ANALİZ-CEBİR

I-TAM VE KESİR DEĞER

x gerçel sayısı için $n \leq x < n+1$ eşitsizliğini sağlayan n tam sayısına x'in *tam değeri* denir ve $[|x|]$ ile gösterilir. $x - [|x|]$ ifadesi ise x'in *kesir değeri* olarak adlandırılır ve $\{x\}$ ile gösterilir. $[|x|] \leq x < [|x|]+1$ olduğundan $0 \leq \{x\} < 1$ dir. Yani kesir değer her zaman negatif olmayan ve 1 den küçük bir gerçel sayıdır.

Örnek: $x + \dfrac{11}{2} = [|x|]^2$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

Çözüm: $x + \dfrac{11}{2} = [|x|]^2$ bir tamsayı olduğu için, $n \in \mathbf{Z}$ olmak üzere, $x = \dfrac{2n+1}{2}$ şeklinde yazılabilir $\left(n \leq \dfrac{2n+1}{2} < n+1 \text{olduğundan } [|x|] = [|\dfrac{2n+1}{2}|] = n\right)$. Bu durumda $\dfrac{2n+1}{2} + \dfrac{11}{2} = [|x|] = n^2$ dir ve buradan da $n^2 - n - 6 = 0$ bulunur. Denklemin kökleri $n = 3$ ve $n = -2$ dir. $n = 3$ için $x = \dfrac{7}{2}$, $n = -2$ için $x = \dfrac{-3}{2}$ bulunur. Buna göre çözüm kümesi $\left\{\dfrac{-3}{2}, \dfrac{7}{2}\right\}$ dir.

Örnek: $\{x\}^2 = \dfrac{x}{2}$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

Çözüm: $\{x\} = x - [|x|]$ olduğundan $(x - [|x|])^2 = \frac{x}{2}$ buradan $x^2 - 2x[|x|] + [|x|]^2 = \dfrac{x}{2}$ yazıp $[|x|] = n$ alırsak $2x^2 - (4n+1)x + 2n^2 = 0$ buluruz. Buradan $x_{1,2} = \dfrac{4n+1 \pm \sqrt{(4n+1)^2 - 16n^2}}{4} = \dfrac{4n+1 \pm \sqrt{8n+1}}{4}$ çıkar.

$x = \dfrac{4n+1+\sqrt{8n+1}}{4}$ ise $n \leq x < n+1$ olduğu için, $n \leq \dfrac{4n+1+\sqrt{8n+1}}{4} < n+1$ bulunur. Bu durumda $\sqrt{8n+1} < 3$ yani $8n+1 < 9$ dur. Yani $n < 1$ olmalıdır. Aynı zamanda $\sqrt{8n+1}$ ifadesinin gerçel olabilmesi için $n \geq \dfrac{-1}{8}$ yani $n \geq 0$ olmalıdır. $n = 0$ ise $x = \dfrac{1}{2}$ bir çözümdür.

$x = \dfrac{4n+1-\sqrt{8n+1}}{4}$ ise, yine $n \leq x < n+1$ eşitsizliğini kullanarak $8n+1 \leq 1$ sonucuna ulaşırız. Buradan da $n \leq 0$ bulunur. Yine $8n+1 \geq 0$, $n \geq \dfrac{-1}{8}$, $n \geq 0$ eşitsizliklerinden $n = 0$ olmalıdır. $n = 0$ için $x = 0$ bir diğer çözümdür.

Sonuç olarak çözüm kümesi $\left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$ dir.

II- EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde ilk olarak, bu kitapta ve matematik olimpiyatlarına yönelik diğer kitaplarda karşılaşılabilecek soruların birçoğunu çözmek için yeterli olan temel eşitsizlikleri,ikinci kısımda da bu eşitsizliklerin genellemeleri ve bazı daha az kullanılan diğer eşitsizlikleri vereceğiz.

1. TEMEL EŞİTSİZLİKLER

Tüm a, b gerçel sayıları için $(a-b)^2 \geq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı aşikardır. Bu temel eşitsizlik birçok problemin çözümünde kullanılabilir. Benzer şekilde $a > b$ eşitsizliğinin $a-b > 0$ eşitsizliğine denk olması da bir temel özellik olarak verilebilir.

Örnek: Birbirinden farklı a, b pozitif gerçel sayıları için

$$a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $(a^3+b^3) - (a^2b+ab^2) = (a^2-b^2)(a-b) = (a+b)(a-b)^2$ yazarsak $(a+b)(a-b)^2 > 0$ olduğundan verilen eşitsizlik ispatlanmış olur.

Örnek: Tüm x, y, z gerçel sayıları için

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq yz + zx + xy$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $(x^2+y^2+z^2) - (yz+zx+xy) = \frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2zx-2xy) = \frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \geq 0.$

Ortalama Eşitsizlikleri

$(a-b)^2 \geq 0$ eşitsizliğinden $a^2+b^2 \geq 2ab$ elde edilir. Buradan negatif olmayan x ve y gerçel sayıları için $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ bulunur. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki terime x ve y nin aritmetik ortalaması, sağ tarafındaki terime de geometrik ortalaması adı verilir. Bu eşitsizlik genelleştirilerek $x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitif gerçel sayıları için **Aritmetik-Geometrik ortalama** eşitsizliği $(AO \geq GO)$ elde edilir:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Eşitlik ancak ve ancak $x_1 = \cdots = x_n$ durumunda sağlanır.

Örnek: x, y, z pozitif gerçel sayıları için $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $AO \geq GO$ eşitsizliğini kullanarak istenilen eşitsizliğe bir adımda ulaşabiliriz:

$$\frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right) \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3} = xyz.$$

Örnek: x, y gerçel sayıları için

$$\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{3} \geq \frac{x^3y + y^3x}{2}$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $(x - y)$ ile $(x^3 - y^3)$'ün işaretleri aynı olduğu için çarpımları negatif olamaz. Buradan $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ elde edilir. Diğer taraftan $AO \geq GO$ eşitsizliğini kullanarak elde ettiğimiz $x^2 + y^2 \geq 2xy$ eşitsizliğinden $(x^2 + y^2)^2 \geq 2xy(x^2 + y^2) = 2x^3y + 2xy^3$ buluruz. İçler dışlar çarpımı yaparak ispatlamak istediğimiz eşitsizliği $(x^4+2x^2y^2+y^4)+(x^4+y^4) \geq 3(x^3y+xy^3)$ şeklinde yazarsak sol tarafın $(x^2+y^2)^2 + (x^4 + y^4)$ ifadesine eşit olduğu, onun da $(2x^3y + 2xy^3) + (x^3y + xy^3) = 3x^3y + 3xy^3$ den büyük veya eşit olduğu görülür.

Örnek: x, y, z pozitif gerçel sayıları için $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $AO \geq GO$ eşitsizliğini kullanarak $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}$ bulunur.

Yukarıdaki örnekte yer alan $\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ ifadesinden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif gerçel sayıları için genelleştirerek $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$ ifadesi elde edilir ve Harmonik ortalama olarak adlandırılır. Bu durumda **Geometrik-Harmonik ortalama** eşitsizliği $(GO \geq HO)$ kolaylıkla ispatlanabilir: $x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitif gerçel sayıları için

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

dir.

Örnek: x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $AO \geq GO \geq HO$ eşitsizliklerini kullanarak $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{3}{y+z+z+x+x+y}$ bulunur. Buradan $(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{9}{2}$ elde edilir. Çarpmayı dağıtırsak $3 + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{9}{2}$, buradan da $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ eşitsizliğini elde ederiz.

Aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaya ek olarak karesel ortalamayı $\sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$ şeklinde tanımlayabiliriz. Bu durumda yukarıdaki gözlemleri de birleştirerek ortalama eşitsizlikleri teoremini verebiliriz.

Teorem: Ortalama Eşitsizlikleri

$x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitif gerçel sayıları için

$$AO = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad KO = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}, \quad GO = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}, \quad HO = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

$$EB = \text{En Büyük}\{x_1, \cdots, x_n\}, \quad EK = \text{En Küçük}\{x_1, \cdots, x_n\}$$

olarak tanımlanan aritmetik, karesel, geometrik, harmonik ortalamalar ve kümenin en büyük ve en küçük elemanı için

$$EB \geq KO \geq AO \geq GO \geq HO \geq EK$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Her biri için eşitlik ancak ve ancak $x_1 = \cdots = x_n$ durumunda sağlanır.

Örnek: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ pozitif gerçel sayıları için

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $AO \geq HO$ eşitsizliğini kullanarak

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

yazıp, içler dışlar çarpımı yaparak istenilen eşitsizlik ispatlanır.

Örnek: $x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 < (EB\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$$

eşitsizliğini ispat ediniz.

Çözüm: $(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) + (x_2 + x_3 + \cdots + x_n) + \cdots + (x_{n-1} + x_n) + x_n$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
(EB\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) &\geq x_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \\
&\quad x_2(x_2 + \cdots + x_n) + \cdots + \\
&\quad x_{n-1}(x_{n-1} + x_n) + \\
&\quad x_n^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k<j} x_k x_j \\
&> \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k<j} x_k x_j\right] \\
&= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Örnek: Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\sqrt{x^4 + y^2z^2} + \sqrt{y^4 + z^2x^2} + \sqrt{z^4 + x^2y^2} \geq \sqrt{2}(xy + yz + zx)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $KO \geq AO$ eşitsizliğinden

$\sqrt{\dfrac{x^4+y^2z^2}{2}} \geq \dfrac{x^2+yz}{2}$, $\sqrt{\dfrac{y^4+z^2x^2}{2}} \geq \dfrac{y^2+zx}{2}$, $\sqrt{\dfrac{z^4+x^2y^2}{2}} \geq \dfrac{z^2+xy}{2}$ ve $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \dfrac{x+y+z}{3}$ eşitsizliği $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ eşitsizliğine denk olduğundan $\sqrt{x^4+y^2z^2}+\sqrt{y^4+z^2x^2}+\sqrt{z^4+x^2y^2} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \geq \sqrt{2}(xy+yz+zx)$ olur.

Örnek: $xy+yz+zx=1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\sqrt{12(x^2+y^2+z^2)} \geq \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} &= \sqrt{xy+yz+zx+x^2} = \sqrt{(x+y)(x+z)} \\ &\leq \frac{2x+y+z}{2} \quad (GO \leq AO)\end{aligned}$$

olduğundan $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2} \leq 2(x+y+z)$ bulunur. $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \dfrac{x+y+z}{3}$ $(KO \geq AO)$ bu ifade de $\sqrt{12(x^2+y^2+z^2)} \geq 2(x+y+z)$ eşitsizliğine denk olduğu için

$$\sqrt{12(x^2+y^2+z^2)} \geq 2(x+y+z) \geq \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}$$

dir.

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

Teorem: $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ gerçel sayılar olmak üzere

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right)$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak $a_i = sb_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$ denklemini sağlayan bir s sabiti bulunması durumunda sağlanır.

Örnek: Tüm x, y, z gerçel sayıları için

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: Cauchy-Schwarz Eşitsizliğini kullanarak ispatı bir satırda verebiliriz: $(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2$.

Örnek: x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x} \geq x^2+y^2+z^2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Cauchy-Schwarz Eşitsizliğinden

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}\right) \geq (x^2+y^2+z^2)^2 \geq (x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)$$

yazabiliriz. Buradan da $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x} \geq x^2+y^2+z^2$ bulunur.

Cauchy-Schwarz Eşitsizliğini kullanarak, bazen oldukça işe yarayan, aşağıdaki eşitsizlik ispatlanabilir:
$a_1, a_2, \ldots a_n$ herhangi gerçel sayılar, $b_1, b_2, \ldots b_n$ ise pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak $a_i = sb_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$ denklemini sağlayan bir s sabiti bulunması durumunda sağlanır.

Örnek: Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için $xyz = 1$ olması durumunda

$$\frac{1}{x^3(y+z)}+\frac{1}{y^3(z+x)}+\frac{1}{z^3(x+y)} \geq \frac{3}{2}$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ alırsak, verilen denklem $abc = 1$ şeklini alır. Bu durumda *simetrik toplam* gösterimini kullanarak;

$$\sum_{\text{simetrik}} \frac{1}{x^3(y+z)} = \sum_{\text{simetrik}} \frac{1}{\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} = \sum_{\text{simetrik}} \frac{a^2}{b+c}$$

yazabiliriz. Şimdi Cauchy-Schwarz Eşitsizliğinin bir sonucu olarak yukarıda yazdığımız eşitsizliği kullanarak

$$\sum_{\text{simetrik}} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2} = \frac{3}{2}$$

bulunur. Son eşitsizlikte $AO \geq GO$ kullanılmıştır.

2. DİĞER EŞİTSİZLİKLER

Karesel ortalamanın genellemesi olarak p. dereceden ($p \neq 0$) ortalamayı $M_p = \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$ şeklinde tanımlar ve bu tanımı $q \in \{\pm\infty, 0\}$ için $M_q = \lim_{p \to q} M_p$ olarak genişletirsek $M_\infty =$ En büyük$\{x_i\}$, $KO = M_2$, $AO = M_1$, $GO = M_0$, $HO = M_{-1}$, ve En küçük$\{x_i\} = M_{-\infty}$ olur. Bu gösterim kullanılarak, yukarıda verilen eşitsizlikler

$$M_p \leq M_q \Longleftrightarrow p \leq q$$

şeklinde genellenebilir.

Yukarıda tanımlanan ortalamalar bir adım daha genelleştirilerek, ağırlıklı ortalama kavramı verilebilir:

$w_1, w_2, \ldots w_n$ pozitif gerçel sayıları için $\frac{w_1x_1 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + \cdots + w_n}$ ile $x_1, \ldots, x_n$ in ağırlıklı aritmetik ortalaması, $(x_1^{w_1}x_2^{w_2}\cdots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1+\cdots+w_n}}$ ile de ağırlıklı geometrik ortalaması tanımlanır ve bu durumda

$$\frac{w_1x_1 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + \cdots + w_n} \geq (x_1^{w_1}x_2^{w_2}\cdots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1+\cdots+w_n}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Örnek: Toplamları 1 olan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $a^ab^bc^c + a^bb^cc^a + a^cb^ac^b \leq 1$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: Ağırlıklı aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini kullanarak

$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq (a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$ buradan da $a^2+b^2+c^2 \geq a^ab^bc^c$ bulunur. Benzer şekilde,

$\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq (a^bb^cc^a)^{\frac{1}{a+b+c}}$ eşitsizliğinden $ab+bc+ca \geq a^bb^cc^a$, ve

$\frac{ac+ba+cb}{a+b+c} \geq (a^cb^ac^b)^{\frac{1}{a+b+c}}$ eşitsizliğinden de $ab+bc+ca \geq a^cb^ac^b$ bulunur. Bu üç eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$(a+b+c)^2 \geq a^ab^bc^c + a^bb^cc^a + a^cb^ac^b$ bulunur. Verilen $a+b+c=1$ eşitliği kullanarak ispat tamamlanır.

Teorem: Weierstrass Eşitsizliği
$x_1, x_2, \dots x_n$ pozitif gerçel sayıları için $n \geq 2$ durumunda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) > 1 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Teorem: Bernoulli Eşitsizlikleri

1. Her $n \geq 1$ tam sayısı ve her $x > -1$ gerçel sayısı için $(1+x)^n \geq 1 + nx$

2. Her $\alpha > 1$ veya $\alpha < 0$ ve her $x > -1$ için $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$

3. Her $\alpha \in (0,1)$ ve $x > -1$ için $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

eşitsizlikleri sağlanır.

Örnek: Her $x > 0$ gerçel sayısı için $(x+1)^x \geq 2x^x$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: İspatlanması istenen eşitsizlik $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \geq 2$ eşitsizliğine denktir. Bu da Bernoulli eşitsizliğinden çıkar: $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \geq 1 + x \cdot \dfrac{1}{x} = 2.$

Teorem: Hölder Eşitsizliği
a_i, b_i negatif olmayan gerçel sayılar ve p, q sayıları $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ denklemini sağlayan pozitif gerçel sayılar olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik ancak ve ancak $a_i = sb_i$ $\forall i = 1, \dots, n$ denklemini sağlayan bir s sabiti bulunması durumunda sağlanır. Hölder Eşitsizliğinde özel olarak $p = \frac{1}{2} = q$ alındığında Cauchy-Schwarz Eşitsizliği elde edilir.

Teorem: Minkowski Eşitsizliği
a_i, b_i ve $p \geq 1$ gerçel sayılar olmak üzere

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p > 1$ için eşitlik ancak ve ancak $a_i = sb_i \ \forall i = 1, \ldots, n$ denklemini sağlayan bir s sabiti bulunması durumunda sağlanır. $p = 1$ özel durumunda eşitsizlik üçgen eşitsizliğinden kolayca ispatlanabilir.

Teorem: Chebyshev Eşitsizliği
$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ ve $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ gerçel sayıları için

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik ancak ve ancak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ veya $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ durumunda sağlanır.

Örnek: a, b, c pozitif gerçel sayılar olmak üzere;

$$\frac{a^2 - bc}{b + c} + \frac{b^2 - ca}{c + a} + \frac{c^2 - ab}{a + b} \geq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İfade simetrik olduğu için genelliği bozmadan $a \geq b \geq c$ kabul edebiliriz. Bu durumda $(a - b)(a + b + c) \geq 0$ olduğu için $a^2 - bc \geq b^2 - ca$ dır. Benzer şekilde $a^2 - bc \geq b^2 - ca \geq c^2 - ab$ bulunur. Ayrıca $b + c \leq c + a \leq a + b$ olduğundan $\dfrac{1}{b+c} \geq \dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{1}{a+b}$ eşitsizliği geçerlidir. Şimdi Chebyshev eşitsizliğini kullanarak
$\dfrac{a^2 - bc}{b + c} + \dfrac{b^2 - ca}{c + a} + \dfrac{c^2 - ab}{a + b} \geq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b}\right)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
eşitsizliğini elde ederiz. Bu da $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ olduğundan göstermemiz istenilen eşitsizliği verir.

Benzer şekilde aşağıdaki eşitsizlikler de Chebyshev eşitsizliğini kullanarak bütün a, b, c pozitif gerçel sayıları için ispatlanabilir:

- $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$

- $\dfrac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\dfrac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\dfrac{c^2+ab}{(a+b)^2}\geq\dfrac{3}{2}$

Tanım: I aralığında tanımlı ve gerçel değerli bir f fonksiyonu her $x, y \in I$ ve her $\alpha, \beta = 1-\alpha$ pozitif sayıları için $f(\alpha x+\beta y) \leq \alpha f(x)+\beta f(y)$ eşitsizliğini sağlıyor ise, bu fonksiyona *dışbükey* fonksiyon adı verilir. Her zaman ters eşitsizlik sağlanması durumunda ise *içbükey* adı verilir. Bu durumda $-f$ dışbükey olur. Örnek olarak $f(x)=x^2$ fonksiyonu tüm $\mathbf{R}$'de dışbükey, $g(x)=\sin(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında içbükeydir.

Teorem:
I aralığında sürekli olan f fonksiyonunun dışbükey olması için gerek ve yeter şart

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall x, y \in I$$

olarak verilir.

Teorem: Jensen Eşitsizliği
Tüm $f: I \to \mathbf{R}$ dışbükey fonksiyonlar için, α_i ler negatif olmayan ve $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ eşitliğini sağlayan gerçel sayılar ve $x_i \in I$ olmak üzere

$$f(\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n)\leq\alpha_1 f(x_1)+\cdots+\alpha_n f(x_n)$$

eşitsizliği geçerlidir. İçbükey fonksiyonlar için eşitsizlik yön değiştirir.

Örnek: A, B, C bir üçgenin iç açıları olmak üzere;

$$\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x)=\sin(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında içbükey olduğundan, Jensen eşitsizliği kullanarak;

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leq\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

elde ederiz.

III-POLİNOMLAR

Tanım: $a_n \neq 0$ olmak üzere $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ şeklinde ifade edilebilen fonksiyonlara n. dereceden polinom adı verilir. Polinomun katsayıları a_i'lerin hepsi bir A kümesinin elemanı ise $P(x) \in \mathbf{A[x]}$ yazılır.

Teorem: Her $P(x)$ ve $Q(x) \neq 0$ polinomu için $K(x)$ in derecesi $Q(x)$ in derecesinden küçük olacak şekilde $P(x) = Q(x)B(x) + K(x)$ eşitliğini sağlayan ve $B(x)$ ve $K(x)$ polinomları tek bir şekilde bulunur.

Teorem: $P(x)$ polinomunun $(x-a)$ ile bölünebilmesinin gerek ve yeter şartı $P(a) = 0$ dır. Bu teorem aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

Teorem: $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölünebilmesinin gerek ve yeter şartı $Q(x)$ in her bir kökünün aynı zamanda $P(x)$ in de kökü olmasıdır. (Not: a sayısı $Q(x)$ için n katlı bir kök ise $P(x)$ için en az n katlı olmalıdır.)

Teorem: Derecesi $n > 0$ olan $P(x)$ polinomunun, c bir sabit ve x_i ler karmaşık sayılar olmak üzere, terimlerin sıralaması gözetilmeksizin $P(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ şeklinde tek bir yazılımı vardır.

Bu teoreme göre derecesi $n > 0$ olan $P(x)$ polinomunun en fazla n tane kökü olabilir. Sonsuz sayıda kökü olan tek polinom sıfır polinomudur, ve onun derecesi eksi sonsuz olarak tanımlanır. Bir başka deyişle, dereceleri n'yi geçmeyen $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının $n+1$ farklı noktada aynı değere sahip olmaları durumunda aynı polinom olmaları gerektiği sonucuna varılır. Buna ek olarak sonsuz sayıda kökü olan fonksiyonların, örnek olarak $\sin(x)$'in, bir polinoma eşit olamayacağı da bu teoremin bir sonucu olarak çıkar.

Örnek: Bütün $x \in \mathbf{R}$ sayıları için $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$ denklemini sağlayan tüm polinomları bulunuz.

Çözüm: $Q(x) = P(x) - P(0)$ olarak tanımlanan $Q(x)$ polinomu da verilen denklemi sağlar: $Q(x+1) = P(x+1) - P(0) = P(x) - P(0) + 2x + 1 = Q(x) + 2x + 1$. Buna ek olarak $Q(0) = 0$ dır. Bu durumda $Q(x)$ fonksiyonunun x^2 ye eşit olduğu yönünde hissiyatımız artar. $F(x) = Q(x) - x^2$ polinomunu ele alırsak,
$F(x+1) = Q(x+1) - (x+1)^2 = Q(x) + 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = Q(x) - x^2 = F(x)$

denkliğinden

$$\begin{aligned} F(x+1) &= F(x) \\ F(0) &= 0 \end{aligned}$$

buradan $F(n) = 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$ bulunur. Bu durumda $F(x) = 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$. Buna göre $Q(x) = x^2$, buradan da $P(x) = x^2 + P(0)$ bulunur. Sonuç olarak $P(x) = x^2 + a; \quad a \in \mathbf{R}$ dır.

Teorem: (Cebirin Temel Teoremi) Sabit olmayan her karmaşık $P(x) \in \mathbf{C[x]}$ polinomun bir karmaşık sayı kökü bulunur.

Teorem: (Bezout Teoremi) Katsayıları tam sayı olan $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z[x]}$ polinomu için $P(x) - P(y) = a_n(x^n - y^n) + \cdots a_2(x^2 - y^2) + a_1(x - y)$ olarak yazılabileceği için a, b farklı tam sayılar olmak üzere $(a - b)$ sayısı $P(a) - P(b)$ sayısını böler.

Örnek: Her $n \in \mathbf{Z}^+$ için $f(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ olarak tanımlanan fonksiyonun tam sayı katsayılı bir polinom olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: $f(1) = 1, f(3) = 36$ ancak $(3 - 1) \nmid (36 - 1)$ olduğu için Bezout teoremine göre $f(x)$ tam sayı katsayılı bir polinom olamaz.

Teorem: $(a, b) = 1$ olmak üzere $\dfrac{a}{b}$ rasyonel sayısının $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z[x]}$ polinomunun kökü olması durumunda $a | a_0$ ve $b | a_n$ dir.

Tanım: Sabit fonksiyonlar kullanılmadan $\mathbf{Z[x]}$ içinde iki polinomun çarpımı şeklinde yazılması mümkün olmayan $P(x) \in \mathbf{Z[x]}$ polinomlarına *asal(indirgenemez)* polinom adı verilir. Aksi durumda *indirgenebilir* polinom denir.

Örnek: $P(x) = x^{101} + 101x^{100} + 102$ polinomu $\mathbf{Z[x]}$ de indirgenemez bir polinomdur. Benzer şekilde, x yerine $y+1$ yazarak, her $p > 2$ asal sayısı içine, $Q(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ polinomu da $\mathbf{Z[x]}$ de indirgenemez bir polinom olduğu görülür.

Teorem: (Gauss) $P(x) \in Z[x]$ polinomu $Q[x]$ de indirgenebilir ise $\mathbf{Z[x]}$ de de indirgenebilirdir.

Teorem: (Eisenstein Kriteri) Katsayıları tam sayı olan $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z[x]}$ polinomu için aşağıdaki şartları sağlayan bir p asal sayısı ve $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ sayısı bulunması durumunda $P(x)$ polinomunun derecesi k'dan büyük bir indirgenemez çarpanı bulunur:

$$p|a_0, p|a_1, \ldots, p|a_k; \quad p \nmid a_{k+1} \text{ ve } p^2 \nmid a_0$$

Özel bir durum olarak p asal sayısı $k = n-1$ olacak şekilde seçilebilirse, bu durumda $P(x)$ indirgenemezdir.

Örnek olarak $P(x) = x^5 + 4x^3 + 20x + 2$ polinomu indirgenemez yani çarpanlara ayrılamaz bir polinomdur.

Teorem: (Lagrange İnterpolasyon Polinomu) $n+1$ noktada değeri $P(x_i) = y_i \ (i = 1, 2, \ldots, n+1)$ verilerek tek bir şekilde belirlenen n. dereceden $P(x)$ polinomu, $P_i(x) = \prod_{j \neq i} \dfrac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ olmak üzere

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i P_i(x)$$

olarak bulunur.

Örnek: $P(1) = 1, \ P(2) = 3, \ P(3) = 6$ koşullarını sağlayan ikinci dereceden $P(x)$ polinomunu bulunuz.

Çözüm: Lagrange interpolasyon formülünü kullanarak

$$P(x) = P(1)\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + P(2)\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + P(3)\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 3(x-1)(x-3) + 3(x-1)(x-2)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3\right) + (-3x^2 + 12x - 9) + (3x^2 - 9x + 6)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

bulunur.

Tanım: $x_1, \cdots, x_n$ değişkenlerine bağlı $p(x_1, \cdots, x_n)$ polinomunun değeri, değişkenlerin tüm değişik dizilişlerine göre sabit kalıyorsa, bu polinoma *n değişkenli simetrik polinom* adı verilir.

Temel Simetrik Polinomlar $\sigma_k(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{\{i_1, \cdots, \imath_k\} \subset \{1, \cdots, n\}} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ olarak tanımlanır. (Toplam tüm k elemanlı $\{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$ alt kümeler üzerinden hesaplanır.) Örnek olarak $n = 3$ için $\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \ \ \sigma_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ dür.

Teorem: $x_1, \cdots, x_n$ değişkenlerine bağlı her simetrik $p(x_1, \cdots, x_n)$ polinomu temel simetrik polinomlar olan $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ cinsinden bir polinom olarak ifade edilebilir.

Örnek: $P(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = \sigma_1(x_1, x_2)^2 - 2\sigma_2(x_1, x_2)$.

Örnek: $P(x_1, \ldots, x_n) = x_1^4 + \ldots + x_n^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$.

Teorem: Vieta Formülü $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ve $c_1, \cdots c_n$ karmaşık sayılar olmak üzere

$$(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$$

eşitliğindeki katsayılar $c_k = (-1)^k \sigma_k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$; $k = 1, \ldots, n$ olarak bulunur.

Örnek:

$$x + y + z = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 34$$

Denklem sistemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

Çözüm: Kökleri x, y, z olan $P(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ polinomunu ele alalım. Köklerin toplamı $-a$ olduğu için polinom $t^3 - 4t^2 + bt + c$ polinomuna eşittir. $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$ eşitliğinden $P(t) = t^3 + 4t^2 + t + c$ bulunur. Son olarak

$$x^3 - 4x^2 + x + c = 0$$

$$y^3 - 4y^2 + y + c = 0$$

$$z^3 - 4z^2 + z + c = 0$$

denklemleri taraf tarafa toplanarak $c = 6$ bulunur. Buna göre $P(t) = t^3 - 4t^2 + t + 6 = (t + 1)(t - 2)(t - 3)$ olduğu, yani çözüm kümesinin $t \in \{-1, 2, 3\}$ olduğu görülür. Buna göre verilen sistemin, $x < y < z$ için, tek çözümü $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$ dür.

GERÇEL KÖKLÜ POLİNOMLAR

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomu için $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \Re$, $(a_n \neq 0)$ ise bu polinoma n. dereceden gerçel katsayılı polinom dendiğini biliyoruz. Eğer bir $c \in \Re$ için $p(c) = 0$ ise c sayısına bu polinomun gerçel kökü denir.

Teorem: Derecesi tek sayı olan her gerçel katsayılı polinomun en az bir gerçel kökü vardır.

Örnek: Hangi $a \in \Re$ sayıları için $p(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (1-a)x - 1$ polinomunun tüm kökleri gerçeldir?

Çözüm: $p(1) = 0$ olduğundan 1 sayısı bu polinomun bir köküdür. $p(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (1-a)x - 1 = (x-1)(x^2 + ax + 1)$ olduğundan $x^2 + ax + 1$ polinomunun tüm kökleri gerçel olmalıdır. Bu ise $a^2 - 4 \geq 0$ durumunda mümkündür. Yani $a \geq 2$ veya $a \leq -2$ olmalıdır.

Örnek: $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3 = 0$ denleminin gerçel köklerinin kareleri toplamını bulunuz.

Çözüm: Öncelikle şunu belirtmekte fayda var. Bu sorunun çözümünde Vieta formülünü kullanmak yanlış olur. Çünkü bizden sadece gerçel olan köklerin toplamı istenmektedir. Verilen ifadeyi uygun şekilde çarpanlara ayırırsak amacımıza ulaşabiliriz.
$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3$ olacak şekilde a, b, c, d gerçel sayıları bulmaya çalışalım. $x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (bc+ad)x + bd = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3$ olacağından $a + c = 5,\ ac + b + d = 8,\ bc + ad = 7$, ve $bd = -3$ olmalıdır. Şimdi $b = 3$ ve $d = -1$ iken bu koşulları sağlayan a ile c bulunup bulunamayacağına bakalım. $a + c = 5$ ve $ac = 6$ olacağından $\{a, c\} = \{2, 3\}$ olmalıdır. $3c - a = 7$ olduğundan $c = 3,\ a = 2$ koşulları sağlar. Yani $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 3x - 1) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3 = 0$ olur. $x^2 + 2x + 3$ polinomunun gerçel kökü olmadığı için $x^2 + 3x - 1$ polinomunun köklerinin kareleri toplamını bulmalıyız. $x^2 + 3x - 1$ polinomunun her iki kükü de gerçeldir ve köklerinin kareleri toplamı $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9 - 2(-1) = 11$ dir.

IV-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Tanım: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ durumunda $f(x)$ fonksiyonuna a noktasında sürekli denir. $f(x)$ fonksiyonu $I = (a, b)$ kümesinin her noktasında sürekli olması durumunda $f(x)$ fonksiyonu I kümesi üzerinde süreklidir denir.

Örnek: Gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı $f(0) = 1$ ve tüm $x \in \mathbf{R}$ sayıları için $f(2x) - f(x) = x$ denklemini sağlayan sürekli fonksiyonları bulunuz.
Çözüm: Verilen denklemi $f(x) - f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2}$ şeklinde yazıp;

$$\begin{aligned} f(\frac{x}{2}) - f(\frac{x}{4}) &= \frac{x}{4}, \\ f(\frac{x}{4}) - f(\frac{x}{8}) &= \frac{x}{8}, \\ &\vdots \\ f(\frac{x}{2^{n-1}}) - f(\frac{x}{2^n}) &= \frac{x}{2^n} \end{aligned}$$

denklemlerini taraf tarafa toplarsak $f(x) - f(\frac{x}{2^n}) = x(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n})$ buluruz. n' nin büyük değerini alarak ve $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kullanarak tek çözümün $f(x) = x + 1$ olduğunu görürüz. ($f(x)$ sürekli bir fonksiyon ise $\lim\limits_{\frac{a}{b}\to x} f(\frac{a}{b}) = f(x)$ dir.)

Teorem: Ara Değer Teoremi $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, ve L sayısı $f(a)$ ile $f(b)$ değerleri arasında bir sayı ise, bu durumda $[a, b]$ aralığında $f(c) = L$ olacak şekilde en az bir c gerçel sayısı vardır.

Örnek: $f(x) = x^{2010} - 3x + 1$ sürekli fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında en az bir gerçel kökü vardır.

Örnek: a, b, c, r ve s $(r \neq s)$ gerçel sayılardır. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin bir kökü r, $-ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin bir kökü ise s dir. Buna göre $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$ denkleminin r ve s sayıları arasında bir kökü olduğunu gösteriniz.
Çözüm: $a = 0$ ise $r = s$ olur. Bu yüzden $a \neq 0$ olmalıdır. $P(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$ olsun. $ar^2 + br + c = 0$ olduğundan $-ar^2 = br + c$ 'dir. O halde $P(r) = \frac{a}{2}r^2 + br + c = \frac{a}{2}r^2 - ar^2 = -\frac{a}{2}r^2$ olur. Benzer şekilde $P(s) = \frac{a}{2}s^2$ bulunur.
$P(r) < 0$, $P(s) > 0$ ve $P(x)$ sürekli bir fonksiyon olduğu için Ara Değer Teoremi'ni kullanarak $P(x)$ 'in r ve s arasında bir kökü olduğunu söyleyebiliriz.

V-DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM FONKSİYONLARI

$ad - bc \neq 0$ olmak üzere $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ şeklinde ifade edilen fonksiyonlara Doğrusal Dönüşüm fonksiyonu adı verilir. Bu fonksiyonun katsayılarını alarak oluşturulan katsayı matrisi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olarak tanımlanır. $f^{(2)}$ ile f fonksiyonunun kendisi ile bileşkesini $(f \circ f)$, $f^{(n)}$ ile de f nin kendisi ile n kere bileşkesini $(f \circ f \cdots \circ f)$ gösterelim. Bu durumda $f^{(n)}$ bileşke fonksiyonunun katsayı matrisi, A matrisinin kendisi ile n kere çarpımı olan A^n ye eşit olur.

Örnek: $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ise katsayı matrisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olur. Bu durumda $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Buradan $f \circ f(x) = f(f(x)) = \dfrac{x}{2x+1}$ bulunur.
Benzer şekilde $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$ olduğu için $f^{(n)}(x) = \dfrac{x}{nx+1}$ bulunur.

Örnek: $f(x) = \dfrac{2x-7}{x+1}$ için $f^{(2010)}(x)$ bileşke fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Buradan $A^2 = \begin{bmatrix} -3 & -21 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$, buradan da $A^3 = -27 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ bulunur. Buna göre $f^{(3)}(x) = (f \circ f \circ f)(x) = x$ dir. Bu durumda $2010 = 3 \cdot 670$ olduğu için $f^{(2010)}(x) = x$ bulunur.

VI-CAUCHY FONKSİYONEL DENKLEMİ

Her x, y gerçel sayısı için $f(x+y) = f(x) + f(y)$ denklemini sağlayan f fonksiyonları için;

- f monotonsa,
  veya
- f sürekliyse

$f(x) = cx$ eşitliği geçerlidir. ($c \in R$, sabit)

İspat: Öncelikle her $q \in \mathbf{Q}$ rasyonel sayısı için $f(q) = f(1)q$ olduğunu gösterelim. $x = y = 0$ için $f(0) = 2f(0)$ buradan $f(0) = 0$ bulunur. $f(2) = 2f(1)$, $f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$, $f(4) = f(3) + f(1) = 4f(1), \ldots$. Buradan da tümevarım kullanılarak, $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ için $f(n) = nf(1)$ çıkar. Şimdi $y = -x$ alarak $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$ olduğundan $\forall n \in \mathbf{Z}$ için $f(n) = nf(1)$ buluruz. Aynı zamanda $f(2x) = 2f(x)$, $f(3x) = f(2x) + f(x) = f(3x), \ldots$ olduğundan $\forall n \in \mathbf{Z}$ için $f(nx) = nf(x)$ olur. $x = \dfrac{p}{q}$, $n = q$ alırsak $(p, q) = 1$, $p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0, f(p) = qf(\dfrac{p}{q})$, $f(\dfrac{p}{q}) = f(1)\dfrac{p}{q}$ olur. Buna göre her $q \in \mathbf{Q}$ için $f(q) = f(1)q$ dur.
Şimdi, verilen durumlarda $f(x) = cx$ olduğunu gösterelim:

- f monotonsa genelliği bozmadan f'yi artan kabul edebiliriz. (Azalan ise $-f$ incelenir.) $f(x) = f(1)g(x)$ olsun. $\forall q \in \mathbf{Q}$ için $g(q) = q$ olur. $x_0 \in \mathbf{R} - \{0\}$ olmak üzere $g(x_0) > x_0$ ise, her gerçel sayı bir rasyonel sayı dizisinin limiti olarak gösterilebildiğinden $g(x_0) > q_0 > x_0$ koşulunu sağlayan bir q_0 rasyonel sayısı bulunabilir. $q_0 > x_0$ ve g fonksiyonu da artan olduğu için $g(q_0) > g(x_0) > q_0$ bulunur. Bu ise $q(q_0) = q_0$ ile çelişir. Benzer şekilde $g(x_0) < x_0$ da çelişki vereceği için bütün $x \in \mathbf{R}$ gerçel sayıları için $g(x) = x$ ve $f(x) = f(1)f(x)$ olur.

- f sürekliyse $\lim\limits_{\frac{p}{q} \to x} f(\dfrac{p}{q}) = f(x)$ ve $\lim\limits_{\frac{p}{q} \to x} f(\dfrac{p}{q}) = \lim\limits_{\frac{p}{q} \to x} f(1)\dfrac{p}{q} = f(1)x$ olduğundan $f(x) = f(1)x$ olur.

Örnek: $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$ ve her $x, y \in [0, \infty]$ için $f(x^2 + y^2) = xf(x) + yf(y)$ koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $y = 0$ alarak $f(x^2) = xf(x)$, buradan $f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(y^2)$ bulunur. $[0, \infty]$ aralığındaki tüm a sayıları için $a = x^2$ olacak şekilde bir $x \in [0, \infty]$ bulunduğundan, her $a, b \in [0, \infty]$ için $f(a+b) = f(a) + f(b)$ sağlanır. Aynı zamanda her $a \in [0, \infty]$ için $f(a) \geq 0$ olduğundan, $\forall x, y \in [0, \infty]$, $x > y$ için $f(x) - f(y) = f(x - y) \geq 0$ dır. Buradan f nin artan bir fonksiyon olduğu ve yukarıdaki Cauchy fonksiyonel denkleminden, c, d sabit olmak

üzere, fonksiyonun $f(x) = cx + d$ şeklinde yazılabileceği sonucuna varılır. $f(0) = 0$ olduğu için $d = 0$ dır. $f(x) \geq 0$ olduğu için de $c \geq 0$ olmalıdır. Öte yandan, $c \geq 0$, $f(x) = cx$ için $f(x^2 + y^2) = c(x^2 + y^2) = xf(x) + yf(y)$ koşulu sağlanır.
Sonuç olarak verilen koşulu sağlayan tüm fonksiyonlar, $c \geq 0$ olmak üzere, $f(x) = cx$ şeklinde yazılabilir.

