

Geomania Deneme Sınavı 13

Çözümler

1. Tüm x, y gerçel sayıları için;

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2$$

eşitliğini sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

Çözüm 1. $y = f(x)$ alırsak $f(x^2 + f(x)) + f(0) = 2f(f(x)) + 2(f(x))^2$ elde edilir. Ayrıca $y = -x^2$ alırsak $f(0) + f(x^2 + f(x)) = 2f(f(x)) + 2x^4$ elde edilir. $f(x) = x^2$ veya $f(x) = -x^2$ olabilir. Her türlü $f(0) = 0$ olduğunu biliyoruz. $y = 0$ koyarsak $f(y) + f(-y) = 2y^2$ elde edilir. O halde $f(x) = x^2$ olduğu açıktır.

2. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninin köşegenleri birbirine dik olarak E noktasında kesişiyor. $[AD]$ kenarı üstünde yer alan A dan farklı bir P noktası $|PE| = |EC|$ koşulunu sağlıyor. BCD üçgeninin çevrel çemberi de $[AD]$ yi yine A dan farklı bir Q noktasında kesiyor. A dan geçen ve EP doğrusuna P noktasında teğet olan çember ise, $[AC]$ doğru parçasını R noktasında kesiyor. B, R, Q noktaları doğrudan ise, $s(\widehat{BCD}) = 90^\circ$ olduğunu gösteriniz. (Ortaokul II. Aşama 2012)

Çözüm 2. (ARD) çemberi BD ile F de kesişsin. E noktasının $(ARFD)$ çemberine göre kuvveti

$$ER \cdot AE = EF \cdot ED$$

E noktasının (ARP) çemberine göre kuvveti

$$ER \cdot AE = EP^2 = EC^2$$

Bu durumda, $EF \cdot ED = EC^2$ dir. Bu da CE doğrusunun (FCD) çemberine teğet olduğu, diğer bir ifadeyle $\angle ECF = \angle EDC$ olduğu anlamına gelir. $ARFD$ kirisler dörtgeni olduğu için $\angle ADE = \angle ERF$ dir. $\angle QDB + \angle BDC = \angle FRC + \angle RCF$ olduğu için, $\angle RBC = \angle RFC$ olacaktır. Bu da $BCFR$ dörtgeninin deltoid olduğunu gösterir. (Göremediyseniz, B nin RC ye göre simetriğini alın. Bu noktaya B' deyin. $\angle RBC = \angle RB'C = \angle RFC$ olduğu için $B' \in BD$ ve dolayısıyla $F = B'$ olacaktır.) Deltoidten dolayı da $\angle BCR = \angle RCF = \angle BDC$ olacaktır. $\angle BEC = 90^\circ$ olduğu için $\angle BCD = 90^\circ$ dir.

4. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için;

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 + \frac{(c-a)^2}{ab+bc+ca}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4. İfadeyi düzenlersek;

$$\left(ab + \frac{bc^2}{a} - 2bc\right) + \left(b^2 + \frac{ca^2}{b} + \frac{ab^2c}{c} - 3ab\right) \geq 0$$

elde edilir. Bu da $A.G.O$ dan doğrudur. İspat biter.

5. BC çaplı O merkezli bir S çemberi verilsin. Çember üzerinde alınan bir A noktası için $\angle AOB < 120^\circ$ dir. C yi içermeyen AB yayının orta noktası D olmak üzere O dan geçen DA ya paralel doğru AC yi I da kessin. OA nın orta dikme doğrusu S çemberini E ve F de kestiğine göre I nın CEF üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi olduğunu gösteriniz.

Çözüm 5. AD ile BD eş ölçülü yaylardır, yani; $\angle BOD = \angle AOD$ dir. $OA = OC$ olduğundan $OD \parallel AC$ olur ve bu demektir ki $OIAD$ paralelkenardır. $[EF]$, $[OA]$ 'nın orta dikmesi ve O merkez olduğundan, $[OA]$ 'da $[EF]$ 'nin orta dikmesidir. Bu halde $OEAF$ bir eşkenardörtgen olacaktır. $AE = AF$ olduğundan $\angle ECA = \angle FCA = \angle AFE$ dir ve $AF = AI$ olduğundan $\angle EFI = \angle CFI$ olacağını görebiliriz. Buna göre CEF üçgeni için CI ve FI iç açıortaylar olup kesim noktaları olan I iç merkezdir.

