow \frac{x}{A(FEC)}=\left(\frac{b}{2b}\right)^2 \Rightarrow A(\overset{\Delta}{FEC})=4x \text{ ve}$$

$$A(\overset{\Delta}{DEF})=\frac{9x-5x}{2}=2x \text{ tir.}$$

O halde, $\frac{A(\overset{\Delta}{DEF})}{A(\overset{\Delta}{ABC})}=\frac{2}{9}$ dur.

Yanıt : B

7. 8 tabanına göre yazılımları $(abc)_8$ ve $(cba)_8$ olan üç basamaklı sayılardan ikincisi ilkinin iki katı ise, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) b = 7 B) a ∈ {1, 2} C) c ∈ {3, 5}
D) İstenen özelliğe sahip bir sayı yoktur.
E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

$(cba)_8 = 2(abc)_8$ eşitliğinde, $2.(abc)_8$ sayısı çift olduğundan $(cba)_8$ sayısı çift olmalıdır. Sayı tabanı çift olduğunda, birler basamağındaki rakam çift iken sayı çifttir. $(cba)_8$ sayısında

a < 8 koşulu ile a ∈ {0, 2, 4, 6} olmalıdır.

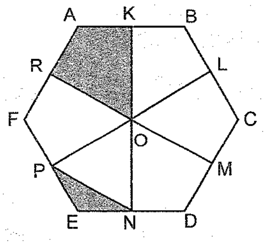
Ancak a=4 veya a=6 iken $2.(4bc)_8$ veya 2.(6bc) sayıları 4 basamaklı, a=0 iken $(abc)_8$ sayısı iki basamaklıdır. O halde a=2 olmalıdır. a=2 iken $(cb2)_8=2.(2bc)_8$ den 31.c= 4.b + 127 bulunur.

4b+127 tek sayı olduğundan c tek rakam olmalıdır. c ∈ {1, 3, 5, 7} den c = 5 ve b = 7 bulunur.

Yani $(cba)_8 = 2.(abc)_8 \Rightarrow (572)_8 = 2.(275)_8$ dir. İstenen özelliğe uygun sayı vardır.

Yanıt: D veya E

8.

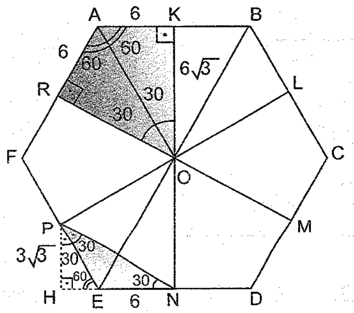


O merkezli, ABCDEF düzgün altıgeninin kenarlarının orta noktaları K, L, M, N, P, R dir.

|AB|= 12 cm olduğuna göre, şekildeki taranmış bölgelerin alanlarının toplamı kaç cm^2 dir?

A) $45\sqrt{3}$ B) $36\sqrt{3}$ C) 54 D) 48 E) 36

ÇÖZÜM:



|AB| = 12 cm olduğundan, kenarların yarıları 6'şar cm dir.

Düzgün altıgende $\overset{\Delta}{OKA} \cong \overset{\Delta}{ORA}$ üçgenleri 30°, 60°, 90° üçgeni ve $\overset{\Delta}{PEN}$, 30°, 30°, 120° üçgeni olduğundan, $|OK| = 6\sqrt{3}$ cm ve $|PH| = 3\sqrt{3}$ cm dir.

Taralı alanların toplamı,

$$S = 2.\frac{6.6\sqrt{3}}{2} + \frac{6.3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = 45\sqrt{3}\ cm^2 \text{ olur.}$$

Yanıt : A

9. x ve y sayıları

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{8}{2x+y}$ ve

$x^2+2y^2 = 4$ eşitliklerini sağlıyorsa, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $(x-y)^2 < 1$ B) $\frac{y}{x}$ tamsayıdır.

C) x ve y tamsayı değildir.

D) x + y tamsayıdır. E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{8}{2x+y}$ ve $x^2+2y^2 = 4$ veriliyor.

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{8}{2x+y}$ eşitliğinden $(2x-y)^2 = 0$ bulunur. Bu eşitlikten y = 2x olur.

$\frac{2x+y}{xy} = \frac{8}{2x+y}$ ve

$x^2+2y^2 = 4 \Rightarrow x^2+8x^2 = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ ve $x = -\frac{2}{3}$

bulunur.

$(x,y) = (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ veya $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ olur.

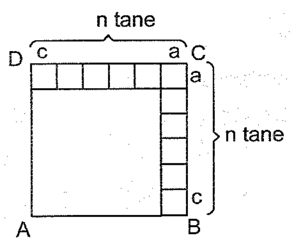
Bu durumda A, B, C, D seçenekleri doğru olur.

Yanıt : E

10. Bir kare eşit olması gerekmeyen n kareye bölünüyor. n aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

A) 11 B) 10 C) 8 D) 6 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:



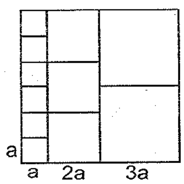
ABCD karesinin bir kenarı (a.n) cm olsun.

[BC] ve [CD] üzerine n > 2 olmak üzere

n + n − 1 + 1 = 2n tane kare bulunabilir.

Bu durumda B, C, D seçenekleri doğru olur.

A için şekil çizersek 11 kareye bölebiliriz.



Yanıt : E

11. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{1996^2}\right)$ çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1997}{1996}$ B) $\frac{3.1997}{4.1996}$ C) $\frac{2.1995}{3.1996}$

D) $\frac{1997}{2.1996}$ E) $\frac{1996}{2.1995}$

ÇÖZÜM:

$a^2 - b^2 = (a - b).(a + b)$ özdeşliğini kullanarak,

$$A=\left[(1-\frac{1}{2}).(1-\frac{1}{3}).(1-\frac{1}{4})...(1-\frac{1}{1995}).(1-\frac{1}{1996})\right].$$

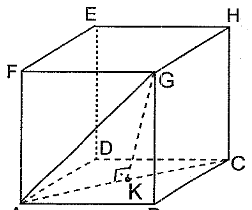
$$\left[(1+\frac{1}{2}).(1+\frac{1}{3}).(1+\frac{1}{4})...(1+\frac{1}{1995}).(1+\frac{1}{1996})\right].$$

$$A=(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{1994}{1995}.\frac{1995}{1996}).(\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}...\frac{1996}{1995}.\frac{1997}{1996})$$

den $A=\frac{1997}{2.1996}$ bulunur.

Yanıt : D

12.

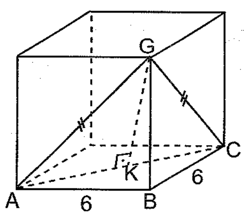


Şekildeki küpün alanı 216 cm² dir.

[AG] ve [AC] yüz köşegenleri ve $s(A\hat{K}G) = 90°$ olduğuna göre |GK| kaç cm dir?

A) $5\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{6}$ C) $6\sqrt{2}$ D) 5 E) 6

ÇÖZÜM:



$|AB| = a$ cm, $6a^2 = 216$ cm² ve $a = 6$ cm dir.

[AG] , [GC] ve [AC] yüz köşegenleri ve

$|AG| = |GC| = |AC| = 6\sqrt{2}$ dir.

GAC ikizkenar üçgen olduğundan,

$|AK| = |KC| = 3\sqrt{2}$ cm.

AKC dik üçgeninde

$|AG|^2 = |AK|^2 + |GK|^2$,

$(6\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 + |GK|^2$ den $|GK| = 3\sqrt{6}$ cm dir.

Yanıt : B

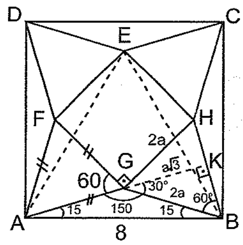
13. Bir ABCD karesinin iç bölgesinde AEB, BFC, CGD ve DHA üçgenleri, birer eşkenar üçgen olacak biçimde E, F, G, H noktaları alınıyor.

|AB| = 8 cm ise EFGH dörtgeninin alanı kaç cm² olur?

A) $128-64\sqrt{3}$ B) $80-32\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{2}$

D) $20-\sqrt{2}$ E) 16

ÇÖZÜM:



AEB, BFC,CGD ve DHA üçgenleri eşkenar olduğundan $G\overset{\Delta}{A}B \cong H\overset{\Delta}{B}C \cong E\overset{\Delta}{C}D \cong F\overset{\Delta}{D}A$ olur.

Bu durumda $A\overset{\Delta}{G}F \cong B\overset{\Delta}{G}H \cong C\overset{\Delta}{H}E \cong D\overset{\Delta}{E}F$ üçgenleri eşkenar ve EFGH karedir. $[AG \cap [BH] = \{K\}$ olsun KGB üçgeninin açıları 30°, 60° 90° olduğundan $|KB| = a$ cm, $|KG| = a\sqrt{3}$ cm dir.

AKB üçgeninde Pisagor Teoreminden,

$(2a + a\sqrt{3})^2 + a^2 = 64$ ve $4a^2 = 128 - 64\sqrt{3}$

$|EF| = 2a$ olduğundan

$A(EFGH) = 4a^2 = (128 - 64\sqrt{3})$ cm² olur.

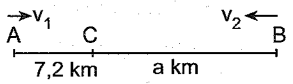
Yanıt : A

14. A ve B köylerini birleştiren bir yol vardır. İki köyde de birer traktör aynı anda karşı köye doğru hareket eder. Karşı köye ulaşan traktör 10 dakika dinlendikten sonra aynı yoldan köyüne geri döner. Traktörler bu işlem sırasında ilk kez A köyünden 7,2 km, ikinci kez de B köyünden 4 km uzaklıkta karşılaşırlar.

İki traktör de sabit hızla gittiğine göre köyler arasındaki yol kaç kilometredir?

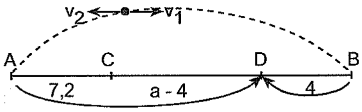
A) 22,4 B) 17,6 C) 15,2 D) 13,6 E) 11,2

ÇÖZÜM:



1. karşılaşma C de olsun. t_1 zaman sonra

karşılaşırlarsa $t_1 = \dfrac{7{,}2}{v_1} = \dfrac{a}{v_2} \Rightarrow \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{7{,}2}{a}$ dır.



Traktörler A ve B de eş zamanlı dinlendikleri için problemi etkilemez.

C'den sonra 2. karşılaşmaları için geçen süre t_2 olsun.

$t_2 = \dfrac{2.7{,}2+a-4}{v_2} = \dfrac{a+4}{v_1} \Rightarrow \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{a+4}{a+10{,}4}$ bulunur.

$\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{7{,}2}{a} = \dfrac{a+4}{a+10{,}4} \Rightarrow 25a^2 - 80a - 36.52 = 0$,

$\Rightarrow (5a+36)(5a-52) = 0$

$a = \dfrac{52}{5} = 10{,}4$ km ve

$|AB| = 10{,}4 + 7{,}2 = 17{,}6$ km dir.

Yanıt : B

15. 101 x 101 kareden oluşan kare şeklindeki bir satranç tahtasının üzerindeki bir taşı bir hamlede bulunduğu kareden bu karenin sağındaki, solundaki, üstündeki ve altındaki bitişik karelerden herhangi birine götürebiliyoruz.

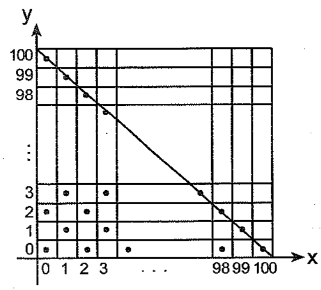
Tahtanın sol alt köşesindeki karede bulunan bir taşın tam 100 ardışık hamle sonunda ulaşabileceği karelerin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 50.51 B) 51^2 C) 25.51

D) 101 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

Taşın bulunduğu (0, 0) noktasından sonraki sağa doğru 100 adımı x ekseninde ve yukarıya doğru 100 adımı y ekseninde işaretleyelim.



1) En uzun köşegeni inceleyelim: x + y = 100 olmak üzere,

(x, y) ∈ {(100, 0) , (99, 1), ... , (1, 99), (100, 0)} noktalarına ulaşabiliriz.

2) x veya y ekseni üzerindeki 99. kareye ulaştığımızda 100. adımı atarsak 99. karede kalamayız. O halde 99. karelerin oluşturduğu köşegene ulaşamayız.

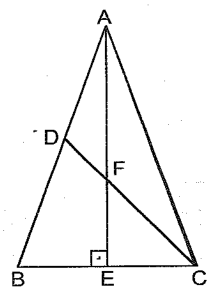
3) 99 adım sağa 1 adım sola veya 99 adım yukarı 1 adım aşağıya giderek (98, 0) veya (0, 98) karesi ve bu karelerin köşegenine ulaşabiliriz.

Sonuç olarak eksenler üzerinde A(x, y) ve x + y çift olan yarım karedeki noktalara 100 adımda ulaşabiliriz.

0, 2, 4, 6, ..., 98 ve100 sayılarının oluşturduğu köşegenlerde x = 1 + 3 + 5 + ... + 99 + 101 noktaya ulaşabiliriz. $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ olduğundan $2n - 1 = 101 \Rightarrow n = 51$ ve $x = 51^2$ bulunur.

Yanıt : B

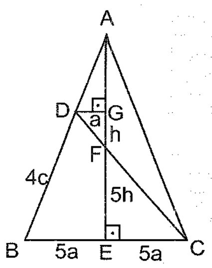
16.



Bir ABC ikizkenar üçgeninin eş kenarları [AB] ve [AC] dir. [AB] üzerinde |AB|= 5|AD| olacak biçimde bir D noktası alınarak [CD] çiziliyor. ABC üçgeninin A dan geçen [AE] yüksekliği [CD] nı F noktasında kestiğine göre $\dfrac{|AE|}{|AF|}$ kaç olur?

