

Geomania Deneme Sınavı 14

Çözümler

1. Tüm x, y gerçel sayıları için;

$$f(xf(x) + f(x)f(y) + y - 1) = f(xf(x) + xy) + y - 1$$

eşitliğini sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz. **(Kore 2014)**

Çözüm 1. $x = 0$ koyarsak $f(f(0)f(y) + y - 1) = f(0) + y - 1$ elde edilir. O halde f örten fonksiyondur. Çünkü $f(0)$ bir sabittir $f(m)$ reel eksenindeki tüm değerleri tarar. O halde f örten olur. Buradan $f(a) = 0$ olacak şekilde bir a gerçel sayısının varlığını bilebiliriz. İlk eşitlikte $x = a$ koyarsak $f(y - 1) = f(ay) + y - 1$ elde edilir. $y = 1$ koyarsak $f(0) = f(a) + 1 - 1 = 0$ elde edilir. İlk eşitlikte $x = 0$ koyalım. Buradan $f(y - 1) = y - 1$ elde edilir. Bu da $f(x) = x$ demektir.

2. ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O dur. Bu çembere A da çizilen teğetin BC yi kestiği nokta Q olsun. Üçgenin içinde alınan bir P noktası için $\angle PAB = \angle PBC$, $\angle PAC = \angle PCB$ ve $|QA| = |QP|$ ise $\angle AQP = 2\angle OQB$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 2. $AP \cap BC = K$ olsun. KB doğrusu $\triangle APB$ nin çevrel çemberine B noktasında teğettir. O zaman $KB^2 = KP \cdot KA$ dır. KD doğrusu $\triangle APC$ nin çevrel çemberine C de teğettir. O zaman $KC^2 = KP \cdot KA$ dır. Dolayısıyla $KB = KC$ dir. Yani $OK \perp BC$ dir . $OA \perp QA$ olduğunu biliyoruz. O zaman $QAOK$ çemberseldir. O zaman $\angle QPA = \angle QAK = \angle QOK = \alpha$ dır. Son olarak $\angle AQP = 180 - 2\alpha$ ve $\angle OQK = 90 - \alpha$ olduğunu görüyoruz. Ki bu da $\angle AQP = 2\angle OQB$ demektir.

3. Bir pozitif tam sayı iki farklı şekilde iki tam kare toplamı şeklinde yazılabiliyorsa bu tam sayının bileşik sayı olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 3. p asal ve $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ olsun.

$$a^2d^2 - b^2c^2 = a^2d^2 + b^2d^2 - b^2d^2 - b^2c^2 = d^2(a^2 + b^2) - b^2(c^2 + d^2) = (d^2 - b^2) \cdot p \implies (ad + bc)(ad - bc) = (d^2 - b^2) \cdot p \implies p \mid ad + bc \text{ veya } p \mid ad - bc$$

Şimdi $p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$ yazabiliriz. Eğer $p \mid ad + bc$ ise $p \mid ac - bd$ dir. Yani $p \mid ac - bd$ veya $p \mid ad - bc$ dir.

$p \mid ac - bd$ alalım. ($p \mid ad - bc$ de alabiliriz fark etmez) $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ olduğu için $\sqrt{p} > a, b, c, d$ diyebiliriz. O zaman pac olur. Yani $ac - bd = 0$ olması gerekiyor.

$\implies ac = bd$, p asal olduğu için $(a, b) = 1$ dir. Aynı şekilde $(c, d) = 1$ dir. $a \mid d$ olsun. ($d \mid a$ da olabilirdi fark etmez.)

$$\implies d = a \cdot k, \quad c = b \cdot k$$

$\implies p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = b^2k^2 + a^2k^2 = (a^2 + b^2)k^2 \implies k = 1 \implies a = d, b = c$ buradan çelişki elde edilir.

O zaman p bileşik sayıdır. İspat biter.

5. ABC üçgeninde AD, BE, CF yükseklikler olup çevrel çemberin merkezi O ve diklik merkezi H dir. ED ile AB nin kesişimi M ve FD ile AC nin kesişimi N olmak üzere; OH 'nin MN 'yi dik kestiğini gösteriniz.

Çözüm 5. $OH \perp MN$ olması bize kuvvet eksenini hatırlatıyor. O nun ABC üçgeninin çevrel çember merkezi olduğunu biliyoruz. O zaman OH doğrusu üzerinde bir çember merkezi daha bulup M ve N noktalarının bu iki çembere kuvvetlerinin aynı olduğunu gösterirsek ispat biter. Çünkü iki çemberin kuvvet eksenini bu çemberlerin merkezlerini birleştiren doğruya diktir.

Tanım : Diklik merkezi H olan bir ABC üçgenin kenarlarının orta noktaları, yüksekliklerin ayakları ve $|AH|$, $|BH|$, $|CH|$ doğru parçalarının orta noktaları çemberseldir. Bu çembere dokuz nokta çemberi denir ve bu çemberin merkezi K olmak üzere K noktası $|OH|$ doğru parçasının orta noktasıdır.

