

Geomania Deneme Sınavı 15

24 Mart 2016

1. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için;

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{a^2 + bc}} \leq \sum_{cyc} \frac{\sqrt{2}}{a + b}$$

olduğunu gösteriniz.

2. Dar açılı ABC üçgeninin içinde bir P noktası alalım. P nin BC, CA, AB ye göre simetrikleri D, E, F olsun. AP, BP, CP ışınları ABC üçgeninin çevrel çemberini sırasıyla L, M, N noktalarında kessin. PDL, PEM, PFN üçgenlerinin çevrel çemberlerinin P den farklı bir noktadan daha ortak olarak geçtiğini gösteriniz.

3. $\mathbf{P}$ sonlu sayıda asal sayı içeren bir küme ve A ise sonsuz sayıda pozitif tamsayı içeren bir küme olsun. Öyle ki A kümesindeki her elemanın $\mathbf{P}$ kümesinde olmayan bir asal çarpanı bulunsun. Sonlu sayıda eleman içeren her altkümesindeki elemanlarının toplam değerinin $\mathbf{P}$ kümesinde olmayan bir asal çarpanı olmasını mümkün kılacak biçimde A nın sonsuz sayıda eleman içeren bir B altkümesi bulunabileceğini gösteriniz.

———— Sınav süresi 4,5 saattir. Her soru 7 puan değerindedir. ————

4. 2015 farklı pozitif tamsayı içinde $a > b$ ve $c > d$ olmak üzere;

$$\left| \frac{a-b}{c-d} - 1 \right| < \frac{1}{10000}$$

olacak şekilde a, b, c, d sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

5. ABC üçgeninin I merkezli içteğet çemberi kenarla D, E, F noktalarında teğettir. $P = AI \cap BC$, $Q = BI \cap AC$, $R = CI \cap AB$, $X = ER \cap FQ$, $Y = DF \cap PR$ ve $Z = DE \cap PQ$ olduğuna göre A, X, Y, Z nin doğrusal olduğunu gösteriniz.

6. Koordinat düzleminde $x^2 + y^2 \leq 10^{10}$ şartını sağlayan kafes noktaları kümesi $\mathcal{S}$ olsun. A ile B her hamlede sırası gelenin $\mathcal{S}$ kümesinden bir nokta seçtiği bir oyun oynuyorlar. Her $n \geq 1$ için n . hamlede seçilen nokta P_n olmak üzere, n . hamleyi yapanın P_n noktasını $|P_n P_{n-1}| \geq |P_{n-1} P_{n-2}|$ şartı sağlanacak şekilde seçmesi gerekiyor ve seçilmiş bir noktanın kendisinin ve orijine göre simetriğinin seçilmesine oyun boyunca izin verilmiyor. Oyun, bu şartları sağlayacak şekilde yeni bir nokta seçmek mümkün olmadığında sona eriyor. Mümkün son hamleyi yapan oyunu kazandığına göre, kimin kazanmayı garanti edecek bir stratejisi vardır?

———— Sınav süresi 4,5 saattir. Her soru 7 puan değerindedir. ————