A) 5 B) 4 C) 3 D) $\dfrac{5}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}$

ÇÖZÜM:



$|AD| = c$,
$|AB| = 5c$ ve
$|DB| = 4c$ dir.
$[DG] \parallel [BC]$ çizersek,
$\overset{\Delta}{ADG} \sim \overset{\Delta}{ABE}$ den,
$|DG| = a$ ve
$|BE| = |EC| = 5a$ bulunur.

$\overset{\Delta}{FGD} \sim \overset{\Delta}{FEC} \Rightarrow |FG| = h$ ve $|FE| = 5h$ dir.

$\overset{\Delta}{ADG} \sim \overset{\Delta}{ABE} \Rightarrow \dfrac{|AG|}{|AG|+6h} = \dfrac{1}{5}$ den,

$|AG| = \dfrac{3h}{2}$ olur.

$\dfrac{|AE|}{|AF|} = \dfrac{\frac{3h}{2}+6h}{\frac{3h}{2}+h}$ den $\dfrac{|AE|}{|AF|} = 3$ olur.

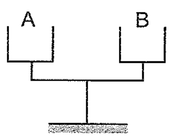
Yanıt : C

17. Elimizde 35, 21 ve 15 kg lık ağırlıklardan ikişer tane bulunuyor.

Bu ağırlıklardan istediğimiz kadarını istediğimiz kefeye koyarak çift kefeli bir terazide en çok kaç farklı pozitif ağırlığı tartabiliriz?

A) 144 B) 124 C) 100 D) 72 E) 62

ÇÖZÜM:



35, 21 ve 15 kg lık ağırlıklarından 2 şer tane var.

a, b, c sayıları –2, –1, 0, 1, 2 sayılarından herhangi biri olmak üzere

$35a + 21b + 15c = x$ kg olsun.

A kefesine koyduğumuz ağırlıkları pozitif, B kefesine koyduğumuz ağırlıkları negatif kabul edelim. A'ya koyduğumuz –1 tane ağırlık, B'ye koyduğumuz 1 tane ağırlığa karşılık gelmek üzere A'ya 35 kglık ağırlıklarından –2, –1, 0, 1, 2 tane koyabiliriz. B ve C için de bu ağırlıkları kullanabileceğimize göre bu kefeye $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ farklı ağırlık konabilir.

Pozitif ağırlıklar söz konusu olduğundan (0, 0, 0) hariç $125 - 1 = 124$ ağırlık konabilir.

Örneğin A için $2.35 + 2.21 + (-1).15 = 97$ kg, B için $2(-35) + 2(-21) + 1.15 = -97$ kg'a karşılık geldiği için, $(a, b, c) = (-a, -b, -c)$ aynı sayıda olduğundan $\dfrac{124}{2} = 62$ farklı ağırlık tartılabilir.

Yanıt : E

18. 1 den n ye kadar olan sayıların küplerinin toplamı için,
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ bağıntısı doğrudur.

1 den 101 e kadar olan tek sayıların küplerinin toplamı, yani $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 101^3$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 5201.10201 B) 2601.10201
C) 2601.5201 D) 2601^2
E) 2500.2601

ÇÖZÜM:

Verilen eşitliğe göre,

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 101^3 = (\dfrac{101.102}{2})^2$ dir.

$1^3 + 3^3 + \ldots + 101^3 + 2^3 + 4^3 + \ldots + 100^3 = (101 \cdot 51)^2$

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 101^3 = a$ dersek,

$a + 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 50^3) = (101 \cdot 51)^2$,

$a + 8 \cdot (\dfrac{50.51}{2})^2 = (101 \cdot 51)^2$

$a = 101^2 \cdot 51^2 - 8 \cdot 25^2 \cdot 51^2$,

$a = 51^2(101^2 - 8 \cdot 25^2)$

$a = 2601 \cdot 5201$ bulunur.

Yanıt : C

19. Aşağıdaki a ve b değerlerinden hangisi için 5 tabanına göre yazılımı

$(aaabbbaaabbbaaa)_5$ olan sayı 4 ile tam olarak bölünmez?

A) a = 4, b = 0 B) a = 2, b = 3
C) a = 2, b = 1 D) a = 1, b = 2
E) a = 0, b = 2

ÇÖZÜM:

Sayının 5 tabanındaki açılımı,

$A = a.5^{14} + a.5^{13} + ... + b.5^3 + a.5^2 + a.5 + a$ dır.

$5 \equiv 5^1 \equiv ... \equiv 5^{14} \equiv 1 (mod 4)$ olduğundan,

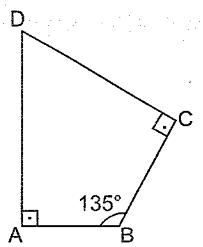
A'nın 4 ile bölümünden kalan,

$k = 9a + 6b \equiv a + 2b (mod 4)$ tür.

$a = 1$ ve $b = 2$ için $k = 1 + 2.2 = 5$ olduğundan 4 ile bölünmez.

Yanıt : D

20.



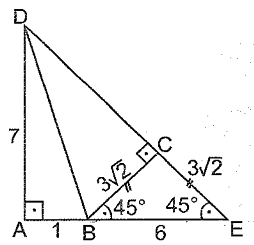
Şekildeki ABCD dörtgeninde

$s(\hat{A}) = 90°$, $s(\hat{C}) = 90°$, $s(\hat{B}) = 135°$,

$|AB| = 1$ cm, $|BC| = 3\sqrt{2}$ cm olduğuna göre $|DB|$ kaç cm dir?

A) 9 B) 8 C) $7\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

ÇÖZÜM:



$s(A\hat{B}C) = 135° \Rightarrow s(A\hat{D}C) = 45°$ olur.

$[DC \cap [AB = \{E\}$ olsun.

CBE ikizkenar dik üçgeninde,

$|CE| = |BC| = 3\sqrt{2}$ cm ve

Pisagor Teoreminden $|BE| = 6$ cm olur. DAE ikizkenar dik üçgen, $|DA| = |AE| = 7$ cm ve DAB üçgeninde $|DB|^2 = 7^2 + 1^2 \Rightarrow |DB| = 5\sqrt{2}$ cm dir.

Yanıt : D

21. $14n - 35$ sayısının 77 ile tam olarak bölünmesini ve $1 \leq n \leq 77$ koşulunu sağlayan kaç tane n tamsayısı vardır?

A) 77 B) 11 C) 7 D) 1 E) 0

ÇÖZÜM:

n tamsayı,

$14n - 35 = 7(2n - 5)$ olduğundan 7 ile tam bölünür. $77 = 7.11$ olduğundan sayının 77 ye bölünebilmesi için,

$2n - 5 \equiv 0 (mod 11)$ olmalıdır. Buradan,

$2n \equiv 5 (mod 11)$ ve $2n \equiv 5 + 11 (mod 11)$ den

$n \equiv 8 (mod 11)$ bulunur.

k tamsayı olmak üzere

$n = 11k + 8$ olmalıdır.

$1 \leq n \leq 77$ aralığında,

$k = 0 \Rightarrow n = 8$

$k = 1 \Rightarrow n = 19$

$\vdots \quad \vdots$

$k = 6 \Rightarrow n = 74$ olmak üzere 7 tane n tamsayısı vardır.

Yanıt : C

KLASİK SORULAR

1. Bir torbada başlangıçta a tanesi kırmızı, b tanesi beyaz ve c tanesi de siyah olmak üzere toplam 20 top bulunmaktadır.

a) Beyaz topların sayısı iki katına çıkarıldıktan sonra torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olması olasılığının, başlangıçtaki torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılığından $\frac{1}{25}$ daha az olduğu ve

b) torbadaki bütün kırmızı toplar çıkarılıp geri kalanlar arasında rastgele bir top çekildiğinde, bu topun beyaz olma olasılığının, aynı çekişin başlangıçtaki torbadan yapıldığı durumdakinden $\frac{1}{16}$ daha fazla olduğu bilinmektedir.

a, b ve c yi bulunuz.

ÇÖZÜM:

Başlangıçta:

a kırmızı b beyaz c siyah	$a + b + c = 20$

a)

a kırmızı 2b beyaz c siyah

$a+2b+c=20+b$

b)

b beyaz c siyah

$b+c=20-a$

a) $\dfrac{a}{20}-\dfrac{a}{20+b}=\dfrac{1}{25}$,

b) $\dfrac{b}{20-a}-\dfrac{b}{20}=\dfrac{1}{16}$ bulunur.

Bu iki eşitlik düzenlenerek,

$b(5a-4) = 80$ ve $a(4b+5) = 100$ bulunur.

Buradan $a=4$, $b = 5$, $c = 11$ bulunur.

2. Yalnızca 1, 6 ve 9 rakamları kullanarak yazılan pozitif tam sayıları 1, 6, 9, 11, 16, ... diye küçükten büyüğe doğru dizelim.

a) 1996 nın bu dizinin kaçıncı terimi olduğunu bulunuz.

b) Bu dizinin 1996 ıncı terimini bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) Bir basamaklı 1, 6, 9 olmak üzere 3 sayı, iki basamaklı 11, 16, 19, 61, 66, 69, 91, 96, 99 olmak üzere 3^2 sayı, üç basamaklı 3^3 sayı ve n basamaklı 3^n sayı yazılır. Bu dizide 999'a kadar $3+9+27=39$ sayı vardır. Dört basamaklı $3^4=81$ tane sayının 27 si 1 ile 27'si 6 ile 27'si 9 ile başlar, 1999 sayısı 1 ile başlayanların sonuncusu ve 1996 ise 26 ıncısıdır.

O halde 1996 sayısı bu dizinin $39+26=65$ inci terimidir.

b) $3+3^2+...+3^n < 1996$ eşitsizliğinde $n = 6$ iken $3+3^2+...+3^6 = 1092$ ve $1092 < 1996$ olduğundan 1996. terim 7 basamaklıdır.

$1996-1092=904$, $3^6=729$ ve $3^7=3.3^6$ olduğundan 904 terimden ilk 729 tanesi 1 ile başlar. $904-729=175$ olduğundan 1996. terim ikinci dilimdedir. Yedinci basamak 6 dır.

$3^6= 3.3^5=3.243$ ve $175<243$ oluduğundan altıncı basamak 1 dir. Aynı düşünceyle,

$3^5=3.3^4$ ve $2.81=162<175$ olduğundan beşinci basamak üçüncü dilimde ve 9 dur.

$175-162=13$, $3^4=3.3^3$ ve $13<3^3$ olduğundan dördüncü basamak 1 dir.

13 sayısı için $3<3^2<3^3$ ve $3^2<13<3^3$ olduğundan ikinci dilimdedir. Üçüncü basamak 6 dır.

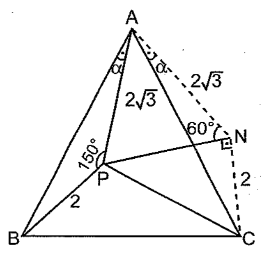
$13-9=4$ ve $3<4<3^2$ olduğundan ikinci dilimdedir. İkinci basamak 6 dır.

$4-3=1$ olduğundan birler basamağı 1 dir.

Bu durumda 1996. terim 6191661 sayısıdır.

3. Bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesinde m(APB) =150°, |AP|= $2\sqrt{3}$ cm ve |BP|=2 cm olacak biçimde bir P noktası alınıyor. |PC| yi bulunuz.

ÇÖZÜM:



N noktası üçgenin dışında olmak üzere,

$\overset{\Delta}{ANC} \cong \overset{\Delta}{APB}$ çizelim. $m(\widehat{PAC})+m(\widehat{CAN})=60°$,

$|AP| = |AN| = 2\sqrt{3}$ cm olduğundan APN üçgeni eşkenar ve $|PN| = 2\sqrt{3}$ dür.

$m(\widehat{ANC}) = m(\widehat{APB}) = 150°$, $m(\overset{\Delta}{ANP}) = 60°$

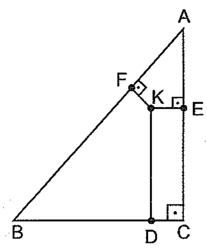
olduğundan, $m(P\overset{\Delta}{N}C) = 150° - 60° = 90°$ dir.

PNC üçgeninde Pisagor Teoreminden,

$|PC|^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2$ ve $|PC| = 4$ cm bulunur.

10. sınıf

1.



Şekildeki ABC dik üçgeninin kenarlarına K noktasından indirilen dikmelerin ayakları D, E, F dir.

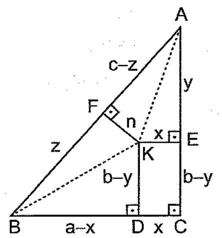
$|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$,

$|CD| = x$, $|AE| = y$, $|BF| = z$ ise,

$ax + by + cz$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2ab B) ab C) a^2 D) b^2 E) c^2

ÇÖZÜM:



Hipotenüsleri [AK] ve [BK] olan dik üçgenlerde Pisagor bağıntıları ile,

$x^2+y^2=n^2+(c-z)^2$

$(a-x)^2+(b-y)^2=n^2+z^2$ yazılır ve taraf tarafa çıkarılırsa,

$a^2+b^2+c^2=2ax+2by+2cz$ ve $a^2+b^2=c^2$ olduğundan $ax+by+cz=c^2$ bulunur.

Yanıt : E

2. x ve y tamsayı olmak üzere, $x^2 - y^2 = 1996$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) sıralı ikilisi vardır?

A) 12 B) 6 C) 4 D) 0 E) Sonsuz sayıda

ÇÖZÜM:

$1996 = 2.2.499$ ve 499 asal sayıdır.

$x^2 - y^2=1996 \Rightarrow (x-y)(x+y)=1996$ dır.

Genel olarak $x-y=a$ ve

$x+y=b$ den $x=\dfrac{a+b}{2}$ olacağından a ve b çift olmalıdır.

$x - y = \mp 2$, $x+y=\mp 998$ eşitliklerinden,

(500, 498) ve (–500, –498) ikilileri bulunur.

$x-y=\mp 998$

$x+y=\mp 2$ eşitliklerinden,

(500, –498) ve (–500, 498) ikilileri bulunur.

Yanıt : C

3. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denkleminin iki kökü $u \neq 0$ olmak üzere, $x = u$ ve $x = -u$ ise, katsayılar arasında aşağıdaki bağıntılardan hangisi her zaman doğrudur?

