

# **Türkiye Ulusal Matematik Olimpiyatları**

*Birinci Aşama Deneme Sınavı– 24 Mart 2016*

## **DENEME SINAVI**

### **1. Deneme**

**Soru Sayısı: 32**

**Sınav Süresi: 180 dakika**

**Başarılar Dileriz...**

## Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 1

1.  $ABC$  üçgeninin  $[AC]$  kenarının orta noktası  $D$  ;  $ABD$  üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi  $A_1$ ,  $AB$ 'ye teğet olan dış teğet çemberinin merkezi  $A_2$  olsun. Benzer şekilde  $CBD$  üçgeni için  $C_1$  ve  $C_2$  noktalarını tanımlayalım.  $|A_1C_1| = |C_1C_2|$  ve  $|A_1A_2| + 5 = |A_2C_2|$  ve  $A(A_1A_2C_1)/A(C_1C_2A_2) = 3/8$  eşitlikleri sağlanıyorsa  $A(A_1A_2C_2C_1)$  nedir?

- a)  $13\sqrt{3}$       b) 17      c)  $\frac{55\sqrt{3}}{4}$       d)  $\frac{41\sqrt{7}}{3}$       e) Hiçbiri

2.  $ab + bc + ca = 1$  eşitliğini sağlayan  $a, b, c$  tamsayıları için  $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = 3^x - 5^y$  eşitliğini sağlayacak şekilde  $x, y$  tamsayılarının bulunmasını mümkün kılan kaç  $(a, b, c)$  üçlüsü vardır?

- a) 12      b) 24      c) 30      d) 32      e) Hiçbiri

3. Tüm  $x, y, z$  pozitif gerçel sayıları için;

$$x + y + z \geq 4xyz \left( \frac{(2-x)(y-2) + K}{(2x+2y+1)^2} + \frac{(2-y)(z-2) + K}{(2y+2z+1)^2} + \frac{(2-z)(x-2) + K}{(2z+2x+1)^2} \right)$$

olmasını sağlayan en büyük  $K$  gerçel sabiti kaçtır?

- a)  $3\sqrt{3}$       b) 6      c) 5      d) 4      e) Hiçbiri

4.  $1, 2, \dots, 20$  sayılarının her biri kırmızı ve mavi renklere birine, her  $k = 1, 2, \dots, a$  için farkları  $k$  olan iki kırmızı ve iki mavi sayı bulunacak biçimde boyanabiliyorsa,  $a$  nın alabileceği en büyük değer nedir?

- a) 14      b) 15      c) 16      d) 17      e) 18

## Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 1

5.  $ABC$  üçgeninde  $\angle BAC$  açısının açıortayı  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberini  $E$  noktasında kesiyor.  $E$  den  $AC$  ye inilen dik ayağı  $H$  ve  $|AB| = 4, |AH| = 5$  olduğuna göre  $|CH|$  nedir?

- a)  $\frac{1}{2}$                       b) 1                      c)  $\frac{3}{2}$                       d) 2                      e) 3

6.  $p, q$  asal sayılar ve  $m, n$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere;

$$2^m + 4p^3 + p + q^2 = 3^n + q^3 + 4q + 7p^2$$

eşitliğini sağlayan kaç  $(p, q, m, n)$  dördlüsü vardır?

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4                      e) Hiçbiri

7. Pozitif tamsayılardan oluşan sonlu  $A$  kümesi üzerinden  $B = \left\{ \frac{a+b}{c+d} \mid a, b, c, d \in A \right\}$  kümesi tanımlanıyor.  $2|A|^2 - |B|$  nin alabileceği kaç farklı pozitif tamsayı değeri vardır?

- a) 5                      b) 4                      c) 3                      d) 2                      e) Hiçbiri

8.  $99 \times 99$  satranç tahtasının bazı birim kareleri, birim karelerden oluşan her  $5 \times 5$  kare en az 6 işaretlenmiş birim kare içerecek biçimde işaretlenmiştir. İşaretlenmiş birim kare sayısı en az kaç olabilir?

- a) 2091                      b) 2102                      c) 2261                      d) 2303                      e) Hiçbiri

## Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 1

9.  $ABC$  dik üçgeninde  $s(\widehat{BAC}) = 90^\circ$  olmak üzere  $A$  noktasından hipotenüse inilen dikme ayağı  $D$  ve  $|BD| = 6$ ,  $|DC| = 9$  idir.  $ABD$  ve  $ACD$  nin iç merkezlerini birleştiren doğru  $[AB]$  ve  $[AC]$  yi sırasıyla  $K$  ve  $L$  de kesiyorsa  $\frac{A(ABC)}{A(AKCL)}$  kaçtır?

- a)  $\sqrt{6}$                       b) 3                      c) 4                      d) 5                      e) Hiçbiri

10.  $k \geq 3$  için aşağıdaki şartları sağlayan  $m, n \in \mathbf{Z}^+$  bulunabiliyorsa  $k$  sayısına *iyi sayı* deniyor.