VII-DENKLEMLER

Örnek 1: $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+d+\dfrac{2}{5}=0$ denklemini sağlayan a,b,c,d gerçel sayıları için $a+b+c+d$ toplamının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm: $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+d+\dfrac{2}{5}=A$ dersek;

$$A=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b+\frac{1}{\sqrt{3}}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}d+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2=0$$

olur. Buradan da $d=\dfrac{-4}{5}$, $c=\dfrac{-3d}{4}=\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{-2c}{3}=\dfrac{-2}{5}$, $a=\dfrac{-b}{2}=\dfrac{1}{5}$ bulunur. Sonuç olarak $a+b+c+d$ nin alabileceği tek değer $\dfrac{-4}{5}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{-2}{5}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{-2}{5}$ dir.

Örnek 2: $x^4-4x^2+x-2\sqrt{x}+5=0$ denkleminin tüm gerçel köklerini bulunuz.

Çözüm: $x^4-4x^2+x-2\sqrt{x}+5=(x^4-4x^2+4)+(x-2\sqrt{x}+1)=(x^2-2)^2+(\sqrt{x}-1)^2$ olduğundan $x^4-4x^2+x-2\sqrt{x}+5\geq 0$ olur. Eşitlik ise $x^2-2=\sqrt{x}-1=0$ durumunda gerçekleşir. $x^2=2$ durumunda $\sqrt{x}\neq 1$ olduğundan denklemin gerçel kökü yoktur.

Örnek 3: $x^3-3x-7=0$ denkleminin tüm gerçel köklerini bulunuz.

Çözüm: $x=k+\dfrac{1}{k}$ olsun. (k gerçel olmayabilir.)
$x^3=k^3+\dfrac{1}{k^3}+3\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$, $3x=3\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$ olduğundan $x^3-3x-7=k^3+\dfrac{1}{k^3}-7$ olur. $k^3+\dfrac{1}{k^3}-7=0$ dolayısıyla $k^6-7k^3+1=0$ buradan $4k^6-28k^3+4=0$ buradan da $(2k^3-7)^2=45$ bulunur. $(2k^3-7)=3\sqrt{5}$, $k^3=\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$ olur. $a^3=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $b^3=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ olarak tanımlanan a,b gerçel sayıları için $ab=1$ sağlanır. Eğer $mn=1$ ise $m-n=\dfrac{m-n}{mn}$ ve $m+\dfrac{1}{m}=n+\dfrac{1}{n}$ dir. Bu yüzden: $k^3=a^3$ denkleminin kökleri k_1,k_2,a ve $k^3=b^3$ denkleminin kökleri k_1',k_2',b ise, $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ olur. $x=k+\dfrac{1}{k}$ olduğundan;
$x_1=a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}=\sqrt[3]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{2}{7+3\sqrt{5}}}=\sqrt[3]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}$ olur. Vieta teoreminden $x_1+x_2+x_3=0$ ve $x_1x_2x_3=7$ dir. $x_2+x_3=-x_1$, $x_2x_3=\dfrac{7}{x_1}$, $|x_2-x_3|=\sqrt{(x_2+x_3)^2-4x_2x_3}$ olduğu için, $x_2>x_3$ kabul edersek $x_2-x_3=\sqrt{x_1^2-\dfrac{28}{x_1}}=\sqrt{\dfrac{x_1^3-28}{x_1}}$ olur. $x_1^3=3x_1+7$ olduğundan $x_2-x_3=\sqrt{\dfrac{3x_1-21}{x_1}}$ ve $x_2=\dfrac{-x_1+\sqrt{\frac{3x_1-21}{x_1}}}{2}$, $x_3=$

$x_2 = \dfrac{-x_1 - \sqrt{\frac{3x_1-21}{x_1}}}{2}$ olur. $\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} < \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} < 8$ olduğundan $x_1 < 4$ tür. Sonuç olarak $3x_1 - 21 < 0$ ve $x_1 > 0$ olduğundan $\dfrac{3x_1-21}{x_1} < 0$ olur. Bu ise x_2 ve x_3 ün gerçel olmadığı anlamına gelir. Denklemin tek gerçel kökü $x_1 = \sqrt[3]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}$ dir.

Örnek 4 $x^7 + x + p = 0$ denkleminin tam olarak bir gerçel kökünün olmasını sağlayan tüm p gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm $p(x) = x^7 + x + p$ polinomunun derecesi tek olduğu için en az bir kökü gerçeldir. $x > y$ ise $(x^7 + x + p) - (y^7 + y + p) = x^7 - y^7 + x - y > 0$ olduğundan, $p(x) > p(y)$ çıkar. Yani $p(x)$ polinomu artandır. Artan polinomların ancak bir gerçel kökü olabilir. ($a < b$, ve $p(a) = p(b) = 0$ durumunda, polinomun sonlu sayıda kökü olduğu için a ile b arasında $p(c) \neq 0$ olacak şekilde bir c gerçel sayısı bulunur. Artan olma özelliğinden dolayı $0 = p(a) < p(c) < p(b) = 0$ çelişkisi bulunur.) Sonuç olarak her p gerçel sayısı için $x^7 + x + p = 0$ denkleminin tam olarak bir gerçel kökü vardır.

VIII-DİZİLER

$k \in \mathbf{N}$ olmak üzere, tanım kümesi $\{k, k+1, \ldots\}$ olan fonksiyonlara *dizi* adı verilir ve $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ şeklinde gösterilir. Diziler tanımları itibarı ile hiçbir yerde sürekli olmayan fonksiyonlardır. Örnek olarak $\{a_n\}_{n=5}^{\infty} = n^2$ dizisi $n = 3$ için tanımsızdır. $n = 5$ de 25 değerini alır. a_n değerlerinin herbiri, değişken n'yi daha büyük aldıkça belli bir L değerine istenildiği kadar (eşit olmak dışında) yaklaşıyorsa, bu durumda $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ dizisinin limiti L dir denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ olarak yazılır. Daha matematiksel olarak bu kavram şu şekilde verilebilir: Verilen her $\epsilon > 0$ için ona bağlı olan ve

$$\forall n \geq N \text{ için } |a_n - L| < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ dir.
L nin sonlu bir sayı olması durumunda a_n dizisine *yakınsak dizi* diğer durumlarda (L nin sonsuz olması veya böyle bir L bulunmaması durumlarında) ise *ıraksak dizi* adı verilir.
Örnek olarak, verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için N sayısını $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$ yani $\frac{1}{\epsilon}$ dan büyük veya eşit ilk tam sayı olarak tanımlayarak $a_n = \frac{1}{n}$ dizisinin limitinin 0 olduğunu (yakınsak) ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) görebiliriz. $b_n = n^2$ dizisi limiti sonlu bir sayı olmadığı için (artı sonsuz olduğu için: Verilen her M sayısı için ona bağlı olan ve $\forall n \geq N$ için $a_n > M$ koşulunu sağlayan bir $N = N(M)$ doğal sayısı bulunabilir.), $c_n = \sin(n)$ dizisi de limiti olmadığı için ıraksaktır.
Tüm elemanlarının mutlak değerleri belli bir M sayısından küçük olan dizilere ($|a_n| < M \;\; \forall n \in \{k, k+1, \ldots\}$) *sınırlı dizi*, tüm $n > m$ için $a_n \geq a_m$ özelliğini gösteren dizilere *artan dizi*, tüm $n > m$ için $a_n \leq a_m$ özelliğini gösteren dizilere de *azalan dizi* adı verilir.
Örnek olarak $a_n = n^2$ dizisi artan sınırsız, $b_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ dizisi artan sınırlı, $c_n = (-1)^n$ dizisi ise ne artan ne de azalan ancak sınırlı olan dizilerdir. Artan ya da azalan dizilere *monoton dizi* adı verilir. a_n ve b_n dizileri monoton , c_n dizisi ise monoton değildir.

Teorem:(Weierstrass Teorem) Monoton ve sınırlı olan her gerçel sayılar dizisi yakınsaktır.
Örnek olarak

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1); \quad n \geq 1 \\
b_n &= \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}; \quad n \geq 1 \\
c_{n+1} &= \sqrt{6 + c_n}; \quad n \geq 1, \quad c_1 = 1
\end{aligned}$$

dizilerinin yakınsak oldukları Weierstrass teoremi kullanılarak gösterilebilir. Buna karşılık $d_{n+1} = d_n + \sqrt{d_n}; \quad n \geq 1, \quad d_1 = 2010$ dizisi ıraksaktır: d_n dizisinin artan bir dizi olması, limitin eğer varsa, en azından 2010 olmasını gerektirir. Oysa, verilen denklemin iki tarafının limitini alarak limitin ancak 0 olabileceğini görülür.

IX-SERİLER

Bir $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ dizisi için $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$; $s_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n-1}$ olarak tanımlanan diziye a_n dizisinin kısmi toplamlar dizisi adı verilir. $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ sonsuz toplamı $\lim_{n\to\infty} s_n$ olarak tanımlanır ve a_n *serisi* olarak adlandırılır. $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak veya ıraksak olması s_n dizisinin yakınsak veya ıraksak olması demektir.

Bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için tanımlanan s_n dizisi yakınsak ise, yani $\lim_{n\to\infty} s_n = L < \infty$ ise aynı zamanda $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L$ olacağı için $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = 0$ bulunur. Buna göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ serisi ıraksaktır. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dizileri için bu gözlemden yola çıkarak birşey söylenemez. Aslında $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi ise yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisinin ırsaksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Kısmi toplamlar dizisine bakarsak;

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \geq 1 + 0\frac{1}{2}, \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + 1\frac{1}{2}, \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geq 1 + 2\frac{1}{2}, \\
s_{2^3} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq 1 + 3\frac{1}{2}, \\
\vdots & \quad \vdots
\end{aligned}$$

Tümevarım kullanılarak, $s_{2^n} \geq 1 + n\frac{1}{2}$ eşitsizliği ispatlanabilir. Bu durumda s_n dizisinin limiti sonsuz olduğu için, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ olduğu için

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

buradan da $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, yani $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ bulunur.

Yukardaki örneklerin bir genellemesi olarak, p-*testi* olarak bilinen kural $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ dizisinin $0 < p \leq 1$ değerleri için ıraksak, $p > 1$ değerleri için yakınsak olduğunu söyler.

GEOMETRİK SERİLER

$|r| < 1$ olmak üzere $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} r^i$ toplamına geometrik seri adı verilir ve $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ eşitliği geçerlidir.

Örnek: Bir kenarı 1 birim olan bir ABC eşkenar üçgeninin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden üçgeni çizelim. Daha sonra aynı işlemi bir önceki adımda elde ettiğimiz üçgene uygulayarak sonsuza kadar devam edelim. ABC üçgeni de dahil olmak üzere çizdiğimiz tüm eşkenar üçgenlerin alanları toplamını hesaplayınız.

Çözüm: Aradığımız toplamı S ile gösterelim. Bu durumda $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^i = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} =$ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ birim karedir.

Örnek: a, b, c pozitif gerçel sayılardır. Bir karınca koordinat düzleminde orijinden başlayarak önce 1 birim sağa, sonra da 1 birim yukarıya gidiyor. Daha sonra a birim sağa ve b birim yukarıya giderek her seferinde bir önceki adımda sağa gittiğinin a katı kadar sağa ve yukarıya gittiğinin b katı kadar yukarıya gidiyor. Bu işlemi sonsuz kez yaparsa toplamda c birim yer değiştirmiş oluyor. Bu koşulları sağlayan tüm a, b, c leri belirleyiniz.

Çözüm: Sağ tarafa alınan toplam yolu Δx ile, yukarı tarafa alınan toplam yolu da Δy ile gösterelim. Bu durumda $\Delta x = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a^i$, $\Delta y = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} b^j$ dir. Bu sayıların birer gerçel sayı olması için $a < 1$ ve $b < 1$ olmalıdır ve bu durumda $\Delta x = \dfrac{1}{1-a}$, $\Delta y = \dfrac{1}{1-b}$ olur. $c^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \dfrac{1}{(1-a)^2} + \dfrac{1}{(1-b)^2}$ eşitliğinden, a, b, c gerçel sayılarının

$a < 1,\ b < 1$, ve $c = \sqrt{\dfrac{1}{(1-a)^2} + \dfrac{1}{(1-b)^2}}$ koşullarını sağlayan tüm pozitif gerçel sayılar olabileceği görülür.

ANALİZ-CEBİR - PROBLEMLER

1. Bir araba yokuş inerken 72 km/s, düz yolda 63 km/s ve yokuş çıkarken 56 km/s hızla hareket edebiliyor. Bu araba, A şehrinden B şehrine 4 saatte gidip, aynı yolu 4 saat 40 dakikada döndüğüne göre, A ve B şehirleri arasındaki mesafeyi bulunuz.

2. $x + y^2 = 1$, $x^2 + y^3 = 1$ denklem sisteminin çözümlerini bulunuz.

3. $M(n) = \{-1, -2, ..., -n\}$ olmak üzere, $M(n)$ nin bütün alt kümelerinin elemanları çarpımlarının toplamı kaçtır ?

4. Aşağıdaki denklemin bütün gerçel köklerini bulunuz:

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor = x^2 - \frac{1}{4}.$$

   Not: Burada $\lfloor x \rfloor$, x ten küçük en büyük tam sayıyı temsil etmektedir.

5. Tüm pozitif a, b, c gerçel sayıları için $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ac} + \dfrac{c^3}{ab} \geq a + b + c$ olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıdaki koşulları sağlayan a, b, c, d gerçel sayılarını bulunuz.

$$a + b + c \leq 3d$$

$$b + c + d \leq 3a$$

$$c + d + a \leq 3b$$

$$d + a + b \leq 3c$$

7. Tam sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine tanımlı f fonksiyonu,tüm x tam sayıları için
   $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ eşitliğini sağlıyor. Eğer $f(1) = 2$ ise, $f(2004)$ kaçtır?

8. Aşağıdaki denklemi gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

$$||x + 2| - 2x| = \frac{x + 3}{2}$$

9. $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere $ab + bc + cd + da$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

10. Koordinat düzleminde merkezden harekete başlayan bir sinek önce 1 birim yukarıya sonra $\frac{1}{2}$ birim sağa sonra $\frac{1}{4}$ birim aşağıya sonra $\frac{1}{8}$ birim sola sonra $\frac{1}{16}$ birim yukarıya,... doğru hareketlerine sonsuza dek devam ediyor. Bu hereketler sonunda sineğin bulunucağı noktayı belirleyiniz.

11. α, β, γ sayıları $x^3 - x^2 + 1 = 0$ denkleminin kökleri ise $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ yi hesaplayınız.

12. x ve y pozitif gerçel sayılar olmak üzere $x + xy + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y} = 1$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

13. Bir tren, aralarındaki mesafe 20 km olan iki istasyon arasındaki yolculuğu daima aynı sürede tamamlamak zorundadır. Bir gün yolun tam ortasında durmak zorunda kalan tren 3 dakika bekledikten sonra, gecikmeyi telafi etmek için hızını 10 km/saat artırarak yoluna devam ediyor. Bir başka gün aynı noktada 5 dakika süre ile durmak zorunda kalan tren, yolculuğu zamanında tamamlamak için hızını ne kadar artırmalıdır?

14. $a + b + c > 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçel çözümü olmadığı biliniyor. Bu durumda $c > 0$ olduğunu gösteriniz.

15. a, b ve c sayıları

$$\begin{aligned} ab - a &= b + 119 \\ bc - b &= c + 59 \\ ca - c &= a + 71 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlayan pozitif gerçel sayılar olmak üzere $a + b + c$ toplamının alabileceği bütün değerleri bulunuz.

16. Aşağıdaki denklem sistemini gerçel sayılar kümesi içinde çözünüz.

$$\begin{aligned} 2x_1 &= x_5^2 - 23 \\ 4x_2 &= x_1^2 + 7 \\ 6x_3 &= x_2^2 + 14 \\ 8x_4 &= x_3^2 + 23 \\ 10x_5 &= x_4^2 + 34 \end{aligned}$$

17. x, y, a gerçel sayılar olmak üzere

$$x+y=x^2+y^2=x^3+y^3=a$$

olduğuna göre a nın alabileceği tüm değerleri bulunuz.

18. Aşağıdaki eşitsizliğin doğruluğunu gösteriniz.

$$1.2.3\dots 2002<\left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$$

19. f fonksiyonu, pozitif bir n tam sayısı için,

$$f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

şeklinde tanımlanıyor. $f(1)+f(2)+\cdots+f(40)$ toplamını hesaplayınız.

20. Birbirinden farklı x,y,z tam sayıları $xy+yz+xz=26$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu durumda $x^2+y^2+z^2\geq 29$ olduğunu gösteriniz.

21. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}=3+\sqrt{x+7}$ denkleminin bütün gerçel köklerini bulunuz.

22. $z+\dfrac{1}{z}=1$ ise $z^{2007}+\dfrac{1}{z^{2007}}$ kaçtır ?

23. a,b,c sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{ay+bx}{xy}=\frac{bz+cy}{yz}=\frac{cx+az}{zx}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}$$

ise x,y ve z a,b,c cinsinden bulunuz.

24. a bir pozitif gerçel sayı olsun. Bu durumda $\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004}$, $\sqrt{a+1003}-\sqrt{a}$ sayılarından hangisi daha büyüktür?

25. $2(a^2+1)(b^2+1)=(a+1)(b+1)(ab+1)$ denklemini sağlayan tüm a,b gerçel sayılarını bulunuz.

26. Çarpmaya göre terslerinin toplamı -1 ve küplerinin toplamı 4 olan tüm gerçel sayıları bulunuz.

27. Gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı $f(1)=1$ ve $f(xy+f(x))=xf(y)+f(x)$ eşitliğini her x ve y gerçel sayıları için sağlayan bütün f fonksiyonlarını ispatıyla birlikte belirleyiniz.

28. $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2004^2}+\frac{1}{2005^2}}=2005-\frac{1}{2005}$ eşitliğini ispatlayınız.

29. a, b, c ve d, $a+b+c+d=1$ eşitliğini sağlayan pozitif gerçel sayılardır.

$$\frac{bcd}{a+2}+\frac{acd}{b+2}+\frac{abd}{c+2}+\frac{abc}{d+2}<\frac{1}{13}$$

olduğunu gösteriniz.

30. x bir gerçel sayı olmak üzere $x^2-3x+1=0$ ise $x^9+x^7+x^{-9}+x^{-7}$ nin değerini hesaplayınız.

31. M kümesi 20 tane farklı gerçel sayıdan oluşmaktadır. M kümesinden alınacak olan her $a, b \in M$ için $a<-x<b$ eşitsizliğini sağlayan bir $x \in M$ bulunduğu biliniyor. M kümesinde kaç tane pozitif sayı bulunabilir?

32. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bir geometrik dizidir. $a_1+a_2+a_3+a_4=7$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=5$ olduğuna göre $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ çarpımını hesaplayınız.

33. Her $n>2$ tam sayısı için $(n!)^2>n^n$ olduğunu gösteriniz.

34.

$$\frac{1}{998}\left(\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2-1}+\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+2}+\ldots+\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+1995^2-2}\right)=1995$$

denklemini sağlayan tüm gerçel x sayılarını bulunuz.

35. x,y ve z gerçel sayılarının,

$$x^2+yz \leq 2,$$
$$y^2+xz \leq 2,$$
$$z^2+xy \leq 2,$$

eşitsizliklerini sağladığı biliniyorsa $x+y+z$ nin alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

36. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birbirlerinden farklı pozitif tam sayılar ve m sayısı, $\{a_i+a_j,\ i \neq j\}$ kümesinin eleman sayısı olsun. m en az kaç olabilir ?

37. Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $f(3x+2y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlayan bütün $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz.

38. Hangi a gerçel sayıları için

$$x+y=a^3-a$$

$$xy=a^2$$

denklem sisteminin gerçel x ve y çözümleri vardır?

39. Doğal sayılarda tanımlı, her $m, n \in \mathbb{N}$ değeri için

- $f(f(2002)) = 17$
- $f(mn) = f(m)f(n)$
- $f(n) \leq n$

koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu tanımlanabilir mi?

40. S kümesi, 1 'den büyük tam sayılar kümesinin boş olmayan bir alt kümesidir. A sayısı, S kümesindeki elemanların çarpmaya göre terslerinin toplamı olsun. A bir tam sayı ise S kümesinin en az 3 elemanı olduğunu gösteriniz.

41. a ve b sıfırdan farklı gerçel sayıları için

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$$

denkleminin köklerini bulunuz.

42. a pozitif gerçel sayısı $a^3 = 6(a+1)$ denklemini sağlıyor ise $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ denkleminin gerçel çözümü olamayacağını gösteriniz.

43. x, y, z pozitif gerçel sayılar olsun.

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

44. $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi, $m \geq n$ olmak üzere negatif olmayan tüm m ve n tam sayıları için $a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$ eşitliğini sağlamaktadır.
$a_1 = 3$ ise a_{2008} i bulunuz.

45.

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0$$

denkleminin dört gerçel kökü ve bunlardan iki tanesinin toplamı 1 olduğuna göre denklemin bütün köklerini bulunuz.

46. $p(x) = x^3 - 2007x + 2002$ polinomunun kökleri r, s ve t olsun. Bu durumda

$$\frac{r-1}{r+1} + \frac{s-1}{s+1} + \frac{t-1}{t+1}$$

değerini bulunuz.

47.

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0$$

denkleminin gerçel köklerini bulunuz.

48. Tüm $a, b, c > 0$ gerçel sayıları için $1 + \dfrac{3}{ab + bc + ca} \geq \dfrac{6}{a + b + c}$ eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlayınız.

49. $f(x) = x^2 + (m + 3)x + m + 2$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlaması için m parametresinin alabileceği bütün gerçel değerleri bulunuz.

   (a) Her $x \in (-1, 3)$ için $f(x) < 0$,

   (b) f fonksiyonun köklerinin terslerinin toplamı $\frac{1}{3}$ ten daha küçük olmalı.

50. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 8$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

51. a, b, c sıfırdan büyük gerçel sayılardır.

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

olduğunu gösteriniz.

52. a, b, c ile $x^3 - x^2 + 2 = 0$ denkleminin köklerini gösterelim. Bu durumda $a^2 + b^2 + c^2$, $a^3 + b^3 + c^3$ ve $a^4 + b^4 + c^4$'ün değerlerini hesaplayınız.

53.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin tüm gerçel (veya karmaşık) çözümlerini bulunuz.

54. $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ denkleminin dört kökü olmasını ve köklerinin aritmetik dizi oluşturmasını sağlayacak bütün a gerçel sayılarını bulunuz.

55. Her $0 < x < 1$ gerçel sayısının, 1 den küçük iki pozitif gerçel sayının farkı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

56. $xyz(x+y+z)=1$ koşulunu sağlayan x,y,z pozitif gerçel sayıları için

a-) $\sqrt{(x^2+\frac{1}{y^2})(y^2+\frac{1}{z^2})(z^2+\frac{1}{x^2})}=(x+y)(y+z)(z+x)$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

b-) Verilen denklemi sağlayan bir (x,y,z) üçlüsü bulunuz.

57. $a,b,c,x,y,z\in\Re$ ve x,y,z sıfırdan farklı olmak üzere

$$ax^3=by^3=cz^3$$

ve

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

ise $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ olduğunu gösteriniz.

58. $(x^3+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^3-2x^2-1)^3$ denklemini sağlayan tüm x gerçel sayılarını bulunuz.

59. $\lfloor x\rfloor$, ile x gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim.

$$x+\lfloor\frac{x}{6}\rfloor=\lfloor\frac{x}{2}\rfloor+\lfloor\frac{2x}{3}\rfloor$$

denkleminin tüm köklerini bulunuz.

60. $\mathbf{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$ olmak üzere,
$f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ fonksiyonu her $m,n\in\mathbf{N}_0$ için

- $f(n+1)>f(n)$
- $f(n+f(m))=f(n)+m+1$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur. Buna göre $f(2001)$ 'in alabileceği tüm değerlerini bulunuz.

61. Eğer α,β,γ sayıları x^3-x-1 denkleminin kökleri ise,

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

ifadesinin değerini hesaplayınız.

62. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) f(1)=1,

(ii) $f(x)\geq 0$

(iii) eğer x, y, ve $x+y$ hepsi $[0,1]$ aralığında ise $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$

şartlarını sağlamaktadır. Her $x \in [0,1]$ için $f(x) \leq 2x$ olduğunu gösteriniz.

63. n bir pozitif tam sayı ve $x_1, x_2, \cdots, x_n$ birer tamsayı olmak üzere

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + n^3 \leq (2n-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n^2$$

olduğu biliniyor.Buna göre

a-) $x_1, x_2, \cdots, x_n$'den hiçbirinin negatif olamayacağını gösteriniz.

b-) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n + 1$'in bir tam kare olamayacağını gösteriniz.

64. Eğer $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümeleri aynı ise (elemanlar farklı sırada yazılmış olabilir)

$$S = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$$

sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

65. n bir doğal sayı, $f(n)$ de $[n^2, 2n^2]$ kapalı aralığındaki tam karelerin sayısı olsun. f nin azalmayan ve örten fonksiyon olduğunu gösteriniz.

66. n bir tam sayı olmak üzere,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

koşulunu sağlayan, doğal sayılardan gerçel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu olsun. Eğer $f(1) = 1002$ ise $f(2004)$ ü bulunuz.

67. n pozitif tam sayı ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ negatif olmayan gerçel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sayılarını bulunuz.

68. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ denklemini sağlayan x,y ve z pozitif gerçel sayıları için $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ nın alabileceği en küçük değeri bulunuz.

69. $x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq M(xy+yz+zx)^2$ eşitsizliğinin tüm x, y ve z pozitif gerçel sayıları için doğru olmasını sağlayacak sağlayacak en büyük M pozitif gerçel sayısını bulunuz.

70. Toplamları 1 olan tüm a, b ve c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

71. x bir gerçel sayı ve $\overline{x}$ 'de x 'in tamsayı kısmı olsun.

$$3x^3-\overline{x}=3$$

eşitliğini sağlayan x gerçel sayılarını bulunuz.

72. a,b,c gerçel sayılar, $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$ olmak üzere

$$f(x(x+1))-f(x(x-1))=x^7$$

dir. $p(n)$, n 'ye bağlı bir fonksiyon ve

$$1^7+2^7+\cdots+n^7=\frac{n^2(n+1)^2p(n)}{24}$$

ise $p(n)$=?

73. Bütün a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{2b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ab}\leq 0$$

olduğunu gösteriniz.

74. Aşağıda verilen eşitliklerin ortak gerçel çözümlerinin hepsini bulunuz:

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}=y$$
$$\frac{4y^2}{1+4y^2}=z$$
$$\frac{4z^2}{1+4z^2}=x$$

75. a bir pozitif gerçel sayı olmak üzere $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ olsun. Bu durumda

$$S=f\left(\frac{1}{2001}\right)+f\left(\frac{2}{2001}\right)+\cdots+f\left(\frac{2000}{2001}\right)$$

değerini bulunuz.

76. Toplamları 6, karelerinin toplamı 8, küplerinin toplamı ise 5 olan üç sayının dördüncü kuvvetlerinin toplamı nedir?

77. Hangi n pozitif tam sayıları için

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}$$

eşitliği sağlanacak şeklide birbirinden farklı a_1,a_2,. . . ,a_n tam sayılarını bulunabileceğini belirleyiniz.

78. $[\frac{1}{2}, 1]$ aralığındaki a, b ve c gerçel sayıları için aşağıdaki eşitsizliğin doğruluğunu ispatlayınız.

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{a+c}{1+b} \leq 3$$

79. Tüm a, b, c pozitif rasyonel sayıları için

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

80. Doğal sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu için aşağıdaki koşullar veriliyor:

(a) f sürekli artan bir fonksiyondur.

(b) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n),\ \forall m, n \in \mathbf{N}$.

(c) $m \neq n$ ve $m^n = n^m$ ise $f(m) = n$ ya da $f(n) = m$ olur.

Bu durumda $f(30)$'un değerini hesaplayınız.

81. Her $x, y \in \{1, 2, ..., 10\}$ için, $xf(x) + yf(y)$'nin bir böleni $x + y$ olacak şekilde, $\{1, 2, ..., 10\}$ kümesinden $\{1, 2, ..., 100\}$ kümesine tanımlı bütün artan f fonksiyonlarını bulunuz.

82. $(1 + \sqrt{2})^{3000}$ sayısının ondalık gösteriminde virgülden sonraki 1000'inci basamak kaçtır?

83. a, b, c pozitif gerçel sayıları $abc = 2$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu durumda

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}$$

eşitsizliğini gösteriniz.

84. Her x gerçel sayısı için

$$\left[\frac{x+3}{6}\right]-\left[\frac{x+4}{6}\right]+\left[\frac{x+5}{6}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x+1}{3}\right]$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

85.
$$\frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{a^2}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{a^2}{(x+4)(x+5)}=1$$

denkleminin köklerinin gerçel sayı olmasını sağlayan a gerçel sayılarını bulunuz.

86. $n \geq 3$ için

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2x_3\cdots x_n &= 0 \\ x_2^2 - x_1x_3\cdots x_n &= 0 \\ x_3^2 - x_1x_2\cdots x_n &= 0 \\ &\vdots \\ x_n^2 - x_1x_2x_3\cdots x_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümlerini bulunuz.

87. Her $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ için

(a) $f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=3^x$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı gerçel sayılarda tanımlı bütün fonksiyonları bulunuz.

(b) $f(x)=\frac{2^{\frac{1+x}{x}}-2^x}{3}$ fonksiyonu için $(x \neq 0)$

$$f\left(\frac{1}{2002}\right)+f\left(\frac{2}{2002}\right)+\cdots+f\left(\frac{2002}{2002}\right)+2f\left(\frac{2002}{2001}\right)+2f\left(\frac{2002}{2000}\right)+\cdots+2f\left(\frac{2002}{1}\right)$$

toplamını hesaplayınız.

88. (x,y) ile x ve y tam sayılarının en büyük ortak bölenin,, $[x,y]$ x ile ise y sayılarının en küçük ortak katını gösterelim. Bu durumda

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{[x,y]}+\frac{1}{(x,y)}=\frac{1}{2}$$

eşitliğini sağlayan bütün $\{x,y\}$ ikililerini bulunuz.

89. a,b,c gerçel sayılardır. M sayısı $y=|4x^3+ax^2+bx+c|$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığındaki en büyük değeri olsun. $M \geq 1$ olduğunu gösteriniz ve eşitlik durumunun gerçekleştiği bütün durumları belirleyiniz.

90. Pozitif tam sayılar üzerinde tanımlı f fonksiyonu $f(1) = 1996$ ve

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n) \qquad (n > 1)$$

eşitliklerini sağlamaktadır. $f(1996)$ değerini bulunuz.

91. x bir gerçel sayı, n bir pozitif tam sayı olmak üzere; $\lfloor x \rfloor$, x sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı olsun. Bu durumda $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{n} \rfloor + \ldots + \lfloor x + \frac{n-1}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$ olduğunu gösteriniz.

92.

$$4(ab + bc + ca) - 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$$

eşitsizliği sağlayan bütün pozitif a, b, c gerçel sayılarını bulunuz.

93. a, b ve c rasyonel sayılar olsun. Aşağıdaki denklemlerin her birinin sadece $a = b = c = 0$ durumunda sağlanabileceğini gösteriniz.

(i) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt{2} = 0$

(ii) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} = 0$

(iii) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$

94. x, y, z, m, n sayıları $m + n \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan pozitif gerçel sayılardır. Bu durumda

$$x\sqrt{yz(x+my)(x+nz)} + y\sqrt{xz(y+mx)(y+nz)} + z\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)} \leq \frac{3(m+n)}{8}(x+y)(y+z)(z+x)$$

olduğunu gösteriniz.

95. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}, n \geq 1$$

şeklinde tanımlanıyor. $n \geq 4$ için $\lfloor a_n^2 \rfloor = n$ olduğunu ispatlayınız.($\lfloor x \rfloor$ sayısı x'i aşmayan en büyük tam sayıdır.)

96. Aşağıdaki denklem sistemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

$$x + y + z = 2,$$

$$(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = 1,$$

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -6.$$

97. x bir gerçel sayı olmak üzere, $\sin(\cos x)$ ve $\cos(\sin x)$ fonksiyonlarının hangisi daha büyüktür?

98. a gerçel sayısı $(0,1)$ aralığında ve f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$f(0)=0 \qquad\qquad f(1)=1$$
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=(1-a)f(x)+af(y)$$

ise $f\left(\frac{1}{7}\right)=?$

99. Her x, y gerçel sayı ikilisi için, $f(xf(x)+f(y))=[f(x)]^2+y$ denklemini sağlayan tüm $f:R\to R$ fonksiyonlarını bulunuz.

100. $a+b+c+d=1$ denklemini sağlayan a, b, c, d pozitif gerçel sayıları için,

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

101. Bir gün okul sonrasında, Murat fazladan bir matematik dersine daha katılmak zorundaydı. Öğretmen tahtaya katsayıları tam sayı olan ikinci dereceden bir $x^2+p_1x+q_1=0$ denklemini yazacak ve Murat bu denklemin çözümlerini bulacaktır. Eğer çözümlerin ikisi birden tam sayı değilse Murat eve dönebilecektir. Eğer denklemin çözümleri tam sayıysa öğretmen p_2 ve q_2, bir önceki sorunun çözümlerinin herhangi bir sıralaması olacak şekilde yeni bir $x^2+p_2x+q_2=0$ denklemi yazacak ve her şey baştan başlayacaktır. Öğretmenin, Murat'ı sonsuza dek okulda tutabilmesini sağlayacak tüm olası p_1, q_1 sayılarının bulunuz.

102. Doğal sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine olan ve

$$f(f(n))\leq\frac{n+f(n)}{2}$$

koşulunu sağlayan bütün birebir $f(n)$ fonksiyonlarını bulunuz.

103. $a,b,c\in\{1,2,...,n\}$ olmak üzere gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı ve kökleri tam sayı olan

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

ikinci dereceden fonksiyonların sayısı, herhangi bir pozitif n tam sayısı için $P(n)$ ile gösterilsin.

Yukarıdaki özelliklere sahip f fonksiyonları ve bütün $n\geq 4$ değerleri için $n<P(n)<n^2$ olduğunu ispatlayınız.

104. $a+b+c=3$ denklemini sağlayan a, b ve c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

105. 271 sayısını, çarpımları maksimum olacak şekilde, pozitif gerçel sayıların toplamı olarak yazınız.

106. Aşağıdaki denklem sistemini sağlayan bütün (x,y,z) gerçel sayı üçlülerini bulunuz. Not: $[r]$: r gerçel sayısının tamsayı kısmı, $\{r\}$: r gerçel sayısının ondalık kısmı.

$$x+[y]+\{z\}=200,2$$

$$\{x\}+y+[z]=200,1$$

$$[x]+\{y\}+z=200,0$$

107. $\Re-\{0\}$ kümesinde tanımlı ve $f(x)+8f(\frac{1}{x})=-63x$ denklemini sağlayan fonksiyonları tanımlayınız.

108. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$ ise $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8}-\dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ ifadesini k cinsinden hesaplayınız.

109. a,b,x,y gerçel sayıları için $a^3+ax+y=b^3+bx+y=c^3+cx+y=0$ ve a,b,c birbirinden farklı ise $a+b+c=0$ olduğunu ispatlayınız.

110. x,y,z pozitif gerçel sayılar olmak üzere $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$ ise $(x+y)$ nin alabileceği değerleri bulunuz.

111. Tüm a,b,c pozitif gerçel sayıları için $\dfrac{1}{b(a+b)}+\dfrac{1}{c(b+c)}+\dfrac{1}{a(c+a)}\geq\dfrac{27}{2(a+b+c)^2}$ olduğunu gösteriniz.

112. $a\neq 0,b,c$ gerçel sayıları için $(a+b+c)(4a-2b+c)<0$ ise $ax^2+bx+c=0$ denkleminin iki farklı gerçel kökünün olduğunu ispatlayınız.

113. x ve y sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\leq\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ olduğunu gösteriniz.

114.

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 20 \\ ab+bc+cd+da+bd+ac &= 150 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan tüm a, b, c, d gerçel sayılarını bulunuz.

115. x, y, z gerçel sayıları için $0 < x, y, z < 1$ ve $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$ ise $(1-x)y,\ (1-y)z,\ (1-z)x$ sayılarından en az birinin $\frac{1}{4}$ den küçük veya eşit olduğunu ispatlayınız.

116. a_1, a_2, a_3 gerçel sayılarının herbirinin 1 den büyük olduğu ve her $i = 1, 2, 3$ için $\dfrac{a_i^2}{a_i - 1} > a_1 + a_2 + a_3$ olduğu bilindiğine göre $\dfrac{1}{a_1 + a_2} + \dfrac{1}{a_2 + a_3} + \dfrac{1}{a_3 + a_1} > 1$ olduğunu ispatlayınız.

117. a, b, c gerçel sayılar olmak üzere $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin üç gerçel kökü vardır. $-2 \leq a+b+c \leq 0$ ise bu üç kökten en az birinin $[0, 2]$ aralığında yer alacağını ispatlayınız.

118. a, b, c gerçel sayıları için

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= abc \\ (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) &= a^3b^3c^3\end{aligned}$$

ise $abc = 0$ olduğunu ispatlayınız.

119. Negatif olmayan gerçel sayılardan oluşan $a_1, a_2, \ldots$ dizisi tüm n pozitif tam sayıları için; $a_n + a_{2n} \geq 3n$ ve $a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n(n+1)}$ koşullarının ikisini birden sağlıyor. Buna göre

a-) Her n pozitif tam sayısı için $a_n \geq n$ olduğunu gösteriniz.

b-) Soruda verilen şartları sağlayan bir a_n dizisi bulunuz.

120. Katsayıları negatif olmayan gerçel sayılardan oluşan $p(x)$ polinomu için $p(1) \geq 1$ ise tüm pozitif gerçel sayılar için $p(x)p\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 1$ olduğunu ispatlayınız.

121. $0 < \alpha, \beta, \theta < \dfrac{\pi}{2}$ için $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\theta = 1$ ise $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\theta \geq \dfrac{3}{8}$ olduğunu ispatlayınız.

122. $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2}$ ve $k \geq 1$ için $a_{k+2} = a_k + \dfrac{a_{k+1}}{2}$ ise, $\dfrac{1}{a_1a_3} + \dfrac{1}{a_2a_4} + \dfrac{1}{a_3a_5} + \cdots + \dfrac{1}{a_{98}a_{100}} < 4$ olduğunu ispatlayınız.

123. $p(0) = 0,\ p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3$ koşulunu sağlayan tüm gerçel katsayılı $p(x)$ polinomlarını bulunuz.

124. $f : N_0 \to N_0$ $(N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\})$ bir fonksiyon olmak üzere tüm $n \in N_0$ sayıları için $f(f(n)) = f(n) + 1$ ve $\min\{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = 1$ dir. Bu koşulları sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

125. Her $x, y \in \mathbf{R}$ için $f(x^2) - f(y^2) = (x+y)(f(x) - f(y))$ koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

126. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ ve $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ ise $a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \leq 1$ olduğunu ispatlayınız.

127. $\sin^3 x(1 + \cot x) + \cos^3 x(1 + \tan x) = \cos 2x$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

128. $\dfrac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

129. a, b, c pozitif gerçel sayılar olmak üzere $\dfrac{a}{2a+b} + \dfrac{b}{2b+c} + \dfrac{c}{2c+a} \leq 1$ olduğunu ispatlayınız.