A) $c^2 - abc + a^2d = 0$
B) $a + b + c + d = 0$
C) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
D) $ab > cd$
E) $ad = bc$

ÇÖZÜM:

$x=u$ yazarak $u^4+au^3+bu^2+cu+d=0$, (1) ve

$x=-u$ yazarak $u^4-au^3+bu^2-cu+d=0$, (2) bulunur.

(1) ve (2) toplanarak $u^4+bu^2+d=0$, (3) ve

(1) ve (2) çıkarılarak $au^3+cu=0$ bulunur.

$u \neq 0$ olduğundan $au^2+c=0$ ve $u^2=-\dfrac{c}{a}$ dır.

(3) de $u^2=-\dfrac{c}{a}$ yazılarak,

$\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{bc}{a}+d=0$ ve payda eşitlenerek,

$c^2-abc+a^2d=0$ bulunur.

Yanıt : A

4. {1, 2, 3,...,99, 100} kümesinden herhangi ikisinin farkı 7 olmayacak şekilde en çok kaç eleman seçilebilir?

A) 53 B) 52 C) 51 D) 50 E) 49

ÇÖZÜM:

Herhangi iki elemanın farkı 7 den büyük olan en küçük tamsayı 8 dir. Fark 9 veya daha büyük olursa seçilebilecek elaman sayısı azalır. Bu durumda uygun olan tamsayılar;

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {15, 16, 17, 18, 19, 20, 21}, ...{a, b, c, d, e, f, g} kümelerinin elemanları olmalıdır. Bu kümelerin son elemanları;

$k \in \{1, 3, 5,...,(2k-1),...\}$ olmak üzere;

7=1.7 , 21=3.7 , 35=5.7, ..., g=(2k-1).7 dir.

100 den küçük ve 7 ile bölünebilen en büyük sayı g=91 olduğundan (2k-1).7=91 eşitliğinden k=7 bulunur.

O halde bu kümelerde7.7=49 tane eleman bulunur. 91+8=99 olduğundan, {99, 100} kümesinin elemanları ile birlikte 49+2=51 eleman seçilebilir.

Yanıt : C

5. n'nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için, $\sum_{i=1}^{4} i^n$ sayısı 5 ile bölünmez?

A) 241 B) 240 C) 239 D) 238 E) 237

ÇÖZÜM:

$\sum_{i=1}^{4} i^n = 1+2^n+3^n+4^n$ dir.

$2^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan;

$2^{4k} \equiv 1 \pmod 5$, $2^{4k+1} \equiv 2 \pmod 5$,

$2^{4k+2} \equiv 4 \pmod 5$, $2^{4k+3} \equiv 3 \pmod 5$.

$3^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan;

$3^{4k} \equiv 1 \pmod 5$, $3^{4k+1} \equiv 3 \pmod 5$,

$3^{4k+2} \equiv 4 \pmod 5$, $3^{4k+3} \equiv 2 \pmod 5$.

$4^2 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan;

$4^{4k} \equiv 1 \pmod 5$, $2^{4k+1} \equiv 4 \pmod 5$,

$4^{4k+2} \equiv 1 \pmod 5$, $2^{4k+3} \equiv 4 \pmod 5$.

$\sum_{i=1}^{4} i^n$ toplamının 5 ile bölümünden kalanların toplamına T dersek,

n=4k için T=1+1+1+1=4 sayısı 5 ile bölünmez.

n=4k+1 için T=1+2+3+4=10 sayısı 5 ile bölünür.

n=4k+2 için T=1+4+4+1=10 sayısı 5 ile bölünür.

n=4k+3 için T=1+2+3+4=10 sayısı 5 ile bölünür.

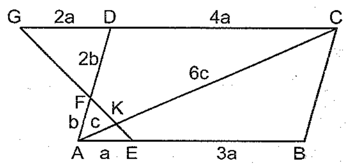
O halde seçeneklerden 240=4k olduğundan n=240 için, $\sum_{i=1}^{4} i^n$ sayısı 5 ile bölünmez.

Yanıt : B

6. Bir ABCD paralelkenarının [AB] kenarı üzerinde 3|AE|=|EB| ve [AD] kenarı üzerinde, 2|AF|=|FD| olacak biçiminde E ve F noktaları alınıyor. $[EF] \cap [AC] = \{K\}$ ise, $\frac{|AC|}{|AK|}$ kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

ÇÖZÜM:



$[EF \cap [CD = \{G\}$ olsun.

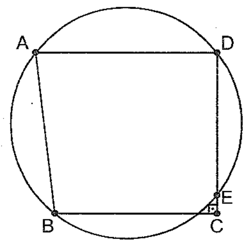
$\overset{\triangle}{FAE} \sim \overset{\triangle}{FDG}$ den $|GD| = 2a$ olur.

$\overset{\triangle}{KAE} \sim \overset{\triangle}{KCG}$ den, $\frac{|KA|}{|KC|} = \frac{1}{6}$ ve

$\frac{|AC|}{|AK|} = \frac{7c}{c} = 7$ olur.

Yanıt : A

7.



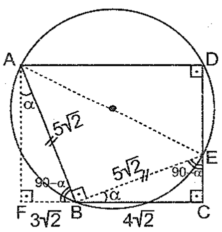
Şekildeki ABCD yamuğunda $m(\hat{C}) = m(\hat{D}) = 90°$ dir. D, A, B noktalarından geçen ve yarıçapı 5 olan çemberin [DC] kenarını D dışında kestiği ikinci nokta E olmak üzere,

$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BE})$ ve $|CE| = 3\sqrt{2}$ ise, |AD| kaçtır?

A) $5\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{5}$

D) $7\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

ÇÖZÜM:



[AE] çap ve |AE|=10, $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BE})$ olduğundan, $|AB| = |BE| = 5\sqrt{2}$ olur.

EBC üçgeninde Pisagor Teoreminden,

$|BC| = 4\sqrt{2}$ bulunur.

$[CB \perp [AF]$ çizelim. $\overset{\Delta}{AFB} \sim \overset{\Delta}{BCE}$ (A.K.A) olduğundan $|FB| = 3\sqrt{2}$ olur.

AFCD dikdörtgeninde $|FC| = |AD| = 7\sqrt{2}$ bulunur

Yanıt : D

8. $x^2-10x-14 = 2\sqrt{x^2-10x+1}$ eşitliğini sağlayan tüm x gerçel sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 20 B) 10 C) −9 D) −20 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

$(x^2-10x+1)-15 = 2\sqrt{x^2-10x+1}$ ve $x^2-10x+1 = t$ dersek, $t-15 = 2\sqrt{t}$ olur.

Kare alarak;

$t^2-34t+225=0$ bulunur.Çarpanlara ayırarak,

$(t-9)(t-25)=0$ ve t=9, t=25 bulunur.

$t-15 = 2\sqrt{t}$ eşitliğinde t=9 yazarsak $-6 \neq 6$ olur.

Aynı eşitlik t=25 için sağlanır.

$x^2-10x+1=25$ denklemi çözülüse $x^2-10x-24=0$,

$(x-12)(x+2)=0$ ve $x_1=12$, $x_2=-2$ den $x_1+x_2=10$ olur.

Yanıt : B

9. 3 kırmızı, 3 mavi, 3 yeşil top rasgele sıralandığında, en az iki kırmızı topun yan yana gelme olasılığı nedir?

A) $\frac{8}{12}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{6}{12}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{4}{12}$

ÇÖZÜM:

En az iki kırmızının yanyana olması, üç kırmızının yanyana olma durumunu da kapsar. Olumsuz durum, kırmızı topların diğer topların arasında veya dışında birer birer sıralanışıdır.

Bu durumu bulalım:

3 mavi ve 3 yeşil top tekrarlı permütasyonla

$\frac{6!}{3!.3!}$ sayıda sıralanır.

Bunlardan biri □M□K□K□M□K□M□ olsun. □ işaretlerinin bulunduğu 7 yere 3 kırmızı top $\binom{7}{3}$ sayıda sıralanır. Tüm topların sıralanışı da yine tekrarlı permütasyonla $\frac{9!}{3!.3!.3!}$ sayıdadır.

İstenilen olasılık P(A)=1−P(A') den

$$P(A) = 1 - \frac{\frac{6!}{3!.3!}\cdot\binom{7}{3}}{\frac{9!}{3!.3!.3!}} = \frac{7}{12}$$ bulunur.

Yanıt : B

10. p ve q farklı asal sayılar, a ve b farklı pozitif tamsayılar ve $n=p^a.q^b$ olmak üzere, n^2 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 81 ise, n^3 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı kaçtır?

A) 169 B) 160 C) 117 D) 84 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

$n^2=p^{2a}.q^{2b}$ dir. Pozitif bölenlerin sayısı üslerin birer fazlalarının çarpımı olduğundan ;

$(2a+1)(2b+1)=81$ dir.

$a \neq b$ olduğundan a ve b, 4 olmaz.

$2a+1=3$ ve $2b+1=27$ için $a=1$ ve $b=13$ bulunur.

$n=p.q^{13}$ den $n^3=p^3.q^{39}$ ve n^3 ün pozitif bölenlerinin sayısı $x=(3+1)(39+1)$ den,

$x=160$ bulunur.

Yanıt : B

11. $\sum_{n=1}^{9} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{293}{52}$ B) $\frac{189}{110}$ C) $\frac{179}{120}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{12}$

ÇÖZÜM:

$\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$ yazarak basit kesirlere ayıralım.

Sağ tarafta payda eşitleyip polinom eşitliğini uygularsak;

$(A+B+C)n^2+(3A+2B+C)n+2A=3n+2$ den

$A+B+C=0$, $3A+2B+C=3$ ve $2A=2$ olur.

Buradan $A=1$, $B=1$, $C=-2$ bulunur.

$A=\sum_{n=1}^{9}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}\right)$ de n için 1, 2,...,9 değerlerini alt alta yazıp toplarsak,

n=1 için; $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$

n=2 için; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}$

n=3 için; $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

n=4 için; $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}$

$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

n=8 için; $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{2}{10}$

n=9 için; $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{2}{11}$

+

$A=2-\frac{1}{10}-\frac{2}{11}$ den $A=\frac{189}{110}$ bulunur.

Yanıt : B

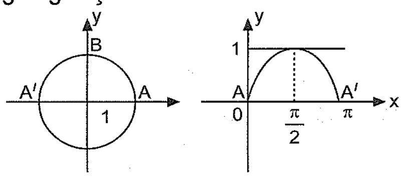
12. $\sin x=\frac{x}{22}$ denkleminin gerçel çözümlerinin sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 17 B) 15 C) 14 D) 9 E) 7

ÇÖZÜM:

$y=\sin x=\frac{x}{22}$ olsun.

Birim çemberi ve $[0, \pi]$ aralığında $y=\sin x$'in grafiğini çizelim.

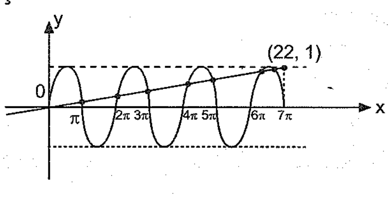


Birim çemberde $(0, \pi)$ aralığındaki yayın uzunluğu,

$|\widehat{ABA'}|=|AA'|=\pi \cong 3,14 \cong \frac{22}{7}$ birim ve

$22 \cong 7\pi$ dir.

$[0, 7\pi]$ aralığında $y=\sin x$ ve $y=\frac{x}{22}$ grafiklerini çizelim.



Bu iki grafik y ekseninin sağında 7 noktada kesişir. Grafikler orijine göre simetrik olduğundan y ekseninin solunda da 7 noktada kesişirler. (0, 0) noktası ile birlikte denklemin gerçek çözümlerinin sayısı 7+7+1=15 dir.

Yanıt : B

13. $1 \le a \le 100$ olmak üzere, $a^{60} \equiv 1 \pmod{77}$ bağıntısını sağlayan kaç tane a tamsayısı vardır?

A) 79 B) 78 C) 77 D) 76 E) 75

ÇÖZÜM:

Fermat teoreminden,

a ile 7 aralarında asal ise;

$a^6 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow a^{60} \equiv 1 \pmod 7$ ve

a ile 11 aralarında asal ise;

$a^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow a^{60} \equiv 1 \pmod{11}$

eşitliklerinden $a^{60} \equiv 1 \pmod{77}$ bulunur.

O halde $1 \le a \le 100$ aralığında 7 veya 11 ile aralarında asal olan a tamsayılarını bulmalıyız.

7 ile bölünen; $100 \div 7$: bölüm 14, kalan 2

11 ile bölünen; $100 \div 11$: bölüm 9, kalan 1

77 ile bölünen; $100 \div 77$: bölüm 1, kalan 23

14+9−1=22 tamsayı için $a^{60} \not\equiv 1 \pmod{77}$ olduğundan denkliği sağlayan 100−22=78 tane tamsayı vardır.

Yanıt : B

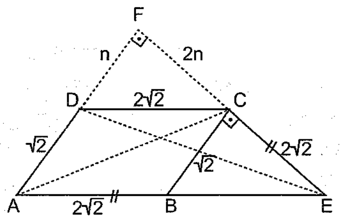
14. $m(\hat{A}) < 90°$ olan bir ABCD paralelkenarının [BC] kenarına C noktasından çıkılan dikmenin AB doğrusunu kestiği nokta E olmak üzere, $|AB| = |CE| = 2|BC| = 2\sqrt{2}$ ise, $|AC|^2 + |DE|^2$ kaçtır?

A) $8\sqrt{5}+26$ B) $4\sqrt{10}+26$

C) $4\sqrt{5}+16$ D) $2\sqrt{10}+16$

E) $2\sqrt{2}+26$

ÇÖZÜM:



$[AD \cap [EC = \{F\}$ olsun.

$\overset{\triangle}{FDC} \sim \overset{\triangle}{CBE}$ den $|FD| = n$ ve $|FC| = 2n$ olur.

Pisagor'dan $5n^2 = 8$ ve $n = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ dir.