Şimdi artık OH doğrusunun üzerinde merkezi olan iki çember biliyoruz. M noktasının ABC üçgeninin çevrel çemberine göre kuvveti $MA \cdot MB$ dir. M noktasının dokuz nokta çemberine göre kuvveti $ME \cdot MD$ dir. $ABDE$ dörtgeni kirişler dörtgeni olduğu için $MA \cdot MB = ME \cdot MD$ dir. O zaman M noktası bu iki çemberin kuvvet eksenini üzerindedir. N noktasının ABC üçgeninin çevrel çemberine göre kuvveti $NA \cdot NC$ dir. N noktasının dokuz nokta çemberine göre kuvveti $NF \cdot ND$ dir. $AFDC$ dörtgeni kirişler dörtgeni olduğu için $NA \cdot NC = NF \cdot ND$ dir. O zaman N noktası bu iki çemberin kuvvet eksenini üzerindedir. Yani MN doğrusu bu iki çemberin kuvvet eksenidir. K noktası OH doğrusu üzerinde olduğu için $OH \perp MN$ dir. İspat biter.

6. Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için;

$$x+y+z \geq 4xyz \left(\frac{(2-x)(y-2)+K}{(2x+2y+1)^2} + \frac{(2-y)(z-2)+K}{(2y+2z+1)^2} + \frac{(2-z)(x-2)+K}{(2z+2x+1)^2} \right)$$

olmasını sağlayan en büyük K gerçel sabitini bulunuz ve bu K gerçel sabiti için eşitlik durumunu bulunuz.

Çözüm 6. Tamsayı değerler vererek K nın yaklaşık olarak 5 olduğu tahmin edilebilir. Biz $K = 5$ sağladığımızı göstereyim ve bir eşitlik durumu bulalım.

Bizim

$$\frac{1}{4xy} \geq \frac{(2-x)(y-2)+5}{(2x+2y+1)^2}$$

olduğunu göstermemiz kafidir. İfadeyi düzenlersek

$$\frac{1}{4xy} \geq \frac{-xy+2x+2y+1}{(2x+2y+1)^2}$$

göstermeliyiz. $x+y=a, xy=b$ diyelim. Öncelikle ifademizi düzenlemeye devam edelim. Bizim;

$$\frac{1}{4b} \geq \frac{2a-b+1}{(2a+1)^2}$$

yani $(2a+1)^2 \geq 4b(2a-b+1) \Rightarrow 4a^2+4b^2+4a+1 \geq 8ab+4b$ göstermemiz yeterli. Bu da $(2b-(2a+1))^2 \geq 0$ dan doğrudur. Eşitlik ise $x=y=z$ için $2x^2-4x-1=0$ yani $x=y=z=\frac{\sqrt{6}+2}{2}$ için sağlanır. Sonuç olarak $(K)_{max.} = 5$ idir. İspat biter.

4. Başlangıçta 2014×2014 satranç tahtasının birim kareleri siyah veya beyaz renge boyanmıştır. Bu tahtanın tüm sütun permütasyonlarıyla elde edilen $2014!$ satranç tahtasının en fazla kaç farklı boyanmış köşegeni (en sol ve en üst birim karede başlayan) olabilir?

Çözüm:

Cevap: $2^{2014} - 2014$. Başlangıçtaki satranç tahtası A , tahtanın sütunları $i = 1, 2, \dots, 2014$ olmak üzere C_i ve C_i sütununun birim kareleri de $(c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,2014})$ olarak boyanmış olsunlar. Bir kaç sütun permütasyonu ile A dan elde edilen tahta A^* ve bu tahtanın köşegeni de $D(A^*)$ olsun. Sorunun çözümü bir gözleme dayanıyor: $D(A^*)$ köşegeninin birim kareleri farklı sütunların birim karelerinden oluşuyorlar. $c_{i,j}$ dan farklı rengi $\bar{c}_{i,j}$ ile göstereceğiz.

En az 2014 farklı köşegenin elde edilemeyeceğini gösterelim:

Durum 1. Başlangıçta tüm sütunlar farklı boyanmışlar. O zaman her $l = 1, 2, \dots, 2014$ için $(\bar{c}_{l,1}, \bar{c}_{l,2}, \dots, \bar{c}_{l,2014})$ köşegeni elde edilemez.

Durum 2. l ve m numaralı köşegenler aynı boyanmışlar: $C_l = (c_{l,1}, c_{l,2}, \dots, c_{l,2014})$
 $= (c_{m,1}, c_{m,2}, \dots, c_{m,2014}) = C_m$. O zaman her $s = 1, 2, \dots, 2014$ değeri için $(\bar{c}_{l,1}, \bar{c}_{l,2}, \dots, \bar{c}_{l,s-1}, c_{l,s}, \bar{c}_{l,s+1}, \dots, \bar{c}_{l,2014})$ gibi boyanmış köşegen elde edilemez.

Her iki durumda en az 2014 köşegen elde edilemiyor.

Başlangıçtaki tahtanın köşegen üzerinde yerleşen birim kareleri siyah tüm diğer birim kareleri ise beyaz renge boyanmış olsunlar. Bu durumda bariz şekilde tam olarak 2013 siyah birim kare içeren köşegenler dışında tüm köşegenler elde ediliyor dolayısıyla cevap $2^{2014} - 2014$ oluyor.