ANALİZ-CEBİR - ÇÖZÜMLER

1. Bir araba yokuş inerken 72 km/s, düz yolda 63 km/s ve yokuş çıkarken 56 km/s hızla hareket edebiliyor. Bu araba, A şehrinden B şehrine 4 saatte gidip, aynı yolu 4 saat 40 dakikada döndüğüne göre, A ve B şehirleri arasındaki mesafeyi bulunuz.

   Çözüm: A şehrinden B şehrine giderken yokuş aşağı, düz ve yokuş yukarı olan mesafeler sırasıyla x, y ve z km olsun. s km yol v km/s hızla s/v saatte gidilir. Gidiş yolunda geçen zaman 4 saat olduğu için;

   $$\frac{x}{72} + \frac{y}{63} + \frac{z}{56} = 4$$

   denklemi elde edilir. Dönüş yolu için;

   $$\frac{x}{56} + \frac{y}{63} + \frac{z}{72} = \frac{14}{3}$$

   olur. Her iki denklemi de 56, 63 ve 72 nin OKEK'i olan 504 ile çarparsak;

   $$\begin{aligned} 7x + 8y + 9z &= 2016 \\ 9x + 8y + 7z &= 2352 \end{aligned}$$

   denklemlerini elde ederiz. Bu denklemleri taraf tarafa toplarsak $16(x+y+z) = 4368$, buradan da $x + y + z = 273$ buluruz. Dolayısıyla, iki şehir arasındaki mesafe 273 km'dir.

2. $x + y^2 = 1$, $x^2 + y^3 = 1$ denklem sisteminin çözümlerini bulunuz.

   Çözüm: İlk denklemi $x = 1 - y^2$ olarak ele alıp ikinci denklemde yerine koyarsak; $(1 - y^2)^2 + y^3 = 1$, yani $1 - 2y^2 + y^4 + y^3 = 1$, buradan da $y^2(y^2 + y - 2) = y^2(y+2)(y-1) = 0$ buluruz. Dolayısıyla çözümler, $y = 0$, $y = -2$, $y = 1$ ve bunlara karşılık gelen x değerleri ise sırasıyla, $x = 1$, $x = -3$ ve $x = 0$ olarak bulunur.

3. $M(n) = \{-1, -2, ..., -n\}$ olmak üzere, $M(n)$ nin bütün alt kümelerinin elemanları çarpımlarının toplamı kaçtır ?

   Çözüm $x_1, x_2, .., x_n$ n tane sayı olsun.

   $(1 + x_1)(1 + x_2)..(1 + x_n) = 1 + x_1 + x_2 + .. + x_n + x_1x_2 + .. + x_{n-1}x_n + .. + x_1x_2..x_n$

yazılabilir. S bütün alt dizilerin elemanlarının çarpımlarının toplamı olmak üzere yukarıdaki eşitlik

$$S = (1 + x_1)\,(1 + x_2)\,..\,(1 + x_n) - 1$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada her i için $x_i = -i$ yazarsak S sayısı aradığımız toplama eşit olur. Bu durumda

$$S = (1 + (-1))\,(1 + (-2))\,..\,(1 + (-n)) - 1 = 0 - 1 = -1$$

bulunur.

4. Aşağıdaki denklemin bütün gerçel köklerini bulunuz:

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Not: Burada $\lfloor x \rfloor$, x ten küçük veya x e eşit en büyük tam sayıyı temsil etmektedir.

Çözüm Verilen denklemin iki tarafına da $\frac{1}{4}$ ekleyelim. Bu durumda denklemin sol tarafı $\left(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right)^2$ olarak yazılabileceğinden;

$$\left(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2$$

ve dolayısıyla

$$x = \pm\left(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right)$$

olur. Buradan, $\lfloor x \rfloor$ her zaman bir tam sayı olduğundan, $\lfloor x \rfloor = n$ dersek; $x = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$ bulunur. Bu durumda sorudaki denklemi sağlayan her x gerçel sayısı, m bir tam sayı olmak üzere, $x = m + \dfrac{1}{2}$ şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda her m tam sayısı için $\left\lfloor m + \dfrac{1}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor m + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = m^2 + m = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ olduğundan verilen denklemi sağlayan bütün gerçel sayıların kümesi $\{x = m + \dfrac{1}{2};\ m \in \mathbf{Z}\}$ olur.

5. Tüm pozitif a, b, c gerçel sayıları için $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ac} + \dfrac{c^3}{ab} \geq a + b + c$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a, b, c pozitif olduğundan $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ac} + \dfrac{c^3}{ab} \geq a + b + c \Longleftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$ dir. x, y, z pozitif sayılar olmak üzere $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$ ve $(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \geq 0$ olduğundan; $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ olur. Bu eşitsizliği iki kere uygularsak;
$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) = abc(a + b + c)$ olur ve ispat biter.

6. Aşağıdaki koşulları sağlayan a, b, c, d gerçel sayılarını bulunuz.

$$a + b + c \leq 3d$$

$$b + c + d \leq 3a$$

$$c + d + a \leq 3b$$

$$d + a + b \leq 3c$$

Çözüm: Verilen eşitsizlik sistemi simetrik olduğundan $\min\{a, b, c, d\} = a$ kabul edebiliriz. $a \leq b$, $a \leq c$, $a \leq d$ olduğundan $3a \leq b + c + d$ olur. Verilen eşitsizliklere göre $b + c + d \leq 3a$ dır. Dolayısıyla, $3a \leq b + c + d \leq 3a$ dir. Yani, $3a = b + c + d$ dir. $(a - b) + (a - c) + (a - d) = 0$ olduğundan ve $a \leq b$, $a \leq c$, $a \leq d$ olduğu için $a = b = c = d$ bulunur.

7. Tam sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine tanımlı f fonksiyonu, tüm x tam sayıları için
$f(x + 1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ eşitliğini sağlıyor. Eğer $f(1) = 2$ ise, $f(2004)$ kaçtır?

Çözüm: Herhangi n pozitif tamsayısı için f fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$f(n + 1) = \frac{1 + f(n)}{1 - f(n)}$$
$$f(n + 2) = \frac{1 + f(n + 1)}{1 - f(n + 1)} = \frac{1 + \frac{1+f(n)}{1-f(n)}}{1 - \frac{1+f(n)}{1-f(n)}} = -\frac{1}{f(n)}$$
$$f(n + 4) = -\frac{1}{f(n + 2)} = f(n)$$

Bu nedenle, tüm n doğal sayıları için f fonksiyonu $f(n + 4) = f(n)$ eşitliğini sağlar. Şimdi de f fonksiyonunun bu özelliğinden faydalanarak $f(2004)$'ü bulalım

$f(2004) = f(2000) = f(1996) = ... = f(8) = f(4)$.

$f(2004) = f(4)$ olduğu için, $f(4)$'ün değerini hesaplayalım:

$f(1) = 2$ olduğundan, $f(2) = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} = -3, f(3) = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = -\frac{1}{2}, f(4) = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1}{3}$.

Bu nedenle, $f(2004) = \frac{1}{3}$'tür.

8. Aşağıdaki denklemi gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

$$||x + 2| - 2x| = \frac{x + 3}{2}$$

Çözüm $x+2$ nin işareti $x=-2$ de değiştiğinden dolayı soruyu iki durumda inceleyeceğiz.

(a) $x<-2$ ise $|x+2|=-x-2$ dir. Dolayısıyla $|-x-2-2x|=\frac{x+3}{2}$, $|3x+2|=\frac{x+3}{2}$ ve $x<-2$ durumunu incelediğimiz için $3x+2<0$ dır. Yani, $-3x-2=\frac{x+3}{2}$, buradan da $x=-1$ bulunur. Ama $x=-1$ noktası $x<-2$ kümesinde olmadığından dolayı, inceleme aralığında denklemi sağlayan bir değer yoktur.

(b) $x\geq -2$ ise $|x+2|=x+2$ dir. Dolayısıyla $|x+2-2x|=\frac{x+3}{2}$, $|x-2|=\frac{x+3}{2}$ bulunur. Burada da $x-2$ nin işareti $x=2$ de değiştiği için $-2\leq x<2$ ve $x\geq 2$ durumlarını incelemek gerekir.

- $-2\leq x<2$ ise $|x-2|=-x+2$ dir. Dolayısıyla $-x+2=\frac{x+3}{2}$, $x=\frac{1}{3}$ bulunur. $x=\frac{1}{3}$ inceleme aralığında olduğu için $x=\frac{1}{3}$ bir çözümdür.
- $2\leq x$ ise $|x-2|=x-2$ dir. Dolayısıyla $x-2=\frac{x+3}{2}$ $x=7$ bulunur. $x=7$ inceleme aralığında olduğu için $x=7$ bir çözümdür.

Sonuç olarak çözüm kümesi $\{\dfrac{1}{3},7\}$ dir.

9. $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$ olmak üzere $ab+bc+cd+da$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Öncelikle $ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)$ eşitliği ve buradan da Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliği kullanılarak
$ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)\leq\left(\dfrac{a+c+b+d}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1+2+3+4}{2}\right)^2=25$
bulunur. Eşitlik ancak $a+c=b+d$ durumunda mümkündür. Örnek olarak $a=1,\ c=4,\ b=2,\ d=3$ alabiliriz.

10. Koordinat düzleminde merkezden harekete başlayan bir sinek önce 1 birim yukarıya sonra $\dfrac{1}{2}$ birim sağa sonra $\dfrac{1}{4}$ birim aşağıya sonra $\dfrac{1}{8}$ birim sola sonra $\dfrac{1}{16}$ birim yukarıya,... doğru hareketlerine sonsuza dek devam ediyor. Bu hareketler sonunda sineğin bulunacağı noktayı belirleyiniz.

Çözüm: Öncelikle $-1<x<1$ koşulunu sağlayan her x gerçel sayısı için; $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$ olduğunu gösterelim. $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=A$ dersek $A-1=x(1+x+x^2+\cdots)=xA$ olur. $A(1-x)=1$ ve $A=\dfrac{1}{1-x}$ olur. (Not: $x\geq 1$ veya $x\leq -1$ iken A toplamı herhangi bir gerçel sayıya eşit olmaz.) Bu eşitliği soruda uygularsak; Sineğin
x koordinatı: $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}-\cdots=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{-1}{4}}=\dfrac{2}{5}$,
y koordinatı: $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}-\cdots=\dfrac{1}{1-\frac{-1}{4}}=\dfrac{4}{5}$ dir.

11. α, β, γ sayıları $x^3 - x^2 + 1 = 0$ denkleminin kökleri ise $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2}$ yi hesaplayınız.

Çözüm: Verilen $x^3 - x^2 + 1 = 0$ denkleminden $\dfrac{1}{x^2} = 1 - x$ denklemine ve buradan da, Vieta formulünü kullanarak
$\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} = (1-\alpha) + (1-\beta) + (1-\gamma) = 3 - (\alpha+\beta+\gamma) = 3 - 1 = 2$ bulunur.

12. x ve y pozitif gerçel sayılar olmak üzere $x + xy + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{y}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm:$x, xy, y, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{xy}$ ve $\dfrac{1}{y}$ terimlerinin çarpımları 1 olduğundan, geometrik ortalaması da 1 olur. Problemde verilen ifade bu terimlerin aritmetik ortalamasının 6 katıdır. Aritmetik Geometrik ortalama eşitsizliğinden, verilen ifadenin alabileceği en küçük değerin 6 olduğu sonucu çıkar. $x = y = 1$ için de ifade 6 ya eşit olur.

13. Bir tren, aralarındaki mesafe 20 km olan iki istasyon arasındaki yolculuğu daima aynı sürede tamamlamak zorundadır. Bir gün yolun tam ortasında durmak zorunda kalan tren 3 dakika bekledikten sonra, gecikmeyi telafi etmek için hızını 10 km/saat artırarak yoluna devam ediyor. Bir başka gün aynı noktada 5 dakika süre ile durmak zorunda kalan tren, yolculuğu zamanında tamamlamak için hızını ne kadar artırmalıdır?

Çözüm: Trenin normal hızını v km/saat, gecikmeyi telafi etmek için sahip olması gereken hızı da v_1 km/saat kabul edelim. Tren yolun ilk yarısını $\dfrac{10}{v}$ saatte tamamlar. İkinci yarısını ise, duraklama süresi de dahil olmak üzere 3 dakikalık gecikme olduğunda $\dfrac{10}{v+10} + \dfrac{1}{20}$ saatte, 5 dakikalık gecikme olduğunda ise $\dfrac{10}{v_1} + \dfrac{1}{12}$ saatte tamamlar. Yolculuğun ilk yarısı ile son yarısının aynı sürede tamamladığından $\dfrac{10}{v} = \dfrac{10}{v+10} + \dfrac{1}{20}$ ve $\dfrac{10}{v} = \dfrac{10}{v_1} + \dfrac{1}{12}$ olur. İlk denklemden elde edilen $(v-40)(v+50) = 0$ 'ın pozitif kökü $v = 40$ km/saat çözümünü verir. Bu değer yardımı ile ikinci denklemden de $v_1 = 60$ km/saat bulunur. Tren hızını 20 km/saat artırmalıdır.

14. $a + b + c > 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçel çözümü olmadığı biliniyor. Bu durumda $c > 0$ olduğunu gösteriniz.

Birinci Çözüm: $f(x) = ax^2 + bx + c$ olmak üzere bir f fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $f(1) = a+b+c > 0$ olduğunu biliyoruz. Burada denklemin gerçel kökü olmadığından ve f fonksiyonu sürekli olduğundan, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 0$ olur. Dolayısıyla $c = f(0) > 0$ olduğu görülür.

İkinci Çözüm: $c \leq 0$ olduğunu kabul edelim. Denklemin gerçel kökü olmadığından

$b^2 - 4ac < 0$ olmalıdır. $0 \leq b^2 < 4ac$ olduğundan $a < 0$ olur. $b > -a - c$ ve $a < 0$, $c \leq 0$, olduğundan $b > 0$ ve $-a - c > 0$ olur. Bu durumda $(a + c)^2 < b^2 < 4ac$ olur. $(a + c)^2 < 4ac$ ve $(a - c)^2 < 0$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Yani $c > 0$ olmalıdır.

15. a, b ve c sayıları

$$
\begin{aligned}
ab - a &= b + 119 \\
bc - b &= c + 59 \\
ca - c &= a + 71
\end{aligned}
$$

denklemlerini sağlayan pozitif gerçel sayılar olmak üzere $a + b + c$ toplamının alabileceği bütün değerleri bulunuz.

Çözüm:İlk denklemden $a(b-1) = (b-1) + 120$ buradan $(a-1)(b-1) = 120$ ve benzer şekilde $(b-1)(c-1) = 60$ ve $(a-1)(c-1) = 72$ bulunur. a, b ve c nin 1 den farklı oldukları açıktır. Bulunan eşitliklerden ilk ikisi oranlandığında elde edilen $\dfrac{a-1}{c-1} = 2$ ifadesini üçüncü eşitlikte kullanıldığında $2(c-1)^2 = 72$ bulunur ve buradan $|c - 1| = 6$ çıkar. $c > 0$ olduğundan, $c = 7$ olmalıdır. Buradan $a = 13$ ve $b = 11$ olduğu da kolaylıkla bulunabilir. $a + b + c$ nin alabileceği tek değer 31 dir.

16. Aşağıdaki denklem sistemini gerçel sayılar kümesi içinde çözünüz.

$$
\begin{aligned}
2x_1 &= x_5^2 - 23 \\
4x_2 &= x_1^2 + 7 \\
6x_3 &= x_2^2 + 14 \\
8x_4 &= x_3^2 + 23 \\
10x_5 &= x_4^2 + 34
\end{aligned}
$$

Çözüm: Verilen denklemleri taraf tarafa toplarsak;
$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 55$ olur. Bu da
$x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + x_3^2 - 6x_3 + x_4^2 - 8x_4 + x_5^2 - 10x_5 + 55 = 0$ yani
$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2 + (x_5 - 5)^2 = 0$ denklemine denktir. Denklemin sol tarafındaki hiçbir terim negatif olamayacağı için her biri sıfır olmak zorundadır. Böylece denklem sisteminin tek çözümünün

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$$

olur ve bu değerler soruda verilen beş denklemi de sağlar.

17. x, y, a gerçel sayılar olmak üzere

$$x+y=x^2+y^2=x^3+y^3=a$$

olduğuna göre a nın alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm: $(x+y)^2-2xy=x^2+y^2=a$ olduğundan $xy=\dfrac{a^2-a}{2}$ olur. $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3=a$ olduğundan $a^3-3a\left(\dfrac{a^2-a}{2}\right)=a$ ve buradan da $a^3-3a^2+2a=a(a-1)(a-2)$ olur. Yani sorudaki koşulları sağlayan a sayısı $0,1,2$ dışında bir gerçel sayı olamaz. $x=0=y$ için $a=0$, $x=0, y=1$ için $a=1$, $x=1=y$ için $a=2$ olduğundan a sayısının alabileceği tüm değerler $0,1,2$ dir.

18. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız.

$$2002!<\left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$$

Çözüm: Bu eşitsizliği göstermek için $xy\leq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ eşitsizliğini kullanacağız. Öncelikle

$$1.2002<\left(\frac{2003}{2}\right)^2$$

$$2.2001<\left(\frac{2003}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$2002.1<\left(\frac{2003}{2}\right)^2$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa çarparsak;

$$(1.2.3\ldots 2002)^2<\left[\left(\frac{2003}{2}\right)^2\right]^{2002}$$

elde ederiz ki buradan

$$2002!<\left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$$

olduğu açıkça görülür.

19. f fonksiyonu, her pozitif n tam sayısı için, $f(n)=\dfrac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ şeklinde tanımlanıyor. $f(1)+f(2)+\cdots+f(40)$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm: $4n = (\sqrt{2n+1})^2 + (\sqrt{2n-1})^2$ olduğundan

$$f(n) = \frac{\sqrt{2n+1}^2 + \sqrt{2n-1}^2 + \sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

şeklinde yazılabilir. Pay ve payda, paydanın eşleniği ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}^2 + \sqrt{2n-1}^2 + \sqrt{4n^2-1})}{(2n+1)-(2n-1)} \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}^3 - \sqrt{2n-1}^3}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} f(1)+f(2)+\cdots+f(40) &= \frac{(\sqrt{3}^3 - \sqrt{1}^3) + (\sqrt{5}^3 - \sqrt{3}^3) + \cdots + (\sqrt{81}^3 - \sqrt{79}^3)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{81}^3 - \sqrt{1}^3}{2} \\ &= \frac{9^3 - 1^3}{2} \\ &= \frac{728}{2} \\ &= 364. \end{aligned}$$

20. Birbirinden farklı x, y, z tam sayıları $xy + yz + xz = 26$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu durumda $x^2 + y^2 + z^2 \geq 29$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Genelliği bozmadan $x < y < z$ olduğunu kabul edebiliriz. $z - y \geq 1$, $y - x \geq 1$ ve $z - x \geq 2$ olduğu için $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 6$ ve $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz \geq 3$ eşitsizlikleri geçerlidir. Bunun yanı sıra $xy + yz + xz = 26$ olmasından dolayı $x^2 + y^2 + z^2 \geq 29$ dur.

21. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{x+7}$ dekleminin bütün gerçel köklerini bulunuz.

Çözüm Denklemin gerçel sayılarda tanımlı olabilmesi için $x \geq -\frac{1}{2}$ olmalıdır.
Denklemi şöyle düzenleyelim:

$$\sqrt{2x+1} - 3 = \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3}.$$

Karekök artan bir fonksiyon olduğu için denklemin sağ tarafı pozitiftir. Dolayısıyla, sol taraf da pozitiftir. Yani, $\sqrt{2x+1} > 3$ ve $x > 4$.
Denklemin iki tarafının da karesini alırsak,

$$2x + 1 - 6\sqrt{2x+1} + 9 = x + 7 + x + 3 - 2\sqrt{(x+7)(x+3)},$$

$$3\sqrt{2x+1} = \sqrt{(x+7)(x+3},$$
$$18x + 9 = x^2 + 10x + 21,$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Elde edilen son denklemin kökleri $x = 2$ ve $x = 6$ dır. $x > 4$ olması gerektiğinden dolayı tek çözüm $x = 6$ dır.

Not: Bu tip denklem sorularında çözüm yaparken kare alıyorsak mutlaka en son bulduğumuz değerleri sorudaki denklemde yerine koyup denklemin sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmeliyiz. Bazen, bu soruda olduğu gibi yalancı kökler (bu sorudaki $x = 2$ gibi) olabilir.

22. $z + \frac{1}{z} = 1$ ise $z^{2007} + \frac{1}{z^{2007}}$ kaçtır?

Çözüm $z + \frac{1}{z} = 1$ olduğundan $z^2 - z + 1 = 0$ olur. Denklemin her iki tarafını da $z+1$ ile çarparsak $z^3 + 1 = 0$, yani $z^3 = -1$ bulunur. Bu durumda $z^{2007} = (z^3)^{669} = (-1)^{669} = -1$. Bu değer denklemde yerine yazılarak $z^{2007} + \frac{1}{z^{2007}} = -1 + \frac{1}{-1} = -2$ bulunur.

23. a, b, c sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{ay+bx}{xy} = \frac{bz+cy}{yz} = \frac{cx+az}{zx} = \frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}$$

ise x, y ve z yi a, b, c cinsinden bulunuz.

Çözüm İlk iki eşitliği $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{c}{z} + \frac{a}{x}$ şeklinde yazarsak $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ olduğu görülür. Buradan $x = \frac{az}{c}, y = \frac{bz}{c}$, ve $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a}{\frac{az}{c}} + \frac{b}{\frac{bz}{c}} = \frac{2c}{z}$. Bu durumda

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{x^2+y^2+z^2} = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{\frac{a^2z^2}{c^2} + \frac{b^2z^2}{c^2} + z^2} = \frac{4c^2(a^2+b^2+c^2)}{z^2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{4c^2}{z^2}$$

olur. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ olduğundan $\frac{2c}{z} = \frac{4c^2}{z}$ ve $c \neq 0$ olduğundan $z = 2c$ olur ve buradan da $x = 2a$ $y = 2b$ $z = 2c$ bulunur.

24. a bir pozitif gerçel sayı olsun. Bu durumda $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}$, $\sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$ sayılarındandan hangisi daha büyüktür?

1. Çözüm: $(\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004})-(\sqrt{a+1003}-\sqrt{a})$ değerinin negatif olduğunu gösterirsek $\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004}$ sayısının, $\sqrt{a+1003}-\sqrt{a}$ sayısından küçük olduğunu göstermiş oluruz. Göstermek istediğimiz eşitsizliği

$$\begin{aligned}(\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004})-(\sqrt{a+1003}-\sqrt{a}) &< 0\\ \sqrt{a+2007}+\sqrt{a} &< \sqrt{a+1003}+\sqrt{a+1004}\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitsizliğin her iki tarafı da her zaman pozitif olduğundan, iki tarafın karesini alarak

$$\sqrt{a^2+2007} < \sqrt{a^2+2007a+1004\cdot 1003}$$

elde ederiz. Burada a gerçel sayısı pozitif olduğundan, elde edilen eşitsizlik doğrudur. Dolayısıyla bütün pozitif a değerleri için $\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004}$ sayısı, $\sqrt{a+1003}-\sqrt{a}$ sayısından küçüktür.

2. Çözüm:

$$\begin{aligned}\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004} &=\\ &= \frac{(\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004})(\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004})}{\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004}}\\ &= \frac{(a+2007)-(a+1004)}{\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004}}=\frac{1003}{\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004}}\\ \sqrt{a+1003}-\sqrt{a} &=\\ &= \frac{(\sqrt{a+1003}-\sqrt{a})(\sqrt{a+1003}+\sqrt{a})}{\sqrt{a+1003}+\sqrt{a}}\\ &= \frac{(a+1003)-a}{\sqrt{a+1003}+\sqrt{a}}=\frac{1003}{\sqrt{a+1003}+\sqrt{a}}\end{aligned}$$

olduğu için, bulduğumuz ifadeler

$$\sqrt{a+2007}+\sqrt{a} < \sqrt{a+1003}+\sqrt{a+1004}$$

eşitsizliğini kanıtlar. Dolayısıyla verilen sayılar arasında, $\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004} < \sqrt{a+1003}-\sqrt{a}$ ilişkisi vardır.

25. $2(a^2+1)(b^2+1)=(a+1)(b+1)(ab+1)$ denklemini sağlayan tüm a,b gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm 1. Verilen denklemi a bilinmeyeni için ikinci dereceden bir denklem gibi düşünürsek $a^2(b^2-b+2)-a(b+1)^2+2b^2-b+1=0$ elde edilir. Bu denklemin diskriminantı $\Delta=(b+1)^4-4(b^2-b+2)(2b^2-b+1)=-(b-1)^2(7b^2-2b+7)$ dir. $7b^2-2b+7=6(b^2+1)+(b-1)^2>0$ olduğundan denklemin gerçel çözümünün olması için $b = 1$ $(budurumda\Delta \geq 0)$ olmalıdır. Buradan $a = 1$ bulunur. Tek çözüm $(a, b) = (1, 1)$ dir.

Çözüm 2. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $2(a^2+1) \geq (a+1)^2, 2(b^2+1) \geq (b+1)^2$ ve $(a^2+1)(b^2+1) \geq (ab+1)^2$ elde edilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpıp sonra da iki tarafın kareköküne alırsak $2(a^2+1)(b^2+1) \geq |(a+1)(b+1)(ab+1)|$ eşitsizliğine ulaşırız. Eşitsizliğin eşitlik olması ancak ilk eşitsizliklerin eşitlik olması durumunda mümkündür ki bu da bize $a = b = 1$ verir.

26. Çarpmaya göre terslerinin toplamı -1 ve küplerinin toplamı 4 olan tüm gerçel sayıları bulunuz.

Çözüm: Sayılar x ve y olsun. Aradığımız sayılar $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -1$ ve $x^3 + y^3 = 4$ denklemlerini sağlarlar. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -1$ olduğundan $x + y = -xy$ ve $x^3 + y^3 = 4$ olduğundan $(x+y)^3 - 3xy(x+y) = 4$ ve buradan da $(xy)^3 - 3(xy)^2 + 4 = 0$ olur. $(xy+1)(xy-2)^2 = 0$ denkleminden $xy = -1$ veya $xy = 2$ sonucuna varılır.
$xy = -1$ için $x + y = 1$ olacağından $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 5$ ve $|x - y| = \sqrt{5}$ olur. $x \geq y$ kabul edersek $x - y = \sqrt{5}$, $x + y = 1$, $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ bulunur.
$xy = 2$ için $x + y = -2$ olacağından $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = -4 < 0$ olur. Yani bu durum imkansızdır.
Sonuç olarak çözüm olan tek (x, y) ikilisi $(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2})$ dir.

27. $f : \Re \to \Re$ fonksiyonu $f(1) = 1$ ve her x ve y gerçel sayıları için $f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu koşulları sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $f(0) = 0$ olduğunu göstererek başlayalım:
$y = 0$ olsun. Her x gerçel sayısı için

$$f(x \cdot 0 + f(x)) = f(f(x)) = x \cdot f(0) + f(x)$$

eşitliği geçerlidir. $x = 0$ için de $f(f(0)) = 0 \cdot f(0) + f(0) = f(0)$ olur.
$y = 0$, $x = f(0)$ için

$$\begin{aligned} f(0) &= f(f(0)) \\ &= f(f(0) \cdot 0 + f(f(0))) \\ &= f(f(f(0))) \\ &= f(0) \cdot f(0) + f(f(0)) \\ &= (f(0))^2 + f(0) \end{aligned}$$

Buradan da $f(0)=0$ olduğu görülür.

Bunun bir sonucu olarak; $y=0$ ve her x gerçel sayısı için $f(x\cdot 0+f(x))=x\cdot f(0)+f(x)=f(x)$, buradan da $f(f(x))=f(x)$ bulunur. $x=1$ ve her y gerçel sayısı için soruda verilen $f(1)=1$ eşitliğini kullanarak $f(y+1)=f(1\cdot y+f(1))=1\cdot f(y)+f(1)=f(y)+1$ buluruz. Bu eşitlikte y yerine $f(x)$ yazarsak, $f(f(x)+1)=f(x)+1$ denkleminin her x gerçel sayısı için sağlandığını görürüz. Bu durumda

$$\begin{aligned}1+f(x) &= f(1+f(x))\\ &= f(xy+f(x))\\ &= x\cdot f(y)+f(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1=x\cdot f(y)=x\cdot f(\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$$

olduğundan, sıfırdan farklı her x gerçel sayısı için, $f(x)=x$ olduğu görülür. Fakat $f(0)=0$ olduğunu da göstermiştik. Bu nedenle, her x gerçel sayısı için $f(x)=x$ olduğu ispatlanmış olur.

Not: Bu tip fonksiyonel denklem sorularında en son bulunan f fonksiyonlarının soruda verilen koşulları sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir. Bazen sorudaki koşulları sağlamayabilir. Bu soruda $f(x)=x$ fonksiyonu $f(xy+f(x))=xf(y)+f(x)$ denklemini bütün x,y gerçel sayıları için sağladığından ve $f(1)=1$ olduğundan $f(x)=x$ bir çözümdür.

28. $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2004^2}+\frac{1}{2005^2}}=2005-\frac{1}{2005}$ eşitliğini ispatlayınız.

Çözüm:Önce bir gözlem yapalım:

$$1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^4+2k^3+3k^2+2k+1}{k^2(k+1)^3}=\Big(\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\Big)^2$$

yazıp her iki tarafın karekökünü aldığımızda;

$$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\Big(\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\Big)=1+\frac{1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2004^2}+\frac{1}{2005^2}}\\
&=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\right)\\
&=2004\cdot 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\\
&=2004+1-\frac{1}{2005}\\
&=2005-\frac{1}{2005}
\end{aligned}$$

29. a, b, c ve d, $a+b+c+d=1$ eşitliğini sağlayan pozitif gerçel sayılardır.

$$\frac{bcd}{a+2}+\frac{acd}{b+2}+\frac{abd}{c+2}+\frac{abc}{d+2}<\frac{1}{13}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{abc} &\leq \frac{a+b+c}{3}\\
abc &\leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{abc}{d+2}\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{d+2}\leq\left(\frac{a+b+c+d}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{d+2}=\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{d+2}<\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{54}$$

eşitsizliğini elde edilir. Benzer şekilde $\frac{bcd}{a+2}$, $\frac{acd}{b+2}$ ve $\frac{abd}{c+2}$ 'nin de $\frac{1}{54}$ 'ten küçük olduğu bulunabilir. O halde

$$\frac{bcd}{a+2}+\frac{acd}{b+2}+\frac{abd}{c+2}+\frac{1}{54}<4\cdot\frac{1}{54}<\frac{1}{13}$$

olur.

30. x bir gerçel sayı olmak üzere $x^2-3x+1=0$ ise $x^9+x^7+x^{-9}+x^{-7}$ nin değerini hesaplayınız.

Çözüm: Verilen denklemden $x+\frac{1}{x}=3$ elde edilir. Öte yandan, hesaplanması istenen ifade $(x^8+x^{-8})(x+x^{-1})$ şeklinde çarpanlara ayrılabilir. İlk çarpanı hesaplamak için $x+\frac{1}{x}=3$ denkleminde iki tarafın karesi alınarak $x^2+x^{-2}=7$ ve bu ifadenin de karesi alınarak $x^4 + x^{-4} = 47$ ve bir kez daha kare alınarak $x^8 + x^{-8} = 2207$ elde edilir. Aranan ifadenin sayı değeri 6621 dir.

31. M kümesi 20 tane farklı gerçel sayıdan oluşmaktadır. M kümesinden alınacak olan her $a, b \in M$ için $a < -x < b$ eşitsizliğini sağlayan bir $x \in M$ bulunduğu biliniyor. M kümesinde kaç tane pozitif sayı bulunabilir?

Çözüm: $a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$ olmak üzere $M = \{a_1, a_2, \cdots a_{20}\}$ olsun. M de bulunan pozitif olmayan elemanların sayısı pozitif olanlardan fazla ise en azından 11 tane pozitif olmayan eleman var demektir ($a_{11} = 0$ olması mümkün). Bu durumda verilen şarta göre

$$a_1 < -x_1 < a_2 < -x_2 < a_3 < -x_3 < \cdots a_{10} < -x_{10} < a_{11}$$

eşitsizliklerini sağlayan $x_1, \cdots x_{10}$ pozitif sayıları bulunmalıdır. Buradan $x_1, \cdots x_{10}$ pozitif sayılarının her birinin farklı olması gerektiği görülür. Bu da M'nin en azından 21 eleman içermesini gerektirir ki bu bir çelişkidir. Buna göre M de bulunan pozitif olan elemanların sayısı pozitif olmayanlardan az olamaz. Benzer şekilde M de bulunan negatif olan elemanların sayısı negatif olmayanlardan az olamaz. Sonuç olarak M'de bulunan pozitif olan elemanların sayısı 10'dur.

32. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bir geometrik dizidir. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 7$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 5$ olduğuna göre $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ çarpımını hesaplayınız.

Çözüm: Verilen dizi bir geometrik dizi olduğundan bir r gerçel sayısı için $a_2 = ra_1$, $a_3 = r^2 a_1$ ve $a_4 = r^3 a_1$ yazılabilir ve

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1(1 + r + r^2 + r^3) = a_1 \left(\frac{1 - r^4}{1 - r} \right) = 7$$

ve

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{a_1} \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - r^4}{r^3(1 - r)} = 5$$

elde edilir. Eşitlikler taraf tarafa bölünerek $a_1^2 r^3 = \dfrac{7}{5}$ bulunur. Öte yandan $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = a_1^4 r^6 = (a_1^2 r^3)^2$ olduğundan $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = \left(\dfrac{7}{5} \right)^2 = \dfrac{49}{25} = 1,96$ olur.

33. Her $n > 2$ tamsayısı için $(n!)^2 > n^n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(n!)^2$ ifadesini
$(1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n)\,(1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n) = (1 \cdot n)(2 \cdot (n-1))(3 \cdot (n-2)) \cdots (k \cdot (n - k + 1)) \cdots (n \cdot 1)$ şeklinde yazabiliriz. Öte yandan, her $1 < k < n$ tam sayısı için

$k(n-k+1)-n = nk-k^2+k-n = (n-k)(k-1) > 0$ olduğundan, $k(n-k+1) > n$ olur ve bu da iddiayı kanıtlar.

34.

$$\frac{1}{998}(\sqrt{2\sqrt{2}x - x^2 - 1^2 - 2} + \sqrt{2\sqrt{2}x - x^2 + 2^2 - 2} + \ldots + \sqrt{2\sqrt{2}x - x^2 + 1995^2 - 2}) = 1995$$

denklemini sağlayan tüm gerçel x sayılarını bulunuz.

Çözüm: $k = 1, 2, \ldots, 1995$ için

$$\sqrt{2\sqrt{2}x - x^2 + k^2 - 2} = \sqrt{k^2 - (x - \sqrt{2})^2} \leq k$$

gözlemini kullanarak

$$\frac{1}{998}(\sqrt{2\sqrt{2}x - x^2 - 1^2 - 2} + \sqrt{2\sqrt{2}x - x^2 + 2^2 - 2} + \ldots + \sqrt{2\sqrt{2}x - x^2 + 1995^2 - 2}) \leq$$

$$\frac{1}{998}(1 + 2 + \ldots + 1995) = 1995$$

olduğunu, dolayısıyla da eşitliğin ancak ve ancak $x = \sqrt{2}$ durumunda gerçekleşeceğini gösterebiliriz. Tek çözüm $x = \sqrt{2}$ dir.

35. x,y ve z gerçel sayılarının,

$$x^2 + yz \leq 2,$$
$$y^2 + xz \leq 2,$$
$$z^2 + xy \leq 2,$$

eşitsizliklerini sağladığı biliniyorsa $x + y + z$ nin alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

Çözüm:$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$ olduğundan $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ve buradan da $\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) \geq (x + y + z)^2$ olur. Soruda verilen eşitsizllikleri taraf tarafa toplarsak $(x+y+z)^2 \leq \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \leq \frac{3}{2}6 = 9$ ve buradan da $-3 \leq x + y + z \leq 3$ bulunur. Eşitlik durumu ise $x = y = z = -1$ iken ve $x = y = z = 1$ iken sağlanır.

Not: Bir soruda verilen bir k değişkeninin alabileceği en küçük ve en büyük değerler sorulduğunda k için $k \leq p$ veya $k \geq q$ gibi eşitsizliklerin sağlandığını göstermemiz k sayısını alabileceği en büyük değerin p, en küçük değerinde q olmasını gerektirmez. k sayısının p ve q sayılarına da eşit olabileceğini ispatlamamız gerekir.

36. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birbirlerinden farklı pozitif tam sayılar ve m sayısı, $\{a_i + a_j,\ i \neq j\}$ kümesinin eleman sayısı olsun. m en az kaç olabilir ?

Çözüm: Genelliği bozmadan $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ kabul edelim.

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \ldots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \ldots < a_{n-1} + a_n$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte en az $(n-1) + (n-2) = 2n - 3$ tane farklı toplam vardır. Çünkü en küçük toplam 3, en büyük toplam en az $(n-1) + n = 2n - 1$ olabilir. Yani en az $2n - 3$ tane birbirinden farklı toplam vardır.

37. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ olmak üzere, her $x, y \in \mathbb{N}_0$ için $f(3x + 2y) = f(x)f(y)$ koşulunu sağlayan bütün $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x = y = 0$ için $f(0) = f(0)^2$ dir. Yani $f(0) = 0$ veya $f(0) = 1$ dir.
$f(0) = 0$ ise her $x, y \in \mathbb{N}_0$ için $f(2y) = f(3x)$ dir. $f(1) = a$ için $f(5) = f(3 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = a^2$. Benzer şekilde $f(25) = a^4$. Ayrıca $f(25) = f(2 \cdot 2 + 3 \cdot 7) = 0$. Dolayısıyla $a = 0$ dır. Her $k > 4$ sayısı $k = 3x + 2y$ formunda yazılabildiği için uygun x ve y değerleri ile her k için $f(k) = 0$ dır.
$f(0) = 1$ ise $f(2y) = f(y)$ ve $f(3x) = f(x)$ dir. $f(1) = a$ dersek, $f(2) = a, f(5) = a^2, f(25) = a^3 = a^4$ bulunur. Dolayısıyla, $a = 0$ veya $a = 1$ dir.

Sonuç olarak,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0; \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

ya da her $x \in \mathbb{N}_0$ için $f(x) = 1$ dir .

38. Hangi a gerçel sayıları için

$$x + y = a^3 - a$$

$$xy = a^2$$

denklem sisteminin gerçel x ve y çözümleri vardır?

Çözüm:İlk denklemden x'i çözerek $x = a^3 - a - y$ bulup diğer denklemde yerine yazalım;

$$\begin{aligned} xy &= a^2 \\ (a^3 - a - y)y &= a^2 \\ y^2 + y(a - a^3) + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Elde edilen denklemin gerçel kökleri olması için diskriminantın sıfıra eşit ya da sıfırdan büyük olması gerekir.

$$\begin{aligned}\Delta &= (a-a^3)^2-4a^2\\ &= a^2(a^2+1)(a^2-3)\end{aligned}$$

$\Delta \geq 0$ eşitsizliği ancak $a=0$ veya $a^2-3\geq 0$ durumlarında sağlanır.

39. Doğal sayılarda tanımlı, her $m, n \in \mathbb{N}$ değeri için

- $f(f(2002)) = 17$
- $f(mn) = f(m)f(n)$
- $f(n) \leq n$

koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu tanımlanabilir mi?