$\overset{\triangle}{FAC}$ ve $\overset{\triangle}{FDE}$ Pisagor bağıntılarından;

$$|AC|^2 = 4n^2 + (n+\sqrt{2})^2$$
$$+ \ |DE|^2 = n^2 + (2n+2\sqrt{2})^2$$

$|AC|^2 + |DE|^2 = 5n^2 + 5(n+\sqrt{2})^2$ den,

$|AC|^2 + |DE|^2 = 10n^2 + 10\sqrt{2}n + 10$,

$5n^2 = 8$ ve $n = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ yazarak;

$|AC|^2 + |DE|^2 = 16 + 10 + 10\sqrt{2}.\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ den,

$|AC|^2 + |DE|^2 = 26 + 8\sqrt{5}$ bulunur.

Yanıt : A

15. Ahmet yalnızca 2, 3, 4 rakamlarından oluşan 13 basamaklı bir sayı tutuyor. Betül n sayıdan oluşan bir liste hazırlıyor. Bu sayılardan birinin en az 5 basamağı Ahmet'in tuttuğu sayının karşılık gelen basamakları ile çakışıyorsa Betül oyunu kazanıyor. Ahmet'in tuttuğu sayı ne olursa olsun Betül'ün oyunu kazanması için n en az kaç olmalıdır?

A) 13 B) 5 C) 4 D) 3 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

Betül en az 13'er basamaklı;

22...2, 33...3 ve 44...4 sayılarından oluşan 3 liste hazırlarsa Ahmet'in tuttuğu sayı ne olursa olsun oyunu kazanır. Zira Ahmet'in tuttuğu sayı 4 tane 2; 4 tane 3, 4 tane 4 den ve a dan oluşan 222233334444a sayısı olsun, a sayısı 2, 3 veya 4 olmalıdır. Bu durumda 2, 3 veya 4 den herhangi biri bu sayıda en az 5 kez kullanılmıştır.

Yanıt : D

16. $1^{1!}+2^{2!}+\ldots+13^{13!}$ sayısı 13 ile bölündüğünde kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

Fermat toremi:

m asal sayı, a ve m aralarında asal iki sayı ise $a^{m-1}\equiv 1$ (mod m) dir.

$1^{1!}+2^{2!}+3^{3!}+4^{4!}+\ldots+12^{12!}+13^{13!}\equiv x$ (mod 13) eşitliğinde a ve 13 aralarında asal olmak üzere, $a^{12}\equiv 1$ (mod 13) özelliğinden yararlanmalıyız.

4!, 5!,...,12! sayıları 12 ile bölünür, ayrıca 13 sayısı 4, 5,...,12 ile aralarında asal olur.

$4^{12}\equiv 1$(mod 13) ve $4^{4!}\equiv(4^{12})^2\equiv 1$(mod 13),

$5^{12}\equiv 1$(mod 13) ve $5^{5!}\equiv(5^{12})^{2.5}\equiv 1$(mod 13),

$\vdots$

$12^{12}\equiv 1$(mod 13) ve $12^{12!}\equiv(12^{12})^{11!}\equiv 1$(mod 13) olur.

Ayrıca $1^{1!}\equiv 1$ (mod 13) ve $2^{2!}\equiv 4$(mod 13),

$3^{3!}\equiv 1$ (mod 13) ve $13^{13!}\equiv 0$ (mod 13) olur.

Toplamı 1+4+10+0≡2 (mod 13) olur.

Yanıt : B

17. Aşağıdaki p asal sayılarından hangisi için, $x^2+x+1\equiv 0$ (mod p) denkliğinin en az bir tamsayı çözümü vardır?

A) 653 B) 647 C) 641 D) 617 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

$$\begin{array}{rl} & x^2+x+1\equiv 0 \pmod p \\ \times & x-1\equiv x-1 \pmod p \\ \hline & x^3-1\equiv 0 \pmod p \end{array}$$

den $x^3\equiv 1$ (mod p) bulunur.

Bilgi: ***Fermat teoremi:***

p asal sayı, p ve a aralarında asal sayılar olmak üzere;

$a^{p-1}\equiv 1$ (mod p) dir.

Buna göre $x^3\equiv 1$ (mod p) $\Rightarrow x^{3n}\equiv 1$ (mod p) dir.

$x^{p-1}\equiv 1$ (mod p) den p−1=3n olmalıdır.

Seçenelerde verilen 653, 647, 641, 617 asal sayılarından hiçbirinin 1 eksiği 3'ün katı olmadığından denklik bu sayılar için sağlanmaz.

Yanıt : E

18. Üçer kişilik üç aileden oluşan dokuz kişi, üç odaya, her birine üç kişi olmak üzere, rasgele girerler. Tam olarak bir ailenin bireylerinin aynı odaya girmiş olması ve diğer iki odadan hiçbirinde tam bir ailenin bulunmaması olasılığı nedir?

A) $\frac{27}{140}$ B) $\frac{3}{28}$ C) $\frac{27}{280}$ D) $\frac{9}{140}$ E) $\frac{3}{7}$

ÇÖZÜM:

9 kişinin 3 odaya 3'er kişi olmak üzere koşulsuz yerleşmeleri sayısı,

$s(E)=\binom{9}{3}.\binom{6}{3}.\binom{3}{3}$ dür.

1. odaya A ailesi yerleşmiş olsun. Bu durumda diğer iki odaya, diğer iki ailedeki 6 kişinin tüm yerleşim durumları $\binom{6}{3}.\binom{3}{3}$ sayıdadır. Bu sayıdan diğer iki odaya, iki ailenin tam olarak yerleşmeleri durumu olan $\binom{3}{3}.2$ sayısını çıkarırsak istenen durumlardan ilki, $\binom{6}{3}.\binom{3}{3}-\binom{3}{3}.2=18$ bulunur.

A ailesi ilk anda 3 odadan birine yerleşebileceğinden s(A)=18.3 olur. Bu durum B ve C aileleri için de aynı sayıda olacağından s(B)=s(C)=18.3 olur.

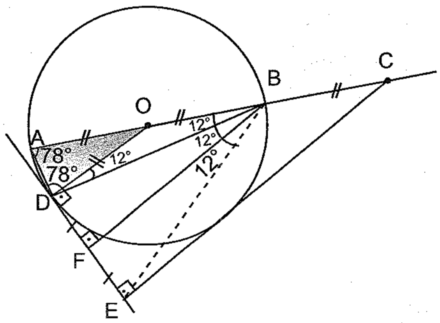
İstenen olasılık $P(x)=\dfrac{(18.3).3}{\binom{9}{3}.\binom{6}{3}.\binom{3}{3}}=\dfrac{27}{280}$ olur.

Yanıt : C

19. Bir [AX ışını üzerinde |AO|=|OB|=|BC| olacak biçimde sıra ile O, B, C noktaları alınarak O merkezli, [AB] çaplı çember ve çember üzerinde $m(\widehat{BAD}) = 78°$ koşulunu sağlayan D noktasından bu çembere bir teğet çiziliyor. C noktasından bu teğete indirilen dikmenin ayağı E ise, EBC açısı kaç derecedir?

A) 146 B) 144 C) 142 D) 140 E) 138

ÇÖZÜM:



$\overset{\Delta}{OAD}$ ikizkenar olduğundan;

$m(\widehat{OAD}) = m(\widehat{ODA}) = 78°$, $m(\widehat{ADB}) = 90°$ olduğundan, $m(\widehat{ODB}) = m(\widehat{OBD}) = 12°$ dir.

[BF]⊥[DE] çizelim.

|OB|=|BC| olduğundan, |DF|=|FE| ve [BF]⊥[DE] olduğundan BDE ikizkenar üçgendir.

$m(\widehat{DBF}) = m(\widehat{ODB}) = 12°$ (iç ters) ve

$m(\widehat{FBE}) = 12°$ dir.

O halde $m(\widehat{CBE}) = 180° - 36° = 144°$ bulunur.

Yanıt : B

20. x, y gerçel sayıları için $x^2+y^2=6$ ve $x^3+y^3=14$ ise, x^4+y^4 toplamının alabileceği değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {17} B) {3, 4} C) $\{17, 10\sqrt{15}-22\}$
D) $\{34, 20\sqrt{15}-44\}$ E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

$x^2+y^2=6$ ise $(x+y)^2-2xy=6$,

$x^3+y^3=14$ ise $(x+y)(x^2+y^2-xy)=14$ ve

$(x+y)(6-xy)=14$ olur. x + y = a ve x . y = b olsun.

$a^2-2b=6$, $a(6-b)=14$ den

$a^3-18a+28=0$ denklemi elde edilir.

$(a-2)(a^2+2a-14)=0$ den $a=2$,

$a=1-\sqrt{15}$, $a=1+\sqrt{15}$ bulunur.

$a=2$ ise $b=-1$,

$a=1-\sqrt{15}$ ise $b=5-\sqrt{15}$,

$a=1+\sqrt{15}$ ise $b=5+\sqrt{15}$ olur.

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$,

$x^4+y^4=36-2b^2$ eşitliğinde,

$b=-1$ ise $x^4+y^4=34$ olur.

$b=5-\sqrt{15}$ ise $x^4+y^4=20\sqrt{15}-44$

$b=5+\sqrt{15}$ ise $x^4+y^4=-44-20\sqrt{15}<0$ dır.

x ve y gerçel sayıları için x^4+y^4 toplamı negatif olamayacağından x^4+y^4 ün alabileceği değerler kümesi,

$\{34, 20\sqrt{15}-44\}$ dür.

Yanıt : D

21. a_n ile $\sqrt{n}$ ye en yakın olan tamsayıyı gösterelim. $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{2070}}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 93 B) 92 C) 91 D) 90 E) 89

ÇÖZÜM:

$\sqrt{n}$ ye en yakın olan tamsayı a olsun. Bu durumda $a-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<a+\frac{1}{2}$ olur. Kare alarak

$a^2-a+\frac{1}{4}<n<a^2+a+\frac{1}{4}$ bulunur.

a ve n birer tamsayı olduğundan bu eşitsizlik,

$a^2-a<n\leq a^2+a$ şeklinde yazılabilir.

Bu durumda, bu aralıkta $a^2+a-(a^2-a)=2a$ tane n değeri yani 2a tane a değeri vardır.

$T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{2070}}$ toplamında

$\sqrt{2070}\cong 45,4972$ ise $a_{2070}=45$ ve

$\sqrt{2071}\cong 45,5082$ ise $a_{2071}=46$ olur.

O halde $T=2.\frac{1}{1}+4.\frac{1}{2}+...+90.\frac{1}{45}$

$T=\underbrace{2+2+...+2}_{45\text{tane}}=2.45=90$ olur.

Yanıt : D

22. 1, 4, 7, . . . , 100 aritmetik dizisine ait terimlerden 19 tanesini, bunlardan herhangi farklı ikisinin toplamı n'ye eşit olmayacak biçimde seçmemizi aşağıdaki n sayılarından hangisi mümkün kılar?

A) 110 B) 107 C) 104 D) 101 E) 98

ÇÖZÜM:

1, 4, 7, 10,...,100 aritmetik dizisini ve 110 sayısını ele alalım. Bu dizide, $\frac{100-1}{3}+1=34$ terim vardır. Dizide 109, 106, 103 terimleri olmadığından ve 55 sayısı bir tane olduğundan, toplamları 110 olan; (1, 109), (4, 106); (7, 103), (55, 55) dışında 34–4=30 tane, toplamları 110 olan (10, 100), (13, 97),...,(52, 58) ikilisi vardır.

Bu 30 tane (a, b)ikilisinin, a ya da b elemanlarından yalnız birini seçerek elde edeceğimiz 15 elemanlı küme ile, {1, 4, 7, 55} kümesinin elemanlarının birleşimi olan küme, 15+4=19 elemanlıdır. Bu 19 elemanlı kümenin herhangi iki elemanının toplamı 110 olmaz.

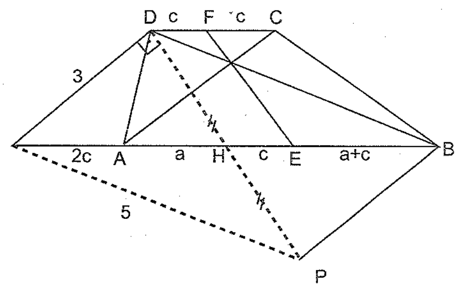
107 sayısını düşünelim. Dizide toplamları 107, olan, (1, 106) ve (4, 103) olmadığından, toplamları 107 olan 32 tane (7, 100), (10, 97),..., (52, 55) ikilisi vardır. Bunların yalnızca birer elemanı ve {1, 4} kümesinin elemanlarını alarak 16+2=18 elamanlı kümenin herhangi iki elemanın toplamı 107 olmaz. Yani n≠19 olur. Benzer biçimde; 104, 101, 98 sayıları için n≠19 bulunur.

Yanıt : A

23. [AB] ve [DC] kenarları paralel olan bir ABCD yamuğunun köşegenlerinin uzunlukları |AC|= 3, |BD|= 5 tir. [AB] ve [DC] kenarlarının orta noktaları arasındaki uzaklık 2 ise, bu yamuğun alanı kaçtır?

A) 8 B) 15/2 C) 7 D) 6 E) 11/2

ÇÖZÜM:



ABCD yamuğunda [AB]//[DC], |AC|=3, |BD|=5, E ve F , [AB] ve [CD]'nin orta noktaları olmak üzere |EF|=2 dir.

[DG]//[AC]çizerek GACD paralelkenarını ve [DP]//[FE] çizerek HEFD parelelkenarını oluşturalım.

|DH|=|HP|=2 alalım.

|DH|=|HP|=2 ve |HG|=|HB|=a+2c olduğundan GPBD paralelkenar, |DG|=|AC|=3, |DP|=4

|GP|=|BD|=5 olduğundan $M(\widehat{GDP})=90°$

ve Alan(GPBD) = 3 . 4 = 12 birimkaredir.

A(DCB) = A(DAG) olduğundan,

Alan(ABCD) = Alan(DGB) = $\frac{12}{2}=6$ birimkaredir.

