

Yedinci Antalya Matematik Olimpiyatları

1. $\sqrt{2000^{2002}}$ sayısının onluk sayı sisteminde yazılışında sağdan sıfırdan farklı ilk rakam nedir?

- A) 4 B) 2 C) 8 D) 6 E) 5

2. $a, b, c = a + b + c$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı a, b ve c rakamları için $a^2 + b^2 + c^2$ toplamı neye eşittir? (Burada a, b ifadesi " a tam onda b " kesrini belirtmektedir.)

- A) 55 B) 70 C) 65 D) 60 E) 75

3. İki (farklı veya eşit) asal sayının çarpımı biçiminde gösterilebilen her sayıya "iyi sayı" diyelim. $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $n+1, n+2, \dots, n+k$ sayılarının her biri "iyi sayı" ise, k en fazla kaç olabilir?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 5 E) Sonsuz

4. Bir çember üzerinde sabit bir A noktası alalım. Çember üzerinde alınan bir B noktası için, AB kirişinin uzunluğunun yarıçap uzunluğundan büyük olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{\pi}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için $(f(y))^2 = \frac{1}{2}[f(x+y^2) - f(x)]$ eşitliğini sağlamaktadır. $f(1) \neq 0$ olduğuna göre, $f(2002)$ sayısı kaçtır?

- A) 1000 B) 2001 C) 1001 D) 2000 E) 2002

6. $4^{2002} + 6^{2002}$ sayısının 25 ile bölünmesinden elde edilen kalan kaçtır?

- A) 4 B) 18 C) 12 D) 24 E) 2

7. 50 sayfa bir kitabın sayfaları 1, 2, 3, ..., 99, 100 sayıları ile numaralandırılmıştır. Bu kitaptan bir kaç sayfa koparıp atıldıktan sonra, geriye kalan sayfaların numaralar toplamı 4946 olmuştur. Bu durumda, en fazla kaç sayfa koparılmıştır?

- A) 4 B) 5 C) 8 D) 7 E) 6

8. $[AB]$ doğru parçası çap olmak üzere, bir yarım çember çizilmiş ve bu yarım çember üzerinde C ve D noktaları $|AC| = |CD| = 2$ olacak biçimde alınmıştır. $|AB| = 5$ olduğuna göre, BD kirişinin uzunluğu kaçtır?

- A) 3,3 B) 3,2 C) 3,1 D) 3,4 E) 3,5

9. $\left\lfloor \frac{6x+5}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}$ denklemin gerçel sayılarda çözüm kümesi kaç elemanlıdır? (Burada, $\lfloor \cdot \rfloor$, tamdeğer fonksiyonudur.)
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz çoklukta

10. Kaç tane p asal sayısı için $p^2 + 11$ sayısının tam 6 tane farklı pozitif böleni vardır?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 12 E) Sonsuz çoklukta

11. Yarıçapı 5 birim olan bir çember, yarıçapı 9 birim olan bir başka çembere A noktasında içten teğettir. Büyük çember üzerinde, $|AB| = 12$ birim olacak şekilde seçilen bir B noktasından küçük çembere çizilen teğet parçasının uzunluğu nedir?
A) 11 B) 8 C) 9 D) 10 E) 7

12. 0, 1, 2, ..., 9999 sayıları içinde 7 ve 8 rakamlarının ikisinin de kullanıldığı kaç tane sayı vardır?
A) 982 B) 964 C) 972 D) 974 E) 962

13. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ olmak üzere, $\frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?
A) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

14. $\triangle ABC$ üçgeninin AC kenarı üzerinde bir M noktası ve BC kenarı üzerinde bir N noktası alınmıştır. $[AN]$ ve $[BM]$ doğru parçalarının kesişim noktası O olsun. $Alan(\triangle OMA) = 1$, $Alan(\triangle OBN) = 2$ ve $Alan(\triangle OAB) = 3$ olduğuna göre, $Alan(\triangle MNC)$ nedir?
A) 2 B) $\frac{40}{21}$ C) $\frac{20}{11}$ D) 3 E) $\frac{60}{31}$

15. Yarıçapı 2 birim olan bir çember, bir karenin iki komşu kenarına içten teğet olup, karenin sadece bir köşesinden geçmektedir. Buna göre, karenin kenar uzunluğu kaç birimdir?
A) $2 + \sqrt{2}$ B) 3 C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{5}$ E) $4 - \sqrt{2}$

16. 1, 2, ..., 999, 1000 sayıları verilsin. Bu sayılardan azalan aritmetik dizi oluşturacak şekilde kaç tane sayı üçlüsü seçilebilir? (Örneğin, 3, 2, 1 ve 9, 6, 3 birer azalan aritmetik dizidir.)

- A) 245500 B) $\frac{1}{3} \binom{500}{3}$ C) 247500 D) $\frac{1}{3!} \binom{1000}{3}$ E) 249500

17. a, b, c gerçel sayıları $|a| \leq 3, |b| \leq 2, |c| \leq 1$ koşullarını sağlamak üzere, tüm $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ denklemlerini düşünelim. Bu denklemlerden en az birini sağlayan pozitif gerçel sayıların en büyüğüne x_0 diyelim. x_0 sayısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $2 < x_0 < 3$ B) $1 < x_0 < 2$ C) $0 < x_0 < 1$
D) $3 < x_0 < 4$ E) $4 < x_0 < 5$

18. Bir $ABCD$ dikdörtgeninde AB kenarı üzerinde bir P noktası ve BC kenarı üzerinde bir Q noktası, $\triangle APD, \triangle PBQ$ ve $\triangle QCD$ üçgenlerinin alanları eşit olacak biçimde alınmıştır. Buna göre, $\frac{|AP|}{|PB|}$ oranı nedir?

- A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}+2}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

19. 1 'den 99 'a kadar (1 ve 99 dahil) tüm tek sayıları alalım. Bu sayıların hepsinin toplamına A_1 , tüm ikişerli çarpımlar toplamına A_2 , tüm üçerli çarpımlar toplamına A_3, \dots , tüm 49-arlı çarpımlar toplamına A_{49} ve hepsinin çarpımına A_{50} diyelim. (Örneğin, a, b, c, d sayıları için ikişerli çarpımlar toplamı $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ 'dir.) Buna göre, $A_{50} - A_{49} + A_{48} - A_{47} + \dots + A_2 - A_1$ toplamı neye eşittir?

- A) $-50!$ B) $50!$ C) -1 D) 1 E) $-2^{49} \cdot 49!$

20. $\begin{cases} x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 15x + 5 = 0 \\ x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 10x + 5 = 0 \end{cases}$ denklem sisteminin gerçel çözümlü x_0 ise, $3x_0^3 + 7$ tamsayısının rakamlar toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 13 C) 7 D) 5 E) 16