Çözüm: $f(mn) = f(m)f(n)$ koşulunu ve $2002 = 2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ olduğunu kullanarak

$$f(f(2002)) = f(f(2))\cdot f(f(7))\cdot f(f(11))\cdot f(f(13)) = 17$$

eşitliği elde edilir. $f(n)\leq n$ ise

$$f(f(n)) \leq f(n) \leq n$$

dolayısıyla da $f(f(2)) \leq 2$, $f(f(7)) \leq 7$, $f(f(11)) \leq 11$ ve $f(f(13)) \leq 13$ olur. Elde edilen eşitliğin sağ tarafında bir asal sayı olan 17 varken, eşitliğin sol tarafında ise 17'den küçük tamsayıların çarpımı vardır. Bu tamsayıların çarpımı 17 olamayacağından verilen koşulları sağlayan bir f fonksiyonu yoktur.

40. S kümesi, 1 den büyük tam sayılar kümesinin boş olmayan bir alt kümesidir. A sayısı, S kümesindeki elemanların çarpmaya göre terslerinin toplamı olsun. A bir tam sayı ise S kümesinin en az 3 elemanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: S kümesinin eleman sayısı $n(S) = 1$ olması durumunda $S = \{a\}$ diyelim. Ancak $\frac{1}{a}$ tam sayı olmadığından A sayısı da tam sayı olamaz. O halde S kümesi bir elemanlı değildir. $n(S) = 2$ ve $a \neq b$ olmak üzere $S = \{a, b\}$ alalım. $a < b$ olsun.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} < \frac{1}{a}+\frac{1}{a} = \frac{2}{a} \leq 2$$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} < 2$ ve tamsayı olduğu için $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1$ 'dir. Ancak bu koşulu sağlayan (a, b) sayı çifti olmadığından S kümesi iki elemanlı da değildir. Yani $n(S) \geq 3$ olmalıdır.

Eğer $S = \{2, 3, 6\}$ ise $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = 1$ olur. Bu da S kümesinin 3 elemanlı olabileceğini gösterir.

41. a ve b sıfırdan farklı gerçel sayıları için

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$$

denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x} &= \frac{1}{a+b+x} \\
\frac{(a+b)x+ab}{abx} &= \frac{1}{a+b+x} \\
(a+b)x^2+(a+b)^2x+(a+b)ab &= 0
\end{aligned}$$

$a = -b$ ise, sıfırdan farklı her x sayısı verilen denklemi sağlar. $a \neq -b$ ise denklem

$$(x+a)(x+b) = 0$$

olarak çarpanlarına ayrılır. Buradan da denklemin kökleri $x = -a$ ve $x = -b$ olarak bulunur.

42. a pozitif gerçel sayısı $a^3 = 6(a+1)$ denklemini sağlıyor ise $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ denkleminin gerçel çözümü olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: Denklemin gerçel çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\Delta = 3(8 - a^2) \geq 0$, yani $a \leq 2\sqrt{2}$ olmalıdır. $a^3 = 6(a+1)$ olduğundan $a^2 = 6(1+\frac{1}{a})$ ve $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ olduğundan $a^2 \geq 6(1+\frac{\sqrt{2}}{4}) = 6+\frac{3\sqrt{2}}{2} > 6+2 = 8$ olur ve $a^2 \geq 8$, buradan da $a > 2\sqrt{2}$ bulunur. $a \leq 2\sqrt{2}$ olması gerektiğinden bu bir çelişkidir.

43. x, y, z pozitif gerçel sayılar olsun.

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: a ve b gerçel sayıları için $(a-b)^2 \geq 0$ olur. Buradan $a^2+b^2 \geq 2ab$ olduğunu görürüz. Bu durumda her x, y pozitif gerçel sayısı için $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ olur.

Bu çıkarım yardımıyla $x^2 + yz \geq 2\sqrt{x^2yz}$ eşitsizliğini elde eder ve dolayısıyla

$$\frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{\sqrt{yz}}{2xyz}$$

olduğunu görürüz.

Bu durumda;
$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2xyz} + \frac{\sqrt{zx}}{2xyz} + \frac{\sqrt{xy}}{2xyz} = \frac{1}{2xyz}\left(\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}\right)$
olur.

Tekrar yukarıdaki çıkarımı kullanarak $\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy} \leq \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} + \frac{x+y}{2} = x+y+z$ olduğunu görürüz.

Dolayısıyla $\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2xyz}(x+y+z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$
olur. Eşitlik $x = y = z$ durumunda sağlanır.

44. $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi, $m \geq n$ olmak üzere negatif olmayan tüm m ve n tam sayıları için $a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$ eşitliğini sağlamaktadır.
$a_1 = 3$ ise a_{2008} i bulunuz.

Çözüm:
$m = 0 = n$ alınarak $2a_0 - 1 = \frac{1}{2}2a_0$ ve buradan da $a_0 = 1$ olduğu görülür.
$n = 0$ kabul ederek $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$ ilişkisi elde edilir. Burada $m = 1$ için $a_2 = 7$ ve $m = 2$ için $a_4 = 21$ bulunur. $m = 2$ ve $n = 1$ için de $a_3 = 13$ olur. Bu bilgilerden yararlanarak $a_n = n^2 + n + 1$ olduğunu tümevarım yöntemini kullanarak ispatlayacağız.

- $a_0 = 1$ ve $a_1 = 3$ olduğunu elde ettik.
- Önermemizin tüm $k \leq m$ ler için doğru olduğunu varsayalım.
- Yukarıda bulduğumuz $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$ ilişkisini kullanarak $a_{2m} = (2m)^2 + 2m + 1$ olduğunu buluruz.
- Burada $2m$ gördüğümüz yere $m + 1$ yazarsak $a_{m+1} = (m + 1)^2 + (m + 1) + 1$ buluruz.

Sonuç olarak $a_{2008} = (2007 + 1)^2 + (2007 + 1) + 1 = (2008)^2 + 2009$ olur.

45. $4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0$ denkleminin dört gerçel kökü ve bunlardan iki tanesinin toplamı 1 olduğuna göre denklemin bütün köklerini bulunuz.

Çözüm: Kökler x_1, x_2, x_3, x_4 ve $x_1 + x_2 = 1$ olsun. Bu durumda kökler toplamı $\frac{12}{4} = 3$ olması gerektiği için $x_3 + x_4 = 2$ olur.

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

denklemin her iki tarafında x'in kuvvetlerinin katsayıları eşit olacağından

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= -\frac{7}{4} \\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &= -\frac{11}{2} \\
x_1x_2x_3x_4 &= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 &= -\frac{7}{4} \\
(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 &= -\frac{11}{2}
\end{aligned}$$

Burada da $x_1 + x_2 = 1$ ve $x_3 + x_4 = 2$ değerlerini yerlerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned}
x_1x_2 + x_3x_4 &= -\frac{15}{4} \\
2x_1x_2 + x_3x_4 &= -\frac{11}{2}
\end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz ki buradan çözümlerin

$$x_1x_2 = -\frac{7}{2} \quad \text{ve} \quad x_3x_4 = -2$$

olduğu görülür. Bu durumda $x_1 + x_2 = 1$ ve $x_1x_2 = -\frac{7}{2}$ olduğu için x_1 ve x_2'nin $x^2 - x - \frac{7}{4} = 0$ denkleminin çözümleri olduğu yani $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$ olduğu açıkça görülmektedir.

Aynı şekilde $x_3 + x_4 = 2$ ve $x_3x_4 = -2$ olduğu için $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}$ olur.

Bu kökler soruda verilen denklemi de sağlarlar. Dolayısıyla verilen denklemin kökleri; $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$, $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}$ ve $1 - \sqrt{3}$'tür.

46. $p(x) = x^3 - 2007x + 2002$ polinomunun kökleri r, s ve t olsun. Bu durumda

$$\frac{r-1}{r+1} + \frac{s-1}{s+1} + \frac{t-1}{t+1}$$

değerini bulunuz.

Birinci Çözüm: İstenen toplama S dersek,

$$R = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{t+1}$$

olmak üzere $S = 3 - 2R$ olur. Ayrıca

$$q(x) = p(x-1) = x^3 - 3x^2 - 2004x + 4008$$

polinomunun köklerinin $r+1$, $s+1$, $t+1$ olduğu açıktır. Bu durumda, bir $f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ polinomunun köklerinin çarpmaya göre terslerinin toplamı $-c_0/c_1$ olduğundan, $R = -(-2004)/4008 = 1/2$, dolayısıyla da $S = 3 - 1 = 2$ olarak bulunur.

İkinci Çözüm: $S = \dfrac{r-1}{r+1} + \dfrac{s-1}{s+1} + \dfrac{t-1}{t+1}$ ve $R = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{t+1}$ olsun.
$R = \dfrac{(s+1)(t+1)+(r+1)(t+1)+(r+1)(s+1)}{(r+1)(s+1)(t+1)} = \dfrac{st+rt+rs+2(r+s+t)+3}{st+rt+rs+s+r+t+rst+1}$
dir. $r+s+t=0$, $rs+st+rt=-2007$, $rst=-2002$ olduğundan (Vieta Teoremi), $R = \dfrac{-2004}{-4008} = \dfrac{1}{2}$ olur. Buna göre $S = 3 - 2R = 2$ dir.

47.

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0$$

denkleminin gerçel köklerini bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemi

$$y^4 + 4y^2x + y^2 - 12y^2 + 4xy - 8y + 4x^2 + 4x^2 - 24x - 16x + 36 + 16 = 0$$

şekline getirip iki tam kare toplamı halinde yazalım.

$$\begin{aligned} &= y^4 + 4y^2x + 4x^2 - 12y^2 - 24x + 36 + 4x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 8y + 16 = 0 \\ &= (y^2 + 2x - 6)^2 + (2x + y - 4)^2 = 0 \end{aligned}$$

İki kare toplamının sıfıra eşit olabilmesi için her iki karenin de ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir. O halde bu denklemin köklerinin $y^2 + 2x - 6 = 0$ ve $2x + y - 4 = 0$ denklemlerini sağlaması gerekir. Buradan kökler

$$\begin{aligned} 2x + y - 4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x = 4 - y \\ &\Rightarrow \quad y^2 + 2x - 6 = y^2 + 4 - y - 6 = 0 \\ &\Rightarrow \quad y = 2, y = -1 \\ &\qquad\;\; y = 2 \Rightarrow x = 1 \\ &\qquad\;\; y = -1 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani denklemin kökleri $(1,2)$ ve $(\frac{5}{2}, -1)$ 'dir.

48. Tüm $a, b, c > 0$ gerçel sayıları için $1 + \dfrac{3}{ab+bc+ca} \geq \dfrac{6}{a+b+c}$ eşitsizliğinin doğruluğunu

ispatlayınız.

Çözüm: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ olduğundan $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ ve $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$ olur. $1+\dfrac{3}{ab+bc+ca} \geq 1+\dfrac{9}{(a+b+c)^2}$ ve $(1-\dfrac{3}{a+b+c})^2 \geq 0$, $1+\dfrac{9}{(a+b+c)^2} \geq \dfrac{6}{a+b+c}$ olduğundan $1+\dfrac{3}{ab+bc+ca} \geq \dfrac{6}{a+b+c}$ olur.

49. $f(x) = x^2+(m+3)x+m+2$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlaması için m parametresinin alabileceği bütün gerçel değerleri bulunuz.

(a) Her $x \in (-1,3)$ için $f(x) < 0$,

(b) f fonksiyonun köklerinin terslerinin toplamı $\frac{1}{3}$ ten daha küçük olmalı.

Çözüm:

Birinci çözüm: f ikinci dereceden ve pozitif başkatsayılı bir denklem olduğu için birinci koşul $f(-1) \leq 0$ ve $f(3) \leq 0$ koşuluna denktir. Yeni koşulu eşitsizlik sistemi olarak yazarsak:

$$1-m-3+m+2 \leq 0,$$

$$9+3m+9+m+2 \leq 0.$$

Birinci denklem her zaman doğrudur $(0 \leq 0)$. İkinci denklemden $m \leq -5$ bulunur. İkinci koşulu gözönüne aldığımızda, x_1 ve x_2 f fonksiyonun kökleri olmak üzere, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} < \frac{1}{3}$ dür. Vieta formülüne göre kökler toplamı $-m-3$ ve kökler çarpımı $m+2$ dir. Bu durumda

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{-m-3}{m+2} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{-(4m+11)}{3(m+2)} < 0.$$

Yani ya $m+2<0$ ve $-(4m+11)>0$ olmalı ya da $m+2>0$ ve $-(4m+11)<0$ olmalı.

- $m+2>0$ ve $-(4m+11)<0$ ise $m>-2$ ve $m<-\frac{11}{4}$ olur. Ayrıca $m \leq -5$ idi. Bu üç kümenin kesişimi boş olduğu için bu koşullarda çözüm yoktur.

- $m+2<0$ ve $-(4m+11)>0$ ise $m<-2$ ve $m<-\frac{11}{4}$ olur. Ayrıca $m\leq -5$ idi. Üç koşulu birden sağlayan çözüm aralığı $(-\infty, 5)$ dir.

İkinci çözüm: İlk çözümde $m\leq -5$ bulunmuştu. İki kökten x_1 küçük olan kök ve x_2 büyük olan kök olmak üzere, her $x\in(1,3)$ iken $f(x)<0$ olduğu için $x_1\leq -1$ ve $x_2\geq 3$ dür. Yani, $\frac{1}{x_1}<0$ ve $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{3}$ dür. İkinci koşulu test edersek,

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

buluruz. Dolayısıyla $m\in(-\infty,-5]$ dır.

50. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$(a-1)(b-1)(c-1)\geq 8$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm:

Birinci çözüm: Verilen $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ eşitliğinin her iki tarafını abc ile çarptığımızda

$$ab+bc+ca=abc$$

eşitliğini elde ederiz.

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+a+b+c-1$$

Bu eşitlikte abc yerine eşitlik verilen denklemi kullanarak

$$(a-1)(b-1)(c-1)=a+b+c-1$$

yazabiliriz. Ayrıca, Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden;

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=3$$

ve buradan da $(a-1)(b-1)(c-1)=a+b+c-1\geq 8$ olur.

İkinci çözüm: $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}$ olduğundan, $(a-1)(b-1)(c-1)=a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ olur. Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $b+c\geq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geq 2\sqrt{ca}$ ve buradan da $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$, $(a-1)(b-1)(c-1)=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geq 8$ olur.

51. a, b, c sıfırdan büyük gerçel sayılardır.

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a ve b sıfırdan büyük oldukları için

$$\begin{aligned}
(a-b)^2(a+b) &\geq 0\\
(a^2-2ab+b^2)(a+b) &\geq 0\\
a^3-2a^2b+ab^2+a^2b-2ab^2+b^3 &\geq 0\\
a^3-a^2b-ab^2+b^3 &\geq 0\\
\frac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{b^2} &\geq 0\\
\frac{a^3}{b^2}-\frac{a^2}{b}-a+b &\geq 0\\
\frac{a^3}{b^2} &\geq \frac{a^2}{b}+a-b
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\dfrac{b^3}{c^2}\geq\dfrac{b^2}{c}+b-c$ ve $\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{c^2}{a}+c-a$ bulunur. Bulunan bu üç eşitsizlik taraf tarafa toplandığında

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+a-b+\frac{b^2}{c}+b-c+\frac{c^2}{a}+c-a=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

elde edilir.

52. a, b, c ile $x^3-x^2+2=0$ denkleminin köklerini gösterelim. Bu durumda $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$ ve $a^4+b^4+c^4$'ün değerlerini hesaplayınız.

Çözüm: Öncelikle kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ olan n inci dereceden bir polinom için köklerinin kuvvetlerinin toplamları hakkında bilgi veren Vieta formüllerini hatırlayalım: $s_k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots,\alpha_n^k$ olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}
a_0s_1+a_1 &= 0\\
a_0s_2+a_1s_1+2a_2 &= 0\\
a_0s_3+a_1s_2+a_2s_1+3a_3 &= 0\\
\cdots &
\end{aligned}$$

olur. Buna göre $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=1^2-2(0)=1$'dir.

Öte yandan $x^3 = x^2 - 2$ olduğundan,
$a^3 + b^3 + c^3 = a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2 - 2 = a^2 + b^2 + c^2 - 6 = 1 - 6 = -5$ dir.
Son olarak $x^3 = x^2 - 2$ olduğundan $x^4 = x^3 - 2x$ alabiliriz ve buradan
$a^4+b^4+c^4 = a^3-2a+b^3-2b+c^3-2c = a^3+b^3+c^3-2(a+b+c) = -5-2(1) = -7$ buluruz.

53.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x^2+y^2+z^2 &= 3 \\ x^3+y^3+z^3 &= 3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin tüm gerçel (veya karmaşık) çözümlerini bulunuz.

Çözüm: x, y, z ile $p(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz$ polinomunun köklerini gösterelim. Bu durumda $xy + yz + zx = (x + y + z)^2/2 - (x^2 + y^2 + z^2)/2 = 9/2 - 3/2 = 3$ çıkar. Öte yandan $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ denkleminden $xyz = 1$ bulunur. Sonuç olarak $p(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t - 1)^3$ dür. Yani $x = y = z = 1$ verilen sistemin tek çözümüdür.

54. $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ denkleminin dört kökü olmasını ve köklerinin aritmetik dizi oluşturmasını sağlayacak bütün a gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: Denklem $t = x^4$ dönüşümü ile t ye göre ikinci dereceden $t^2 + at + 1 = 0$ denkleme dönüşür ve bu denklemin kökleri $t_1, t_2 > 0$ ise ilk denklemin kökleri $\pm\sqrt[4]{t_1}$ ve $\pm\sqrt[4]{t_2}$ olur. Genelliği bozmadan $t_1 \leq t_2$ olduğunu kabul edelim. $-\sqrt[4]{t_2} \leq -\sqrt[4]{t_1} \leq \sqrt[4]{t_1} \leq \sqrt[4]{t_2}$ olacağından, bir aritmetik dizi oluşturmaları için $-\sqrt[4]{t_2}+\sqrt[4]{t_1} = -2\sqrt[4]{t_1}$ ve $t_2 = 81t_1$ olmalıdır. $t_1t_2 = 1$ olduğundan $81t_1^2 = 1,\ t_1 = \dfrac{1}{9},\ t_2 = 9$ olur $(t_1, t_2 > 0)$.
$-a = t_1 + t_2 = \dfrac{82}{9}$ ve buradan da $a = -\dfrac{82}{9}$ bulunur.

55. Her $0 < x < 1$ gerçel sayısının, 1 den küçük iki pozitif gerçel sayının farkı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm:
Birinci Çözüm: Herhangi bir $0 < x < 1$ gerçel sayısı için

a-) $x \in Q$ ise: $x_0 \in R\backslash Q$ ve $x_0 > 0$ olsun. $y_2 = x + \frac{x_0}{n} < 1$ olacak şekilde $n \in N^*$ bulunabilir. $0 < y_2 < 1$ ve $y_2 \in R\backslash Q$ dir. Eğer $y_1 = \frac{x_0}{n}$ ise $0 < y_1 < 1$ ve $y_1 \in R\backslash Q$ dir. Açıkça, $x = y_2 - y_1$ dir.

b-) $x \in R \backslash Q$ ise: $x + \frac{x}{n} < 1$ olacak şekilde $n \in N^*$ ı gözönüne alalım. Eğer $y_2 = x + \frac{x}{n}$ ve $y_1 = \frac{x}{n}$ ise $y_1, y_2 \in R \backslash Q$ ve $x = y_2 - y_1$ dir.

İkinci Çözüm: $0 < x < 1$ iken $0 < \dfrac{1-x}{2} < \dfrac{1+x}{2} < 1$ olacağından $\dfrac{1+x}{2} - \dfrac{1-x}{2} = x$ şeklinde yazabiliriz.

56. $xyz(x+y+z) = 1$ koşulunu sağlayan x, y, z pozitif gerçel sayıları için

a-) $\sqrt{(x^2 + \frac{1}{y^2})(y^2 + \frac{1}{z^2})(z^2 + \frac{1}{x^2})} = (x+y)(y+z)(z+x)$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

b-) Verilen denklemi sağlayan bir (x, y, z) üçlüsü bulunuz.

Çözüm:

a-) $xyz(x+y+z) = 1$ den

$$x^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{xyz(x+y+z)}{y^2} = x^2 + \frac{xz(x+y+z)}{y}$$

$$= \frac{x^2y + xz(x+y+z)}{y} = \frac{x(y+z)(x+z)}{y}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$y^2 + \frac{1}{z^2} = \frac{y(x+z)(x+y)}{z}$$

ve

$$z^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{z(x+y)(z+y)}{y}$$

elde edilir. Bulunan üç ifadenin çarpımından

$$(x^2 + \frac{1}{y^2})(y^2 + \frac{1}{z^2})(z^2 + \frac{1}{x^2}) = (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$$

bulunur.

b-) $x = y = 1$ alınırsa $z(z+2) = 1$ denkleminin çözümünden karşılık gelen $z = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ değeri bulunur. Başka bir çözüm ise $x = y = z$ alınarak bulunabilir. Bu durumda $3x^4 = 1$ in çözümünden $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ bulunur.

57. $a, b, c, x, y, z \in \Re$ ve x, y, z sıfırdan farklı olmak üzere

$$ax^3 = by^3 = cz^3$$

ve

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

ise $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Birinci Çözüm:

$$\begin{aligned} A = \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} &= \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} \\ &= \sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} \\ &= \sqrt[3]{ax^3} \\ &= x\sqrt[3]{a} \end{aligned}$$

Buradan $A = x\sqrt[3]{a} = y\sqrt[3]{b} = z\sqrt[3]{c}$ olur.

$$\begin{aligned} A = \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} &= A \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ &= \frac{A}{x} + \frac{A}{y} + \frac{A}{z} \\ &= \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \end{aligned}$$

İkinci Çözüm: $ax^3 = by^3 = cz^3 = k$ dersek $a = \dfrac{k}{x^3}$, $b = \dfrac{k}{y^3}$, $c = \dfrac{k}{z^3}$ olur.
$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{\dfrac{k}{x^3}x^2 + \dfrac{k}{y^3}y^2 + \dfrac{k}{z^3}z^2} = \sqrt[3]{k\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)} = \sqrt[3]{k}$ olur.
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{\dfrac{k}{x^3}} + \sqrt[3]{\dfrac{k}{y^3}} + \sqrt[3]{\dfrac{k}{z^3}} = \sqrt[3]{k}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = \sqrt[3]{k}$ ve buradan da
$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ bulunur.

58. $(x^3+3x-4)^3 + (2x^2-5x+3)^3 = (3x^3-2x^2-1)^3$ denklemini sağlayan tüm x gerçel sayıları bulunuz.

Çözüm: $u = x^3+3x-4$, $v = 2x^2-5x+3$ olsun. Denklem $u^3+v^3 = (u+v)^3$ olarak yazılabilir. Buradan $3uv(u+v) = 0$ bulunur. Buradan da $u = 0$ veya $v = 0$ ya da $u+v = 0$ çıkar.
$u = x^3+3x-4 = 0 = (x-1)(x^2+x+4)$ ise $x^2+x+4 = (x+\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{15}{4} > 0$ olduğundan $x = 1$ bulunur.
$v = 2x^2-5x+3 = 0 = (2x-3)(x-1)$ ise $x = 1$ veya $x = \dfrac{3}{2}$ bulunur.
$u+v = x^3+2x^2-2x-1 = 0(x-1)(x^2+3x+1)$ ise $x = 1$ veya $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ olur.

Sonuç olarak verilen denklemlerin gerçel kökleri

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

dir.

59. $\lfloor x \rfloor$, ile x gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim.

$$x + \lfloor \frac{x}{6} \rfloor = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{2x}{3} \rfloor$$

denkleminin tüm köklerini bulunuz.

Çözüm: x, verilen denklemi sağlıyor ise $x = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{2x}{3} \rfloor - \lfloor \frac{x}{6} \rfloor (*)$ 'dır. Eşitliğin sağ tarafı tamsayı olduğu için x de bir tamsayıdır. En büyük payda 6 olduğu için $x = 6k + t$ diyelim. Burada t, x 'in 6 ile bölümünden kalan, k da bölümdür. $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için (*) eşitliğini kontrol edersek, $t = 1$ dışında bütün t değerleri için eşitliğin sağlanmakta olduğu kolayca görülebilir. O halde 6 ile bölündüğünde 1 kalanı vermeyen bütün x sayıları verilen denklemi sağlamaktadır.

60. $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ olmak üzere,
$f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ fonksiyonu her $m, n \in \mathbf{N}_0$ için

- $f(n+1) > f(n)$
- $f(n + f(m)) = f(n) + m + 1$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur. Buna göre $f(2001)$ 'in alabileceği tüm değerlerini bulunuz.

Çözüm: k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $f(0) = k$ olsun. Verilen ikinci koşuldan

$$\begin{aligned} f(n + f(0)) &= f(n) + 0 + 1 \\ f(n+k) &= f(n) + 1 \qquad (*) \end{aligned}$$

$k = 0$ ise $f(n) = f(n) + 1$ olur ki bu da imkansızdır. O halde $k \neq 0$.
$f(n+k-1) < f(n+k) = f(n)+1$ (**) 'dir. Ancak eğer $k > 1$ olursa $n+k-1 \geq n+1$ olur. İlk koşuldan $f(n+k-1) \geq f(n+1) \geq f(n)+1$ (***) elde edilir. Fakat (**) ve (***) çeliştiği için $k = 1$ olmalıdır.
$k = 1$, (*) denkleminde yerine yazılırsa $f(n+1) = f(n) + 1$ elde edilir ki buradan da $f(2001) = 2002$ olur. k 'nın tek değeri 1 olduğu için verilen koşulları sağlayan tek f fonksiyonu vardır. Dolayısıyla $f(2001)$ nin olası tek değeri 2002 'dir.

61. Eğer α, β, γ sayıları $x^3 - x - 1$ denkleminin kökleri ise,

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

ifadesinin değerini hesaplayınız.

Çözüm:
Birinci Çözüm: Verilen ifade

$$2\left(\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\gamma}\right) - 3$$

şeklinde yazılabilir. $P(x) = x^3 - x - 1$'in kökleri α, β, γ olduğuna göre $P(x-1) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$'in kökleri $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$'dir. $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ şeklindeki bir polinomun köklerinin çarpmaya göre terslerinin toplamı $-c_1/c_0$ olduğundan, verilen ifade 2(2)-3=1 olarak hesaplanır.
İkinci Çözüm: $\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\gamma} = S$ dersek $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} = 2S - 3$ olur.
$S = \frac{3 + 2(\alpha+\beta+\gamma) + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{1 + \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma} = \frac{3 + 2 \cdot 0 - 1}{1 + 0 - 1 + 1} = 2$ ve $2S - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ bulunur.

62. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) f(1)=1,

(ii) $f(x) \geq 0$

(iii) eğer $x, y,$ ve $x+y$ hepsi $[0,1]$ aralığında ise $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$

şartlarını sağlamaktadır. Her $x \in [0,1]$ için $f(x) \leq 2x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle Tümevarım yöntemi ile her $k \geq 0$ tam sayısı için $f(\frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$ olduğunu gösterelim. Her $x \in [0,1]$ için $2f(x) \leq f(2x)$ ve $f(1) = 1$ olduğundan $f(\frac{1}{2^u}) \leq \frac{1}{2^u}$ ise $2f(\frac{1}{2^{u+1}}) \leq f(\frac{1}{2^u}) \leq \frac{1}{2^u}$ ve buradan da $f(\frac{1}{2^{u+1}}) \leq \frac{1}{2^{u+1}}$ olur. Böylece Tümevarım biter. Her $x \in (0,1)$ için $\frac{1}{2^{m+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^m}$ şartını sağlayan bir m pozitif tam sayısı bulunabilir. Bu durumda $f(\frac{1}{2^m}) \geq f(x) + f(\frac{1}{2^m} - x)$ ve $f(\frac{1}{2^m} - x) \geq 0$ olduğundan $f(\frac{1}{2^m}) \geq f(x)$ olur. Buradan $f(x) \leq f(\frac{1}{2^m}) \leq \frac{1}{2^m} \leq 2x$ bulunur. Böylece her $x \in (0,1)$ için $f(x) \leq 2x$ olduğunu göstermiş olduk. $f(1) = 1 < 2$ ve $f(0) \geq 2f(0) \geq 0$ olduğundan $f(0) = 0$ olur. Sonuç olarak $f(x) \leq 2x$ eşitsizliği tüm $x \in [0,1]$ için geçerlidir.

63. n bir pozitif tam sayı ve $x_1, x_2, \cdots, x_n$ birer tamsayı olmak üzere

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + n^3 \leq (2n-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n^2$$

olduğu biliniyor.Buna göre

a-) $x_1, x_2, \cdots, x_n$'den hiçbirinin negatif olamayacağını gösteriniz.

b-) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n + 1$'in bir tam kare olamayacağını gösteriniz.

Çözüm:

a-) Verilen eşitsizliğin

$$(x_1 - n)(x_1 - n + 1) + (x_2 - n)(x_2 - n + 1) + \cdots (x_n - n)(x_n - n + 1) \leq 0$$

eşitsizliğine denk olduğu hemen görülebilir. Ardışık iki tam sayının çarpımı negatif olamayacağı için

$$(x_1 - n)(x_1 - n + 1) = (x_2 - n)(x_2 - n + 1) = \cdots = (x_n - n)(x_n - n + 1) = 0$$

olması gerekir. Buna göre $x_k \in \{n-1, n\} \forall k$ çıkar.

b-)

$$n(n-1) \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n^2$$

olduğundan

$$n^2 < 1 + n^2 \leq 1 + n + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1 + n + n^2 < (n+1)^2$$

dir. Buradan $1 + n + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$'in bir tam kare olamayacağı anlaşılır.

64. Eğer $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümeleri aynı ise (elemanlar farklı sırada yazılmış olabilir)

$$S = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$$

sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm: $a = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3,\ b = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3,\ c = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$ olarak tanımlanan a, b, c'ye

Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğini uygularsak

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 9} = \sqrt[3]{362880}$$

çıkar. $\sqrt[3]{362880} > 71$ olduğundan $S = a + b + c > 3 \cdot 71 = 213$ bulunur. a, b, c'nin birer tamsayı olduğu göz önüne alınırsa $S = a + b + c > 214$ olmalıdır. $S = 1 \cdot 8 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 7$ örneği 214'ün mümkün olduğunu gösterir.

65. n bir doğal sayı, $f(n)$ de $[n^2, 2n^2]$ kapalı aralığındaki tam karelerin sayısı olsun. f nin azalmayan ve örten fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: p, $[n^2, 2n^2]$ aralığındaki karelerin $(n^2, (n+1)^2, \ldots, (n+p-1)^2)$ sayısı olsun. Bu durumda $(n+p-1)^2 < 2n^2 < (n+p)^2$ eşitsizliği geçerlidir, ve $f(n) = p = \lfloor n(\sqrt{2}-1)+1 \rfloor$ elde edilir. Bu ifadeden f fonksiyonunun azalmadığı görülür. Fonksiyonun örten olduğunu göstermek için $q \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ alalım. $f(n) = q$ önermesi

$$q = \lfloor n(\sqrt{2}-1)+1 \rfloor \Leftrightarrow (q-1)(\sqrt{2}-1) \leq n \leq q(\sqrt{2}-1)$$

önermesi ile aynıdır.

$$q(\sqrt{2}-1) - (q-1)(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1 > 2$$

eşitsizliği, $n \in \mathbb{N}$ sayısının varlığını garantiler.

66. n bir tam sayı olmak üzere,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

koşulunu sağlayan, doğal sayılardan gerçel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu olsun. Eğer $f(1) = 1002$ ise $f(2004)$ ü bulunuz.

Çözüm:

$n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \cdots + f(n) &= n^2 f(n), \\ f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) &= (n-1)^2 f(n-1) \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Taraf tarafa çıkarma yaptığımızda

$$f(n) = n^2 f(n) - (n-1)^2 f(n-1) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right) f(n-1)$$

elde ederiz. Buradan

$$f(n) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right) f(n-1) = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot f(n-2) = \cdots = \frac{2f(1)}{n(n+1)}$$

olduğunu görürüz. $f(1) = 1002$ için $f(2004) = \dfrac{1}{2005}$ buluruz.

67. n pozitif tam sayı ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ negatif olmayan gerçel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sayılarını bulunuz.

Çözüm: Eşitlikler birbirinden çıkarılarak

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n - n - \left(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= (x_2^2 - 2x_2 + 2 - 1) + (x_3^3 - 3x_3 + 3 - 1) + \cdots + (x_n^n - nx_n + n - 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A.O. \geq G.O.$ eşitsizliği kullanılarak

$$x^m + m - 1 = x^m + \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{(m-1)-\ adet} \geq m(x^m)^{1/m} = mx$$

bulunur ve eşitlik ancak ve ancak $x = 1$ durumunda mümkündür.

Dolayısıyla, parantez içerisindeki ifadeler negatif olmayan değerler alacağından, her birinin ayrı ayrı 0 olması gerekir. Buradan $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$ ve birinci denklem de kullanılarak $x_1 = 1$ bulunur.

68. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ denklemini sağlayan x,y ve z pozitif gerçel sayıları için
$A = \dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y}$ nın alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm: Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,
$A^2 = (\dfrac{xy}{z})^2 + (\dfrac{yz}{x})^2 + (\dfrac{zx}{y})^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)$
$= (\dfrac{xy}{z})^2 + (\dfrac{yz}{x})^2 + (\dfrac{zx}{y})^2 + 50$
$\geq (\dfrac{xy}{z})(\dfrac{zx}{y}) + (\dfrac{yz}{x})(\dfrac{xy}{z}) + (\dfrac{zx}{y})(\dfrac{yz}{x}) + 50$
$= (x^2 + y^2 + z^2) + 50 = 25 + 50 = 75$ bulunur.
Buradan, $A^2 \geq 75$ ve $A > 0$ olduğundan, $A \geq \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ bulunur.
$\dfrac{xy}{z} = \dfrac{yz}{x} = \dfrac{zx}{y}$ eşitliği sadece ve sadece $x = y = z$ olduğunda sağlanır. Bu durumda
$x^2 + y^2 + z^2 = 25$ olduğundan, $x = y = z = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Sonuç olarak, yukarıda verilen A ifadesinin en küçük değeri $5\sqrt{3}$ tür ve bu değere $x = y = z = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ için ulaşılır.

69. $x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq M(xy + yz + zx)^2$ eşitsizliğinin tüm x, y ve z pozitif gerçel sayıları için doğru olmasını sağlayacak en büyük M pozitif gerçel sayısını bulunuz.

Çözüm: Eşitsizlik $x = y = z$ için $6x^4 \geq M9x^4$ haline dönüşür.
Buradan, $M \leq \frac{2}{3}$ bulunur. Denklemde M yerine $\frac{2}{3}$ koyarsak,
$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq \frac{2}{3}(xy + yz + zx)^2$
buradan $3(x^4 + y^4 + z^4) + 3xyz(x + y + z) \geq (xy + yz + zx)^2$
elde ederiz. Böylece $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ olduğundan
$3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 3xyz(x + y + z) \geq 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4xyz(x + y + z)$
eşitsizliğin sağlandığını ispatlamamız M'nin $\frac{3}{2}$ değerini alabileceğini göstermek için yeterli olacaktır;
$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - xyz(x + y + z) \geq 0$
$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 - (yz)(yx) - (yz)(zx) - (zx)(xy) \geq 0$
$\frac{1}{2}[(xy - yx)^2 + (yz - xz)^2 + (zx - xy)^2] \geq 0$
Tüm x, y ve z gerçel sayıları için, $(xy-yx)^2$, $(yz-xz)^2$ ve $(zx-xy)^2$ ifadeleri negatif olmayacağından yukarıdaki eşitsizlik her zaman doğrudur. Dolayısıyla soruda verilen eşitsizliği sağlayan tüm gerçel x, y ve z sayıları için sağlanması ancak M yerine en fazla $\frac{2}{3}$ yazıldığında mümkündür.

70. Toplamları 1 olan tüm a, b ve c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $a + b + c = (a + b + c)^2 = 1$ olduğu için ispatlanması istenilen eşitsizliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - (a + b + c) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$$

veya

$$(\frac{a^2}{b} - 2a + b) + (\frac{b^2}{c} - 2b + c) + (\frac{c^2}{a} - 2c + a) \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

buradan da

$$\frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(b - c)^2}{c} + \frac{(c - a)^2}{a} \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

elde edilir. $a, b, c \leq 1$ olduğu için eşitsizliğin sağlandığı açıkça görülmektedir.

71. x bir gerçel sayı ve $\overline{x}$ 'de x 'in tamsayı kısmı olsun.

$$3x^3 - \overline{x} = 3$$

eşitliğini sağlayan x gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: r eşitliği sağlayan bir gerçel sayı olsun. Bu durumda $3r^3 - \overline{r} = 3$ ve $\overline{r} \leq r < \overline{r} + 1$ olduğundan

$$(3r^3 - \overline{r}) - 1 = 2 < 3r^3 - r \leq 3r^3 - \overline{r} = 3$$

eşitsizliği elde edilir.
$f(x) = 3x^3 - x$ fonksiyonunun kökleri 0 ve $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ tür ve $f(x)$, $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ için, sıfırdan büyük değerler alır. $x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ise $(3x+1)^2(3x-2) \leq 0 \Longleftrightarrow f(x) = 3x^3 - x \leq \dfrac{2}{9} < 2$ dir.

$$max_{x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) = \frac{2}{9} < 2$$

O halde $\frac{\sqrt{3}}{3} < r < 2$ olmalıdır. Yani $\overline{r} = 0$ ya da $\overline{r} = 1$ 'dir. $\overline{r} = 0$ ise $r = 1$, $\overline{r} = 1$ ise $r = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ olur. Ancak sadece $r = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ verilen eşiliği sağladığı için çözüm kümesi $\left\{\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right\}$ 'tür.

72. a, b, c gerçel sayılar, $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ olmak üzere

$$f(x(x+1)) - f(x(x-1)) = x^7$$

dir. $p(n)$, n 'ye bağlı bir fonksiyon ve

$$1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 = \frac{n^2(n+1)^2 p(n)}{24}$$

ise $p(n)$=?

Çözüm: $f(x(x+1)) - f(x(x-1)) = 8ax^7 + 8ax^5 + 6bx^5 + 2b^3 + 4cx^3 = x^7$ 'dir. Buradan

$$a = \frac{1}{8} \qquad b = \frac{-1}{6} \qquad c = \frac{1}{12}$$

bulunur. Yani $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^2$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
f(1(2)) - f(1(0)) &= 1^7 \\
f(2(3)) - f(2(1)) &= 2^7 \\
&\vdots \\
f((n-1)(n)) - f((n-1)(n-2) &= (n-1)^7 \\
f(n(n+1)) - f(n(n-1)) &= n^7
\end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned}
f(n(n+1)) - f(1(0)) &= 1^7 + 1^7 + \cdots + +n^7 \\
f(n^2+n) - f(0) &= 1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 \\
\frac{1}{8}(n^4(n+1)^4 - \frac{1}{6}n^3(n+1)^3 + \frac{1}{12}n^2(n+1)^2 &= \frac{n^2(n+1)^2 p(n)}{24} \\
\frac{n^2(n+1)^2}{24}(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2) &= \frac{n^2(n+1)^2 p(n)}{24} \\
3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2 &= p(n)
\end{aligned}$$

73. Bütün a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a^2 - bc}{2a^2 + bc} + \frac{b^2 - ca}{2b^2 + ca} + \frac{c^2 - ab}{2c^2 + ab} \leq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Soruda verilen eşitsizlik $\sum \frac{2a^2 + bc - 3bc}{2a^2 + bc} \leq 0$ şeklinde ifade edilebilir. Buradan $3 - 3\sum \frac{bc}{2a^2 + bc} \leq 0$ yani $\sum \frac{bc}{2a^2 + bc} \geq 1$ eşitsizliği elde edilir.