Yanıt : D

24. Elimizde 50'si beyaz, 50'si siyah olmak üzere toplam 100 top var. Bunların tamamını her torbada en az bir top bulunacak şekilde iki torbaya dağıtıyoruz. Bu torbalardan birini rasgele seçerek, içinden yine rasgele bir top çekiyoruz. Birinci torbadaki beyaz top sayısını x, siyah top sayısını da y ile gösterelim. Tüm dağılımlar arasında, çekilen topun beyaz olması olasılığını en büyük yapan (x, y) sıralı ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (50, 0) B) (49, 48) C) (25, 25) D) (1, 2) E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

Elimizde 50 beyaz 50 siyah top ve iki torba var. Birinci torbadaki beyaz top sayısını x, siyah top sayısını y ile göstererek torbalardan birini rasgele seçerek içinden bir top çekiyoruz. Beyaz olma olasılığını en büyük yapan ikili (x, y) için seçenekleri inceleyelim.

A) $\text{I} \to (50, 0)$

$\text{II} \to (0, 50)$ ise, $P(B) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.0 = \frac{1}{2}$

B) $\text{I} \to (49, 48)$

$\text{II} \to (1, 2)$ ise, $P(B) = \frac{1}{2}.\frac{49}{97} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{122}{291}$

C) $\text{I} \to (25, 25)$

$\text{II} \to (25, 25)$ ise $P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

D) $\text{I} \to (1, 2)$

$\text{II} \to (49, 48)$ ise B seçeneği gibi $P(B) = \frac{122}{291}$

Eğer $\text{I} \to (1, 0)$, $\text{II} \to (49, 50)$ olursa,

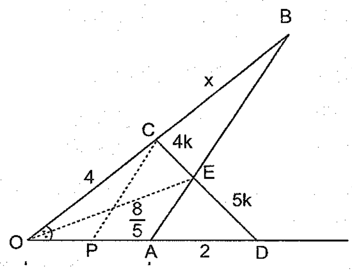
$P(B) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.\frac{49}{99} = \frac{74}{99}$ olasılığı en büyüktür.

Yanıt : E

25. Bir $X\hat{O}Y$ açısının OX kenarı üzerinden |OA|=3, |OD|= 5 olacak biçimde alınan A ve D noktaları, OY kenarı üzerinde de |OC|= 4 ve |OB|> 4 olacak biçimde alınan C ve B noktaları için $[AB] \cap [DC] = \{E\}$ ve |AE|.|OB|= 3|EB| ise, |OB| kaçtır?

A) $\frac{60}{7}$ B) $\frac{55}{6}$ C) $\frac{19}{4}$ D) 8 E) 6

ÇÖZÜM:



|AE| . |OB| = 3 . |EB| veriliyor. 3 = |OA| yazarak |AE| . |OB| = |OA| . |EB| ve buradan,

$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|OA|}{|OB|}$ eşitliği, BOA üçgeninde [OE] nin iç açıortay olduğunu gösterir.

COD üçgeninde, [CE] açıortay olduğundan,

$\frac{|DE|}{|EC|} = \frac{5}{4}$ dür.

[CP] // [BA] çizerek, $\frac{|PA|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|ED|}$ den,

$\frac{|PA|}{2} = \frac{4}{5}$ ve $|PA| = \frac{8}{5}$ bulunur. BOA ve COP üçgenlerinde temel orantı teoremi ile,

$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|CB|}{|PA|} \Rightarrow \frac{4+x}{3} = \frac{x}{\frac{8}{5}}$ den, $x = \frac{32}{7}$ ve

$|OB| = 4 + \frac{32}{7} = \frac{60}{7}$ bulunur.

Yanıt : A

26. m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $n + (n + 1) + \ldots + (n + m) = 1000$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) sıralı ikilisi vardır?

A) 10 B) 5 C) 3 D) 2 E) 1

ÇÖZÜM:

m, n pozitif tamsayılar,

$n + (n + 1) + \ldots + (n + m) = 1000,$

$(m + 1) \cdot n + 1 + 2 + \ldots + m = 1000$

$(m + 1) \cdot n + \dfrac{m(m+1)}{2} = 1000$ den,

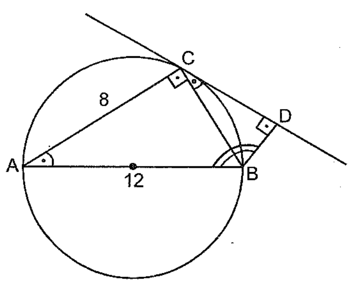
$(m + 1)(m + 2n) = 2000$ bulunur. $m + 1$ tek ise $m + 2n$ çift ya da $m + 1$ çiftse, $m + 2n$ tek olmalıdır. $n \geq 1$ olduğundan, $m + 2n > m + 1$ dir. $2000 = 5^3 . 2^4 \Rightarrow m + 2n = 125$ ve $m + 1 = 16$ eşitliklerinden $(m, n) = (15, 55)$ olur.

Yanıt : E

27. $|AB| = 12$ olmak üzere, [AB] çaplı çemberin $|AC| = 8$ koşulunu sağlayan [AC] kirişi çiziliyor. Bu çemberin C noktasından geçen teğetine, B noktasından indirilen dikmenin ayağı D ise, BDC üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\dfrac{80\sqrt{5}}{9}$ B) $\dfrac{48\sqrt{5}}{5}$ C) $\dfrac{60\sqrt{3}}{7}$ D) $\dfrac{56\sqrt{3}}{5}$ E) $\dfrac{75\sqrt{2}}{4}$

ÇÖZÜM:



$m(\widehat{ACB}) = 90°$, (çapı gören çevre açı),

$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{BCD})$, (aynı yayı gören çevre ve teğet kiriş açılar).

$\overset{\Delta}{CAB} \sim \overset{\Delta}{DCB}$ (A.A) olur. ABC üçgeninde Pisagor bağıntısından $|BC| = 4\sqrt{5}$ olur.

$\dfrac{|DB|}{4\sqrt{5}} = \dfrac{|DC|}{8} = \dfrac{4\sqrt{5}}{12}$ den, $|DB| = \dfrac{20}{3}$ ve

$|DC| = \dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ olur.

$\text{Alan}(BDC) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{20}{3} \cdot \dfrac{8\sqrt{5}}{3} = \dfrac{80\sqrt{5}}{9}$ bulunur.

Yanıt : A

28. a ve b den oluşan 9 harfli dizilerden kaç tanesi baba kelimesini içerir?

A) 192 B) 186 C) 158 D) 156 E) 154

ÇÖZÜM:

Bir defa baba kelimesini içerenler 6 yerden başlanarak yazılabilir. Kalan 5 yere 2 harf 2^5 değişik şekilde sıralanır.

b a b a _ _ _ _ _

1 2 3 4 5 6

Bu durumda $6.2^5 = 192$ tanesi baba kelimesini yukarıda anlatıldığı gibi içerir.

baba kelimesini içeren 6 harf bababa, iki tane kelimesini içerir.

b a b a b a _ _ _

1 2 3 4

Üstteki durum 4 yerden başlanarak yazılabilir. Kalan 3 yere 2 harf 2^3 değişik şekilde sıralanır. $4 . 2^3 = 32$ dir. Ancak bu durumlar ilk durumdaki 192 sıralanışın içindedir.

2 tane baba kelimesini içeren durum,

b a b a _ b a b a şeklinde olursa araya a veya b harfi gelebileceğinden 2 durum vardır. Bu da ilk anlatılan durumun bir alt kümesidir.

İlk durumdaki sayılardan diğerleri çıkarılarak, $192 - 32 - 2 = 158$ bulunur.

Yanıt : C

29. Farklı boylarda 17 kişi yan yana dizilmiş olsun. Bunlardan n tanesi artan ya da azalan bir boy sırasında kalacak şekilde geri kalanlar sıradan uzaklaştırılıyor. Bu diziliş ne olursa olsun, böyle bir işlemi olanaklı kılan en büyük n sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

ÇÖZÜM:

Farklı boyutlardaki 17 kişiyi, en kısası 1 ve en uzunu 17 olacak şekilde numaralayalım. 15, 16, 17 sayılarını başa ve 1,2,3 sayılarını sona sıraladıktan sonra diğerlerini artan ya da azalan üçerli ve ikişerli olarak şekildeki gibi yazalım.

15 16 17 6 5 4 10 11 12 14 13 7 8 9 1 2 3

Bu diziden azalan,

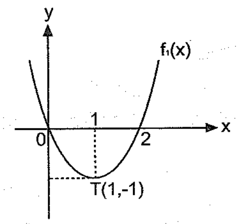
(15, 6, 5, 4, 1) , (16, 6, 5, 4, 3) gibi veya artan , (6, 10, 11, 12, 13) , (4, 10, 11, 12, 14) dizilerini elde edebiliriz. Bu durumda <u>diziliş ne olursa olsun</u> n'nin alabileceği en büyük değer 5 dir. Özel dizilişlerde n; 6, 7, ... , 17 değerlerini alabilir.

Yanıt : D

30. $x \in R$ için $f_1(x) = x^2 - 2x$ ve $n \geq 1$ için, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ bağıntılarıyla $f_1, f_2, f_3, \ldots$ fonksiyonları tanımlanıyor. f_{1996} fonksiyonunun [0, 2] kapalı aralığında alabileceği en küçük ve en büyük değerler aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 ve 3 B) 0 ve 2 C) –1 ve 24 D) –1 ve 3 E) –1 ve 0

ÇÖZÜM:



$f_1(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim [0, 2] aralığında $f_1(x)$ in alabileceği en küçük değer $f(1) = -1$ ve en büyük değer $f(0) = f(2) = 0$ dır. Bu durumda $f_1(x) : [0, 2] \to [-1, 0]$ olur.

$f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ eşitliğinden, $f_2(x) = f_1(f_1(x))$ ve $f_2 : [-1, 0] \to [a, b]$ dir.

$f_2(-1) = f_1(-1) = 3$ ve $f_2(0) = f_1(0) = 0$ olduğundan $f_2 : [-1, 0] \to [0, 3]$ olur.

Yani $f_2 : [-1, 0]$ aralığında $f_1(x)$'in alabileceği en küçük değer 0 ve en büyük değer 3 dür.

[0, 3] aralığında $f_1(x)$ in alabileceği en küçük ve en büyük değerler $f_1(1)=-1$ ve $f_1(3) = 3$ olduğundan $f_3 : [0, 3] \to [-1, 3]$ aralığında f(x) in alabileceği en küçük ve en büyük değerler $f_1(1)=-1$ ve $f_1(3)=3$ olacağından,

$f_4 : [-1, 3] \to [-1, 3]$ bulunur. Buradan,

$f_5 : [-1, 3] \to [-1, 3]$ ve

$\vdots$

$f_{1996} : [-1, 3] \to [-1, 3]$ olur.

Yanıt : D

31. Aşağıdaki a sayılarından hangisi için; $n^a \equiv n \pmod a$ bağıntısını sağlamayan en az bir n tamsayısı vardır?

A) 667 B) 561 C) 547 D) 503 E) 491

ÇÖZÜM:

$n^a \equiv n(\text{mod } a)$ dan, $n^{a-1} \equiv 1(\text{mod } a)$ elde edilir. Fermat teoremine göre a asal sayı ise her n tamsayısı için $n^{a-1} \equiv 1(\text{mod} a)$ dır. Buna göre 547,503 ve 491 asal sayılar olduğundan her n tamsayısı için denklik sağlanır. 667=23.29 olduğundan asal sayı değildir.

$n^{23-1} \equiv 1(\text{mod}23)$ ve $n^{29-1} \equiv 1(\text{mod } 29)$ dan

$n^{22} \equiv 1(\text{mod}23)$ ve $n^{28} \equiv 1(\text{mod}29)$ bulunur.

666 sayısı 22 ve 28 ile kalansız bölünemez.

O halde $n^{666} \not\equiv 1(\text{mod}23)$ ve $n^{666} \not\equiv 1(\text{mod}29)$ olduğundan $n^{666} \not\equiv 1(\text{mod}667)$ olur.

561=3.11.17 için,

$n^{3-1} \equiv 1(\text{mod}3)$, $n^{11-1} \equiv 1(\text{mod}11)$ ve

$n^{17-1} \equiv 1(\text{mod}17)$ den $n^2 \equiv 1(\text{mod}3)$,

$n^{10} \equiv 1(\text{mod}11)$ ve $n^{16} \equiv 1(\text{mod}17)$ dir.

560 sayısı 2, 10 ve 16 nın katı olduğundan $n^{560} \equiv 1(\text{mod}3)$, $n^{560} \equiv 1(\text{mod}11)$,

$n^{560} \equiv 1(\text{mod}17)$ ve $n^{560} \equiv 1(\text{mod}561)$ dir.

O halde a=667 için denkliği sağlamayan en az bir n tamsayısı vardır.

Yanıt : A

32. $x^2 - x + 1$ polinomunun $x^n - x + 1$ polinomunu tam olarak bölmesini mümkün kılan n pozitif tamsayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {2}
B) $\{n \in N : n \equiv 2 \pmod 3\}$
C) $\{n \in N : n \equiv 2 \pmod 6\}$
D) $\{n \in N : n \equiv 2 \pmod{12}\}$
E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

$x^n - x + 1 = (x^2 - x + 1).Q(x)$ eşitliğini x+1 ile çarpalım.

$(x+1)(x^n - x + 1) = (x^3 + 1).Q(x)$ den,
$x^{n+1} + x^n - x^2 + 1 = (x^3+1).Q(x)$ bulunur.
$x^3 = -1$ için $(x^3)^2 = 1$, $x^6 = 1$, $x^{6+2} = x^2$ dir.
k pozitif tamsayı olmak üzere n=6k+2 için, $x^{6k+3} + x^{6k+2} - x^2 + 1$ polinomu x^3'e göre düzenlenirse $(x^3)^{2k}.x^3 + (x^3)^{2k}.x^2 - x^2 + 1$ ve $x^3 = -1$ yazarak $(-1)^{2k}.(-1) + (-1)^{2k}.x^2 - x^2 + 1 = 0$ olur. O halde n=6k+2 den $\{n \in N : n \equiv 2 (mod 6)\}$ olmalıdır.