6. n bir pozitif tamsayı ve p bir asal sayı olmak üzere a, b, c tamsayıları;

$$a^n + pbc = b^n + pca = c^n + pab$$

eşitliğini sağlıyorsa $a = b = c$ olduğunu gösteriniz. (**IMO Shortlist**)

Çözüm 6. Eğer a, b, c den ikisi eşitse $a = b = c$ olduğunu kolayca görebiliriz. O halde $a \neq b \neq c$ kabul edebiliriz. Eşitlikleri kullanırsak $a^n - b^n = -p(b-c)$ elde edilir. Benzer şekilde yapıp çarpılırsa;

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} \cdot \frac{b^n - c^n}{b-c} \cdot \frac{c^n - a^n}{c-a} = -p^3$$

olduğu elde edilir. Ayrıca eğer n tekse $a^n - b^n$ ile $a-b$ aynı işarete sahip olur ve bu çarpım pozitif olur çelişki. O halde n çifttir. Şimdi de $a-b, b-c, c-a$ nın en büyük ortak böleninin d olduğunu varsayalım ve $a-b = du, b-c = dv, c-a = dw$, $(u, v, w) = 1$ ve $u + v + w = 0$ olduğunu bulabiliriz. $a^n - b^n = -p(b-c)$ den $a-b \mid p(b-c)$ yani $u \mid pw$ ve benzer biçimde $v \mid pu, w \mid pv$ elde edilir. $(u, v, w) = 1$ ve $u + v + w = 0$ olduğundan u, v, w den en çok bir tanesi p ile

bölünebilir. Şimdi varsayalım ki p hiçbirini bölmesin o halde $v \mid u$, $u \mid w$ ve $w \mid v$ olduğu elde edilir. $|v| \geq |w| \geq |u| \geq |v|$ olduğundan $|u| = |v| = |w|$, $(u, v, w) = 1$ ve $u + v + w = 1$ durumunda bunu sağlayan u, v, w olmadığından bu durum mümkün değildir. O halde p sayısı u, v, w den tam olarak birini bölebilir. Genelliği bozmaksızın $p \mid u$ olsun. $u = pu_1$ yazalım. Şimdi de az önceki benzer biçimde $v \mid u_1$, $u_1 \mid w$ ve $w \mid v$ elde edilir. $|v| \geq |w| \geq |u_1| \geq |v|$ ve $(u, v, w) = 1$ olduğundan $|u_1| = |w| = |v| = 1$ elde edilir. $pu_1 + v + w = 0$ eşitliği ise ancak $p = 2$ için sağlanır. Buradan $v + w = -2u_1 = 2, -2$ elde edilir. Buradan $w = v(= 1)$ ve $u = -2v$ buradan $a - b = -2(b - c)$ elde edilir. n çift olduğundan $n = 2k$ yazabiliriz. $a^n - b^n = -p(b - c)$ eşitliğini yeniden yazarsak $(a^k + b^k)(a^k - b^k) = -2(b - c) = a - b$ elde edilir. $a - b \mid a^k - b^k$ olduğundan $a^k + b^k$ ya 1 ya da -1 olmalıdır. O halde a, b den biri tek biri çift olmalı ancak $a - b = -2(b - c)$ çift olamaz. Çelişki. O halde $a = b = c$ olduğu elde edilir.

3. Uzayda herhangi üçü doğrudan olmayan k nokta var, her nokta ikilisi bir doğru parçasıyla birleştirilmiştir ve her doğru parçası mavi veya kırmızı renklerden birine boyanmıştır. Eğer tam olarak bir kenarı mavi olan bir üçgen ve herhangi ikisi aynı renkli doğru parçasıyla birleştirilmiş 13 nokta bulunmuyorsa k en çok kaç olabilir?

Çözüm:

A noktalar kümesinin bütün nokta ikililerini birleştiren doğru parçaları kırmızıysa A kümesine *kırmızı bileşik* küme diyelim. A_1 en fazla eleman içeren kırmızı bileşik küme olsun (en fazla eleman içeren kırmızı bileşik küme sayısı birden fazlaysa kümelerden herhangi birini alabiliriz). A_1 kümesi en fazla eleman içerdiğinden A_1 dışında herhangi bir c noktası A_1 in tüm noktalarına kırmızı doğru parçalarıyla birleşemez ve tam olarak bir kenarı mavi olan üçgen bulunmadığından c noktası A_1 in tüm noktalarına mavi doğru parçalarıyla birleştirilme zorundadır. Benzer şekilde her $k \geq 2$ için $|\cup_{i=1}^k A_i| = N$ olan $\cup_{i=1}^{k-1} A_i$ kümesinin dışındaki noktalardan en fazla eleman içeren kırmızı bileşik A_k kümeleri tanımlayalım. Yukarıda gösterdiğimiz gibi, A_i dışındaki her c noktası A_i in tüm noktalarına mavi doğru parçalarıyla birleştirilmiştir. Dolayısıyla her $i \neq j$ için A_i ve A_j nin noktaları sadece mavi doğru parçalarıyla birleştirilmiştir. Tüm nokta ikilileri aynı renkli doğru parçalarıyla birleştirilmiş 13 nokta bulunmadığından $|A_i| \leq 12$ ve $k \leq 12$ elde ediyoruz. Buradan $N \leq 12 \cdot 12 = 144$. $|A_i| = 12$; $k = 1, 2, \dots, 12$ durumunda $N = 144$ oluyor.