Bilindiği gibi $x = \frac{2a^2}{bc}, y = \frac{2b^2}{ca}, z = \frac{2c^2}{ab}$ için

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{3}{1 + \sqrt[3]{xyz}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Sonuç olarak Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak istenen

$$\sum \frac{bc}{2a^2 + bc} = \sum \frac{b^2c^2}{2a^2bc + b^2c^2} \geq \frac{(\sum bc)^2}{2abc(a+b+c) + \sum b^2c^2} = 1$$

eşitsizliğini elde ederiz.

74. Aşağıda verilen eşitliklerin ortak gerçel çözümlerinin hepsini bulunuz:

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y$$
$$\frac{4y^2}{1+4y^2} = z$$
$$\frac{4z^2}{1+4z^2} = x$$

Çözüm: $f(x) = 4x^2/(1+4x^2)$ şeklinde tanımlayalım. f in değeri $[0,1)$ aralığında olduğundan x, y, z bu aralıkta olmalı. Eğer x, y, z den herhangi biri sıfır ise hepsi birden sıfır olur, o yüzden hiç birinin sıfır olmadığını varsayalım. $x, y, z > 0$ olduğundan $f(x)/x = 4x/(1+4x^2)$ en çok 1 dir, $x = 1/2$ değeri için de 1'e eşittir. O yüzden $y \leq x \leq z \leq y$ dir ve buradan üçü birbirine eşit olmak durumundadır, $x = y = z = 1/2$. Yani çözümler $(x, y, z) = \{(0,0,0), (1/2, 1/2, 1/2)\}$ olur.

75. a bir pozitif gerçel sayı olmak üzere $f(x) = \dfrac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ olsun. Bu durumda

$$S = f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \cdots + f\left(\frac{2000}{2001}\right)$$

değerini bulunuz.

Çözüm: Verilen toplamdaki terimleri aşağıdaki gibi gruplayalım.

$$\begin{aligned} S &= \left[f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{1000}{2001}\right) + f\left(\frac{1001}{2001}\right)\right] \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2001}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{1000}{2001}\right) + f\left(1 - \frac{1000}{2001}\right)\right] \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} f(x) + f(1-x) &= \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} + \frac{a^{1-x}}{a^{1-x} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{a + a^x\sqrt{a} + a + a^{1-x}\sqrt{a}}{a + a^x\sqrt{a} + a^{1-x}\sqrt{a} + a} = 1 \end{aligned}$$

olduğundan, $S = 1000$ elde edilir.

76. Toplamları 6, karelerinin toplamı 8, küplerinin toplamı ise 5 olan üç sayının dördüncü kuvvetlerinin toplamı nedir?

Çözüm: Bu sayılara a, b, c sayıları diyelim. Bu durumda

$$a + b + c = 6$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 8$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = 5$$

elde edilir. Öncelikle a, b ve c sayılarını kök olarak kabul eden, üçüncü dereceden ve en yüksek dereceli teriminin katsayısı 1 olan polinomu Vieta formülünü kullanarak bulalım. Polinomu $x^3 - Ax^2 + Bx - C$ şeklinde düşünürsek,

$$\begin{aligned} A &= a + b + c \\ B &= ab + bc + ca \\ C &= abc \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu durumda, $B = ab+bc+ca = \frac{1}{2}[(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)] = 14$ olur. Yani bu polinom $x^3 - 6x^2 + 14x - C$ olarak yazılabilir. Şimdi a, b, c bu polinomun kökleri olduğuna göre,

$$\begin{aligned} a^3 - 6a^2 + 14a - C &= 0 \\ b^3 - 6b^2 + 14b - C &= 0 \\ c^3 - 6c^2 + 14b - C &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerin hepsini taraf tarafa toplarsak,

$$(a^3 + b^3 + c^3) - 6(a^2 + b^2 + c^2) + 14(a + b + c) - 3C = 0$$

buluruz. Buradan da $C = \dfrac{41}{3}$, ve polinom da $x^3 - 6x^2 + 14x - \dfrac{41}{3}$ olarak bulunur. Şimdi bu polinomu x ile çarparsak $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - \dfrac{41}{3}x$ polinomunu elde ederiz ki a, b ve c, elde ettiğimiz bu polinomun da kökleri olacağından,

$$\begin{aligned} a^4 - 6a^3 + 14a^2 - \frac{41}{3}a &= 0 \\ b^4 - 6b^3 + 14b^2 - \frac{41}{3}b &= 0 \\ c^4 - 6c^3 + 14b^2 - \frac{41}{3}c &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerini buluruz. Bu denklemleri taraf tarafa toplayarak ise,

$$(a^4 + b^4 + c^4) - 6(a^3 + b^3 + c^3) + 14(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{41}{3}(a + b + c) = 0$$

bulunur ki buradan da $a^4 + b^4 + c^4 = 6 \times 5 - 14 \times 8 + \dfrac{41}{3} \times 6 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla soruda değişik özellikleri verilen bu üç sayının dördüncü kuvvetlerinin toplamı sıfırdır.

77. Hangi n pozitif tam sayıları için

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}$$

eşitliği sağlanacak şeklide birbirinden farklı a_1,a_2,...,a_n tam sayılarını bulunabileceğini belirleyiniz.

Çözüm:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}$$

Genellik bozulmadan $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ kabul edebiliriz. $a_i > 0$ ve $a_i < a_{i+1}$ olduğundan $k \leq a_k$ ve $\dfrac{1}{a_k} \leq \dfrac{1}{k}$ olur. Dolayısıyla verilen denklemde a_k yerine k yazarsak denklemin sol tarafının değeri artar. Yeniden düzenlenme eşitsizliğinden [1] sol tarafın alabileceği en büyük değer $\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n-1} + \cdots + \dfrac{n}{1}$ dir. Diğer taraftan, denklemin sağ tarafı da $\dfrac{1+2+\cdots+n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{4}$ 'dan büyük veya eşittir. Buradan;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \cdots + \frac{n}{1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{k} = (n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - n \\
&= 1 + (n+1)\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= (n+1)\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$n > 6$ için tümevarımla

$$\frac{n}{4} \geq \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \ (*)$$

olduğunu görülür. Bu da verilen denklemin sağlanmadığını gösterir. Gerçekten de $n = 7$ için

$$\frac{7}{4} = 1.75 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8} = 1.71$$

[1] $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ ve $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ dizisi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dizisinin bir permütasyonu olmak koşulu ile

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq x_{\sigma(1)}y_1 + x_{\sigma(2)}y_2 + \cdots + x_{\sigma(n)}y_n \geq x_ny_1 + x_{n-1}y_2 + \cdots + x_1y_n$$

dir.

dir. $n > 7$ için (*) sağlanıyorsa, $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{n+2}$ olduğundan $n+1$ için de sağlanır.

Geriye $n = 2, 3, 4, 5, 6$ durumları kalıyor. $n = 2$ nin denklemi sağlamadığı açıktır. $n = 3$ için $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ sayıları (1) i sağlar. $n = 4$ ise

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \frac{4}{a_4}\Big) \leq 2\Big(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{4}{1}\Big) < 13$$

Buradan $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 12$ olur. Bu koşulu sağlayan
$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$=$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$,
$\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$ ve $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ değerleri (1) i sağlamazlar. Bu durumda $n \neq 4$.
$n = 5$ durumunda ise

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \frac{4}{a_4} + \frac{4}{a5}\Big) \leq 2\Big(\frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{4}{2} + \frac{5}{1}\Big) = 17.4$$

yani, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 17$ olur. Buradan elde edilen $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$=$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7\}$ ve $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$ değerleri (1) i sağlamaz. Bu durumda $n \neq 5$.
Son olarak $n = 6$ durumunda $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 \leq 22$ koşulunu sağlayan olası değerler $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ ve $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ de (1) i sağlamadığı için $n \neq 6$.

Dolayısıyla denklemi sadece $n = 3$ sağlar.

78. $[\frac{1}{2}, 1]$ aralığındaki a, b ve c gerçel sayıları için aşağıdaki eşitsizliğin doğruluğunu ispatlayınız.

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{a+c}{1+b} \leq 3$$

Çözüm: Öncelikle soldaki eşitsizliği ispatlıyalım. $a, b \geq \frac{1}{2}$ olduğundan, $a + b \geq 1$ olur. Dolayısıyla,

$$\frac{a+b}{1+c} \geq \frac{a+b}{a+b+c}$$

elde edilir ki bu diğer ikililer için de geçerlidir. Bu üç eşitsizliği toplarsak,

$$2 = \frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{a+b+c} \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{a+c}{1+b}$$

buluruz.

Şimdi de diğer eşitsizliği ispatlayalım. Soruda verilen ifadeyi aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\Big(\frac{a}{1+c} + \frac{c}{1+a}\Big) + \Big(\frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+b}\Big) + \Big(\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a}\Big)$$

Burada ilk ifadeye bakarsak, $a, c \leq 1$ olduğundan, $\frac{a}{1+c} \leq \frac{a}{a+c}$ ve $\frac{c}{1+a} \leq \frac{c}{c+a}$

elde edilir. Bu iki eşitsizliği toplarsak,

$$\frac{a}{1+c}+\frac{c}{1+a}\leq\frac{a}{a+c}+\frac{c}{c+a}=1$$

elde ederiz ki bunu diğer iki ifadeye de uygulayıp hepsini toplarsak istenilen eşitsizliği elde etmiş oluruz.

79. Tüm a, b, c pozitif rasyonel sayıları için

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geq\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\frac{a}{b}=x, \frac{b}{c}=y, \frac{c}{a}=z$ olsun. Bu durumda $xyz=1$ olur. Eşitsizlik şu şekilde yazılabilir: $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq\frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3(x+y+z)$. Aritmetik ortalama - geometrik ortalama eşitsizliğinden,

$$2x^2+\frac{1}{x}=x^2+x^2+\frac{1}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x}}=3x$$

elde edilir. Aynı eşitsizlik y ve z için de yazılıp taraf tarafa toplanırsa istenen sonuç elde edilir.

80. Doğal sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu için aşağıdaki koşullar veriliyor:

(a) f sürekli artan bir fonksiyondur.

(b) $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n),\ \forall m,n\in\mathbf{N}$.

(c) $m\neq n$ ve $m^n=n^m$ ise $f(m)=n$ ya da $f(n)=m$ olur.

Bu durumda $f(30)$'un değerini hesaplayınız.

Çözüm:$f(30)=f(2\cdot3\cdot5)=f(2)\cdot f(3)\cdot f(5)$ olduğu için $f(2), f(3)$ ve $f(5)$ değerlerini bulmamız gerekir.
$m\neq n$ ise, $m^n=n^m$ eşitliğini sadece $(2,4)$ doğal sayı çifti sağlar. Bu yüzden (c) koşulundan $f(2)=4$ ya da $f(4)=2$ olacaktır. Ancak (b) koşulu göz önüne alındığında $f(4)=2$ olamaz. $f(4)=f(2\cdot2)=f(2)\cdot f(2)=f(2)^2=2$ olur. $\sqrt{2}$ bir doğal sayı olmadığı için $f(4)\neq 2$. O halde $f(2)=4$ 'tür.
(a) koşulundan $4=f(2)<f(3)<f(4)=f(2)\cdot f(2)=16$ 'dır. Bu durumda $4<f(3)<16$ olur.
Öncelikle $5\leq f(3)\leq 8$ aralığına bakalım. Buradan $f(9)=f(3\cdot3)=f(3)\cdot f(3)<64$ bulunur. Ancak $f(8)=f(4\cdot2)=f(2\cdot2)\cdot f(2)=f(2)^3=64$ olduğundan $f(8)>f(9)$ olur. Bu da (a) koşulu ile çelişir. Yani $f(3)$ incelenen aralıkta değildir.

$11 \le f(3) \le 15$ aralığını ele alalım. $f(27) = f(3^3) = f(3)^3 \ge 1331$ olur. Fakat $f(32) = f(2^5) = f(2)^5 = 1024$ olduğundan $f(32) < f(27)$ elde edilir. Bu da (a) koşulu ile çelişir.
Geriye $f(3) = 9$ ve $f(3) = 10$ durumları kalır. $f(3) = 10$ olsun. $f(243) = f(3^5) = f(3)^5 = 100000$ ve $f(256) = f(2^8) = f(2)^8 = 65536$ olduğundan $f(256) < f(243)$ olur. Bu durum da f fonksiyonunun sürekli artanlığı ile çelişir. O halde $f(3) = 9$ 'dur.
$f(5)$, $f(4) = 16 < f(5) < f(6) = f(2) \cdot f(3) = 36$ eşitsizliğini sağlamaktadır. Eğer $17 \le f(5) \le 24$ olsa idi $289 \le f(25) \le 576$ olurdu. Fakat $f(24) = f(3) \cdot f(8) = 576$ olduğundan $f(5)$ bu aralıkta olamaz. $7 \le f(5) \le 35$ durumunda da $729 \le f(25) \le 1225$ ve $f(27) = f(3)^3 = 729$ olduğu için $f(27) \le f(25)$, (a) koşulunu sağlamaz. O halde $f(5) = 25$ ya da $f(5) = 26$ 'dır. $f(5) = 26$ ise $f(125) = f(5^3) = f(5)^3 = 17576$ olur. Ancak $f(128) = f(2^7) = f(2)^7 = 16384$ 'tür. Bu durumda $f(5) \ne 26$ olduğundan $f(5) = 25$ olur.
O halde

$$\begin{aligned} f(30) &= f(2 \cdot 3 \cdot 5) \\ &= f(2) \cdot f(3) \cdot f(5) \\ &= 4 \cdot 9 \cdot 25 \\ &= 900 \end{aligned}$$

81. Her $x, y \in \{1, 2, ..., 10\}$ için, $xf(x) + yf(y)$'nin bir böleni $x + y$ olacak şekilde, $\{1, 2, ..., 10\}$ kümesinden $\{1, 2, ..., 100\}$ kümesine tanımlı bütün artan f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x + y$ değeri, $xf(x) + yf(y)$ ve $xf(y) + yf(y)$'nin bir böleni olduğu için, çıkarma yaparak $x + y$'nin $x(f(y) - f(x))$'in de bir böleni olduğunu elde ederiz.
$y = x + 1$ için; $2x + 1$, $x(f(x + 1) - f(x))$'in bir böleni olur. $2x + 1$ ve x'in 1'den büyük ortak böleni olmadığı için, $2x + 1$'in $f(x + 1) - f(x)$'in bir böleni olduğunu anlarız.
Özel olarak, her $x \in \{1, 2, ..., 9\}$ için f artan olduğundan $f(x+1) - f(x) \ge 2x + 1$'dir. Bu yüzden

$$\sum_{x=1}^{9} (f(x + 1) - f(x)) \ge \sum_{x=1}^{9} (2x + 1).$$

yazarız. Bu, $f(10) \ge f(1) + 99 \ge 100$ olduğu anlamına gelir. Bu yüzden, $f(10) = 100$ ve $f(1) = 1$ olmak zorundadır.
Her $x \in \{1, 2, ..., 9\}$ için $f(x + 1) - f(x) = 2x + 1$ olmasından dolayı, $f(x) = x^2$ sonucuna varırız.

82. $(1+\sqrt{2})^{3000}$ sayısının ondalık gösteriminde virgülden sonraki 1000'inci basamak kaçtır?

Çözüm:$a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ olsun. a_n de $(1+\sqrt{2})^n$ ve $(1-\sqrt{2})^n$ in binom açılımları yapıldığında $(1+\sqrt{2})^n$ açılımından gelen üssü tek sayı olan terimler ile $(1-\sqrt{2})^n$ nin açılımından gelen üssü tek sayı olan terimlerin toplamı sıfır olacaktır. Geriye yalnız her iki açılımdan da üssü çift olan terimler kalacaktır. Fakat çift üsler için $\sqrt{2}$ her zaman tamsayı olacağından a_n de her zaman bir tamsayı olacaktır.

$\left|1-\sqrt{2}\right| < 1$ olduğu için n sonsuza yaklaştıkça, $(1-\sqrt{2})^n$ de sıfıra yaklaşacaktır. $|(1-\sqrt{2})^3| < \dfrac{1}{10}$ ve $(1-\sqrt{2})^{3000} < 10^{-1000}$ olur.

O halde, her $n \in \mathbb{R}$ için $a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ bir tamsayı olduğundan, a_{3000} de bir tamsayı olacaktır. $(1-\sqrt{2})^{3000}$'ın virgülden sonraki en az 1000 basamağı 0 olduğu için $(1+\sqrt{2})^{3000}$ in virgülden sonraki en az 1000 basamağı 9 olmalıdır. Dolayısıyla virgülden sonraki 1000'inci basamağı da 9 dur.

83. a, b, c pozitif gerçel sayıları $abc = 2$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu durumda

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}$$

eşitsizliğini gösteriniz.

Çözüm: Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

ve

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \leq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu iki eşitsizliği birleştirirsek

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{3} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)((b+c)+(a+c)+(a+b))}{6} \\ &\geq \frac{(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b})^2}{6} \qquad (*) \end{aligned}$$

Aritmetik Ortalama-Geometrik Ortalama eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b} &\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(a+b)(b+c)(a+c)}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{8abc}} = 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$

Yani $a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}\geq 6$ 'dır. $(*)$ eşitsizliği kullanılarak

$$a^3+b^3+c^3\geq \frac{(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b})^2}{6}\geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

elde edilir.

84. Her x gerçel sayısı için

$$\left[\frac{x+3}{6}\right]-\left[\frac{x+4}{6}\right]+\left[\frac{x+5}{6}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x+1}{3}\right]$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lfloor x\rfloor$ ile x'i aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim.
Birinci Çözüm: $\dfrac{x+1}{6}=y$ diyelim. Denklemde yerine yazarsak:

$$\left\lfloor y+\frac{1}{3}\right\rfloor-\left\lfloor y+\frac{1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor y+\frac{2}{3}\right\rfloor=\lfloor 3y\rfloor-\lfloor 2y\rfloor .$$

Hermite eşitlikleri yardımıyla,

$$\lfloor 2y\rfloor=\lfloor y\rfloor+\left\lfloor y+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

$$\lfloor 3y\rfloor=\lfloor y\rfloor+\left\lfloor y+\frac{1}{3}\right\rfloor+\left\lfloor y+\frac{2}{3}\right\rfloor$$

bulunur.

İkinci Çözüm: $k\in Z$ ve $y\in[0,6)$ olmak üzere $x=6k+y$ şeklinde ifade edersek eşitlik

$$\left\lfloor\frac{y+3}{6}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{y+4}{6}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{y+5}{6}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{y+1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{y+1}{3}\right\rfloor$$

şeklini alır.

$y\in[0,1)\,,y\in[1,2)\,,y\in[2,3)\,,y\in[3,4)\,,y\in[4,5)\,,y\in[5,6)$ durumları kontrol edilerek sonuç kolaylıkla elde edilebilir.

85.

$$\frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{a^2}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{a^2}{(x+4)(x+5)}=1$$

denkleminin köklerinin gerçel olmasını sağlayan a gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: x sayısı, $0,-1,-2,-3,-4$ ya da -5 olamaz. $\dfrac{1}{y(y+1)}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+1}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a^2}{x(x+1)} + \frac{a^2}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{a^2}{(x+4)(x+5)} \\ &= a^2 \Big(\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} \right) \Big) \\ &= a^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} a^2 \left(\frac{5}{x(x+5)} \right) - 1 &= 0 \\ \frac{5a^2 - (x^2+5x)}{x^2+5x} &= 0 \\ x^2 + 5x - 5a^2 &= 0 \end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemin kökleri de

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+20a^2}}{2}$$

dir. Ancak x sayısı 0,-1,-2,-3,-4 ya da -5 olamayacağından

$$\begin{aligned} -5 \pm \sqrt{25+20a^2} &\neq 0, -2, -4, -6, -8, -10 \\ \sqrt{25+20a^2} &\neq 5, 3, 1 \\ 25 + 20a^2 &\neq 25, 9, 1 \\ 20a^2 &\neq 0 \\ a &\neq 0 \end{aligned}$$

O halde verilen denklemin sıfırdan farklı bütün a gerçel sayıları için gerçel kökleri vardır.

86. $n \geq 3$ için

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2 x_3 \cdots x_n &= 0 \\ x_2^2 - x_1 x_3 \cdots x_n &= 0 \\ x_3^2 - x_1 x_2 \cdots x_n &= 0 \\ &\vdots \\ x_n^2 - x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümlerini bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemleri taraf tarafa çarpalım

$$(x_1x_2x_3\cdots x_n)^2 = (x_1x_2x_3\cdots x_n)^{n-1}$$

Eğer $x_1x_2x_3\cdots x_n = 0$ ise $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ sayılarından en az bir tanesi 0 olmak zorundadır. Bu da diğer bütün sayıların 0 olmasını gerektirir.
$x_1x_2x_3\cdots x_n = a \neq 0$ ise a 'nın karesi ve $n \geq 3$ için $n-1$ 'inci kuvveti aynı olduğu için n çift ise $a = 1$, n tek ise $a = \pm 1$ olur. n çift ise $x_1x_2x_3\cdots x_n = 1$ eşitliğinden

$$x_i^2 = \frac{x_1x_2x_3\cdots x_n}{x_i} = \frac{1}{x_i} \qquad \Rightarrow x_i^3 = 1 \quad x_i = 1, i = 1,2,3,\cdots n$$

olur. n tek ise

$$x_i^2 = \frac{x_1x_2x_3\cdots x_n}{x_i} = \frac{\pm 1}{x_i} \qquad \Rightarrow x_i^3 = \pm 1 \quad x_i = \pm 1, i = 1,2,3,\cdots n$$

bulunur.
Ayrıca $n = 3$ durumunu inceleyelim. $n = 3$ ise verilen sistem

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2x_3 \\ x_2^2 &= x_1x_3 \\ x_3^2 &= x_1x_2 \end{aligned}$$

haline gelir. $x_1x_2x_3 = c$ ise

$$x_i^2 = \frac{x_1x_2x_3}{x_i} = \frac{c}{x_i} \qquad \Rightarrow x_i^3 = c^3 \quad x_i = c, i = 1,2,3$$

elde edilir. O halde $n = 3$ için bütün c gerçel sayıları bir çözümdür.

87. Her $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için

(a) $f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 3^x$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı gerçel sayılarda tanımlı bütün fonksiyonları bulunuz.

(b) $f(x) = \frac{2^{\frac{1+x}{x}} - 2^x}{3}$ fonksiyonu için $(x \neq 0)$

$$f\left(\frac{1}{2002}\right) + f\left(\frac{2}{2002}\right) + \cdots + f\left(\frac{2002}{2002}\right) + 2f\left(\frac{2002}{2001}\right) + 2f\left(\frac{2002}{2000}\right) + \cdots + 2f\left(\frac{2002}{1}\right)$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm:

(a) $f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 3^x$ eşitliğinde x yerine $\frac{1}{x}$ yazarsak $f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ elde edilir. Bu eşitliği 3 'le çarpıp verilen eşitlikle toplarsak

$$\begin{aligned}
3f\left(\frac{1}{x}\right) - 9f(x) + f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) &= 3 \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3^x \\
-8f(x) &= 3 \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3^x \\
f(x) &= \frac{-1}{8}(3 \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3^x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1+x}{x}} - 2^x}{3}$ ise

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2^{\frac{1+x}{x}} - 2^x + 2(2^{1+x} - 2^{\frac{1}{x}})}{3} = 2^x$$

bulunur. Verilen toplam düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{1}{2002}\right) + 2f\left(\frac{2002}{1}\right) + f\left(\frac{2}{2002}\right) + 2f\left(\frac{2002}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{2002}{2002}\right) \\
= \;& 2^{\frac{1}{2002}} + 2^{\frac{2}{2002}} + \cdots + 2^{\frac{2001}{2002}} + f(1) \\
= \;& 1 - 1 + 2^{\frac{1}{2002}} + 2^{\frac{2}{2002}} + \cdots + 2^{\frac{2001}{2002}} + \frac{2}{3} \\
= \;& (1 + 2^{\frac{1}{2002}} + 2^{\frac{2}{2002}} + \cdots + 2^{\frac{2001}{2002}}) + \frac{2}{3} - 1 \\
= \;& \frac{2^{\frac{2002}{2002}} - 1}{2^{\frac{1}{2002}} - 1} - \frac{1}{3} \\
= \;& \frac{1}{2^{\frac{1}{2002}} - 1} - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

88. (x, y) ile x ve y tam sayılarının en büyük ortak bölenin,, $[x, y]$ x ile ise y sayılarının en küçük ortak katını gösterelim. Bu durumda

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{[x, y]} + \frac{1}{(x, y)} = \frac{1}{2}$$

eşitliğini sağlayan bütün $\{x, y\}$ ikililerini bulunuz.

Çözüm: $d = (x, y)$ ise $x = du$ ve $y = dv$ olsun. Bu durumda $(u, v) = 1$ olur ve buradan da $2(u+1)(v+1) = duv$ denklemini elde ederiz. Burada $(v, v+1) = 1$ olduğu için $v|2(u+1)$ olduğu görülür.

Birinci Durum $(u = v = 1)$**:** Bu durumda $d = 8$ olduğundan tek çözüm $x = 8$ ve $y = 8$ ikilisidir.

İkinci Durum $(u < v)$**:** Bu durumda $u + 1 \leq v \Leftrightarrow 2(u+1) \leq 2v \Leftrightarrow \dfrac{2(u+1)}{v} \leq 2,$

yani $\dfrac{2(u+1)}{v} \in \{1,2\}$ olur.

Ancak $\dfrac{2(u+1)}{v} = \dfrac{du}{v+1}$ olduğu için $\dfrac{2(u+1)}{v} = 1$ durumunda $(d-2)u = 3$ eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla ya $\{d,u\} = \{3,3\}$ ya da $\{d,u\} = \{5,1\}$ olabilir ve bu durumlarda da ya $\{d,u,v\} = \{3,3,8\}$ ya da $\{d,u,v\} = \{5,1,4\}$ olabilir. Sonuç olarak $\{x,y\} = \{9,24\}$ ya da $\{x,y\} = \{5,20\}$ olabilir.

$\dfrac{2(u+1)}{v} = 2$ durumunda ise $(d-2)u = 4$ olacağından, benzer şekilde $\{x,y\} = \{12,15\}$ ya da $\{x,y\} = \{8,12\}$ ya da $\{x,y\} = \{6,12\}$ olabilir.

Üçüncü Durum ($u > v$)**:** u,v ve x,y simetrik olduklarından çözümler de ikinci durum çözümlerine göre simetrik olur. Sonuç olarak bütün ikililer:

$$\{8,8\},\{9,24\},\{24,9\},\{5,20\},\{20,5\},\{12,15\},\{15,12\},\{8,12\},\{12,8\},\{6,12\},\{12,6\},$$

olarak bulunur.

89. a,b,c gerçel sayılardır. M sayısı $y = |4x^3 + ax^2 + bx + c|$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığındaki en büyük değeri olsun. $M \geq 1$ olduğunu gösteriniz ve eşitlik durumunun gerçekleştiği bütün durumları belirleyiniz.

Çözüm:

Birinci Çözüm:$|x| \leq 1$ koşulunu sağlayan x gerçel sayıları için $y = |4x^3 + ax^2 + bx + c|$ ifadesinin en büyük değeri M ise $M < 1$ olamayacağını göstereceğiz.

$M < 1$ ise;

$-1 < 4x^3 + ax^2 + bx + c < 1$ dir (Her $-1 \leq x \leq 1$ için).

$x = -1$ seçersek; $3 < a - b + c < 5, \quad 3 + b < a + c < 5 + b$ olur.

$x = 1$ seçersek; $-5 < a + b + c < -3, \quad -5 - b < a + c < -3 - b$ olur.

$3 + b < a + c < -3 - b$ ve $3 + b < -3 - b, \quad b < -3$ bulunur.

$x = -\dfrac{1}{2}$ seçersek; $-1 < -\dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{2} + c < 1, \quad -\dfrac{1}{2} + \dfrac{b}{2} < \dfrac{9}{4} + c < \dfrac{3}{2} + \dfrac{b}{2}$ olur.

$x = \dfrac{1}{2}$ seçersek; $-1 < \dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} + c < 1, \quad -\dfrac{3}{2} - \dfrac{b}{2} < \dfrac{9}{4} + c < \dfrac{1}{2} - \dfrac{b}{2}$ olur.

$\dfrac{-3-b}{2} < \dfrac{a}{4} + c < \dfrac{3+b}{2}$ ve $-3 - b < 3 + b, \quad b > -3$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç olarak her a,b,c gerçel sayı üçlüsü için $M \geq 1$ dir. Şimdi ise $M = 1$ olmasını sağlayan tüm a,b,c üçlülerini bulalım.

$M = 1$ ise $-1 \leq 4x^3 + ax^2 + bx + c \leq 1$ olmalıdır (Her $-1 \leq x \leq 1$ için).

Yine $x = -1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1$ seçersek; $3 + b \leq a + c \leq -3 - b$ ve $\dfrac{-3-b}{2} \leq \dfrac{a}{4} + c \leq \dfrac{3+b}{2}$ buluruz. $-3 - b \leq 3 + b \leq -3 - b, \quad -3 \leq b \leq -3$ ve buradan $b = -3$ olur. $0 \leq a + c \leq 0, \quad 0 \leq \dfrac{a}{4} + c \leq 0$ olur ve $a + c = \dfrac{a}{4} + c = 0$ bulunur. Buradan da $a = 0 = c$ olur.

Gerçekten $a = 0 = c,\ b = -3$ için $M = 1$ dir. Çünkü $M > 1$ ise; $[-1, 1]$ aralığında $|4x_0^3 - 3x_0| > 1$ olacak şekilde bir x_0 bulunur. $4x_0^3 - 3x_0 > 1 \Longleftrightarrow (x_0 - 1)(4x_0^2 + 4x_0 + 1) > 0 \Longleftrightarrow (x_0 - 1)(2x_0 + 1)^2 > 0$, ancak $x_0 \leq 1$ ve $(2x_0 + 1)^2 \geq 0$ olduğundan $4x_0^3 - 3x_0 \leq 1$ dir. $4x_0^3 - 3x_0 < -1 \Longleftrightarrow (x_0 + 1)(4x_0^2 - 4x_0 + 1) < 0 \Longleftrightarrow (x_0 + 1)(2x_0 - 1)^2 > 0$, ancak $x_0 \geq 1$ ve $(2x_0 - 1)^2 \geq 0$ olduğundan $4x_0^3 - 3x_0 \geq -1$ dir. Yani $|4x_0^3 - 3x_0| > 1$ olamaz. $M = 1$ olmasını sağlayan tek a, b, c üçlüsü $(a, b, c) = (0, -3, 0)$ dır.

İkinci Çözüm: $a = 0, b = -3, c = 0$ için -1, -1/2, -1/2, 1 noktalarında fonksiyon maksimum olur ve $M = 1$ dir. $M < 1$ koşulunu sağlayan a, b, c sayılarının var olduklarını kabul edelim. O zaman,

$$(4x^3 + ax^2 + bx + c) - (4x^3 - 3x)$$

-1 de pozitif, -1/2 de negatif, 1/2 de pozitif, 1 de negatif olmalıdır ki bu ikinci dereceden bir fonksiyon için mümkün değildir. Bu nedenle $M \geq 1$ dir ve aynı nedenle eşitlik sadece $(a, b, c) = (0, -3, 0)$ da gerçekleşir.(Not: Bu Chebyshev polinomlarının minimum sapma özelliğinin özel bir halidir.)

90. Pozitif tam sayılar üzerinde tanımlı f fonksiyonu $f(1) = 1996$ ve

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n) \qquad (n > 1)$$

eşitliklerini sağlamaktadır. $f(1996)$ değerini bulunuz.

Çözüm: Tümevarım kullanılarak

$$f(n) = \frac{2 \cdot 1996}{n(n+1)}$$

olduğu gösterilebilir. Bir başka deyişle $n = 1$ için açıkça sağlanan bu ifadenin $(n-1)$ için doğru olduğunu kabul edersek,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{n^2 - 1}\left(\frac{3992}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{3992}{(n-1)n}\right) \\ &= \frac{3992}{n^2 - 1}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{3992}{(n+1)(n-1)}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{3992}{(n+1)(n-1)} \frac{n-1}{n} = \frac{3992}{n(n+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$f(1996) = \frac{3992}{1996 \cdot 1997} = \frac{2}{1997}$$

dir.

91. x bir gerçel sayı, n bir pozitif tam sayı olmak üzere; $\lfloor x \rfloor$, x sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı olsun. Bu durumda $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{n} \rfloor + \ldots + \lfloor x + \frac{n-1}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İspatlamamız gereken eşitliğe, gereksiz tekrarlardan kaçınmak için E diyelim.

$$E = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

$n = 1$ durumu için sonuç aşikardır. $n > 1$ durumu için x gerçel sayısını n sayı tabanında düşünelim.

$$x = \lfloor x \rfloor + 0.d_1 d_2 d_3 \ldots$$

burada $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$, n tabanındaki ondalıklı ifadeleri temsil ettiğinden, 0 ve $n-1$ arasındaki tamsayılardır.

Ayrıca ondalık kısımda tekrarlayan $(n-1)$ değerleri yerine sonu sıfırlı olarak yazarsak (başka bir deyişle limit değerini yazarsak), her bir gerçel sayı için tek bir gösterim şekli elde etmiş oluruz. (Örneğin, ondalıklı -2.3 gerçel sayısının gösterimi için $-3 + 0.6999\ldots$ değil de $-3 + 0.7000\ldots$ gösterimini kullanalım.)

E eşitliğinin sağ tarafını ele alırsak: $nx = (n \lfloor x \rfloor + d_1) + 0.d_2 d_3 \ldots$
Dolayısıyla, $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor + d_1$ eşitliğini elde ederiz.

Şimdi, E eşitliğinin sol tarafını düşünecek olursak:
s, $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ kümesinin elemanlarından biri olmak üzere, toplamın elemanlarından her biri $\left\lfloor x + \frac{s}{n} \right\rfloor$ olarak gösterilebilir. Bu durumda tekrar n tabanında düşünürsek,

$$x + \frac{s}{n} = \lfloor x \rfloor + 0.d_1 d_2 d_3 \ldots + 0.s = a + 0.r d_2 d_3 \ldots$$

olur. Burada a, r değerine göre 2 farklı değer alabilir.

$$\begin{aligned} d_1 \leq \quad r \quad &\leq n-1 \quad \text{ise} \quad a = \lfloor x \rfloor \\ 0 \leq \quad r \quad &\leq d_1 - 1 \quad \text{ise} \quad a = \lfloor x \rfloor + 1 \end{aligned}$$

Sonuç olarak E eşitliğinin sol tarafındaki toplamın son d_1 tanesinde $\lfloor x \rfloor + 1$, geri kalanlarda ise $\lfloor x \rfloor$ geleceğinden eşitliğin sol tarafında da $n \lfloor x \rfloor + d_1$ elde ederiz. Böylece

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

eşitliğini ispatlamış olduk.

92.

$$4(ab + bc + ca) - 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$$

eşitsizliği sağlayan bütün pozitif a, b, c gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: Chebyshev eşitsizliğini (açıklama 1 e bakınız) kullanarak

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(a^3 + b^3 + c^3)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$ olduğundan $(a + b + c) \leq 1$ bulunur. Diğer taraftan

$$4(ab + bc + ca) - 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

(açıklama 2 ye bakınız) eşitsizliğinden dolayı $(ab + bc + ca) \geq \frac{1}{3}$ olduğu görülür.

$$1 \geq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \geq 3(ab + ac + bc) \geq 1$$

olduğundan $(a+b+c) = 1$ bulunur. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ eşitlik durumu ancak $a = b = c$ olduğunda sağlandığından $a = b = c = \frac{1}{3}$ olarak bulunur.

Açıklama 1: $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ ve $y_1 \geq y_2 \geq y_3$ ise $3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \geq (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$ olur. Bizim durumumuzda genelliği bozmadan, $a \geq b \geq c$ olsun. Bu durum $a^2 \geq \ b^2 \geq c^2$ olmasını gerektirir $(a, b, c > 0)$.
Açıklama 2: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

93. a, b ve c rasyonel sayılar olsun. Aşağıdaki denklemlerin her birinin sadece $a = b = c = 0$ durumunda sağlanabileceğini gösteriniz.

(i) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt{2} = 0$

(ii) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} = 0$

(iii) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$

Çözüm: İlk olarak, a, b ve c 'nin tam sayılar olduğunu varsayalım. Bunun için, paydalarının en küçük ortak katlarıyla, her bir denklemi çarpabiliriz.
a, b ve c nin hepsinin birlikte sıfır olmadığı değerleri için her bir denklemin sağlandığını varsayalım ve bir çelişki elde edelim. Bunun için, aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyaç duyacağız.

Yardımcı Teorem:

$n > 1$ ve m pozitif tam sayılar olsunlar. O halde, $\sqrt[n]{m}$ ya bir tam sayıdır ya da irrasyonel bir sayıdır.

İspat:

r ve s tam sayıları aralarında asal olmak üzere, $\sqrt[n]{m} = r/s$ 'in rasyonel bir sayı olduğunu varsayalım.
O halde, $r^n = ms^n$ 'dir.
Aritmetiğn temel teoreminden, denklemin her iki tarafı da aynı asal çarpanlara sahip olmak zorundadır.
r^n ve s^n 'in asal çarpanlarında, her bir asal n'nin bir tamsayı katı kez bulunur.
Bu yüzden, m 'nin asal çarpanlarındaki her bir asal n'nin bir tamsayı katı kez bulunmak zorundadır.
Bu, m 'nin n-inci kuvvet olması ($x^n = m$ olacak şekilde $x \in \mathbb{Z}$ vardır) anlamına gelir ve dolayısıyla $\sqrt[n]{m}$ bir tam sayıdır.
Sonuç olarak, $\sqrt[n]{m}$ ya rasyoneldir (bu durumda bir tam sayıdır) ya da irrasyoneldir.

(i) $\mathbf{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt{2} = 0}$

İlk olarak, $b = c = 0$ ise, $a = 0$ 'dır.
$c = 0$ ve $b \neq 0$ ise, $\sqrt[3]{2} = -a/b$ 'dir ve yukarıdaki yardımcı teoremle çelişir. ($1^3 < 2 < 2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{2}$ bir tam sayı değildir. Bu yüzden, irrasyonel olmak zorundadır.)
$c \neq 0$ ise, denklemi $-b\sqrt[3]{2} = a + c\sqrt{2} = 0$ şeklinde yazıp, her iki tarafın kübünü alırsak,

$$\begin{aligned} -2b^3 &= a^3 + 3a^2c\sqrt{2} + 3ac^2(\sqrt{2})^2 + c^3(\sqrt{2})^3 \\ &= a^3 + 6ac^2 + (3a^2c + 2c^3)\sqrt{2} \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Bu yüzden, $\sqrt{2} = -(2b^3 + a^3 + 6ac^2)/(3a^2c + 2c^3)$ 'dir. (paydanın sıfırdan farklı olması gerekliliğine dikkat etmeliyiz.)
Bu durum, yine yardımcı teoremle çelişir.
Bu yüzden, tek çözüm $a = b = c = 0$ 'dır.