Yanıt : C

33. $f : Z \times Z \to Z$ fonksiyonu, her $x, y \in Z$ için,
1) $f(x+1, y+1) + f(x, y) = f(x, y+1) + f(x+1, y)$
2) $f(x, 0) = x^2$
3) $f(0, y) = -y^2$

koşullarını sağlıyor. f(1000, 996) aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7984 B) 1996 C) 16 D) 4 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

1. deki eşitliği,
$f(x+1, y+1) - f(x+1, y) = f(x, y+1) - f(x, y)$ şeklinde yazalım.

$y=0 \Rightarrow f(x+1, 1) - f(x+1, 0) = f(x, 1) - f(x, 0)$
$y=1 \Rightarrow f(x+1, 2) - f(x+1, 1) = f(x,2) - f(x, 1)$
$y=2 \Rightarrow f(x+1, 3) - f(x+1, 2) = f(x, 3) - f(x, 2)$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
$y=b-2 \Rightarrow f(x+1, b-1) - f(x+1, b-2) = f(x, b-1) - f(x, b-2)$
$y=b-1 \Rightarrow f(x+1, b) - f(x+1, b-1) = f(x, b) - f(x, b-1)$
+

$f(x+1, b) - f(x,b) = f(x+1, 0) - f(x, 0)$ ve buradan $f(x+1, b) - f(x, b) = (x+1)^2 - x^2$ bulunur. Bu eşitlikte,

$x=0 \Rightarrow f(1, b) - f(0, b) = 1^2 - 0^2$,
$x=1 \Rightarrow f(2, b) - f(1, b) = 2^2 - 1^2$,
$x=2 \Rightarrow f(3, b) - f(2, b) = 3^2 - 2^2$,
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
$x=a-2 \Rightarrow f(a-1, b) - f(a-2, b) = (a-1)^2 - (a-2)^2$,
$x=a-1 \Rightarrow f(a, b) - f(a-1, b) = a^2 - (a-1)^2$
+

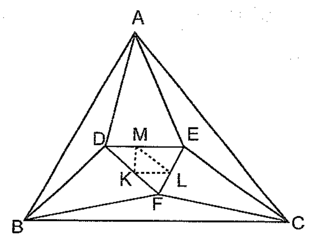
$f(a, b) - f(0, b) = a^2 \Rightarrow f(a,b) - (-b^2) = a^2$
$\Rightarrow f(a, b) = a^2 - b^2$ ve
$f(1000, 996) = 1000^2 - 996^2$ den
$f(1000, 996) = 4 . 1996 = 7984$ bulunur.

Yanıt : A

34. Bir üçgen, oluşacak üçgenlerin tüm köşelerinde aynı sayıda kenar kesişecek şekilde n üçgene ayrılabiliyor ise, n en çok kaç olabilir?

A) 19 B) 15 C) 7 D) 3 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:



Şekildeki ABC, DEF, KLM, DMK, MEL, KFL üçgenlerinin tüm köşelerinde 4'er kenar kesişiyor.

KLM üçgeninin kenarları üzerinde birer nokta alarak, bu noktalarla oluşan üçgenin kenarları üzerinde de birer nokta alarak üçgenler oluşturabiliriz. Böylece n sonsuza ulaşır.

Yanıt : E

35. Elemanlarından herhangi ikisi aralarında asal olan ve herhangi ikisinin farkı üçüncüsü ile bölünen, üç elemanlı tüm $\{a, b, c\} \subset Z$ kümelerini dikkate aldığımızda, aşağıdakilerden hangisi doğru değildir?

A) a, b, c sayılarından en az biri negatif olmalıdır.

B) Sıfırdan farklı hangi c tam sayısı verilirse verilsin, {a, b, c} istenen koşulu sağlayacak biçimde a ve b tamsayıları bulunur.

C) a, b, c sayılarından en az birinin mutlak değeri 1 ya da 2 dir.

D) a, b, c ardışık tamsayılar olamaz.

E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

a, b, c tamsayılarından herhangi ikisi çift sayı olursa aralarında asal olamaz. Herhangi ikisinin farkı üçüncü ile bölüneceğinden ikisi tek biri çift olmalıdır.

Bu durumda ikisinin farkının üçüncüye bölünebilmesi için;

a) iki tek sayının mutlak değerlerinin farkı 2 veya –2 ya da,

b) iki tek sayının mutlak değerleri arasındaki fark 2 veya –2 değilse biri çift, diğeri tek olan iki sayının mutlak değerlerinin farkı 1 veya –1 olmalıdır.

Bu durumda a, b, c sayıları için;

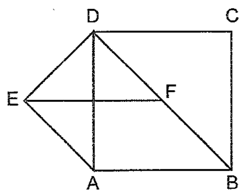
	a	b	c
1)	n	–n+1	1 , (n≠1 ise)
2)	n	–n–1	–1 , (n≠–1 ise)
3)	n	–n+2	2 , (n tek ise)
4)	n	–n–2	–2 , (n tek ise)

genel durumları yazılabilir.

O halde A, B, C, D seçenekleri doğrudur.

Yanıt : E

36.



Şekilde ABCD kare,

$m(\widehat{AED}) = 90°$ ve [BD] nin orta noktası F dir.

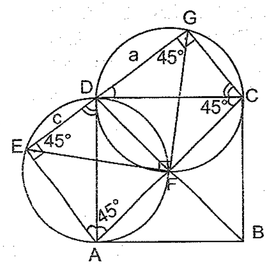
$|EA| = a$, $|EF| = b$, $|ED| = c$ ise,

ABD üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) a^2+b^2+ab B) b^2+4ac C) $\frac{b^2+ac}{3}$

D) $b^2-\frac{ac}{2}$ E) b^2-ac

ÇÖZÜM:



$\overset{\triangle}{AED} \cong \overset{\triangle}{DGC}$ dir. E, D, G doğrusal olur.

$m(\widehat{DEA}) = m(\widehat{DFA}) = m(\widehat{CGD}) = m(\widehat{CFD}) = 90°$

olduğundan AEDF ve CGDF kirişler dörtgenidir. Bu dörtgenlerde DF yayını gören çevre açıların eşitliğinden $m(\widehat{FEG}) = m(\widehat{FGE}) = 45°$ ve

$m(\widehat{EFG}) = 90°$ dir. $|EF| = |FG| = b$ ve $|EG| = a+c$ olur.

EFG üçgeninde Pisagor teoreminden;

$(a+c)^2 = 2b^2$ den $a^2+c^2 = 2b^2-2ac$ olur.

EAD üçgeninde $|AD|^2 = a^2+c^2$ dir.

$$\text{Alan}(ABD) = \frac{|AD|^2}{2} = \frac{a^2+c^2}{2} = \frac{2b^2-2ac}{2}$$

$$\text{Alan}(ABD) = b^2 - ac$$

Yanıt : E

Cahit Arf

Yaşamı

1910 yılında Selanik'te doğdu. Yüksek öğrenimini Fransa'da Ecole Normale Superieure'de tamamladı (1932). Bir süre Galatasaray Lisesi'nde matematik öğretmenliği yaptıktan sonra İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nde doçent adayı olarak çalıştı. Doktorasını yapmak için Almanya'ya gitti.

1938 yılında Göttingen Üniversitesi'nde doktorasını bitirdi. Yurda döndüğün-de İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nde profesör ve ordinaryüs profesörlüğe yükseldi. Burada 1962 yılına kadar çalıştı. Daha sonra Robert Koleji'nde Matematik dersleri vermeye başladı. 1964 yılında Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) bilim kolu başkanı oldu.

Daha sonra gittiği Amerika Birleşik Devletleri'nde araştırma ve incelemeler-de bulundu; Kaliforniya Üniversitesi'nde konuk öğretim üyesi olarak görev yaptı. 1967 yılında yurda dönüşünde Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde öğretim üyeliğine getirildi. 1980 yılında emekli oldu. Emekliye ayrıldıktan sonra TÜBİTAK'a bağlı Gebze Araştırma Merkezi'nde görev aldı. 1985 ve 1989 yılları arasında Türk Matematik Derneği başkanlığını yaptı.

Arf İnönü Armağanı'nı (1948) ve TÜBİTAK Bilim Ödülü'nü kazandı (1974). Cebir ve Sayılar Teorisi üzerine uluslararası bir sempozyum 1990'da 3 ve 7 Eylül ta-rihleri arasında Arf'in onuruna Silivri'de gerçekleştirilmiştir. Halkalar ve Geometri üze-rine ilk konferanslar da 1984'te İstanbul'da yapılmıştır. Arf, matematikte geometri kavramı üzerine bir makale sunmuştur. Cahit Arf 1997 yılının Aralık ayında bir kalp rahatsızlığı nedeniyle aramızdan ayrıldı.

Çalışmaları

Cahit Arf, cebir konusundaki çalışmalarıyla dünyaca ün kazanmıştır. Sen-tetik geometri problemlerinin cetvel ve pergel yardımıyla çözülebilirliği konusundaki yaptığı çalışmalar, cisimlerin kuadratik formlarının sınıflandırılmasında ortaya çıkan değişmezlere ilişkin "Arf değişmezi" ve "Arf halkalar" gibi literatürde adıyla anılan çalışmaları matematik dünyasının ünlü matematikçileri arasında yer almasını sağladı. Matematik literatürüne "Arf Halkaları, Arf Değişmezleri, Arf Kapanışı" gibi kavramların yanı sıra "Hasse-Arf Teoremi" ile anılan teoremler kazandırmıştır.

Matematiği bir meslek dalı olarak değil, bir yaşam tarzı olarak görmüştür. Öğrencilerine her zaman "Matematiği ezberlemeyin kendiniz yapın ve anlayın" demiştir. Hakkından yazılmış bir yazıda şöyle denilmiştir: "...Bir zamanlar integrali bilen kimselerin matematikçi, üstel fonksiyonu bilenlerin ise büyük matematikçi sayıldığı ülkemizde derin matematik konularının tartışılacağı hayal bile edilemezdi. Cahit Arf, Türkiye'de matematiğin o günlerden bu günlere gelmesinde en büyük rolü oynamıştır."

8. ve 9. sınıflar

1. n nin kaç değişik tamsayı değeri için $\frac{n^2}{n+4}$ tamsayı olur?

A) 3 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

ÇÖZÜM:

$$A=\frac{n^2}{n+4} \Rightarrow \begin{array}{r|l} n^2 & n+4 \\ \hline \pm n^2 \mp 4n & n-4 \\ \hline -4n & \\ \pm 4n \pm 16 & \\ \hline 16 & \end{array}$$

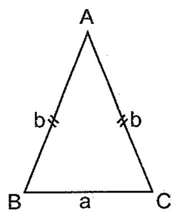
Yukarıdaki bölme işleminde $A = n - 4 + \frac{16}{n+4}$ olur. n – 4 tamsayı olduğundan A nın tamsayı olması için n + 4'ün 16'nın tamsayı bölenleri olması gerekir. $16 = 2^4$ olduğundan 4 + 1 = 5 tane pozitif ve 5 tane negatif olmak üzere 10 tane n + 4 tamsayısı vardır.

Yanıt : D

2. Çevresi 100 ve kenar uzunlukları tamsayı olan kaç tane ikizkenar üçgen vardır?

A) 24 B) 25 C) 49 D) 50 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:



Çevresi a + 2b = 100 ⇒ 2b < 100 ve b < 50 dir.

2b > a ve a = 100 – 2b olduğundan

2b > 100 – 2b den b > 25 olmalıdır.

Yani 25 < b < 49 olur.

b ∈ {26, 27, ..., 48} olmak üzere 24 tane üçgen çizilebilir.

Yanıt : A

3. a, b, c gerçel sayılar olmak üzere $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}=1$ ise

$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}$ toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

ÇÖZÜM:

Sorulan ifadeye A diyerek taraf tarafa çıkarırsak,

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}=A$$
$$\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}=1$$
$$-$$

1 + 1 + 1 = A – 1 ⇒ A = 4 bulunur.

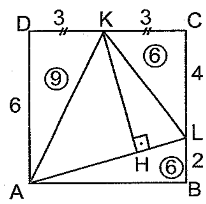
Yanıt : D

4. Bir ABCD karesinin [DC] kenarının orta noktası K olsun, [BC] kenarı üzerinde |BC| = 3|BL| olacak şekilde bir L noktası alınıyor.

K noktasından AL doğrusuna indirilen dikmenin ayağı H ise, $\frac{|HK|}{|LK|}$ nedir?

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ D) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

ÇÖZÜM:



Oranlar verilip oran sorulduğu için verilen oranlara uygun sayılar yazabiliriz.

|AB| = 6 cm, |DK| = |KC| = 3 cm

|BL| = 2 cm, |LC| = 4 cm yazalım.

ABL ve KCL üçgenlerinde Pisagor Teoreminden $|AL| = 2\sqrt{10}$ cm , |KL| = 5 cm bulunur.

Alan$(\overset{\Delta}{DAK}) = 9\ cm^2$, $A(\overset{\Delta}{KCL}) = 6\ cm^2$,

$A(\overset{\triangle}{ABL}) = 6\ cm^2$ olduğundan,

$A(\overset{\triangle}{AKL}) = 36 - 21 = 15\ cm^2$ dir.

$A(\overset{\triangle}{AKL}) = \dfrac{|AL|.|KH|}{2} \Rightarrow 15 = \dfrac{2\sqrt{10}.|KH|}{2}$ den

$|KH| = \dfrac{15}{\sqrt{10}}$ cm ve $\dfrac{|HK|}{|LK|} = \dfrac{\frac{15}{\sqrt{10}}}{5} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ bulunur.

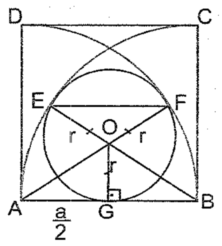
Yanıt : C

5. Bir kenar uzunluğu a olan bir ABCD karesinin, A ve B köşeleri merkez alınarak, a yarıçaplı iki tane çeyrek çember çiziliyor.