- (i.)  $1 < m, n < k$   
(ii.)  $(m, k) = (n, k) = 1$   
(iii.)  $m + n > k$   
(iv.)  $k \mid (m - 1)(n - 1)$

Buna göre ilk 100 sayı içinde kaç adet iyi sayı vardır?

- a) 19                      b) 27                      c) 36                      d) 43                      e) Hiçbiri

11.  $2abx^4 - a^2x^2 - b^2 = 1$  eşitliğini sağlayan  $x$  tamsayısı bulunmasını mümkün kılan kaç farklı  $(a, b)$  tamsayı ikilisi vardır?

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4                      e) Hiçbiri

12.  $4 \times 4$  satranç tahtasının birim karelerinin merkezlerine 16 nokta yerleştirilmiştir. Herhangi üç noktası bir ikizkenar üçgenin köşeleri olmayacak şekilde en çok kaç nokta seçilebilir?

- a) 5                      b) 6                      c) 7                      d) 8                      e) 9

## Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 1

13. Dar açılı  $ABC$  üçgeninde  $C$  köşesinden inilen dikmenin ayağı  $D$  ve  $H$  diklik merkezidir. Üçgenin çevrel çemberinin merkezi  $\angle DHB$  açısının açıortay doğrusu üzerindeyse  $s(\widehat{CAB})$  kaçtır?

- a) 30                      b) 36                      c) 54                      d) 60                      e) 72

14. Bir  $n$  pozitif tamsayısına eğer;

$$1 + 2 + \cdots + (k - 1) = (k + 1) + (k + 2) + \cdots + n$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir  $k$  tamsayısı ( $1 < k < n$ ) bulunuyorsa  $k$  ya *harika* deniyor.

$$2015^{2015} < \frac{N}{2015^{2015}} < 2015^{2015} + 4$$

sağlanacak şekilde kaç harika  $N$  sayısı vardır?

- a) 4                      b) 3                      c) 2                      d) 1                      e) Hiçbiri

15.  $a, b, c$  pozitif gerçel sayıları  $12 \geq 21ab + 2bc + 8ca$  koşulunu sağlıyorsa;

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$$

ifadesinin alabileceği değer en az kaç olabilir?

- a) 8                      b)  $\frac{15}{2}$                       c) 7                      d)  $\frac{13}{2}$                       e) 6

16.  $n$  kentten oluşan bir ülkede hava yolları şirketi bazı kent ikilileri arasında her kentten her kente direkt veya aktarmalı ulaşım olacak biçimde tek yönlü uçuşlar düzenliyor. Bu tür her uçuş düzenlemesinde her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçuş içeren kapalı güzergah en fazla 2016 uçuş içeriyorsa,  $n$  en fazla kaç olur?

- a) 45                      b) 46                      c) 63                      d) 88                      e) Hiçbiri

## Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 1

17. Alanı 34 olan dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin kenarlarından dışarı doğru  $A_1, B_1$  ve  $C_1$  merkezli kareler kuriliyor.  $A_1B_1C_1$  üçgeninin kenar uzunlukları 8, 9 ve 12 olduğuna göre  $ABC$  üçgeninin kenar uzunluklarının kareleri toplamı kaçtır?

- a) 51                      b) 68                      c) 85                      d) 96                      e) 112

18.  $\mathcal{S} = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$  kümesi veriliyor.  $\mathcal{S}$  kümesinden seçilen  $n$  farklı sayıyı  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  şeklinde gösterelim. Eğer;

$$\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \dots + \frac{1}{A_n} = 1$$

olduğuna göre  $n$  sayısı en az kaç olabilir?

- a) 6                      b) 8                      c) 10                      d) 12                      e) Hiçbiri

19.  $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 + a_n - na_{n-2} = -n^2 + 3n - 1$  ve  $a_0 = 1, a_1 = 3$  olduğuna göre  $a_{20}$  sayısının rakamları toplamı kaçtır?

- a) 12                      b) 24                      c) 27                      d) 33                      e) Hiçbiri

20. Aslı  $8 \times 8$  bir kareyi satranç tahtası şeklinde boyuyor. Sonra bir tane nokta seçiyor ( $1 \times 1$  lik karelerin dışında). Berk ise sınırları  $1 \times 1$  lik karelerin sınırları olan istediği bir çokgen alıyor ve seçilen noktanın bu çokgenin içinde olup olmadığını soruyor. En az kaç soruyla seçilen noktanın hangi renk olduğunu anlayabilir?