(ii) $\mathbf{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} = 0}$

$a = 0$ ise, $b = c = 0$ 'dır. Aksi taktirde, $\sqrt[3]{3/2}$ rasyoneldir ve bu yüzden $\sqrt[3]{3/2}$ rasyoneldir. Bu durum yukarıdaki yardımcı teoremle çelişir.
$b = 0$ ise, $a = c = 0$ 'dır. Aksi taktirde, $\sqrt[3]{3} = -a/c$ rasyoneldir.
$c = 0$ ise, $a = b = 0$ 'dır. Aksi taktirde, $\sqrt[3]{2} = -a/b$ rasyoneldir.
Şimdi, a, b ve c 'nin sıfırdan farklı olduklarını varsayalım ve denklemi $-a = b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} = 0$ şeklinde yazalım. $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ özdeşliğinden faydalanarak,

her iki tarafın kübünü alırsak,

$$\begin{aligned} -a^3 &= 2b^3 + 3c^3 + 3bc\sqrt[3]{6}(b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3}) \\ &= 2b^3 + 3c^3 - 3abc\sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Buradan, $\sqrt[3]{6} = (a^3 + 2b^3 + 3c^3)/3abc$ olur. Bu durum da, yardımcı teoremle çelişir.
Bu yüzden, tek çözüm $a = b = c = 0$ 'dır.

(iii) $\mathbf{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0}$

Yukarıda olduğu gibi, a, b ve c 'den herhangi biri sıfıra eşit olduğunda diğerleride sıfır olmak zorundadır. Şimdi, a,b ve c 'nin sıfırdan farklı olduklarını varsayalım ve denklemi $-a = b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ şeklinde yazalım. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ özdeşliğinden faydalanarak, her iki tarafın kübünü alırsak,

$$\begin{aligned} -a^3 &= 2b^3 + 4c^3 + 6bc(b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \\ &= 2b^3 + 4c^3 - 6abc \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Buradan,

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc = 0 \qquad (1)$$

olur. Şimdi a, b ve c 'nin en büyük ortak bölenlerinin 1 olduğunu varsayalım. (değilse, a, b ve c 'yi en büyük ortak bölenlerine bölebiliriz.)
(1)'den, a çift olmak zorundadır. $a = 2a_1$ olsun.
O halde, $8a_1^3 + 2b^3 + 4c^3 - 12a_1bc = 0$ 'dır. Buradan, $4a_1^3 + b^3 + 2c^3 - 6a_1bc = 0$ denklemini elde ederiz.
Bu yüzden b çifttir. $b = 2b_1$ olsun.
O halde, $4a_1^3 + 8b_1^3 + 2c^3 - 12a_1b_1c = 0$ 'dır. Buradan, $2a_1^3 + 4b_1^3 + c^3 - 6a_1b_1c = 0$ denklemini elde ederiz.
Yukarıdaki denklemden, c 'de çift olmak zorundadır. Dolayısıyla, a, b ve c ' nin hepsi çifttir. Bu durum, a, b ve c ' nin en büyük ortak bölenlerinin 1 olduğunu kabul etmemizle, çelişir.
Bu yüzden, tek çözüm $a = b = c = 0$ 'dır.

94. x, y, z, m, n sayıları $m + n \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan pozitif gerçel sayılardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} x\sqrt{yz(x+my)(x+nz)} + y\sqrt{xz(y+mx)(y+nz)} + \\ z\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)} \leq \frac{3(m+n)}{8}(x+y)(y+z)(z+x) \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\sqrt{yz(x+my)(x+nz)} = \sqrt{(xz+myz)(xy+nyz)} \leq \frac{xy+xz+(m+n)yz}{2}$$
$$\sqrt{xz(y+mx)(y+nz)} = \sqrt{(yz+mxz)(xy+nxz)} \leq \frac{xy+yz+(m+n)xz}{2}$$
$$\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)} = \sqrt{(yz+mxy)(xz+nxy)} \leq \frac{xz+yz+(m+n)xy}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Dolayısıyla

$$x\left[xy+xz+(m+n)yz\right]+y\left[xy+yz+(m+n)xz\right]+z\left[xz+yz+(m+n)xy\right]$$
$$\leq \frac{3(m+n)}{4}(x+y)(y+z)(z+x)$$

eşitsizliğini, ya da $A = x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2$ ve $B = xyz$ olmak üzere

$$4\left[A + 3(m+n)B\right] \leq 3(m+n)(A+2B) \Leftrightarrow 6(m+n)B \leq \left[3(m+n)-4\right]A$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

Burada $m+n \geq 2$ olduğu için $m+n \leq 3(m+n)-4$ eşitsizliği elde edilir. Ayrıca aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden $6B \leq A$ olduğu görülür. Dolayısıyla son iki eşitsizlikten

$$6(m+n)B \leq \left[3(m+n)-4\right]A$$

eşitsizliği elde edilir ve bu şekilde istenen eşitsizlik gösterilmiş olur.

95. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}, n \geq 1$$

şeklinde tanımlanıyor. $n \geq 4$ için $\lfloor a_n^2 \rfloor = n$ olduğunu ispatlayınız.($\lfloor x \rfloor$ sayısı x'i aşmayan en büyük tam sayıdır.)

Çözüm:
Tümevarım ile $n \geq 4$ için $\dfrac{n-1}{\sqrt{n+1}} < a_n < \sqrt{n+1}$ olduğunu göstereceğiz. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2$ ve $a_4 = \frac{13}{6}$ dır. $n = 4$ için $\dfrac{3}{\sqrt{2}} < \dfrac{13}{6} < \sqrt{5}$ sağlanır. $n = k$ için $\dfrac{k-1}{\sqrt{k-2}} << a_k < k+1$ sağlandığını kabul edelim. $n = k+1$ için sağlandığını gösterelim. $f(x)\dfrac{x}{k}+\dfrac{k}{x}$ olsun. $0 < p, q \leq \sqrt{k+1}$ koşulunu sağlayan her p, q gerçel sayı

ikilisi için $f(p) > f(q)$ olduğunu gösterelim. $f(p) - f(q) = \left(\dfrac{p}{k} + \dfrac{k}{p}\right) - \left(\dfrac{q}{k} + \dfrac{k}{q}\right) = \dfrac{p-q}{k} - \dfrac{k(p-q)}{pq} = \dfrac{(p-q)(pq-k^2)}{kpq}$ ve $pq < k+1 < k^2$ $(k \geq 4)$ olduğundan $f(p) > f(q)$ olur. Buna göre;

$a_{k+1} = f(a_k) < f\left(\dfrac{k-1}{\sqrt{k-2}}\right) = \dfrac{k-1}{k\sqrt{k-2}} + \dfrac{k\sqrt{k-2}}{k-1} < \sqrt{k+2}$

$\iff \dfrac{(k^2-2k+1)+k^2(k-2)}{k(k-1)\sqrt{k-2}} < \sqrt{k+2}$

$\iff k + \dfrac{1-2k}{k^2-k} < \sqrt{k^2-4}$

$\iff k^2 + \dfrac{(2k-1)^2}{(k^2-k)^2} + \dfrac{2(1-2k)}{k-1} < k^2 - 4$

$\iff \dfrac{(2k-1)^2}{(k^2-k)^2} < \dfrac{2}{k-1}$

$\iff (2k-1)^2 < 2k^2(k-1)$

$\iff 2k^2 > 6k^2 - 4k + 1$ ve $k \geq 4$ olduğundan $2k^3 - 6k^2 \geq 2k^2 < -4k + 1$ olur. Yani $a_{k+1} < \sqrt{k+2}$ dir.

$a_{k+1} = f(a_k) > f(\sqrt{k+1}) = \dfrac{\sqrt{k+1}}{k} + \dfrac{k}{\sqrt{k+1}} > \dfrac{k}{\sqrt{k-1}}$

$\iff 1 + \dfrac{k+1}{k^2} > \sqrt{\dfrac{k+1}{k-1}}$

$\iff 1 + \dfrac{(k+1)^2}{k^4} + \dfrac{2(k+1)}{k^2} > 1 + \dfrac{2}{k-1}$

$\iff \dfrac{(k+1)^2}{k^4} > \dfrac{2}{k^2(k-1)}$

$\iff \left(\dfrac{k+1}{k}\right)^2 > \dfrac{2}{k-1}$ ve $\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^2 > 1 > \dfrac{2}{k-1}$ olduğundan $a_{k+1} > \dfrac{k}{\sqrt{k-1}}$ olur ve tümevarım biter. Böylece $n \geq 4$ için $\sqrt{n} < \dfrac{n-1}{\sqrt{n-2}} < a_n < \sqrt{n+1}$ ve $\lfloor a_n^2 \rfloor = n$ bulunur.

96. Aşağıdaki denklem sistemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

$$x + y + z = 2,$$

$$(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = 1,$$

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -6.$$

Çözüm: İkinci denklemi düzenlersek:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx = 1,$$

$$(x+y+z)^2 + xy + yz + zx = 1,$$

birinci denklemden dolayı $x + y + z = 2$ yazarsak,

$$xy + yz + zx = -3.$$

Benzer şekilde üçüncü denklemi düzenlersek:

$$x(xy + xz) + y(yz + xy) + z(xz + yz) = -6,$$

$$x(3 + yz) + y(3 + xz) + z(3 + xy) = 6,$$

$$3(x + y + z) + 3xyz = 6,$$

$$x + y + z + xyz = 2,$$

$$xyz = 0.$$

Dolayısıyla verilen denklem sistemi aşağıdaki yeni denklem sistemine dönüşmüş olur:

$$x + y + z = 2,$$

$$xy + yz + zx = -3,$$

$$xyz = 0.$$

Vieta formülünden dolayı x, y, z gerçel sayıları $t^3 - 2t^2 - 3t = 0$ polinomunun kökleridir. Polinomun kökleri $t_1 = 0, t_2 = -1, t_3 = 3$ dir. Bu durumda denklem sisteminin çözümleri polinom köklerinden bulunur.

$$(x, y, z) \in \{(0, 3, -1), (0, -1, 3), (3, 0, -1), (-1, 0, 3), (3, -1, 0), (-1, 3, 0)\}.$$

97. x bir gerçel sayı olmak üzere, $\sin(\cos x)$ ve $\cos(\sin x)$ fonksiyonlarının hangisi daha büyüktür?

Çözüm: Bu soruyu çözmek için, aşağıdaki trigonometrik özdeşliklerden yararlanacağız.

$$\begin{aligned}
\sin A &= \cos(\frac{\pi}{2} - A) && (1)\\
\cos A - \cos B &= -2\sin(\frac{A+B}{2}).\sin(\frac{A-B}{2}) && (2)\\
\cos(x + \frac{\pi}{4}) &= \cos x.\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin x.\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) && (3)\\
\cos(x - \frac{\pi}{4}) &= \cos x.\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin x.\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) && (4)
\end{aligned}$$

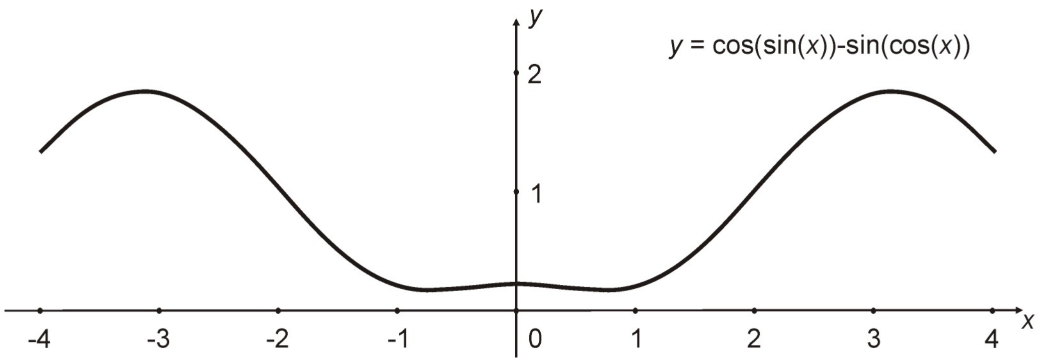
Yukarıdaki özdeşlikleri kullanarak;

$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) - \sin(\cos x) &\stackrel{(1)}{=} \cos(\sin x) - \cos(\frac{\pi}{2} - \cos x) \\
&\stackrel{(2)}{=} -2\sin[\frac{1}{2}(\sin x - \cos x + \frac{\pi}{2})]\sin[\frac{1}{2}(\sin x + \cos x - \frac{\pi}{2})] \\
&\stackrel{(3),(4)}{=} -2\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4})\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4})
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan dolayı, bütün x değerleri için $0 < -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ olur. Bu yüzden, bütün x değerleri için $\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}) > 0$ 'dır. Benzer şekilde, bütün x değerleri için $-\frac{\pi}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} < 0$ elde edilir. Bu yüzden, bütün x değerleri için $\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}) < 0$ 'dır. Buradan, $-2\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4})\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}) > 0$ sonucuna varırız.

Dolayısıyla, bütün gerçel x değerleri için $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ olur.

Not: $y = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ grafiğinin bir taslağı aşağıda çizilmiştir. Grafik 2π periyoda sahiptir.



98. a gerçel sayısı $(0,1)$ aralığında ve f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$f(0) = 0 \qquad\qquad f(1) = 1$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y)$$

ise $f\left(\frac{1}{7}\right) = ?$

Çözüm:

Birinci Çözüm:

$$g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)} = Af(Bx+C) + D$$

olsun. $g(0) = 0$ ve $g(1) = 1$ olur.

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= Af\left(B\frac{x+y}{2}+C\right)+D\\
&= Af\left(\frac{Bx+By+2C}{2}\right)+D\\
&= Af\left(\frac{Bx+C}{2}+\frac{By+C}{2}\right)+D\\
&= A\left((1-a)f(Bx+C)+af(By+C)\right)+D\\
&= (1-a)Af(Bx+C)+(1-a)D+Af(By+C)+aD\\
&= (1-a)(Af(Bx+C)+D)+a(Af(By+C)+D)\\
&= (1-a)g(x)+ag(x)
\end{aligned}
$$

O halde g'de f ile aynı özellikleri sağlamaktadır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{7}\right)=g\left(\frac{1}{7}\right) &= \frac{f\left(\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{7}}{8}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)}\\
&= \frac{f\left(\frac{1}{7}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)}\\
&= \frac{f\left(\frac{1}{8}\right)}{1-f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{8}\right)}
\end{aligned}
$$

İkinci Çözüm: $y=0$ seçersek $f(\frac{x}{2})=(1-a)f(x)$ ve $x=0$ seçersek; $f(\frac{y}{2})=af(y)$ olur. Yani $f(\frac{x}{2})=(1-a)f(x)=af(x)$ olur. $x=1$ alırsak; $f(1)(1-a)=af(1)$, $1-a=a$, $a=\dfrac{1}{2}$ olmalıdır. Yani $f(\dfrac{x+y}{2})=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ dir. $x=\dfrac{1}{4}$, $y=\dfrac{1}{28}$ seçersek; $f(\dfrac{1}{7})=\dfrac{f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{28})}{2}$ olur. $f(\dfrac{x}{2})=\dfrac{f(x)}{2}$ olduğundan, $f(\dfrac{1}{28})=\dfrac{f(\frac{1}{14})}{2}=\dfrac{f(\frac{1}{7})}{4}$ ve $f(\dfrac{1}{4})=\dfrac{f(\frac{1}{2})}{2}=\dfrac{f(1)}{4}=\dfrac{1}{4}$, $f(\dfrac{1}{7})=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{f(\frac{1}{7})}{4}}{2}$, $8f(\dfrac{1}{7})=1+f(\dfrac{1}{7})$ ve $f(\dfrac{1}{7})=\dfrac{1}{7}$ bulunur.

99. Her x, y gerçel sayı ikilisi için, $f(xf(x)+f(y))=[f(x)]^2+y$ denklemini sağlayan tüm $f:R\rightarrow R$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Öncelikle $f(b)=0$ olacak şekilde $b\in R$ olduğunu gösterelim. $x=0$ alalım:

$$f(0f(0)+f(y))=[f(0)]^2+y$$

$$f(f(y))=[f(0)]^2+y$$

$y = -(f(0))^2$ olarak alalım:

$$f(f(-f(0)^2)) = -[f(0)]^2 + [f(0)]^2 = 0$$

bulunur. Bu durumda $b = f(-f(0)^2)$ için $f(b) = 0$ dır. Yani böyle bir b vardır. Eğer $x = b$ alırsak $f(bf(b) + f(y)) = [f(b)]^2 + y$ elde ederiz. $f(b) = 0$ olduğu için $f(f(y)) = y$ bulunur. $x = f(x)$ alırsak

$$f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = [f(f(x))]^2 + y$$

$$f(f(x)x) + f(y)) = (x)^2 + y$$

bulunur. Aynı zamanda $f(xf(x)+f(y)) = [f(x)]^2+y$ de verilmişti. Bu iki eşitlikten

$$(x)^2 + y = [f(x)]^2 + y$$

bulunur. Dolayısıyla $(f(x))^2 = x^2$ dir.
Şimdi ise her x gerçel sayısı için $f(x) = x$ veya her x gerçel sayısı için $f(x) = -x$ olacağını gösterelim: Aksini varsayarsak $f(a) = a,\ f(b) = -b$ olacak şekilde sıfırdan farklı a, b gerçel sayıları bulunabilir. Sorudaki denklemde $x = a,\ y = b$ alırsak; $f(a^2 - b) = a^2 + b$ olur. $\big(f(a^2 - b)\big)^2 = (a^2 - b)^2$ olduğundan; $a^2 + b = a^2 - b$ veya $a^2 + b = b - a^2$ bulunur.
$a^2 + b = a^2 - b$ ise $b = 0$, $\quad a^2 + b = b - a^2$ ise $a = 0$ olur. Ancak a ve b sıfırdan farklıydı. Bu bir çelişkidir. Yani $f(x) = x$ veya $f(x) = -x$ dir. Her iki fonksiyon da soruda verilen denklemi sağlarlar.

100. $a + b + c + d = 1$ denklemini sağlayan a, b, c, d pozitif gerçel sayıları için,

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle, $0 < a, b, c, d < 1$ olduğundan, $0 < x < 1$ değerleri için $f(x) = 6x^3 - x^2$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada iddiamız, $f(x) = 6x^3 - x^2 \geq \dfrac{5x - 1}{8}$ olduğudur.

Eşitsizliğin iki tarafını 8 ile çarpıp gerekli düzenlemeleri yaptığımızda $0 < x < 1$ için,

$$48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 = (4x - 1)^2(3x + 1)$ olduğundan eşitsizlik $0 < x < 1$ için sağlanacaktır. Yani iddiamız doğrudur. Dolayısıyla bulduğumuz eşitsizlikte x yerine a, b, c ve d değerlerini yazıp taraf tarafa topladığımızda

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geq \frac{5(a+b+c+d)}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

elde ederiz. Yani $6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq \frac{1}{8}$ eşitsizliği $0 < a, b, c, d < 1$ ve $a+b+c+d=1$ için sağlanır.

101. Bir gün okul sonrasında, Murat fazladan bir matematik dersine daha katılmak zorundaydı. Öğretmen tahtaya katsayıları tam sayı olan ikinci dereceden bir $x^2+p_1x+q_1=0$ denklemini yazacak ve Murat bu denklemin çözümlerini bulacaktır. Eğer çözümlerin ikisi birden tam sayı değilse Murat eve dönebilecektir. Eğer denklemin çözümleri tam sayıysa öğretmen p_2 ve q_2, bir önceki sorunun çözümlerinin herhangi bir sıralaması olacak şekilde yeni bir $x^2+p_2x+q_2=0$ denklemi yazacak ve her şey baştan başlayacaktır. Öğretmenin, Murat'ı sonsuza dek okulda tutabilmesini sağlayacak tüm olası p_1, q_1 sayılarının bulunuz.

Çözüm: Cevap p_1 herhangi bir tamsayı ve $q_1=0$ veya $p_1=1$ ve $q_1=-2$'dir.

Eğer $q_1=0$ ise denklemimiz, çözümleri $-p_1$ ve 0 olan $x^2+p_1x=0$ olur. Öğretmen yeni soru olarak, çözümü $-p_1$ ve 0 olan $x^2-p_1x=0$ denklemini yazabilir ve sonra tekrar $x^2+p_1x=0$ yazarak devam edebilir. Dolayısıyla tüm $(p_1, 0)$ ikilileri problemin koşullarını sağlar.

Eğer $q_1=-1$ ise çözümlerin çarpımı -1 olmalıdır ve çözümler -1 ile 1 sayılarının bir sıralamasıdır. $x^2-x+1=0$ ve $x^2+x-1=0$ denklemleri hiçbir tam sayı köke sahip olmadığı için, problemin koşullarını sağlayan $(p_1,-1)$ şeklinde hiçbir ikili yoktur.

Eğer $q_1=-2$ ise çözümlerin çarpımı -2 olmalıdır. Bu durumda çözümler 2 ve -1 ise ilk durumda öğretmen $x^2+2x-1=0$ ve $x^2-x+2=0$ denklemlerinden birisini seçecektir, hiçbirinin tam sayı çözümü yoktur. Daha sonra çözümleri 1 ve -2 olan $x^2+x-2=0$ denklemini elde ederiz. Bu nedenle $(1,-2)$ ikilisinin problemin koşullarını sağladığını görüyoruz.

Şimdi $q_1=0,\ -1,\ -2$ seçeneklerinden hiçbirinin doğru olmadığını düşünelim. x_1 ve x_2, $x^2+p_1x+q_1=0$ denkleminin çözümleri olsun. Bu da $x_1+x_2=-p_1$, $x_1x_2=q_1$ ve

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p_1^2-2q_1<p_1^2+q_1^2$$

olmasını gerektirir.

Bundan dolayı, verilen eşitliğin katsayılarının kareleri toplamı $q_1 \notin [-2,0]$ için kesin bir düşüş gösterir. Kareler toplamı negatif olmayan bir sayı olduğu için er ya da geç, bu iki durumdan birisine ulaşırız; çözümler tamsayı değildir veya sabit terim

$[-2, 0]$ aralığının bir elemanıdır. Son durum önemlidir, çünkü $x^2+px+q = 0$ eşitliği, kendisinden önce yazılan polinomu, $x^2 - (p+q)x + pq = 0$, tek bir şekilde belirler. Dolayısıyla, $(p_1, 0)$ ve $(1, -2)$ sadece sabit terimi sırasıyla 0 veya -2 olan fonksiyonlar arasından çıkar. Bundan dolayı problemin koşullarını sağlayan bunlar dışında hiçbir ikili yoktur.

102. Doğal sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine olan ve

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}$$

koşulunu sağlayan bütün birebir $f(n)$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Öncelikle herhangi bir n için $f(n) > n$ eşitsizliğinin mümkün olmayacağını gösterelim. Farz edelim ki bir n doğal sayısı için $f(n) > n$ olsun.

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2} < \frac{f(n) + f(n)}{2} = f(n)$$

Buradan $f(f(n)) < f(n)$ elde edilir.
f fonksiyonunun kendisi ile k defa bileşkesini $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ olarak gösterelim. $f^2(n) < f(n)$ olduğunu gösterdik. f fonksiyonunun verilen koşulu sağladığını varsayarsak $f^3(n)$ için

$$f^3(n) = f(f(f(n))) \leq \frac{f(n) + f^2(n)}{2} < \frac{f^2(n) + f^2(n)}{2} = f^2(n) < f(n)$$

olur. Tümevarım ile her $p = 2, 3, \ldots$ değeri için $f^p(n) < f(n)$ olduğunu kolayca görürüz. $(f^k(n))_k$ ifadesini k ya bağlı, doğal sayılardan oluşan bir dizi olarak düşünelim. $f^p(n) < f(n)$ koşulundan ötürü bu dizi üstten sınırlı bir dizidir. Dolayısıyla $l < m$ ve $f^l(n) = f^m(n)$ olacak şekilde l ve m değerleri bulabiliriz. Birebir fonksiyonların bileşkeleri de birebir fonksiyonlardır. Dolayısıyla her p değeri için f^p birebir fonksiyondur. Buradan $f^m(n) = f^l(f^{m-l}(n)) = f^l(n)$ elde ederiz. Ayrıca, f^l nin birebir olması $f^{m-l}(n) = n$ olmasını gerektirir. Bu eşitlikten, $f(f^{m-l}(n)) = f^{m-l+1}(n) = f(n)$ buluruz. Ancak biz her $p = 2, 3, \ldots$ değeri için $f^p(n) < f(n)$ olduğunu göstermiştik. $f(f^{m-l}(n)) = f^{m-l+1}(n) = f(n)$ bir çelişkidir. Dolayısıyla $f(n) > n$ hiçbir n doğal sayısı için geçerli olamaz. Buradan her n doğal sayısı için $f(n) \leq n$ elde ederiz. $n = 0$ için $f(0) = 0$ olduğu açıktır. Herhangi bir n değeri için $f(n) = n$ olduğunu kabul edelim. f fonksiyonunun birebir olması ve $f(n+1) \leq n+1$ koşulları $f(n+1) = n+1$ olmasını gerektirir. Tümevarım ile her n doğal sayı değeri için $f(n) = n$ elde ederiz. Bu fonksiyonun bizden istenilen koşulu sağladığı ve bu fonksiyondan başka hiçbir fonksiyonun verilen koşulu sağlayamayacağı açıktır.

103. $a, b, c \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı ve kökleri

tam sayı olan

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ikinci dereceden fonksiyonların sayısı, herhangi bir pozitif n tam sayısı için $P(n)$ ile gösterilsin.

Yukarıdaki özelliklere sahip f fonksiyonları ve bütün $n \geq 4$ değerleri için $n < P(n) < n^2$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2 = 0$, $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$ ve $k = 2, 3, ..., n$ değerleri için $x^2 + kx + k - 1 = (x+1)(x+k-1) = 0$ ikinci derece denklemleri, tam sayı köklere sahip olduklarından dolayı, $n \geq 4$ için $P(n) > n$ sonucunu çıkarırız. Verilen koşulları sağlayan f fonksiyonu için,

$$f(x) = a(x+d)(x+e);\ d, e \in \mathbb{Z},\ a, a(d+e), ade \in \{1, 2, ..., n\}$$

yazarız. Özel olarak, $e \leq \frac{n}{ad}$ seçerek,

$$\begin{aligned} P(n) \leq \sum_{a=1}^{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{n}{ad} &= n \sum_{a=1}^{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{ad} \\ &= n \sum_{a=1}^{n} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + ... + \frac{1}{na}\right) \\ &= n \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a} \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

buluruz. $n \geq 5$ için, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} < \sqrt{n}$ (n üzerine tümevarım yöntemi kullanılarak bulunur) ve $P(4) = 5$ olduğundan dolayı, $P(n) < n^2$ sonucuna varırız.

104. $a + b + c = 3$ denklemini sağlayan a, b ve c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm:

Birinci Çözüm: $x = ab + bc + ca$ olsun. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ olduğundan

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

buradan da,

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

elde edilir. Bunların sonucunda da $0 \leq x \leq 3$ ve $abc \leq \dfrac{x^2}{9}$ elde edilmiş olur. Öte yandan,

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 9-2x$$

ve

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) = \frac{x^2}{a^2b^2c^2} - \frac{6}{abc}$$

olduğundan, soruda verilen eşitsizlik,

$$x^2 - 6abc \geq (9-2x)a^2b^2c^2$$

haline gelir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} x^2 - 6abc - (9-2x)a^2b^2c^2 &\geq x^2 - \frac{2x^2}{3} - \frac{x^4(9-2x)}{81} \\ &= \frac{x^2(2x^3-9x^2+27)}{81} \\ &= \frac{x^2(x-3)^2(2x+3)}{81} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla istenilen eşitsizlik ispatlanmıştır. Eşitlik durumuysa, ancak ve ancak $a=b=c=1$ durumunda mümkündür.

İkinci Çözüm:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x$$

olsun. Buradan,

$$\frac{1}{x^2} - x^2 = (1-x)f(x)$$

çıkar. Ayrıca $E = \sum(\frac{1}{a^2} - a^2) = \sum(1-a)f(a)$ olsun. Genelliği bozmadan $a \geq b \geq c$ olmak üzere, $1-c = (a-1)+(b-1)$ ve $1-a = (c-1)+(b-1)$ ifadelerini kullanarak,

$$E = (1-b)(f(b)-f(c)) + (1-a)(f(a)-f(c))$$

ve

$$E = (1-b)(f(b)-f(a)) + (1-c)(f(c)-f(a))$$

elde edilir. Şimdi, $x \le y$ için $f(x) \ge f(y)$ ifadesini gösterelim:

$$f(x) - f(y) = \frac{x-y}{x^2y^2}(x^2y^2 - xy - x - y)$$

$x + y = k$ için, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden $x + y + xy \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2}$ elde edilir. $3\sqrt[3]{x^2y^2} \ge x^2y^2$ eşitsizliğini elde edebilmek için $3^3 \ge x^4y^4$ olması gerekir, ancak $k \ge 2\sqrt{xy}$ olduğu için $k^8 \ge 2^8x^4y^4$ olacağından, $3^3 \ge \frac{k^8}{2^8}$ olması yeterli olacaktır ki bu da, $k \le 2\sqrt[8]{27}$ olarak görülebilir.

Fakat x,y eğer a,b,c içinden herhangi ikisi olursa, $x + y \le 3$ olacağından $3 \le 2\sqrt[8]{27}$ olur. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlik sağlanmış olacaktır.

Bu, f fonksiyonunun azalan fonksiyon olduğunu gösterir. Sonuç olarak geriye sadece $b \ge 1$ durumu için (**??**) bağıntısını, $b \le 1$ içinse (**??**) bağıntısını kullanmak kalır.

Not: Eğer burada eşitsizliği 3 değişkenli değil, n değişkenli olarak düşünürsek,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \quad \text{iken}, \qquad x_i \ge 0 \quad \text{için}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \ge \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

ifadesi ancak $n = 10$ değerine kadar doğrudur. $n \ge 11$ iken yanlıştır, örneğin, $x_1 = \cdots = x_{10} = 0.6$, $x_{11} = 5$ ve $i \ge 12$ için $x_i = 1$ olarak alınabilir. $4 \le n \le 10$ için gerekli olan ispat, karmaşık değişkenler teknikleri gerektirir.

105. 271 sayısını, çarpımları maksimum olacak şekilde, pozitif gerçel sayıların toplamı olarak yazınız.

Çözüm: Aritmetik ortalama - geometrik ortalama eşitsizliğine göre, negatif olmayan $x_1, \cdots, x_n$ sayıları için

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ge (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)^{1/n}$$

ve eşitlik ancak ve ancak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ durumunda geçerlidir.

Bizim durumumuzda sayıların toplamı 271 dir. Yani negatif olmayan sayılardan oluşan bir S kümesinin eleman sayısı n olmak üzere, S deki elemanların aritmetik ortalaması $271/n$ dir. Böyle S kümeleri için geometrik ortalamanın, dolayısıyla da çarpımın, maksimum değeri sayıların eşitliği durumunda elde edilir.

Dolayısıyla biz, x tamsayı olmak üzere, $y = (271/x)^x$ ifadesinin maksimum değerini arıyoruz. x bir gerçel sayı gibi düşünülüp logaritmik türev alınırsa;

$$\begin{aligned}
&\ln y = x\ln(271/x) = x(\ln 271 - \ln x),\\
&y'/y = \ln 271 - \ln x - 1,\\
&y' = (271/x)^x(\ln 271 - \ln x - 1)
\end{aligned}$$

elde edilir. $y' = 0$ olması için, $x = 271/e \approx 99.7$ olmalıdır ve y nin maksimum değerinin $x = 271/e$ için elde edileceği açıktır. ($x < 271/e$ iken $y' > 0$ ve $x > 271/e$ iken $y' < 0$ olduğuna dikkat ediniz.)

x bir tam sayı olduğu için, 100 ve 99 değerlerini denememiz yeterlidir. Deneme sonunda y nin en büyük değerini (x tam sayı iken) $x = 100$ durumunda aldığını göreceğiz.

Dolayısıyla çarpımın maksimum değeri $271 = 2.71+2.71+\cdots+2.71$ şeklinde yazılınca elde edilir.

106. Aşağıdaki denklem sistemini sağlayan bütün (x, y, z) gerçel sayı üçlülerini bulunuz. Not: $[r]$: r gerçel sayısının tamsayı kısmı, $\{r\}$: r gerçel sayısının ondalık kısmı.

$$x + [y] + \{z\} = 200,2$$

$$\{x\} + y + [z] = 200,1$$

$$[x] + \{y\} + z = 200,0$$

Çözüm: $[r]+\{r\} = r$ eşitliğini gözönünde bulundurarak verilen üç denklem toplanırsa $x+y+z = 300,15$ bulunur. İlk denklemi, bulunan denklemden çıkarırsak $(y-[y]) + (z - \{z\}) = 99,95$ yani $\{y\} + [z] = 99,95$ bulunur. Dolayısıyla $\{y\} = 0,95$, $[z] = 99$ dur. Benzer şekilde $[x] + \{z\} = 100,05$ ve $\{x\} + [y] = 100,15$ bulunur. Dolayısıyla $[x] = 100$, $\{z\} = 0,05$, $\{x\} = 0,15$ ve $[y] = 100$ bulunur. Sonuç olarak $x = 100,15$, $y = 100,95$ ve $z = 99,05$ bulunur.

107. $\Re-\{0\}$ kümesinde tanımlı ve $f(x)+8f(\frac{1}{x}) = -63x$ denklemini sağlayan fonksiyonları tanımlayınız.

Çözüm:$f(x) + 8f(\frac{1}{x}) = -63x$ denkleminde x yerine $\frac{1}{x}$ yazarsak

$$8f(x) + f(\frac{1}{8}) = -\frac{63}{x}$$

denklemi elde edilir. İkinci denklemi -8 ile çarpıp ilk denklemle topladığımızda

$$-63f(x) = -63x + \frac{63\cdot 8}{x}$$

eşitliği bulunur. Eşitliğin her iki tarafını da -63'e bölersek f fonksiyonu

$$f(x) = x - \frac{8}{x}$$

olarak bulunur.

Ayrıca $f(x) = x - \frac{8}{x}$'in de verilen denklemi sağladığı kolayca kontrol edilebilir.

108. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = k$ ise $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8} - \dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ ifadesini k cinsinden hesaplayınız.

Çözüm: $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{\frac{x^2}{y^2}+1}{\frac{x^2}{y^2}-1} + \dfrac{\frac{x^2}{y^2}-1}{\frac{x^2}{y^2}+1}$ olduğundan, $\dfrac{x^2}{y^2} = m$ dersek $k = \dfrac{m+1}{m-1} + \dfrac{m-1}{m+1} = \dfrac{2(m^2+1)}{m^2-1}$ olur. Buradan $\dfrac{m^2+1}{m^2-1} = \dfrac{k}{2}$, $\dfrac{2}{m^2-1} = \dfrac{k-2}{2}$, $m^2 = \dfrac{k+2}{k-2}$ bulunur. Buna göre

$\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8} - \dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8} = \dfrac{m^4+1}{m^4-1} - \dfrac{m^4-1}{m^4+1} = \dfrac{4m^4}{m^8-1} = \dfrac{4}{m^4-\frac{1}{m^4}} = \dfrac{4}{\left(\frac{k+2}{k-2}\right)^2 - \left(\frac{k-2}{k+2}\right)^2} =$

$\dfrac{4(k+2)^2(k-2)^2}{(k+2)^4-(k-2)^4} = \dfrac{4(k^2-4)^2}{2(k^2+4)8k} = \dfrac{(k^2-4)^2}{4k(k^2+4)}$ olur.

109. a, b, x, y gerçel sayıları için $a^3 + ax + y = b^3 + bx + y = c^3 + cx + y = 0$ ve a, b, c birbirinden farklı ise $a + b + c = 0$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $P(k) = k^3 + xk + y$ polinomu için $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ ve a, b, c birbirinden farklı olduğu için, bu polinomun tüm kökleri a, b ve c dir. Vieta teoreminden $a + b + c = -\dfrac{0}{1} = 0$ bulunur.

110. x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000$ ise $(x + y)$ nin alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm: $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ olduğundan $x + y = a$ ve $xy = b$ alarak $a^3 - 3ab + a^3 + 30b = 2000$ yazabiliriz. Buradan $3b(10 - a) = 2000 - 2a^3 = 2(10^3 - a^3)$ bulunur. $3b(10 - a) = (10 - a)(100 + 10a + a^2)$ eşitliği $a \neq 10$ durumunda $3b = a^2 + 10a + 100$ eşitliğini verir. Ancak $(x + y)^2 \geq 4xy$ olduğundan $a^2 + 10a + 100 > a^2 \geq 4b > 3b$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $x + y = a = 10$ olmalıdır.

111. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için $\dfrac{1}{b(a+b)} + \dfrac{1}{c(b+c)} + \dfrac{1}{a(c+a)} \geq \dfrac{27}{2(a+b+c)^2}$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{8}{27}(a+b+c)^3 \qquad (i)$$

olur. Yine aynı eşitsizlikten $a^3b + c^2ab \geq 2a^2bc$, $\;b^3c + a^2bc \geq 2b^2ac$, $\;c^3a + b^2ac \geq 2c^2ab$ ve $a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2b^2ac$, $\;a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2a^2bc$, $\;b^2c^2 + a^2c^2 \geq 2c^2ab$ olur. Taraf tarafa toplarsak; $a^3b+b^3c+c^3a \geq abc(a+b+c)$ ve $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$ bulunur. Buradan da

$$a^3b + b^3c + c^3a + (ab+bc+ca)^2 \geq 4abc(a+b+c) \qquad (ii)$$

olur. (i) den dolayı $\dfrac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \dfrac{27}{8(a+b+c)^3}$ $\;(iii)$ bulunur. (ii) ve (iii) taraf tarafa çarpılarak

$$\frac{a^3b+b^3c+c^3a+(ab+bc+ca)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{27abc}{2(a+b+c)^2}$$

buradan da

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} = \frac{a^3b+b^3c+c^3a+(ab+bc+ca)^2}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

olur.

112. $a \neq 0, b, c$ gerçel sayıları için $(a+b+c)(4a-2b+c) < 0$ ise $ax^2+bx+c=0$ denkleminin iki farklı gerçel kökünün olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:

Birinci Çözüm $a+b+c<0$ ise $4a-2b+c>0$ olur. Eğer $ac<0$ ise $b^2>4ac$ olacağından denklemin iki farklı gerçel kökü olur. $ac=0$ ise $a\neq 0$ olduğundan $c=0$ olur. Bu durumda $a+b<0$, $2a>b$ olduğundan $b\neq 0$ dır. Yani $b^2>4ac=0$ olur. $ac>0$ ise iki durum vardır: $a,c>0$ ise $b<0$ olmalıdır. $a+c<-b$, $\;a^2+c^2+2ac<b^2$, $\;4ac\leq a^2+c^2+2ac=(a+c)^2<b^2$ olur. $a,c<0$ durumunda ise $0>4a+c>2b$ ve $4b^2>16a^2+8ac+c^2\geq 16ac$ ve $b^2>4ac$ olur.
$a+b+c>0$ ise $4a-2b+c<0$ olur. Yine $ac<0$ veya $ac=0$ olamaz. $a,c>0$ ise $0<4a+c<2b$ ve $b>0$ olur. $4b^2>(4a+c)^2=16a^2+8ac+c^2\geq 16ac$, $\;b^2>4ac$ olur. $a,c<0$ ise $0>a+c>-b$, $\;b>0$ olur. $b>-a-c>0$, $\;b^2>(a+c)^2=a^2+c^2+2ac\geq 4ac$ ve $b^2>4ac$ olur. Böylece ispat biter.