Bu çeyrek çemberlere ve [AB] kenarına teğet olan çemberin [AB] kenarına değdiği nokta G, çeyrek çemberlere değdiği noktalar E ve F ise |EF| aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{3a}{5}$ B) $\dfrac{3a}{4}$ C) $\dfrac{a}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

ÇÖZÜM:



Teğet çemberlerin merkezleri ile değme noktaları doğrusal olacağından, A, O, F ve B, O, E doğrusaldır.

|AB| = |AF| = |BE| = a ve

|OG| = |OF| = |OE| = r olduğundan,

|OA| = a – r olur.

AGO üçgeninde Pisagor Teoreminden,

$(a - r)^2 = (\frac{a}{2})^2 + r^2$ ve $r = \dfrac{3a}{8}$ bulunur.

$\overset{\triangle}{AOB} \sim \overset{\triangle}{FOE}(K.A.K.) \Rightarrow \dfrac{a-r}{r} = \dfrac{a}{|EF|}$

$|EF| = \dfrac{a.r}{a-r}$ ve $r = \dfrac{3a}{8}$ yazarak,

$|EF| = \dfrac{3a}{5}$ bulunur.

Yanıt : A

6. {1, 2, 3, 4, 5} kümesindeki rakamların her biri birer defa kullanılarak yazılabilecek tüm 5 basamaklı sayıların toplamı 11 ile bölündüğünde kalan ne olur?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

ÇÖZÜM:

{1, 2, 3, 4, 5} kümesinin rakamları birer defa kullanılarak 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 tane 5 basamaklı sayı yazılır.

Toplama işleminde bu 5 rakamın toplamı olan

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 sayısı her basamakta

$\dfrac{120}{5} = 24$ defa tekrarlanır. Sayıya A dersek,

$A = 24.15.10^4 + 24.15.10^3 + ... + 24.15,$

$A = 24.15(10^4 + 10^3 + ... + 1)$

$A = 24.15.11111$ bulunur.

$24 \equiv 2 \pmod{11},$

$15 \equiv 4 \pmod{11},$

$11111 \equiv 1 \pmod{11}$

x

$A = 8 \pmod{11}$ olur ve kalan 8 dir.

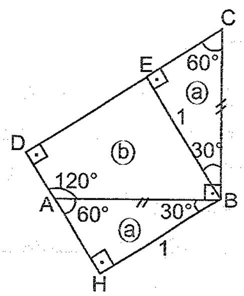
Yanıt : D

7. Bir ABCD dörtgeninde $s(\hat{B}) = s(\hat{D}) = 90°$ ve $s(\hat{C}) = 60°$ ve |AB| = |BC| dir.

B noktasından AD doğrusuna indirilen dikmenin ayağı H ve |BH| = 1 ise, ABCD dörtgeninin alanı nedir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 1

ÇÖZÜM:



$[BE] \perp [CD]$ çizersek, $\overset{\Delta}{CEB} \cong \overset{\Delta}{AHB}$ (A.K.A) olduğundan, $|EB| = |HB| = 1$ ve

$A(\overset{\Delta}{CEB}) = A(\overset{\Delta}{AHB}) = a$ olur.

$A(ABED) = b$ dersek, $A(ABCD) = a + b$ olur.

DHBE dörtgeni $|HB| = |BE| = 1$ ve açıları 90° olduğundan karedir.

$A(ABCD) = A(DHBE) = 1^2 = 1$ bulunur.

Yanıt : E

8. 143 ve 253 sayılarını istediğimiz kadar kullanarak, toplama, çıkarma ve çarpma işlemleriyle aşağıdaki sayılardan hangisini elde edemeyiz.

A) 135740 B) 218009 C) 780811
D) 6050704 E) 566500

ÇÖZÜM:

$143 = 11 \cdot 13$ ve $253 = 11 \cdot 23$ olduğundan bu sayılar 11 ile bölünür.

11 ile bölünen sayılardan toplama, çıkarma ve çarpma işlemleriyle elde edilen sayılar 11 ile bölünür. Seçeneklerden 11 ile bölünemeyen sayıyı bulmalıyız.

Bilgi: $\underline{a}b\underline{c}d$ ... $\underline{m}p$, n basamaklı bir sayı olsun. Birer basamak atlayıp,

$a + c + ... + m = x$ ve $b + d + ... + p = y$ toplamını bulalım.

$x - y$ veya $y - x$, 11'in katı ise bu sayı 11 ile bölünür.

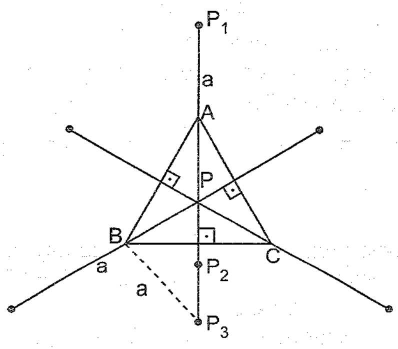
Buna göre C seçeneği $7 + 0 + 1 = 8$, $8 + 8 + 1 = 17$ ve $17 - 8 = 9 \neq 11k$ olduğundan 11 ile bölünemez.

Yanıt : C

9. Bir ABC eşkenar üçgeninin üzerinde bulunduğu düzlemde PAB, PAC ve PBC üçgenleri ikizkenar olacak biçimde kaç tane P noktası vardır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 6 E) 1

ÇÖZÜM:



$|AB| = |AC| = |BC| = a$ olsun A'dan [BC] ye çizilen dikme üzerinde, $|AP_1| = |AP_2| = |BP_3| = a$ olacak şekilde P_1, P_2, P_3 noktaları alınırsa bu üç noktayı A, B, C noktalarına birleştirirsek P_1AB, P_1AC, P_1BC, ..., P_3BC üçgenleri ikizkenar üçgendir. B'den [AC]'ye ve C'den [AB] ye çizilen dikmeler üzerinde de aynı şekilde 3'er nokta buluruz. Böylece $3.3 = 9$ nokta bulunur. P ağırlık merkezi olduğundan PAB, PAC, PBC üçgenleri de ikizkenardır.

Uygun olan P noktalarının sayısı $9 + 1 = 10$ dur.

Yanıt : B

10. $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - 2$, $S_3 = 1 - 2 + 3$,
$S_4 = 1 - 2 + 3 - 4$, ...
$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + ... + (-1)^{n+1} n$, ... ise
$S_{95} + S_{100}$ kaçtır?

A) 0 B) 1 C) −1 D) 2 E) −2

ÇÖZÜM:

S'nin terim sayısı çiftse,

$S_{2n} = [1 - 2] + [3 - 4] + ... + [(2n-1) - 2n]$'deki her köşeli parantezin içi (−1) olacağından

$S_{2n} = \frac{2n}{2} \cdot (-1) = -n$ ve S'nin terim sayısı tekse,

$S_{2n+1} = [1-2] + [3-4] + ... + [(2n-1) - 2n] + 2n + 1$

den aynı şekilde $\frac{2n}{2} \cdot (-1) + 2n + 1$ olacağından

$S_{2n+1} = n + 1$ olur.

S_{95} toplamında $2n+1 = 95$ ve $n = 47$ olduğundan $S_{95} = 47 + 1 = 48$ dir.

S_{100} toplamında $2n = 100 \Rightarrow n = 50$ ve $S_{100} = -50$ olur.

$S_{95} + S_{100} = 48 - 50 = -2$ dir.

Yanıt : E

11. Bir torbada 28 kırmızı, 20 yeşil, 12 mavi, 20 sarı, 10 beyaz ve 10 siyah top vardır.

Çekilen topların en az 15 tanesinin aynı renkte olmasını garanti etmek için torbadan en az kaç tane top çekilmelidir?

A) 48 B) 100 C) 50 D) 75 E) 70

ÇÖZÜM:

İlk çekilen toplar sayıları 15'den az sayıda olan mavi, beyaz ve siyah olsun. 12 + 10 + 10 = 32 topun en az 15 tanesi aynı renk olamaz. İkinci adımda 28 kırmızı, 20 yeşil, 20 sarı toptan 14 er tane çektiğimizde yine en az 15 tanesi kırmızı, yeşil veya sarı olamaz. 32 + 42 = 74 top çektik. Kalan toplardan en az 1 tane top çekersek kırmızı, yeşil veya sarı toplardan herhangi biri 14 + 1 = 15 olur.

O halde en az 74 + 1 = 75 top çekmeliyiz.

Yanıt : D

12. Yazı tahtasına 1, 3, 5, 7, . . ., 99, 101 sayıları yazılmıştır. Her adımda bu sayılardan ikisini silerek, onların yerine silinen sayıların toplamının bir eksiği yazılıyor. Sonlu adımdan sonra tahtada tek sayı kalacaktır. Bu sayı nedir?

A) 9600 B) 2555 C) 2551 D) 2505 E) 2501

ÇÖZÜM:

1, 3, 5, ... , 99, 101 dizisinde 2n – 1 = 101 den 51 sayı olduğunu buluruz.

a) Dizideki 51 sayıdan 50'sini ikişer ikişer toplarsak elimizde $\frac{50}{2}=25$ adımda 25 + 1 = 26 sayı kalır.

b) Aynı şekilde $\frac{26}{2}=13$ adımda elimizde 13 sayı kalır.

c) 13 = 2.6 + 1 olduğundan 6 adımda 6+1 = 7 sayı kalır.

d) 7= 2.3 + 1 olduğundan 3 adımda 3+1= 4 sayı kalır.

e) 4 = 2.2 olduğundan 2 adımda elemizde 2 sayı kalır.

f) Kalan bu 2 sayıyı toplarsak 1 adımda elimizde 1 sayı kalır. Her adımda 1 çıkarılmasaydı son sayı

$1 + 3 + 5 + ... + 101 = 51^2 = 2601$ olurdu.

25 + 13 + 6 + 3 + 2 + 1 = 50 adımda 50 sayı çıkarıldığı için son sayı 2601 – 50 = 2551 dir.

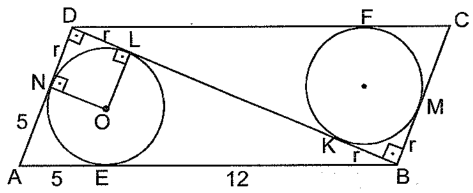
Yanıt : C

13. Bir ABCD paralelkenarında $s(\widehat{ADB}) = 90°$ olup, ADB üçgeninin iç teğet çemberinin [AD], [DB] ve [AB] kenarlarına değdiği noktalar sırasıyla N, L, E; BDC üçgeninin iç teğet çemberinin [BC], [CD] ve [DB] kenarlarına değdiği noktalar sırasıyla M, F, K dır.

|AE|= 5 ve |DF|= 12 ise, |KL| kaçtır?

A) $\frac{13}{2}$ B) 7 C) $\frac{15}{2}$ D) 8 E) 9

ÇÖZÜM:



$\overset{\Delta}{DAB} \cong \overset{\Delta}{BCD}$ olduğundan çemberler eş ve NDLO karedir.

DAB üçgeninde, |DA| = r+5 , |DB| = r+12 olduğundan $(r + 5)^2 + (r + 12)^2 = 17^2$ den r = 3 ve |BD| = 15 bulunur.

|KL| = |BD| – 2r den |KL| = 15 – 6 = 9 olur.

Yanıt : E

14. İçinde 4 kırmızı, 3 beyaz top bulunan bir torbadan iki top rasgele çıkarıldıktan sonra, yine rasgele üçüncü bir top çekiliyor. Bu topun kırmızı olma olasılığı nedir?

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

Rasgele çıkarılan topların ikisi de kırmızı, biri kırmızı, biri beyaz veya ikisi de beyaz olabilir. Torbada 4 kırmızı, 3 beyaz top var.

Bu durumda;

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}.\frac{2}{5}+\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}}.\frac{3}{5}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}.\frac{4}{5}$$ işlemi yapılırsa $P(A)=\frac{4}{7}$ bulunur.

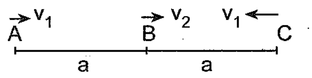
Yanıt : B

15. Tramvay hatları boyunca sabit hızla hareket eden bir öğrenci arkadan gelen tramvayların her 12 dakikada, karşıdan gelen tramvayların ise her 4 dakikada bir geçtiğini fark ediyor.

Tramvaylar ilk ve son duraklardan eşit zaman aralıkları ile yola çıkıp aynı sabit hızla ilerliyorlarsa, bu zaman aralığı kaç dakikadır?

A) 8 B) 10 C) 6 D) 4,5 E) 5

ÇÖZÜM:



A'dan C'ye ve C'den A'ya doğru giden v_1 hızlı iki travmay ve B'den C'ye doğru v_2 hızıyla giden öğrenciyi düşünelim. Her travmay eşit zaman aralığında $|AB| = |CB| = a$ yolunu alıyorsa A'daki tramvay ve B'deki öğrenci için,

$a = 12(v_1 - v_2)$ ve

C'deki tramvay ve B'deki öğrenci için,

$a = 4(v_1 + v_2)$ dir.

$12(v_1 - v_2) = 4(v_1 + v_2)$ den $v_1 = 2v_2$ olur.

$a = 12(2v_2 - v_2) \Rightarrow a = 12v_2 \Rightarrow a = 6v_1$ olur.

$t = \frac{a}{v_1} = 6$ dakikadır.

Yanıt : C

16. Yüzleri 1, 2, 3, 5, 6 ve 9 sayıları olan bir zar üç kez atıldığında gelen sayıların toplamının üç ile bölünebilmesi olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{27}$ E) $\frac{26}{27}$

ÇÖZÜM:

1, 2, 3, 5, 6, 9, rakamlarının 3 ile bölündüklerinde verdikleri kalanlar için;

$\overline{0} = \{3, 6, 9\}$

$\overline{1} = \{1\}$

$\overline{2} = \{2, 5\}$ dir.