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4                      e) Hiçbiri

## Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 1

21. Çeşitkenar bir  $ABC$  üçgeninde  $s(\widehat{ABC}) = 40^\circ$ ,  $s(\widehat{ACB}) = 60^\circ$ ,  $s(\widehat{BAC}) = 80^\circ$  olarak veriliyor. İçteğet çemberin merkezi  $I$  ve içteğet çemberin  $[BC]$  kenarını kestiği nokta  $T$  olsun.  $M$  noktası,  $[BC]$  kenarının orta noktası ve  $H$  noktası,  $ABC$  üçgeninde  $A$  dan çizilen dikmenin ayağı olmak üzere  $AH$  ve  $IM$  doğrularının kesişim noktası  $E$  olsun. Buna göre  $s(\widehat{TEH})$  nedir?

- a) 10                      b) 20                      c) 30                      d) 40                      e) 50

22.  $p \mid q^r + 1$ ,  $q \mid r^p + 1$ ,  $r \mid p^q + 1$  olacak şekilde kaç adet  $(p, q, r)$  asal sayı üçlüsü vardır?

- a) 0                      b) 6                      c) 12                      d) 18                      e) Hiçbiri

23.  $f$  ve  $g$  fonksiyonları tüm  $x \neq 1$  gerçel sayıları için,

$$f(2x + 1) + g(3 - x) = x$$

$$f((3x + 5)/(x + 1)) + 2g((2x + 1)/(x + 1)) = x/(x + 1)$$

koşullarını sağlıyorsa,  $f(2015)$  nedir?

- a) 1008                      b)  $\frac{4024}{3}$                       c)  $\frac{6044}{7}$                       d)  $\frac{4034}{5}$                       e) 3019

24. Yalnızca 1, 2, 3 rakamları kullanılarak, ilk ve son basamaklarında aynı rakam yer alan ve herhangi ardışık iki basamağında aynı rakam yer almayan kaç farklı 10 basamaklı pozitif tam sayı yazılabilir?

- a) 768                      b) 642                      c) 564                      d) 510                      e) 456

## Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 1

**25.** Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin  $A, B, C$  köşelerine ait yüksekliklerin ayakları sırasıyla,  $D, E, F$  dir.  $|DF| = 3, |FE| = 4, |DE| = 5$  ise  $DE$  ye teğet olan  $C$  merkezli çemberin yarıçapı nedir?

- a) 7                      b) 6                      c) 5                      d) 4                      e) 3

**26.**  $a, b$  pozitif tamsayılar olmak üzere  $ab - 1$  ifadesi  $a^2 + b^2$  yi tam olarak bölüyorsa  $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$  kaç farklı değer alabilir?

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4                      e) Hiçbiri

**27.**  $x + y + z = 2$  ,  $(x + y)(y + z) + (y + z)(z + x) + (z + x)(x + y) = 1$  ,  $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) = -6$  eşitliğini sağlayan kaç  $(x, y, z)$  gerçel sayı üçlüsü vardır?

- a) 0                      b) 3                      c) 6                      d) 9                      e) 12

**28.** Bir sergide her biri tam olarak  $k$  renk kullanılarak çizilmiş 100 tablo bulunmaktadır. Bu tablolardan herhangi 20 sinde ortak bir renk bulunup tabloların tamamında ortak bir renk bulunmuyorsa,  $k$  nin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 18                      b) 19                      c) 20                      d) 21                      e) 22

## Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 1

**29.**  $ABC$  üçgeninde  $|AB| = 18$ ,  $|AC| = 24$  ve  $m(\widehat{BAC}) = 150^\circ$  dir.  $D$  noktası  $[AB]$ ,  $E$  noktası  $[AC]$  ve  $F$  noktası  $[BC]$  kenarları üstünde olmak üzere,  $|BD| = 6$ ,  $|CE| = 8$  ve  $|CF| = 2|BF|$  dir.  $ABC$  üçgeninin diklik merkezi  $H$  noktasının  $D$ ,  $E$  ve  $F$  noktalarına göre simetrikleri sırasıyla,  $H_1$ ,  $H_2$  ve  $H_3$  noktaları ise,  $H_1H_2H_3$  üçgeninin alanı nedir?

- a) 70                      b) 72                      c) 84                      d) 96                      e) 108

**30.**  $n$  den küçük ve  $n$  ile aralarında asal olan tam olarak 20 tane pozitif tek tam sayı bulunmasını sağlayan kaç  $n$  pozitif tam sayısı vardır?

- a) 5                      b) 4                      c) 3                      d) 2                      e) Hiçbiri

**31.**  $(a, b)$  ikilisinin  $(1, 2)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(5, 7)$ ,  $(7, 11)$  değerlerinden kaçını için  $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1$  polinomunun tam olarak bir gerçel kökü vardır?

- a) 4                      b) 3                      c) 2                      d) 1                      e) 0

**32.** Köşeleri, verilen bir düzgün yirmigenin köşelerinden dördünde yer alan kaç deltoid vardır?

- a) 105                      b) 100                      c) 95                      d) 90                      e) 85