İkinci Çözüm $p(x) = ax^2 + bx + c$ olsun. $p(1) = a + b + c$ ve $p(-2) = 4a - 2b + c$ olduğundan $p(1)p(-2) < 0$ ve $p(x)$ sürekli olduğu için Ara Değer Teoreminden $p(x)$ in $(-2, 1)$ aralığında bir gerçel kökü vardır. $p(x)$ gerçel katsayılı olduğundan ve kökleri toplamı Vieta teoreminden $\frac{-b}{a} \in \mathbf{R}$ olduğundan diğer kökü de gerçeldir. Aynı zamanda bu iki kök birbirine eşit olamaz. Çünkü, eşit olurlarsa $a > 0$ için $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$, $a < 0$ için $p(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ olur. Ancak $p(1)p(-2) < 0$ olduğundan $p(1) > 0,\ p(-2) < 0$ ya da $p(1) < 0\ \ p(-2) > 0$ dır. Yani kökler farklı olmalıdır.

113. x ve y sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere $\dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \leq \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2} < 0$ ise sorudaki eşitsizliğin sağlandığı açıktır. $\dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \geq 0$ ise $\dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \leq \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff (x^2+y^2)(x+y)^2 \leq 8(x^2-xy+y^2)^2 \iff x^4+y^4+2x^3y + 2xy^3 + 2x^2y^2 \leq 8(x^4 + y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y - 2xy^3) \iff 7(x^4 + y^4) - 18(x^3y + xy^3) + 22x^2y^2 \geq 0 \iff (x-y)^2(7x^2 - 4xy + 7y^2) \geq 0$ olur. $7x^2 - 4xy + 7y^2 = 5(x^2 + y^2) + 2(x-y)^2 \geq 0$ ve $(x-y)^2 \geq 0$ olduğundan ispat biter.

114.

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 20 \\ ab + bc + cd + da + bd + ac &= 150 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan tüm a, b, c, d gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: $(x-y)^2 \geq 0$ olduğundan, bütün gerçel sayılar için $x^2 + y^2 \geq 2xy$ dir. Buradan çıkan $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $\ a^2 + c^2 \geq 2ac$, $\ b^2 + c^2 \geq 2bc$, $\ b^2 + d^2 \geq 2bd$, $\ c^2 + d^2 \geq 2cd$, $\ a^2 + d^2 \geq 2ad$, $\ b^2 + d^2 \geq 2bd$ eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak $3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 2(ab + bc + cd + da + ac + bd)$ elde ederiz. $2 \cdot 20^2 = 3(a+b+c+d)^2 \geq 8(ab+bc+cd+da+ac+bd) = 8 \cdot 150$ ve $3 \cdot 20^2 = 8 \cdot 150$ olduğundan $3(a + b + c + d)^2 = 8(ab + bc + cd + da + ac + bd)$ çıkar. Eşitlik ancak ve ancak ilk eşitsizliklerin herbiri birer eşitlikken yani $a = b = c = d$ durumunda mümkündür. Buna göre $a + b + c + d = 20$ olduğundan $a = b = c = d = 5$ tek çözümdür.

115. x, y, z gerçel sayıları için $0 < x, y, z < 1$ ve $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$ ise $(1-x)y,\ (1-y)z,\ (1-z)x$ sayılarından en az birinin $\frac{1}{4}$ den küçük veya eşit olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Eğer $(1-x)y > \dfrac{1}{4},\ (1-y)z > \dfrac{1}{4},\ (1-z)x > \dfrac{1}{4}$ ise $xyz(1-x)(1-y)(1-z) > \dfrac{1}{64}$ olur. $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$ olduğu için $xyz > \dfrac{1}{8}$ bulunur. Aynı zamanda Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden $(1-x)x \le \dfrac{1}{4},\ (1-y)y \le \dfrac{1}{4},\ (1-z)z \le \dfrac{1}{4}$ olduğundan $xyz(1-x)(1-y)(1-z) \le \dfrac{1}{64}$ buradan da bir önce bulduğumuz eşlitsizlikle çelişir şekilde $xyz \le \dfrac{1}{8}$ bulunur. Bu durumda $(1-x)y,\ (1-y)z,\ (1-z)x$ sayılarından en az biri $\dfrac{1}{4}$ den küçük veya eşittir.

116. a_1, a_2, a_3 gerçel sayılarının herbirinin 1 den büyük olduğu ve her $i = 1, 2, 3$ için $\dfrac{a_i^2}{a_i - 1} > a_1 + a_2 + a_3$ olduğu bilindiğine göre $\dfrac{1}{a_1 + a_2} + \dfrac{1}{a_2 + a_3} + \dfrac{1}{a_3 + a_1} > 1$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $\dfrac{a_1^2}{a_1 - 1} > a_1 + a_2 + a_3$ ise $\dfrac{a_1^2}{a_1 - 1} - a_1 > a_2 + a_3$ buradan $\dfrac{a_1}{a_1 - 1} > a_2 + a_3,\ \ a_1 > (a_1 - 1)(a_2 + a_3),\ \ a_1 + a_2 + a_3 > a_1(a_2 + a_3)$ ve $\dfrac{1}{a_2 + a_3} > \dfrac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3}$ olur. Benzer şekilde $\dfrac{1}{a_1 + a_3} > \dfrac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3}$ ve $\dfrac{1}{a_1 + a_2} > \dfrac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3}$ olur. Taraf tarafa toplanarak $\dfrac{1}{a_1 + a_2} + \dfrac{1}{a_1 + a_3} + \dfrac{1}{a_2 + a_3} > \dfrac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} + \dfrac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + \dfrac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = 1$ bulunur.

117. a, b, c gerçel sayılar olmak üzere $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin üç gerçel kökü vardır. $-2 \le a+b+c \le 0$ ise bu üç kökten en az birinin $[0, 2]$ aralığında yer alacağını ispatlayınız.

Çözüm: $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ olsun. $a + b + c = p(1) - 1$ olduğundan $-2 \le p(1) - 1 \le 0$ buradan $-1 \le p(1) \le 1$ yani $|p(1)| \le 1$ olur. Öte yandan $p(1) = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$ olduğundan $|(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)| \le 1$ çıkar. $|1 - x_1|,\ |1 - x_2|,\ |1 - x_3|$ sayılarının üçünün birden 1 den büyük olması $1 < |1 - x_1| \cdot |1 - x_2| \cdot |1 - x_3| = |(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)| \le 1$ çelişkisini vereceği için, genelliği bozmadan $|1 - x_1| \le 1$ kabul edebiliriz. Bu durumda $-1 \le 1 - x_1 \le 1$ yani $0 \le x_1 \le 2$ dir. Sonuç olarak $p(x)$ in en az bir kökü $[0, 2]$ aralığındadır.

118. a, b, c gerçel sayıları için

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= abc\\ (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) &= a^3b^3c^3\end{aligned}$$

ise $abc = 0$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $a^2+b^2 \geq 0$ ve $a^2+b^2 \geq 2ab$ olduğundan $a^2+b^2-ab \geq |ab|$ dir. Buna göre $|a+b| \cdot |a^2-ab+b^2| \geq |a+b| \cdot |ab|$ yazılabilir ve buradan da $|a^3+b^3| \geq |a+b| \cdot |ab|$ eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $|b^3+c^3| \geq |b+c| \cdot |bc|$ ve $|c^3+a^3| \geq |c+a| \cdot |ca|$, bunları da taraf tarafa çarparak $|a^3+b^3| \cdot |b^3+c^3| \cdot |c^3+a^3| \geq a^2b^2c^2|(a+b)(b+c)(c+a)|$ elde edilir. $|a^3b^3c^3| \geq a^2b^2c^2|abc| = |a^3b^3c^3|$ olduğundan eşitlik durumunun sağlanması için ilk baştaki eşitsizliklerin her birinin eşitlik olması gerekmektedir. Bu durumda $|a^3+b^3| = |a+b| \cdot |ab|$, $|b^3+c^3| = |b+c| \cdot |bc|$, $|c^3+a^3| = |c+a| \cdot |ca|$ olur. Buradan $|a+b|(|a^2+b^2-ab| - |ab|) = 0$ çıkar. $|a+b|$, $|b+c|$, $|c+a|$ dan herhangi biri 0 ise $abc = 0$ olur. Hiçbiri sıfır değilse $|a^2+b^2-ab| = |ab|$ buradan da $a^2+b^2-ab = ab$ veya $a^2+b^2-ab = -ab$ bulunur. $a^2+b^2-ab = ab$ durumunda $(a-b)^2 = 0$, yani $a = b$, $a^2+b^2-ab = -ab$ durumunda ise $a = b = 0$, sonuç olarak her iki durumda da $a = b$ çıkar. Benzer şekilde $b = c$ ve $c = a$ olmalıdır. $(a+b)(b+c)(c+a) = abc$ denkleminden $2a2b2c = a^3$, $8a^3 = a^3$, $a = b = c = 0$ olur.

119. Negatif olmayan gerçel sayılardan oluşan $a_1, a_2, \ldots$ dizisi tüm n pozitif tam sayıları için; $a_n + a_{2n} \geq 3n$ ve $a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n(n+1)}$ koşullarının ikisini birden sağlıyor. Buna göre

a-) Her n pozitif tam sayısı için $a_n \geq n$ olduğunu gösteriniz.

b-) Soruda verilen şartları sağlayan bir a_n dizisi bulunuz.

Çözüm:

a-) Eğer $a_k < k$ koşulunu sağlayan bir $k \in \mathbf{N}$ varsa; $a_{k+1} + k \leq 2\sqrt{a_k(k+1)} < 2\sqrt{k(k+1)}$ olur. $2\sqrt{k(k+1)} - k < k+1 \Longleftrightarrow 4k(k+1) < (2k+1)^2 \Longleftrightarrow 0 < 1$ olduğundan $a_{k+1} < 2\sqrt{k(k+1)} - k < k+1$ olur. Benzer şekilde $a_{k+2} < k+2$, $a_{k+3} < k+3, \ldots a_{2k} < 2k$ olur. Buradan $a_k + a_{2k} < k + 2k = 3k$ çıkar ki bu da $a_k + a_{2k} \geq 3k$ ile çelişir. Buna göre tüm $n \in \mathbf{N}$ doğal sayıları için $a_n \geq n$ olmalıdır.

b-) $a_n = n+1$ alırsak $a_n + a_{2n} = 3n+2 > 3n$ ve $a_{n+1} + n = 2n+2$, $2\sqrt{a_n(n+1)} = 2n+2$, $a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n(n+1)}$ olur ve koşullar sağlanır.

120. Katsayıları negatif olmayan gerçel sayılardan oluşan $p(x)$ polinomu için $p(1) \geq 1$ ise tüm pozitif gerçel sayılar için $p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ olsun. $p(1) \geq 1$ olduğundan $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 1$ dir.
$p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)\left(\frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{x} + a_0\right)$ bu da Cauchy Schwarz eşitsizliğinden $(a_n + a_{n-1} + \cdots a_1 + a_0)^2 \geq 1$ dir.

121. $0 < \alpha, \beta, \theta < \frac{\pi}{2}$ için $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\theta = 1$ ise $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\theta \geq \frac{3}{8}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $\frac{1}{1+\tan^2 x} + \sin^2 x = 1 \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}))$ olduğundan $\sin\alpha = a, \quad \sin\beta = b, \quad \sin\theta = c$ alarak $\tan^2\alpha = \frac{a^2}{1-a^2}, \quad \tan^2\beta = \frac{b^2}{1-b^2}, \quad \tan^2\theta = \frac{c^2}{1-c^2}$ yazabiliriz. Bu durumda $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\theta + 3 = \left(\frac{a^2}{1-a^2} + 1\right) + \left(\frac{b^2}{1-b^2} + 1\right) + \left(\frac{c^2}{1-c^2} + 1\right) = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2}$ olur. Aritmetik-Harmonik ortalama eşitsizliğini kullanarak $\frac{\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2}}{3} \geq \frac{3}{3-a^2-b^2-c^2}$ ve Karesel-Aritmetik ortalama eşitsizliğini kullanarak $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}, \quad a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{3-a^2-b^2-c^2} \geq \frac{9}{8}$ yazabiliriz. Buna göre $\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \geq \frac{9}{3-a^2-b^2-c^2} \geq \frac{27}{8}$, bir başka deyişle $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\theta \geq \frac{27}{8} - 3 = \frac{3}{8}$ dir.

122. $a_1 = 1, \; a_2 = \frac{1}{2}$ ve $k \geq 1$ için $a_{k+2} = a_k + \frac{a_{k+1}}{2}$ ise,
$\frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_2a_4} + \frac{1}{a_3a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98}a_{100}} < 4$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $a_{k+2} = a_k + \frac{a_{k+1}}{2}$ olduğundan $2(a_{k+2} - a_k) = a_{k+1}$ dir. Her iki tarafı $a_k a_{k+1} a_{k+2}$ ile bölersek $\frac{2}{a_k a_{k+1}} - \frac{2}{a_{k+1}a_{k+2}} = \frac{1}{a_k a_{k+2}}$ bulunur. Buradan $\frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_2a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{98}a_{100}} = \left(\frac{2}{a_1a_2} - \frac{2}{a_2a_3}\right) + \left(\frac{2}{a_2a_3} - \frac{2}{a_3a_4}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{a_{98}a_{99}} - \frac{2}{a_{99}a_{100}}\right) = \frac{2}{a_1a_2} - \frac{2}{a_{99}a_{100}} = 4 - \frac{2}{a_{99}a_{100}} < 4$ çıkar. (Not: tüm a_i lerin pozitif olduğu açıktır.)

123. $p(0) = 0, \; p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3$ koşulunu sağlayan tüm gerçel katsayılı $p(x)$

polinomlarını bulunuz.

Çözüm: $p(0) = 0$ olduğundan $p(1) = (p(0)+1)^3 = 1$ olur. $p((1+1)^3) = (p(1)+1)^3$ olduğundan $p(8) = 8$ olur. Bu şekilde devam ederek sonsuz çoklukta x gerçel sayısı için $p(x) = x$ olduğunu görürüz. $p(x)-x$ polinomuna $q(x)$ diyelim. Sonsuz çoklukta x için $q(x) = 0$ olduğundan $q(x)$ polinomu sıfır polinomu olmalıdır. Bu durumda $p(x) = x$ polinomu, verilen koşulları da sağladığı için, tek çözümdür.

124. $f : N_0 \to N_0$ $(N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\})$ bir fonksiyon olmak üzere tüm $n \in N_0$ sayıları için $f(f(n)) = f(n) + 1$ ve $\min\{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = 1$ dir. Bu koşulları sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $\min\{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = 1$ olduğundan $f(n_1) = 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in N_0$ vardır. $f(f(n_1)) = f(n_1) + 1 = 2$ olduğundan $f(n_2) = 2$ olacak şekilde bir $n_2 \in N_0$ vardır. Bu şekilde devam ederek her $j \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ için $f(n_j) = j$ olacak şekilde bir $n_j \in N_0$ bulunabilir. Bu durumda her $j = 1, 2, 3, \ldots$ için $f(f(n_j)) = f(n_j) + 1$ ve $f(j) = j + 1$ eşitlikleri geçerlidir. $\min\{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = 1$ ve her $j = 1, 2, 3, \ldots$ için $f(j) = j + 1$ olduğundan $f(0) = 1$ olmalıdır. Bu yüzden $f(n) = n + 1$ tek çözümdür.

125. Her $x, y \in \mathbf{R}$ için $f(x^2) - f(y^2) = (x + y)(f(x) - f(y))$ koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $y = 0$ alırsak $f(x^2) - f(0) = x(f(x) - f(0))$ olur. Benzer şekilde $f(y^2) - f(0) = y(f(y) - f(0))$ dır. Buradan $(x + y)(f(x) - f(y)) = f(x^2) - f(y^2) = x(f(x) - f(0)) - y(f(y) - f(0))$ buradan da $yf(x) - xf(y) = yf(0) - xf(0)$ bulunur. $f(x) - f(0) = g(x)$ dersek $yg(x) = xg(y)$ olur. $y = 1$ alırsak $g(x) = xg(1)$ yani $f(x) = ax + b$, $(a, b \in \mathbf{R})$ biçiminde olmalıdır. Her $a, b \in \mathbf{R}$ ikilisi için $(ax^2 + b) - (ay^2 + b) = (x + y)[(ax + b) - (ay + b)]$ olduğundan tüm çözümler $f(x) = ax + b$ şeklindedir.

126. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ ve $a_1+a_2+\cdots+a_n = 1$ ise $a_1^2+3a_2^2+5a_3^2+\cdots+(2n-1)a_n^2 \leq 1$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $a_1^2 + 3a_2^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$ olduğunu tümevarım ile ispatlayacağız.

$n = 1$ için $a_1^2 = a_1^2$ olur ve sağlanır.

$n = k - 1$ için sağlanıyorsa $n = k$ için de sağlanacağını gösterelim: $a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_k \geq 0$ sayıları için $a_2^2 + 3a_3^2 + \cdots + (2k-3)a_k^2 \leq (a_2 + a_3 + \cdots + a_k)^2$ olur. Tüm $j = 2, 3, \ldots k$ için $2a_1 a_j \geq 2a_j^2$ olduğundan $\displaystyle\sum_{j=2}^{k} 2a_1 a_j \geq \sum_{j=2}^{k} 2a_j^2$ ve buradan da $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 \geq a_1^2 + \displaystyle\sum_{j=2}^{k} 2a_j^2 + \left(a_2^2 + 3a_3^2 + \cdots + (2k-3)a_k^2\right) = a_1^2 + 3a_2^2 + \cdots + (2k-1)a_k^2$ olur ve tümevarım biter. Sonuç olarak $a_1^2 + 3a_2^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \leq 1$ dir.

127. $\sin^3 x(1 + \cot x) + \cos^3 x(1 + \tan x) = \cos 2x$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

Çözüm: $\sin^3 x(1 + \cot x) + \cos^3 x(1 + \tan x) = \sin^2 x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x(\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$

$\sin x + \cos x = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$ olur. Buradan $(\sin x + \cos x)(1 + \sin x - \cos x) = 0$ bulunur.

i-) $\sin x + \cos x = 0$ ise $\tan x = -1$, $\quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$,

ii-) $1 + \sin x - \cos x = 0$ ise $1 = \cos x - \sin x = \dfrac{-\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin\frac{\pi}{4}}$, $\quad \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ olur. $x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi$ veya $x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - (\dfrac{-\pi}{4}) + 2k\pi$ olur. Yani $x = 2k\pi$ veya $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ şeklindedir. Ancak soruda verilen denklemde $\tan x$ ve $\cot x$ bulunduğundan $\sin x$ ve $\cos x$ sıfır olmamalıdır. Yani $x = 2k\pi$ veya $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ olamaz. Çözüm kümesi $\{\dfrac{3\pi}{4} + k\pi; \quad k \in \mathbf{Z}\}$ dir.

128. $\dfrac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x-1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x-1}} - (1 + \dfrac{1}{x^2})\sqrt{x-1}$ ve

$\dfrac{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}{x^2(x-1)} = \dfrac{(x^2+1)(x^2-x+1)}{x^2\sqrt{x-1}}$ olur.

$x^2 - x + 1 = 0$ denkleminin gerçel çözümü olmadığından $x^2 + x - 1 = \sqrt{x-1}(x^2+1)$ olur. Buradan $(x^2 - \sqrt{x-1})(1 - \sqrt{x-1}) = 0$ bulunur. $x > 1$ olduğundan ($\sqrt{x-1} \in \mathbf{R}$), $\quad x^4 > x$ ve $x^2 > \sqrt{x-1}$ dir. Yani $1 - \sqrt{x-1} = 0$ olmalıdır. Buradan $x = 2$ bulunur ve $x = 2$ verilen koşulları sağlayan tek gerçel sayıdır.

129. a, b, c pozitif gerçel sayılar olmak üzere $\dfrac{a}{2a+b} + \dfrac{b}{2b+c} + \dfrac{c}{2c+a} \leq 1$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $\dfrac{a}{2a+b}+\dfrac{b}{2b+c}+\dfrac{c}{2c+a} \leq 1 \iff \dfrac{2a}{2a+b}+\dfrac{2b}{2b+c}+\dfrac{2c}{2c+a} \leq 2 \iff \left(1-\dfrac{2a}{2a+b}\right)+\left(1-\dfrac{2b}{2b+c}\right)+\left(1-\dfrac{2c}{2c+a}\right) \geq 1 \iff \dfrac{b}{2a+b}+\dfrac{c}{2b+c}+\dfrac{a}{2c+a} \geq 1$ dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;
$[(2a+b)b+(2b+c)c+(2c+a)a]\left[\dfrac{b}{2a+b}+\dfrac{c}{2b+c}+\dfrac{a}{2c+a}\right] \geq (b+c+a)^2$ ve buradan da $\dfrac{b}{2a+b}+\dfrac{c}{2b+c}+\dfrac{a}{2c+a} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = 1$ olur ve ispat biter.

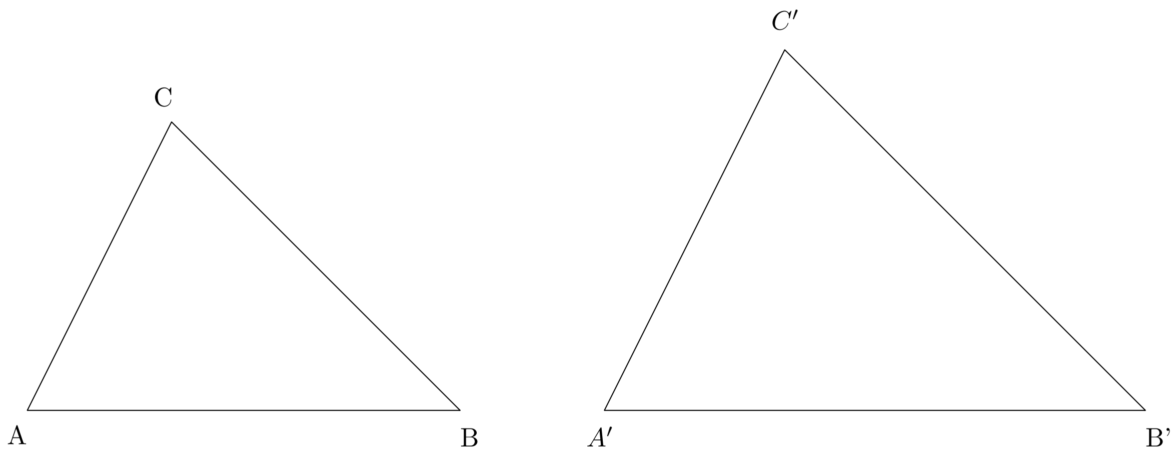
GEOMETRİ

1 Üçgenler

Gösterimler:
Bir ABC üçgeni için aşağıdaki gösterimleri kullanacağız:
Kenar uzunlukları: $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$
Açılar: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ (Trigonometrik ifadelerde açı işareti kullanılmayacak.)
Ağırlık merkezi: G, diklik merkezi (ortosantr): H, çevrel çember merkezi: O, içteğet çember merkezi: I, dış teğet çember merkezleri: I_a, I_b, I_c
Çevrel çemberin yarıçapı: R, içteğet çemberin yarıçapı: r, dışteğet yarıçapları: r_a, r_b, r_c
Yarıçevre: $u = \frac{1}{2}(a+b+c)$, Alan: S
Kenarortay uzunlukları: v_a, v_b, v_c
Yükseklik uzunlukları: h_a, h_b, h_c
Açıortay uzunlukları: n_a, n_b, n_c

1.1 Benzer Üçgenler

Karşılıklı açıları eş ve karşılıklı kenarları orantılı olan üçgenlere benzer üçgenler denir.



ABC üçgeni $A'B'C'$ üçgenine birbirine denk olan aşağıdaki koşullardan herhangi birisinin sağlanması durumunda benzerdir.

1. Kenar-Kenar-Kenar (KKK) Özelliği

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

2. Kenar-Açı-Kenar (AKA) Özelliği

$$|AB| : |BC| = |A'B'| : |B'C'| \text{ ve } m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{A'B'C'}).$$

3. Açı-Açı-Açı (AAA) Özelliği. İki açı bilindiğinde üçüncü açı zaten bilineceği için bu özellik Açı-Açı (AA) olarak da adlandırılabilir.

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{A'B'C'}) \quad \text{ve} \quad m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{B'A'C'}).$$

Benzer üçgenlerdeki karşılıklı kenarların oranına benzerlik oranı denir. Eğer bu oran 1 ise üçgenlere eş üçgenler denir. Benzer üçgenlerdeki bazı özellikler şunlardır:

1. Benzer üçgenlerin çevrelerinin oranı benzerlik oranına eşittir.
2. Benzer üçgenlerin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşittir.
3. (Tales Teoremi) Paralel doğrular kendilerini kesen doğruları aynı oranda bölerler.
4. Benzer üçgenlerdeki karşılıklı açıortayların, kenarortayların ve yüksekliklerin oranları aynıdır ve bu oran benzerlik oranına eşittir.

Örnek: Bir $ABCD$ paralelkenarında AC uzun köşegen olsun. C den AB ve AD kenarlarının uzantılarına CE ve CF dikmeleri indiriliyor.

$$|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: B den AC ye BG dikmesini indirelim. Bu durumda ABG ve ACE benzer üçgenler olduğundan $|AC| \cdot |AG| = |AE| \cdot |AB|$ dir. Ters açılardan, $\widehat{GCB} = \widehat{CAF}$ olduğu için $\triangle CBG \sim \triangle ACF$ dir. Buradan $|AC| \cdot |CG| = |AF| \cdot |BC|$ elde ederiz. Bulduğumuz iki eşitliği toplayarak

$$|AC| \cdot (|AG| + |CG|) = |AE| \cdot |AB| + |AF| \cdot |BC|$$

olduğunu buluruz. Ayrıca $|AG| + |CG| = |AC|$ olduğu için bu istenilen eşitliktir.

1.2 Temel Teoremler

Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları $|BC| = a, |CA| = b$ ve $|AB| = c$ ve bu kenarları gören açılar da $\widehat{A}, \widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ olsun.

1. Pisagor Teoremi: A açısı dik olan bir ABC üçgeninde $a^2 = b^2 + c^2$ dir.

2. Sinüs Teoremi: Bir ABC üçgeninde,

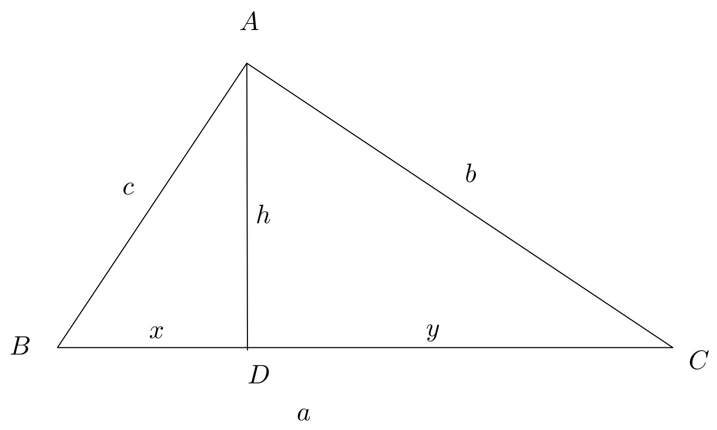
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

eşitliği sağlanır.

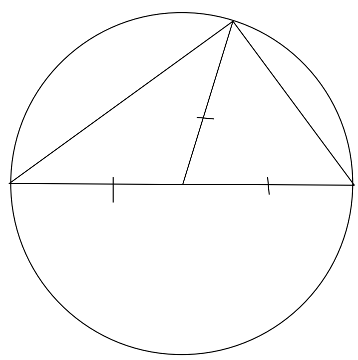
3. Kosinüs Teoremi: Bir ABC üçgeninde, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ eşitliği sağlanır. Diğer kenarlar için de benzer eşitlikler mevcuttur.

4. Öklid Bağıntısı: Bir dik üçgende dik kenarın uzunluğunun karesi, bu kenarın hipotenüs üzerine izdüşümü ile hipotenüs uzunluğunun çarpımına eşittir. Bu bağıntıdan aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$b^2 = ya, \quad c^2 = xa, \quad h^2 = xy, \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$



5. Muhteşem Üçlü: Bir dik üçgende, dik köşeden çizilen kenarortay hipotenüsün yarısıdır. Bu uzunlukların her biri çevrel çemberin yarıçapına eşittir.



Örnekler:

1. Tabanı AC olan bir ABC ikizkenar üçgeninde CD içaçıortayı çiziliyor. D den DC ye çizilen dik AC yi E de kesiyorsa $|EC| = 2|AD|$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: F, DE ile BC nin kesişim noktası ve K, EC nin orta noktası olsun. CD doğru parçası ECF üçgeninde hem bir dikme hem de bir açıortay olduğundan aynı zamanda bir kenarortaydır. Yani $|ED| = |DF|$ dir. Benzerlikten dolayı DK ile FC birbirine paraleldirler. EDC üçgeninde muhteşem üçlü özelliğini uygulayarak $|DK| = |EK| = |KC|$ elde ederiz. Ayrıca ADK ikizkenar bir üçgen olduğundan $|DK| = |AD|$ olduğunu ve istenilen sonucu göstermiş oluruz.

2. Taban uzunluğu a ve diğer kenarlar uzunlukları b olan ikizkenar üçgen ile taban uzunluğu b ve diğer kenar uzunlukları a olan ikizkenar üçgenin çevrel çemberleri aynı R yarıçapına sahipse, $a \neq b$ olmak üzere $ab = \sqrt{5}R^2$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Taban uzunluğu a olan ikizkenar üçgende tepe açısı α ve taban uzunluğu b olan ikizkenar üçgende tepe açısı β olsun. İlk üçgende uygulanan Sinüs teoreminden dolayı
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(90^\circ - \alpha/2)} = 2R$$
   olur. Buradan $a = 2R\sin\alpha$ ve $b = 2R\sin(90^\circ - \alpha/2) = 2R\cos(\alpha/2)$ olduğu bulunur. Benzer şekilde ikinci üçgende $b = 2R\sin\beta$ ve $a = 2R\cos(\beta/2)$ olur. Bu eşitlikleri kullanarak
$$a^2 = 4R^2\cos^2(\beta/2) = 4R^2(1 - \sin^2(\beta/2)) = 4R^2\left(1 - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$
   ve
$$b^2 = 4R^2\cos^2(\alpha/2) = 4R^2(1 - \sin^2(\alpha/2)) = 4R^2\left(1 - \frac{a^2}{4b^2}\right)$$
   elde ederiz. Bu iki eşitliğin farkını alırsak
$$a^2 - b^2 = 4R^2\left[\frac{a^2}{4b^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = R^2\frac{a^4 - b^4}{a^2b^2} = R^2\frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{a^2b^2}$$
   olur. Buradan, $a \neq b$ olduğu için $R^2(a^2 + b^2) = a^2b^2$ elde ederiz. Yukarıda bulduğumuz eşitliklerden birincisini $4a^2$ ve ikincisini $4b^2$ çarparak farklarını alırsak
$$4(a^4 - b^4) = 16R^2(a^2 - b^2) + 4R^2(a^2 - b^2)$$
   ve her iki tarafı $4(a^2 - b^2)$ ile bölerek $a^2 + b^2 = 5R^2$ olduğunu buluruz. Ayrıca $R^2(a^2 + b^2) = a^2b^2$ olduğunu bildiğimizden istenen sonunu göstermiş oluruz.

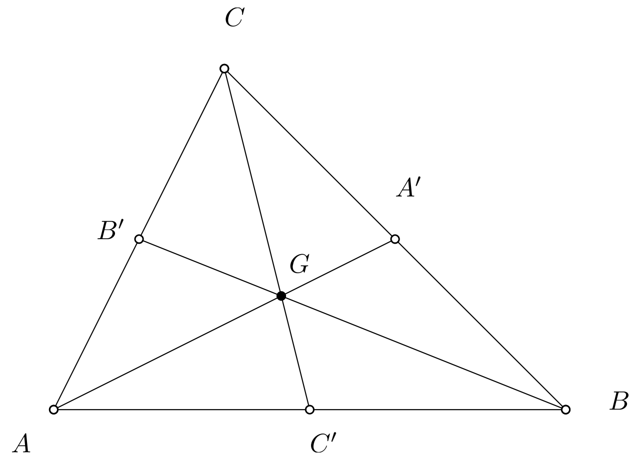
1.3 Özel Noktalar

Bu bölümde bir ABC üçgeninde bazı özel noktalardan ve ilgili özelliklerden bahsedeceğiz.

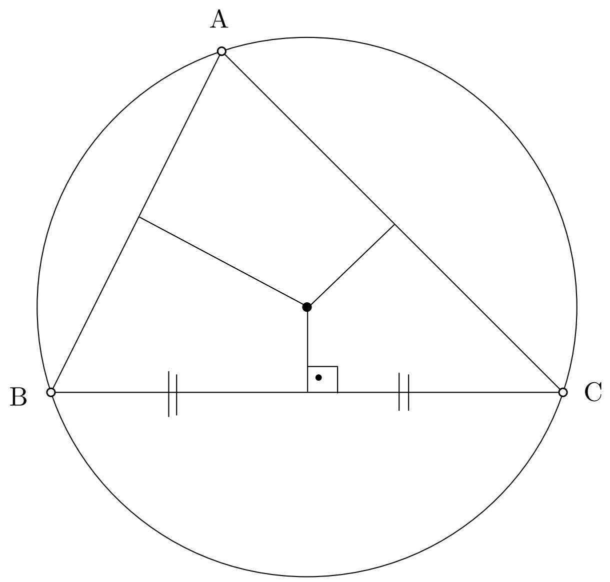
Ağırlık merkezi. Kenarortaylar bir G noktasında kesişirler. Bu noktaya ağırlık merkezi denir. Kenarortaylar birbirlerini $2:1$ oranında bölerler. Yani, eğer AA', BB', CC' kenarortaylar ise

$$\frac{|AG|}{|GA'|} = \frac{|BG|}{|GB'|} = \frac{|CG|}{|GC'|} = \frac{2}{1}$$

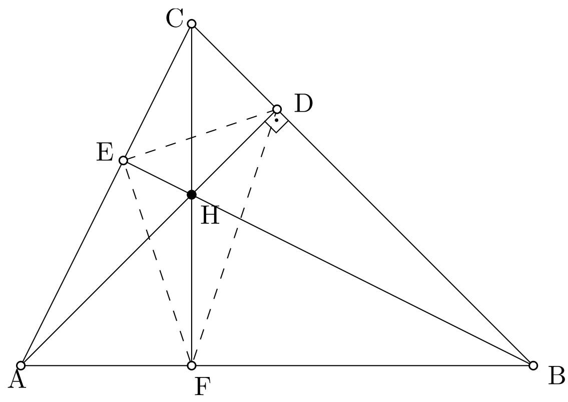
eşitlikleri sağlanır. Ayrıca kenarortaylar üçgeni alanları birbirine eşit olan 6 üçgene böler.



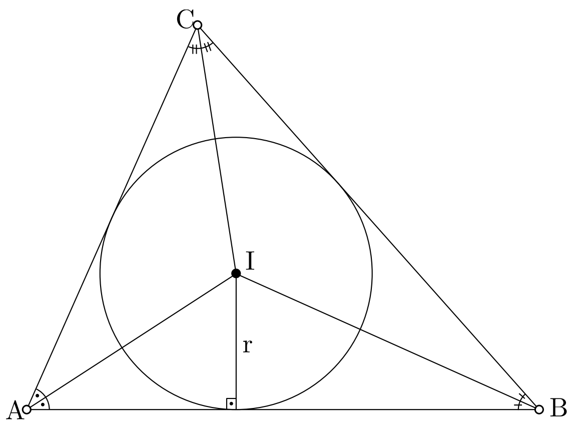
Çevrel çember merkezi. Kenarların orta noktalarından çıkılan dikmeler bir O noktasında kesişirler. Bu nokta üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.



Diklik merkezi. Köşelerden karşı kenarlara indirilen AD, BE ve CF dikmeler bir H noktasında kesişirler. Bu noktaya diklik merkezi ve D, E ve F noktalarına da dikme ayakları denir. Ayrıca $\triangle DEF$ ye $\triangle ABC$ nin ortik üçgeni denir.



İç merkez(İçteğet çember merkezi). Açıortaylar bir I noktasında kesişirler. Bu nokta üçgenin iç merkezidir.



Örnekler:

1. Bir ABC üçgeninin diklik merkezi H ve çevrel çember yarıçapı R olmak üzere

$$|AH|^2 + |BC|^2 = 4R^2 \qquad \text{ve} \qquad |AH| = |BC||\cot A|$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Üçgeninin köşelerden karşı kenarlara paralel çizilen doğruların kesişmesiyle oluşan üçgeni $A_1B_1C_1$ ile gösterelim. Bu üçgenin kenar orta noktaları A, B, C olur. Dolayısıyla H, $A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel çember merkezi olur. Ayrıca bu çevrel çemberin yarıçapı da $2R$ olur. Buradan

$$4R^2 = |B_1H|^2 = |B_1A^2| + |AH|^2 = |BC|^2 + |AH|^2$$

elde ederiz. Sinüs teoremini kullarak ta

$$|AH|^2 = 4R^2 - |BC|^2 = \left(\frac{1}{\sin^2 A} - 1\right)|BC|^2 = (|BC| \cot A)^2$$

elde ederiz.

2. Dar açılı bir ABC üçgeninde diklik merkezi H ve dikme ayakları D, E, F olsun. DEF üçgeninin iç merkezinin H olduğunu gösteriniz.

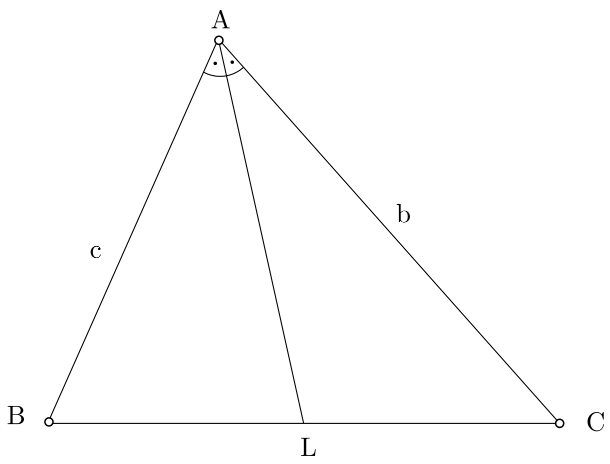
   Çözüm: $DCEH$ kirişler dörtgeninde $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$ dir. Benzer şekilde $DHFB$ kirişler dörtgeninde $\widehat{HDF} = \widehat{HBF}$ dir. Ayrıca $\widehat{HCE} = \widehat{ACF} = 90° - \widehat{BAC}$ ve $\widehat{HBF} = \widehat{EBA} = 90° - \widehat{BAC}$ olduğundan $\widehat{HDE} = \widehat{HDF}$ olur. Dolayısıyla DEF üçgeninde DH, D köşesinin açıortaydır. Benzer şekilde diğer köşeler için EH ve FH nin açıortaylar olduğunu ve açıortayların kesişiminin H olduğunu buluruz.

1.4 Özel doğrular

Açıortay teoremi. Her açıortay karşı kenarı komşu kenarların oranında böler. Örneğin, AL, A açısından çizilen açıortay ise

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{c}{b}$$

eşitliği sağlanır.



Stewart teoremi. $D, [BC]$ doğru parçası üzerinde bir nokta olmak üzere $|AD| = d, |BD| =$

m $|CD| = n$ ise

$$b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$$

eşitliği sağlanır.