$\overline{0}$ kümesi için 3 atışta $\frac{3}{6}.\frac{3}{6}.\frac{3}{6} = \frac{27}{216}$,

$\overline{1}$ kümesi için 3 atışta $\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$,

$\overline{2}$ kümesi için 3 atışta $\frac{2}{6}.\frac{2}{6}.\frac{2}{6} = \frac{8}{216}$,

$0+1+2 = 3$ olduğundan

$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ kendi aralarında 3! şeklinde yer değiştirip

$3!.\frac{3}{6}.\frac{1}{6}.\frac{2}{6} = \frac{36}{216}$,

olasılıkları bulunur.

Bu olay olasılığı

$p(A) = \frac{27+1+8+36}{216} = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$ olur.

Yanıt : A

17. $5^n + 3^n + 1$ sayısı $1 \leq n \leq 100$ koşulunu sağlayan n tamsayılarından kaç tanesi için 7 ile bölünür?

A) 28 B) 30 C) 32 D) 34 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

$A = 5^n + 3^n + 1$ ve $1 \leq n \leq 100$ veriliyor.

$5^n \equiv a \pmod 7$, $3^n \equiv b \pmod 7$ olsun.

$A \equiv 0 \pmod 7$ olacağından $a + b + 1 \equiv 0 \pmod 7$ yani $a + b = 6$ olmalıdır.

$5 \equiv 5 \pmod 7$ $3 \equiv 3 \pmod 7$

$5^2 \equiv 4 \pmod 7 \Leftrightarrow 3^2 \equiv 2 \pmod 7 \Leftrightarrow a + b = 6$

$5^3 \equiv 6 \pmod 7$ $3^3 \equiv 6 \pmod 7$

$5^4 \equiv 2 \pmod 7 \Leftrightarrow 3^4 \equiv 4 \pmod 7 \Leftrightarrow a + b = 6$

$5^5 \equiv 3 \pmod 7$ $3^5 \equiv 5 \pmod 7$

$5^6 \equiv 1 \pmod 7$ $3^6 \equiv 1 \pmod 7$

$n = 2$ ve $n = 4$ yani k tamsayı olmak üzere

$n = 6k + 2$ veya $n = 6k + 4$ olmalıdır.

Bu durumda $1 \leq n \leq 100$ koşulunu sağlayan n tamsayılarından 6'nın katları olanlar istenen koşulu sağlamaz.

$1 \leq n \leq 100 \Rightarrow 2n \in \{2, 4, 6, \ldots, 98, 100\}$

kümesinin eleman sayısı $\frac{100}{2} = 50$ ve

$1 \leq 6 \leq 100 \Rightarrow 6n \in \{6, 12, \ldots, 96\}$ kümesinin eleman sayısı $\frac{96}{6} = 16$ dır.

O halde $50 - 16 = 34$ bulunur.

Yanıt : D

18. $x! + y! + z! = u!$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y, z) pozitif tamsayı üçlüsü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

ÇÖZÜM:

(x, y, z) pozitif tamsayı üçlüsü olmak üzere

$x! + y! + z! = u!$ eşitliğinde $u > x$, $u > y$ ve $u > z$ dir.

$1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, ... dir.

$x < y < z$ olduğunda $x! + y! + z!$ toplanarak, u ise çarpılarak büyüdüğünden $x < y < z < u$ olmak üzere $x! + y! + z! = u!$ eşitliğini sağlayan (x, y, z) tamsayı üçlüsü yoktur.

$x = y < z < u$ olsun. u! çarpılarak büyüdüğünden en az $u = z + 1$ olur.

$x! + x! + z! = (z + 1)! \Rightarrow 2 . x! + z! = (z + 1) . z!$ den $2 . x! = z . z! \Rightarrow z = 2$ bulunur.

O halde $z = 2$, $x! = z!$ olduğundan $x = 2$ ve $x = y$ olduğundan $x = y = z = 2$ bulunur.

$u = z + 1 \Rightarrow u = 2 + 1 = 3$ olacağından

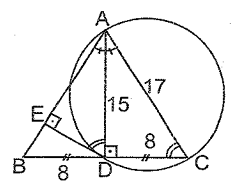
$2! + 2! + 2! = 3! \Rightarrow (x, y, z) = (2, 2, 2)$ dir.

Yanıt : B

19. Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|BC| = 16$, $|AB| = |AC| = 17$ olup, [AC] çaplı çember [BC] kenarını D noktasında kesmektedir. D noktasından bu çembere çizilen teğet [AB] kenarını bir E noktasında kestiğine göre, |DE| kaçtır?

A) 5 B) 6 C) $6\frac{1}{16}$ D) 7 E) $7\frac{1}{17}$

ÇÖZÜM:



[AC] çap olduğundan, $m(A\hat{D}C) = 90°$dir.

$|AB| = |AC| = 17$ olduğundan,

$|BD| = |DC| = \frac{16}{2} = 8$ dir.

ADC üçgeninde $|AD|^2 + 8^2 = 17^2$ den $|AD| = 15$ bulunur.

Teğet kiriş açı aynı yayı gören çevre açıya eşit yani $m(A\hat{D}E) = m(A\hat{C}B)$ ve $m(B\hat{A}D) = m(C\hat{A}D)$ olduğundan

$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ACD}$ (A.A)olur.

Buradan, $\frac{|DE|}{8} = \frac{15}{17}$ ve $|DE| = 7\frac{1}{17}$ bulunur.

Yanıt : E

20. {1, 2, 3, . . ., 10} kümesinin tüm alt kümeler kümesinde $A_1 \cap A_2$ boş küme olacak şekilde kaç tane (A_1, A_2) sıralı alt küme ikilisi vardır?

A) 2^{10} B) 3^{10} C) 4^{10} D) $\frac{10!}{2!}$ E) $\frac{10!}{3!.7!}$

ÇÖZÜM:

B = {1, 2, 3, ..., 10} kümesinde

$A_1 = \varnothing \Rightarrow A_2$ kümesi B kümesinin tüm alt kümeleri olur. Bu durumda 1.2^{10} tane (A_1, A_2) sıralı ikilisi vardır.

A = {a} gibi 1 elemanlı olursa $s(A_1) = \binom{10}{1}$ ve kalan 9 elemanla $s(A_2) = 2^9$ tane A_2 kümesi yazılır. Benzer düşünceyle

$$x = \binom{10}{0}.2^{10} + \binom{10}{1}.2^9 + \binom{10}{2}.2^8 + ... + \binom{10}{10}.2^0$$

olur. Bu eşitlik Binom teoreminde $x = (2 + 1)^{10}$ un açılımıdır.

O halde $x = 3^{10}$ bulunur.

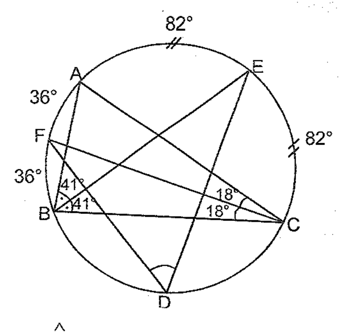
Yanıt : B

21. Bir çemberin üzerinde A, B, C noktaları alınıyor. A noktasını üzerinde bulundurmayan BC yayının orta noktası D ve ABC üçgeninin B ve C açılarının açıortaylarının çemberi kestiği noktalar E ve F dir.

$s(\widehat{ABC}) = 82°$ ve $s(\widehat{ACB}) = 36°$ ise, $s(\widehat{FDE})$ kaç derecedir?

A) 41 B) 46 C) 56 D) 59 E) 62

ÇÖZÜM:



$s(A\hat{B}C) = 82°$ ve [BE] açıortay olduğundan

$s(A\hat{C}B) = 36°$ ve $s(\widehat{AE}) = s(\widehat{EC}) = 82°$

[CF] açıortay olduğundan,

$s(\widehat{AF}) = s(\widehat{FB}) = 36°$ olur.

D noktası, FCE yayı üzerindeki bir nokta olmak üzere $m(F\hat{D}E) = \frac{36 + 82}{2} = 59°$dir.

Yanıt : D

KLASİK SORULAR

1. $a > 1$ gerçel sayı olmak üzere, $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ denklemini sağlayan x gerçel sayılarını a cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM:

$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ denkleminde $x \geq 0$ dır.

$x = 0$ için $a = 0$ olur.

Bu sonuç, a>1 verisi ile çelişir. O halde x>0 dır.

Kare olarak, $a-\sqrt{a+x}=x^2$ elde edilir.

Bu eşitlikte, $\sqrt{a+x}=t$ dersek $a+x = t^2$ olur.

Bu yüzden eşitliğin her iki yanına x eklersek,

$a+x-\sqrt{a+x}=x^2+x$ den $t^2-t = x^2+x$ bulunur.

$t^2-x^2=t+x$, $(t+x)(t-x)-(t+x)=0$ dan,

$(t+x)(t-x-1) = 0$ olur.

Buradan, $t=-x$ ve $t=x+1$ bulunur.

$t=\sqrt{a+x}$ yazarsak,

$\sqrt{a+x}=-x$ ve $\sqrt{a+x}=x+1$ olur.

x>0 olduğundan $\sqrt{a+x} \neq -x$ dir.

$\sqrt{a+x}=x+1$ eşitliğinde kare alarak,

$x^2+x+1-a = 0$ denklemi bulunur.

$\Delta = 1-4+4a = 4a-3$ ve

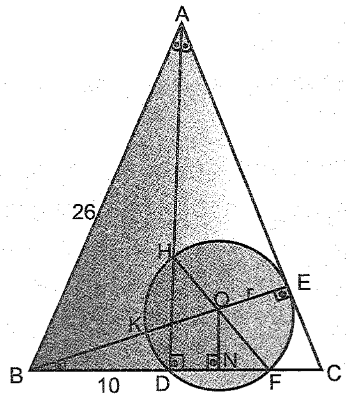
$x_{1,2}=\dfrac{-1\mp\sqrt{4a-3}}{2}$ bulunur.

$x > 0$ olduğundan,

$x=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$ dir.

2. Kenar uzunlukları |AB| = |AC| = 26, |BC| = 20 olan ABC üçgeninin A ve B noktalarından geçen yükseklikleri karşı kenarları sırasıyla D ve E noktalarında kesiyor. D noktasından geçen ve AC doğrusuna E noktasında teğet olan çemberin yarıçapını hesaplayınız.

ÇÖZÜM:



$[BE]\perp[AC]$ olduğundan $[EK]$ çap,

$[AD]\perp[BC]$ olduğundan $[HF]$ çap ve

O noktası merkezdir.

$B\hat{E}C \sim N\hat{D}B$ (A.A) olduğundan

$\dfrac{|EC|}{|DB|}=\dfrac{|BC|}{|AB|}=\dfrac{|BE|}{|AD|}$, $\dfrac{|EC|}{10}=\dfrac{20}{26}$ ve $|EC|=\dfrac{100}{13}$ bulunur.

ABD üçgeninde Pisagor Teoreminden

$|AD| = 24$ tür.

$\dfrac{|BC|}{|AB|}=\dfrac{|BE|}{|AD|}$, $\dfrac{10}{13}=\dfrac{|BE|}{24}$ den $|BE|=\dfrac{240}{13}$ olur.

Çemberde kuvvet özelliğinden, $|CE|^2=|CF|.|CD|$,

$\dfrac{100^2}{13^2}=|CF|.10$ dan $|CF|=\dfrac{1000}{169}$ ve

$|FD|=10-\dfrac{1000}{169}=\dfrac{690}{169}$ olur.

$[ON]\perp[BC]$ çizersek, $|DN|=|NF|=\dfrac{345}{169}$ olur.

$|BN|=10+\dfrac{345}{169}$ ve $B\hat{N}O \sim A\hat{D}B$

(A.A) benzerliğinden

$\dfrac{|BO|}{|AB|}=\dfrac{|BN|}{|AD|}$, $\dfrac{\frac{240}{13}-r}{26}=\dfrac{10+\frac{345}{169}}{12}$ den

$r=\dfrac{65}{12}$ bulunur.

3. 50 adet zarfın her birinde üzerinde 1 veya –1 yazılı bir kağıt vardır. Bu kağıtlardan istediğiniz herhangi üçünde yazılı sayıların çarpımını sorarak öğrenebiliyoruz. Bu 50 sayının çarpımını en az kaç soruda bulabiliriz?

ÇÖZÜM:

Her zarfın içinde 1 veya -1 yazılı bir kağıt olduğuna göre herhangi üç zarftaki sayıların çarpımı 1 veya –1 dir.

50 zarfı $a_1, a_2, ..., a_{50}$ yazarak numaralandıralım.

Bu 50 zarfı, $(a_1, a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6), ..., (a_{46}, a_{47}, a_{48}), (a_{49}, a_{50})$ şeklinde gruplandırırsak (a_{49}, a_{50}) iki elemanlı olduğundan probleme ters düşer. O halde ilk 45 zarfı,

$(a_1, a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6), ...(a_{43}, a_{44}, a_{45})$ şeklinde numaralandıralım.

Bu durumda çarpım 1 veya –1 dir.

Bu çarpım 45:3 = 15 soruda bulunur.

Kalan zaflar $a_{46}, a_{47}, a_{48}, a_{49}, a_{50}$ dir.

$a_n=1$ veya $a_n = -1$ ise $a_n^3=1$ veya $a_n^3= -1$ olduğundan kalan zarfları,

$$\begin{array}{ll} & A = a_{46} \cdot a_{49} \cdot a_{50} \\ & B = a_{47} \cdot a_{49} \cdot a_{50} \\ \times & C = a_{48} \cdot a_{49} \cdot a_{50} \\ \hline \end{array}$$

şeklinde gruplandırıp çarparsak

$A.B.C = a_{46} \cdot a_{47} \cdot a_{48} \cdot a^3_{49} \cdot a^3_{50}$ ve

$a^3_{49} = a_{49}, a^3_{50} = a_{50}$

$A.B.C = a_{46} \cdot a_{47} \cdot a_{48} \cdot a_{49} \cdot a_{50}$ çarpımının sonucu da 1 veya –1 olarak bulunur.

Bu durumda 50 zarftaki sayıların çarpımını en az 15+3 = 18 soruda bulabiliriz.