Kenarortay teoremi. A köşesinden çizilen kenarortayın uzunlugu v_a ise

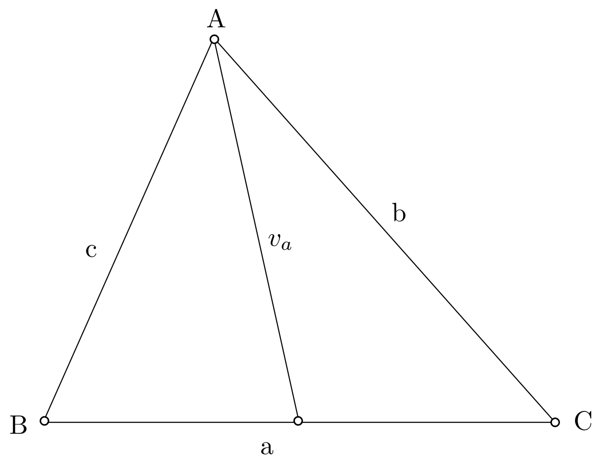
$$2v_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

bağıntısı geçerlidir. Diğer kenarortaylar için de benzer bağıntılar geçerlidir.

Ayrıca, bu bağıntılar taraf tarafa toplanarak

$$v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

bağıntısı elde edilir.



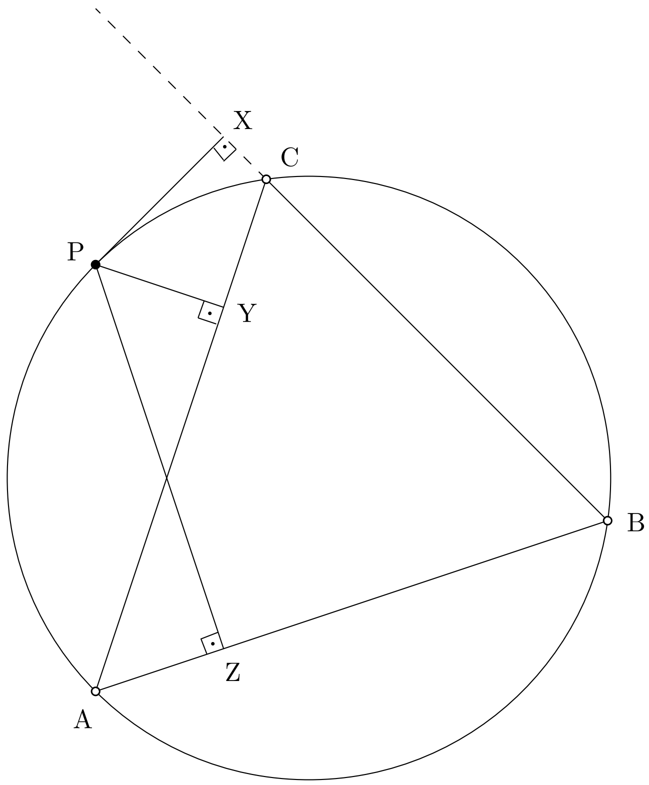
Euler doğrusu. Bir $\triangle ABC$ de diklik merkezi H, ağırlık merkezi G ve çevrel çember merkezi O doğrusaldır. Bu doğruya Euler doğrusu denir. Ayrıca $|HG| = 2|GO|$ dur.

İspat: ABC üçgeninin kenar orta noktaları A', B', C' olsun. ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri benzerdir ve benzerlik oranı $1 : 2$ dir. $AC'A'B'$ bir paralelkenar olduğundan $AA', B'C'$ kenarını ortalar. Buradan $A'B'C'$ üçgeninin kenarortaylarının ABC üçgeninin kenarortayları üzerinde olduğunu görürüz. Dolayısıyla bu iki üçgen aynı G ağırlık merkezine sahiptirler.

$A'B'C'$ üçgeninin dikmeleri ABC üçgeninin kenar orta dikmeleri olduğu için $A'B'C'$ üçgeninin diklik merkezi ile ABC üçgeninin çevrel çember merkezi aynıdır. Bu iki üçgeninin benzerliğinden $|AH| = 2|A'O|$ olur. Ağırlık merkezinin $|AG| = 2|GA'|$ özelliğini biliyoruz. Ayrıca AD ve OA', BC ye dik olduğundan ötürü paraleldirler. Bu ise $\widehat{HAG} = \widehat{OA'G}$ olmasını gerektirir. Yukarıda bulduğumuz sonuçları birleştirdiğimizde

HAG ve $OA'G$ üçgenlerinin benzer olduğunu ve dolayısıyla O, G, H noktalarının doğrusal olduğunu göstermiş oluruz. Ayrıca buradaki benzerlik oranı $1:2$ olduğundan $|HG| = 2|GO|$ sonucu da çıkar.

Simson doğrusu. Bir üçgenin çevrel çemberi üzerinde alınan bir noktadan kenarlara inilen dikme ayakları doğrusaldır. Bu doğruya Simson doğrusu denir. Çevrel çember üzerinde olmayan noktalar için bu özellik geçerli değildir.



Ceva Teoremi. Bir ABC üçgeninde X, Y, Z sırasıyla BC, CA, AB kenarları üzerinde ve köşelerden farklı noktalar olmak üzere, AX, BY, CZ doğruları ancak ve ancak

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1$$

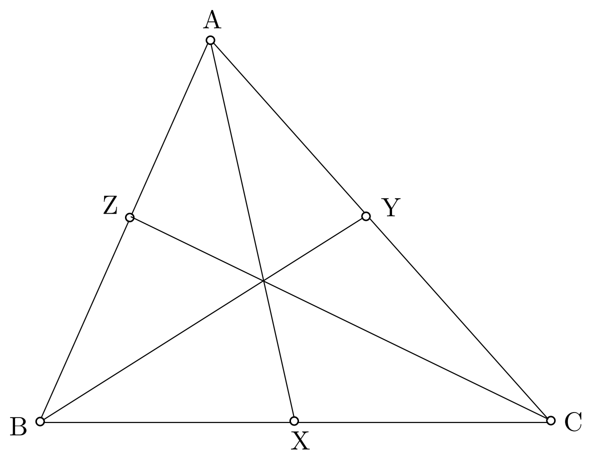
olduğunda bir noktada kesişirler.

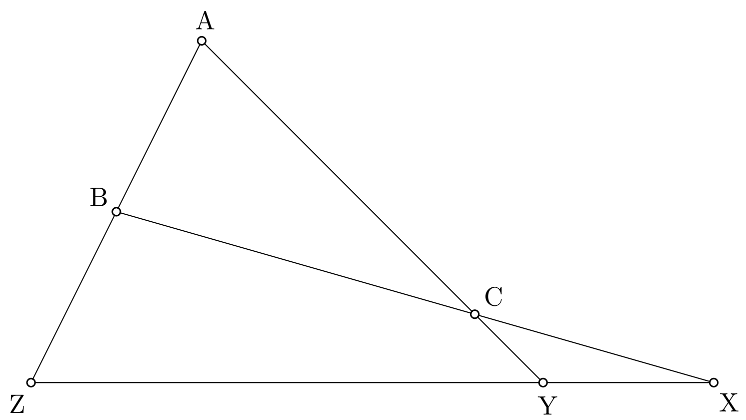
Menelaus Teoremi. Bir ABC üçgeninde BC, CA, AB kenarları üzerinde alınan X, Y, Z noktaları ancak ve ancak

$$\frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|BZ|} = 1$$

olduğunda doğrusaldırlar.

Örnekler:





1. $AC \neq BC$ olan bir $\triangle ABC$ nin iç çemberi AB, BC ve CA kenarlarına sırasıyla P, Q ve R noktalarında teğet olsun. G üçgenin ağırlık merkezi ve I da iç merkezi olsun. Eğer $GI \perp AB$ ise R, G ve Q nun doğrusal olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: G den geçen ve AB ye paralel olan bir doğru alalım. Bu doğru BC yi K da ve AC yi de N de kessin. CI açıortay olduğu için I, NCK üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir. Burada GI nın NK kenarının orta dikmesi olduğunu kullandık. R, G, Q noktaları I dan NCK üçgeninin kenarlarına inilen dikme ayakları olduğu için bu noktalar Simson doğrusu üzerindedirler, yani doğrusaldırlar.

2. Bir $\triangle ABC$ nin iç çemberinin merkezi I, çevrel çemberinin merkezi O olsun. $\widehat{AIO} = 90°$, $\widehat{CIO} = 45°$ olsun. $AB : BC : CA$ oranını bulunuz.

   Çözüm: Verilen bilgileri kullanarak

$$\widehat{AIC} = 180° - \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = 90° + \frac{\widehat{B}}{2}$$

buluruz. $\widehat{AIC} = 135°$ olduğu için $\widehat{B} = 90°$ olur. Dolayısıyla ABC bir dik üçgendir, AC çevrel çemberin çapı ve O da AC nin orta noktasıdır. AI doğrusu

BC kenarını D de kesiyorsa $|CO| = |CD| = \dfrac{|AC|}{2} = \dfrac{b}{2}$ olduğu bulunur. ABC üçgeninde A açısına göre açıortay teoremini uygularsak

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}$$

elde ederiz. Ayrıca $|CD| = \dfrac{b}{2}$ olduğu için $|BD| = \dfrac{c}{2}$ bulunur. Dolayısıyla

$$a = |BC| = |BD| + |CD| = \frac{b+c}{2}$$

olur. ABC bir dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak $a^2 = b^2 - c^2 = (b-c)(b+c)$ elde ederiz. Yukarıda bulduğumuz a değerini yerine yazarak

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = (b-c)(b+c)$$

eşitliğini ve buradan da istenilen oranın $3:4:5$ olduğunu buluruz.

3. Bir ABC üçgeninde A, B, C köşelerinden kenarlara indirilen dikme ayakları sırasıyla D, E, F olsun. DE, EF, FD doğruları AB, BC, CA doğrularıyla sırasıyla X, Y, Z noktalarında kesişiyorlarsa

   (a) X, Y, Z nin doğrusal olduğunu gösteriniz.

   (b) Bu doğrunun ABC üçgeninin Euler doğrusuna dik olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: (a) Doğrusallığı göstermek için dört kez Menelaus teoremini ve bir kez de Ceva teoremini kullanacağız. ABC üçgeni ile sırasıyla YE, XD ve ZF kesenlerini alıp Menelaus teoremini uygularsak:

$$\begin{aligned}
\frac{|YB|}{|YC|} \cdot \frac{|EC|}{|EA|} \cdot \frac{|FA|}{|FB|} &= 1 \\
\frac{|XA|}{|XB|} \cdot \frac{|DB|}{|DC|} \cdot \frac{|EC|}{|EA|} &= 1 \\
\frac{|ZC|}{|ZA|} \cdot \frac{|FA|}{|FB|} \cdot \frac{|DB|}{|DC|} &= 1
\end{aligned}$$

   elde ederiz. Ayrıca AD, BE, CF üçgenin yükseklikleri olduğu için diklik merkezinde kesişirler. Dolayısıyla Ceva teoremini kullanarak

$$\left(\frac{|EC|}{|EA|} \cdot \frac{|FA|}{|FB|} \cdot \frac{|DB|}{|DC|}\right)^2 = 1$$

   buluruz. Bulduğumuz bu dört eşitliği çarptığımızda

$$\frac{|XA|}{|XB|} \cdot \frac{|YB|}{|YC|} \cdot \frac{|ZC|}{|ZA|} = 1$$

çıkar. Buradan Menelaus teoreminin tersini kullanarak X, Y, Z nin doğrusal olduğunu gösteririz.

(b) Bu kısmı çemberde kuvvet konusunda göstereceğiz.

4. Bir $ABCD$ dörtgeninde, kenarlardan herhangi birisine paralel olmayan bir doğru AB, BC, CD, DA kenarlarını sırasıyla X, Y, Z, T noktalarında kesiyor.

(a)

$$\frac{|XA|}{|XB|} \cdot \frac{|YB|}{|YC|} \cdot \frac{|ZC|}{|ZD|} \cdot \frac{|TD|}{|TA|} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

(b) İfadenin tersi doğru mudur?

Çözüm: **(a)** A, B, C, D noktalarından verilen doğruya sırasıyla h_1, h_2, h_3, h_4 diklerini indirelim. Benzer üçgenleri kullanarak

$$\frac{|XA|}{|XB|} = \frac{h_1}{h_2}, \quad \frac{|YB|}{|YC|} = \frac{h_2}{h_3}, \quad \frac{|ZC|}{|ZD|} = \frac{h_3}{h_4}, \quad \frac{|TD|}{|TA|} = \frac{h_4}{h_1}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitliklerin çarpımı ise istenileni verir.

(b) İfadenin tersi doğru değildir. Örneğin X, Y, Z, T orta noktalar ise (a) şıkkındaki çarpım 1 olur fakat bu noktalar doğrusal olmazlar.

1.5 Üçgende çemberler

İlk olarak ABC üçgenin iç teğet çemberini ele alalım. A, B ve C köşelerinden bu çembere çizilen teğetlerin uzunlukları sırasıyla $u-a, u-b$ ve $u-c$ dir.

Ayrıca üçgene dışarıdan teğet olan 3 tane daha çember vardır. A açısının iç açıortayı ile B ve C açılarının dış açıortayları bir I_a noktasında kesişirler. Bu nokta A ya karşılık gelen dışteğet çemberinin merkezidir. Benzer şekilde I_b ve I_c merkezli dış teğet çemberler vardır. A, B ve C köşelerinden I_a merkezli dışteğet çembere olan teğet uzunlukları $u, u-c$ ve $u-b$ dir.

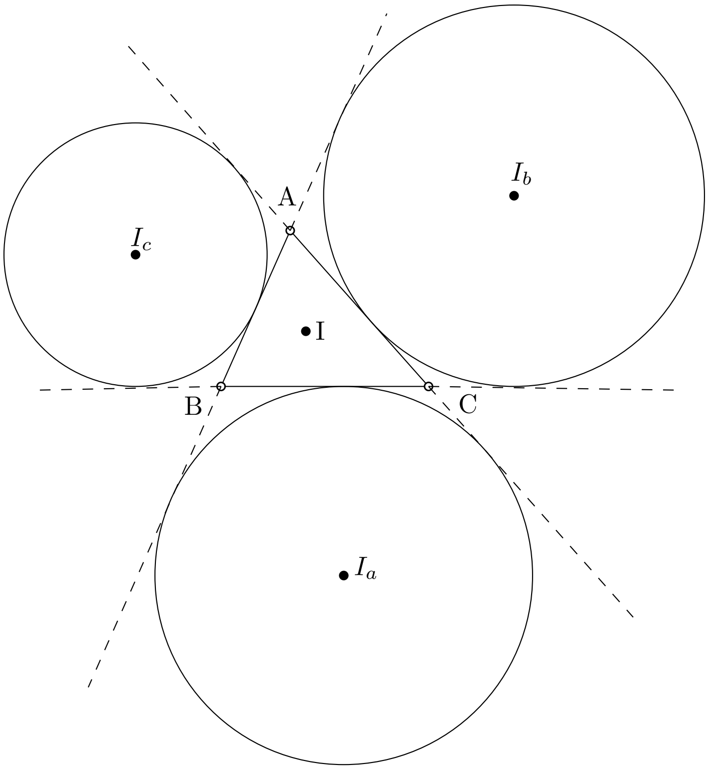
Dış teğet çemberlerin yarıçapları r_a, r_b, r_c ise

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \tag{5}$$

eşitliği sağlanır.

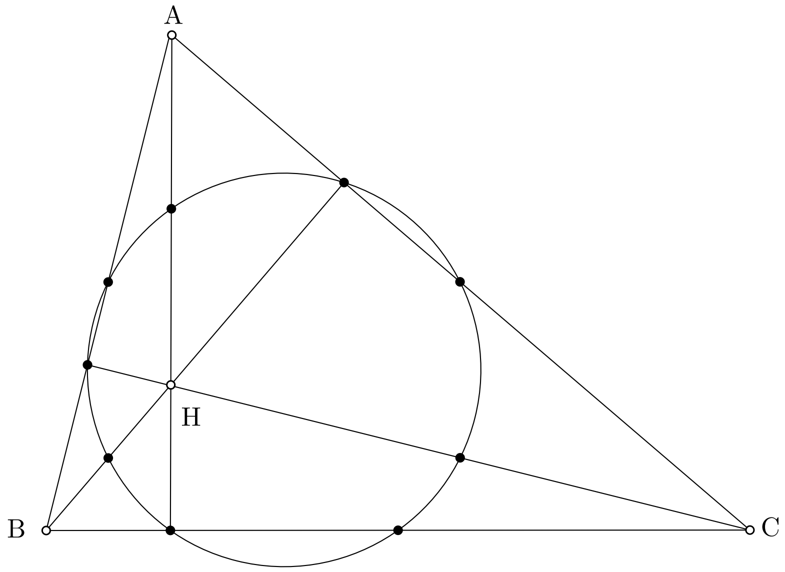
$I_aI_bI_c$ üçgeninin ortik üçgeni ABC üçgenidir.

Buraya kadar bahsettiğimiz 4 çembere birden teğet olan önemli bir çember vardır. Bir üçgenin kenarlarının orta noktaları, yükseklik ayakları ve diklik merkezi ile köşeler arasındaki doğru parçalarının orta noktalarının oluşturduğu 9 nokta çemberseldir. Bu çembere **dokuz nokta çemberi**, Euler çemberi veya Feuerbach çemberi denir. Bu çemberin merkezi $[OH]$ nin orta noktasıdır ve yarıçapı $R/2$ dir.



İspat: Bir ABC üçgeninde kenarların orta noktaları A', B', C'; diklik merkezi H; yükseklik ayakları D, E, F; HA, HB, HC nin orta noktaları K, L, M ve çevrel çember merkezi O olsun. BC ortak kenarına sahip ABC ve HBC üçgenlerinin diğer kenarlarının orta noktaları C', B' ve L, M olduğundan LM ve $C'B'$ doğru parçaları BC ye paraleldir ve uzunlukları ise $|BC|/2$ dir. Benzer şekilde, AH ortak kenarına sahip BAH ve CAH üçgenlerinde $B'M$ ve $C'L$ paraleldir ve uzunlukları ise $|AH|/2$ dir. Sonuç olarak, $B'C'LM$ bir paralelkenardır. Ayrıca BC ve AH birbirlerine dik olduklarından bu bir dikdörtgendir. Benzer şekilde, $A'B'KL$ ve $C'A'MK$ de birer dikdörtgendir. Buradan $A'K, B'L, C'M$ bir çemberin üç çapı olduğunu buluruz. $\widehat{ADK}$ bir dik açı olduğundan bu çember D den de geçer. Simetriden ötürü E ve F den de geçer. Böylece dokuz nokta çemberini elde etmiş oluruz.
Ayrıca $A'B'C'$ ve ABC benzerlik oranı $1 : 2$ olan benzer üçgenler olduğundan dolayı dokuz nokta çemberinin yarıçapı $R/2$ dir. K, L ve M, A', B' ve C' noktalarının çemberin merkezine göre simetrik noktalarıdır. Dolayısıyla KLM ve $A'B'C'$ üçgenleri birbirinin çemberin merkezi etrafında $180\circ$ dönmüş halidir. Bu dönme altında diklik merkezleri O ve H yer değiştirir. Bu nedenle çemberin merkezi OH nin orta noktasıdır.
Bazı bağıntılar:

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$



$$|OI|^2 = R(R-2r) \quad \text{ve} \quad |OI_a|^2 = R(R+2r_a) \tag{6}$$

Dar açılı bir üçgende, x, y, z çevrel çember merkezinin kenarlara olan uzaklıkları ise, $x + y + z = R + r$ dir.
AI, çevrel çemberi A_1 noktasında kesiyor ise, $|A_1B| = |A_1C| = |A_1I|$ eşitlikleri sağlanır.
Örnek: Bir A noktasından bir S çemberine AB ve AC de teğetleri çiziliyor. $\triangle ABC$ nin içteğet çemberinin ve BC ye teğet olan dış teğet çemberinin merkezlerinin S çemberinde olduğunu gösteriniz.
Çözüm: D, S çemberinin ABC üçgeni içerisinde kalan yayın, E ise dışında kalan yayın orta noktası olsun. $\widehat{DBA}$ bir kiriş açı olduğundan $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DBC})$ dir. Dolayısıyla BD bir açıortaydır. Benzer şekilde CD de bir açıortaydır. Buradan D nin iç merkez olduğunu buluruz. Benzer şekilde E de bir dış teğet merkezidir.

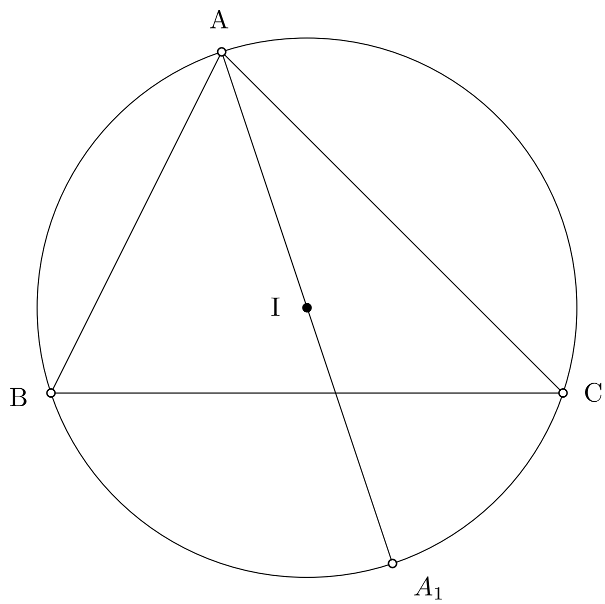
1.6 Alan formülleri

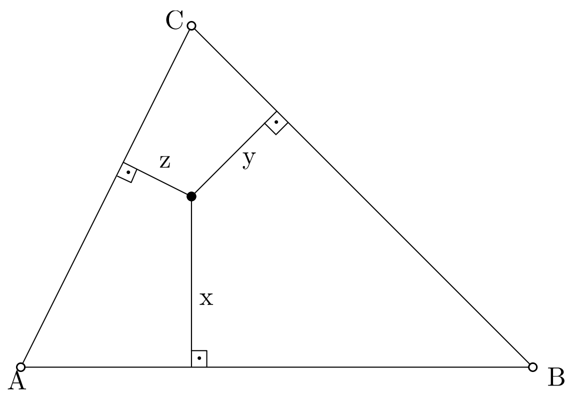
$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = ur, \quad S = (u-a)r_a$$

Heron formülü: $\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$
Örnekler:



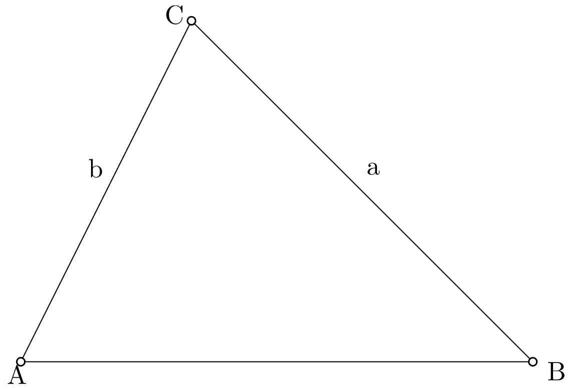


1. (5) eşitliğini gösteriniz.

   Çözüm: Göstermek istediğimiz eşitlikteki ifadedeleri üçgenin alanı S ile çarpalım. Burada herbir kesir için farklı alan formülü kullacağız: $S = (u-a)r_a = (u-b)r_b = (u-c)r_c$. Böylece sol taraf $(u-a)+(u-b)+(u-c) = 3u-(a+b+c) = u$ bulunur. Sağ tarafta ise $S = ur$ formülü kullanılarak yine u elde edilir.

2. Bir üçgende
$$r_a r_b r_c \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}abc$$
   olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Alan formüllerinden
$$S = r_a(u-a) = r_b(u-b) = r_c(u-c) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = \frac{abc}{4R}$$



olduğunu biliyoruz. Buradan

$$r_a r_b r_c = \frac{S^3}{(u-a)(u-b)(u-c)} = Su \quad \text{ve} \quad abc = 4SR$$

elde ederiz. Böylece istenilen eşitsizlik $u \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$ eşitsizliğine dönüşür. Buradan $\frac{a+b+c}{2R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ve sinüs teoremini kullanarak

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

denk eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise sinüs fonksiyonuna Jensen eşitsizliğinin uygulanmasından çıkar. Eşitlik ise üçgenin eşkenar olması durumunda olur.

2 Çemberler

2.1 Kirişler ve Yaylar

Bir çember üzerindeki iki noktayı birleştiren doğru parçasına **kiriş** denir. Her kiriş çember üzerinde iki yay tanımlar. Bunlara kirişe ait yaylar diyelim. Kirişlerin ve yayların bazı özelliklerini şöyle sıralayabiliriz:

1. Bir çap dik olduğu kirişi ve bu kirişe ait yayları ortalar.

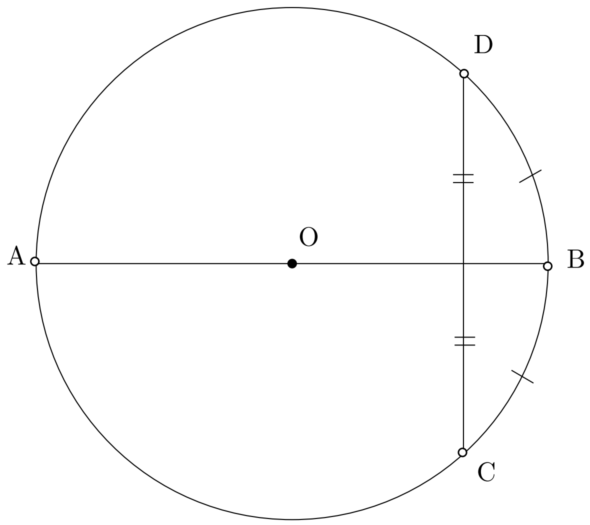
2. Yukarıdaki özelliğin tersi de doğrudur:

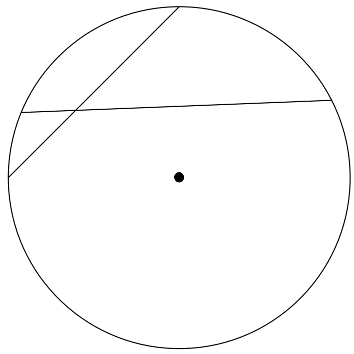
   (a) Bir kirişi ortalayan çap bu kirişe diktir ve bu kirişe ait yayları da ortalar.

   (b) Bir yayı ortalayan çap yayın ait olduğu kirişe diktir ve kirişi ortalar.

3. Merkezden eşit uzaklıkta olan kirişler ve bu kirişlere ait yayların uzunlukları eşittir.

4. Kirişler merkezden uzaklaştıkça uzunlukları azalır.

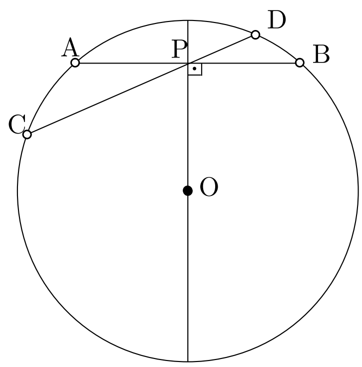


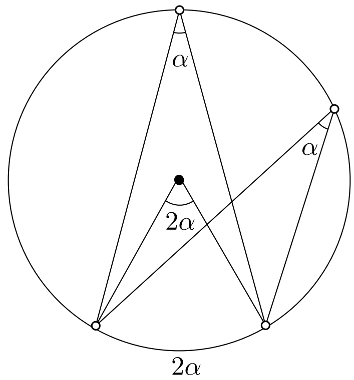


5. En uzun kirişler çaplardır.
6. Çember içindeki bir noktadan geçen en kısa kiriş o noktadan geçen çapa dik olan kiriştir.

2.2 Çemberde Açılar

Köşesi çemberin merkezinde olan bir açıya **merkez açı** denir ve ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşittir. **Çevre açısı** ise köşesi çemberin üzerinde olan ve kolları çemberi kesen açıdır ve ölçüsü gördüğü yayın yarısı kadardır. Yani çevre açı, aynı yayı gören merkez açının yarısıdır. Buradan, aynı yayı gören iki çevre açısının aynı olduğu sonucunu elde ederiz. Bu sonuç oldukça kullanışlıdır. Özel olarak, buradan çapı gören çevre açının 90° olduğu sonucu çıkar.
Köşesi çember üzerinde ve bir kolu çembere teğet, diğer kolu çemberin bir kirişi olan açıya **teğet-kiriş açısı** denir ve ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.
Paralel olmayan iki kiriş, çemberin içinde veya dışında kesişirler. Buna göre iki kirişin arasında kalan açıya **iç** veya **dış açı** denir. Bir iç açının ölçüsü gördüğü yayların ölçülerinin





toplamının yarısıdır. Bir dış açının ölçüsü ise gördüğü yayların ölçülerinin farkının yarısıdır. Ayrıca aynı yayları gören iç ve dış açıların toplamı gördükleri büyük yayın ölçüsüne eşittir. Benzer şekilde aynı yayları gören iç ve dış açıların farkı gördükleri küçük yayın ölçüsüne eşittir.

2.3 Çemberde Kuvvet

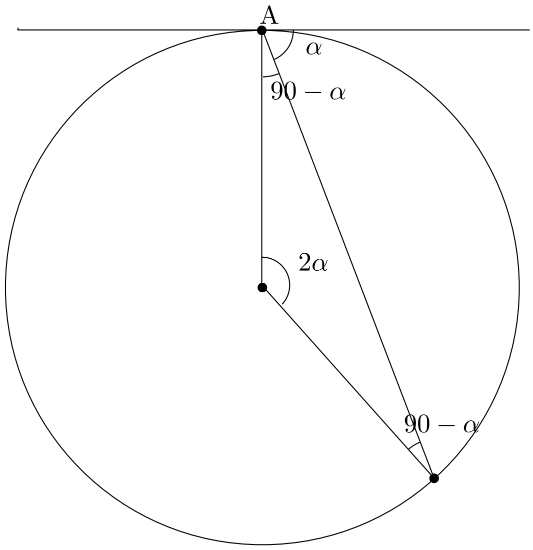
Bir çemberde $[AB]$ ve $[A'B']$ kirişleri bir P noktasında kesişiyorlarsa

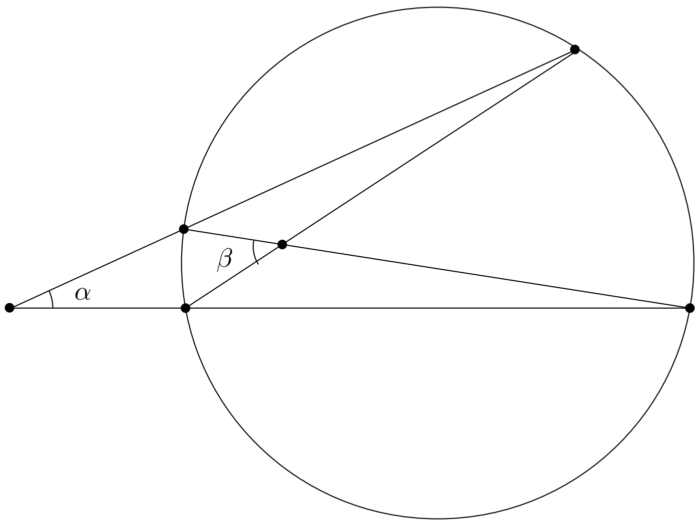
$$|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|$$

eşitliği sağlanır. Yani eşitlikteki ifade sadece P noktasına ve verilen çembere bağlıdır. Çemberin merkezi O ve yarıçapı r olsun. P çemberin dışında bir nokta ise, P den çembere bir PT teğeti çizebiliriz. Bu durumda

$$|PA| \cdot |PB| = |PT|^2 = |OP|^2 - r^2$$

olur. Genel olarak, bir P noktasının verilen bir çembere göre kuvveti $|OP|^2 - r^2$ olarak tanımlanır.
Tanımdan dolayı kuvvet, P çemberin içindeyse negatif; çemberin üzerindeyse 0 ve çemberin





dışındaysa pozitiftir. Her durumda $|PA| \cdot |PB| = ||OP|^2 - r^2|$ dir.

Örnekler:

1. Bir ABC üçgeninde BD açıortayı çiziliyor. $\triangle BDC$ nin çevrel çemberi AB yi E de; $\triangle ABD$ nin çevrel çemberi ise BC yi F de kesiyorsa $|AE| = |CF|$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: A nın $\triangle BDC$ nin çevrel çemberine göre kuvvetinden $|AE| \cdot |AB| = |AD| \cdot |AC|$ olur. Benzer şekilde C nin $\triangle ABD$ nin çevrel çemberine göre kuvvetinden $|CF| \cdot |CB| = |CD| \cdot |CA|$ olur. Buradan

$$\frac{|AE|}{|CF|} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{|BC|}{|AB|}$$

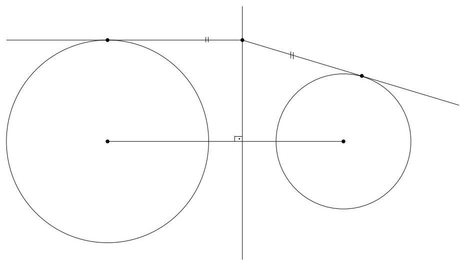
olduğu bulunur. Açıortay teoreminden $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{|AD|}{|CD|}$ olduğu için $|AE| = |CF|$ elde edilir.

2. (6) deki $|OI|^2 = R(R-2r)$ ve $|OI_a|^2 = R(R+2r_a)$ eşitlikleri gösteriniz.

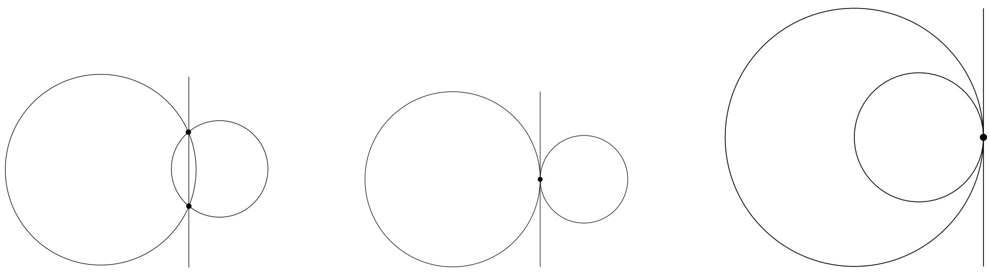
   Çözüm: İçteğet çemberin merkezi I nın çevrel çembere göre kuvvetini ele alalım. Bir yandan kuvvet $|OI|^2 - R^2$ olarak bulunur. Öte yandan AI yı uzatıp çevrel çemberi A_1 de kestirebiliriz ve AA_1 kirişini kuvveti hesaplamada kullanabiliriz. Bu durumda ise kuvvet $|AI| \cdot |IA_1|$ ile hesaplanabilir. $|IA_1| = |A_1C|$ olduğu bilindiği için sinüs teoreminden $\dfrac{|A_1C|}{\sin(\widehat{BAC}/2)} = 2R$, $|IA_1| = 2R\sin(\widehat{BAC}/2)$ elde ederiz. Ayrıca $\sin(\widehat{BAC}/2) = \dfrac{r}{|AI|}$ olduğu için $|AI| \cdot |IA_1| = 2Rr$ buluruz. I, çevrel çemberin içinde olduğu için kuvvet negatif olmalıdır, dolayısıyla istenen sonuç gösterilmiş olur. Diğer eşitlik te benzer şekilde kolaylıkla gösterilir.

2.4 Kuvvet ekseni

Verilen iki çembere göre aynı kuvvete sahip noktaların geometrik yeri çemberlerin merkezlerini birleştiren doğruya dik bir doğrudur. Bu doğruya bu iki çemberin **kuvvet ekseni** denir.



Eğer iki çember kesişiyorlarsa kuvvet ekseni ortak kirişten geçer. Eğer iki çember birbirine teğet iseler, ortak teğet kuvvet eksenidir.



Merkezleri doğrusal olmayan üç çemberin ikişerli kuvvet eksenleri bir noktada kesişir. Bu noktaya bu çemberlerin **kuvvet merkezi** denir.

Örnek: Bir ABC üçgeninde A ve C köşelerinden geçen O merkezli bir çember AB ve BC kenarlarını sırasıyla K ve N noktalarında kesiyor. ABC ve KBN üçgenlerinin çevrel çemberleri farklı B ve M noklarında kesişiyorsa $m(\widehat{OMB}) = 90°$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: BM, NK ve CA doğruları verilen üç çemberin ikişerli olarak kuvvet eksenleridir ve bu doğrular kuvvet merkezinde kesişirler. Bu noktayı P ile gösterirsek, $MNCP$ bir kirişler dörtgenidir. Bunun nedeni, $m(\widehat{MNC}) = 360° - (180° - \widehat{B} + 180° - \widehat{A}) = \widehat{A} + \widehat{C}$ ve bunun da MPC açısının tümleyeni olmasıdır. O merkezli çemberin yarıçapı r olsun. Bu durumda, çemberde kuvvetten

$$|BM| \cdot |BP| = |BN| \cdot |BC| = |OB|^2 - r^2$$

ve

$$|PM| \cdot |PB| = |PN| \cdot |PK| = |OP|^2 - r^2$$

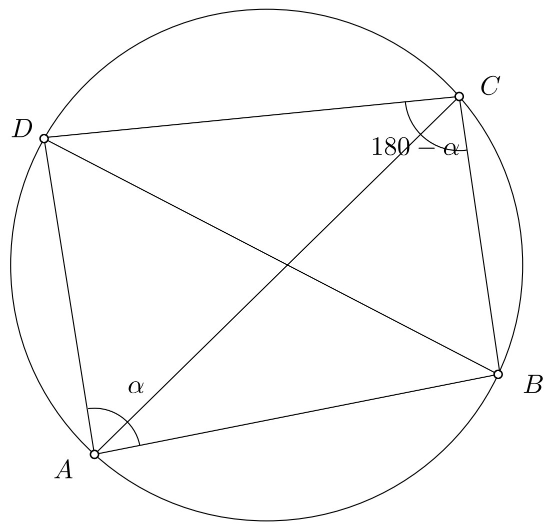
elde edilir. Buradan

$$|OB|^2 - |OP|^2 = |BP| \cdot (|BM| - |PM|) = |BM|^2 - |PM|^2$$

olduğu ve dolayısıyla OM nin MB ye dik olduğu bulunur.

2.5 Kirişler Dörtgeni

Doğrusal olmayan her üç noktanın çembersel olduğunu biliyoruz. Dört nokta için ise bu her zaman geçerli değildir. Dört nokta çembersel olduğunda kenarları bir çemberin kirişleri olan bir dörtgen oluşur ve bu dörtgene **kirişler dörtgeni** denir. Bir kirişler dörtgeninde karşılıklı açıların toplamı 180° dir ve eşdeğer olarak aynı kenarı gören açılar eşittir. Karşıt olarak da, bir dörtgende bu özellikler varsa kirişler dörtgenidir.



Kenar uzunlukları a, b, c, d ve yarıçevresi u olan bir kirişler dörtgeninin alanı

$$S = \sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}$$

dir. Bu alan aynı kenar uzunluklarına sahip dörtgenler için en büyük olandır.
Genel olarak, herhangi bir dışbükey dörtgeninin alanı

$$S = \sqrt{\left((u-a)(u-b)(u-c)(u-d) - abcd\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)}$$

dir.
Batlamyus (Ptolemy) Teoremi. Bir $ABCD$ dörtgeni ancak ve ancak

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$$

olduğunda kirişler dörtgenidir.
Örnekler:

1. Bir dar açılı $\triangle ABC$ de, H diklik merkezi; A', B', C' dikme ayakları ve P de AH nin orta noktası olsun. $B'P \cap AB = \{Q\}$ ve $A'C' \cap BB' = \{R\}$ ise $QR \perp BC$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: $m(\widehat{QBB'}) = \alpha$ olsun. $AB'H$ dik üçgeninde muhteşem üçlü özelliğinden $m(\widehat{AHB'}) = \alpha$ olur. $AC'HB'$ bir kirişler dörtgeni olduğundan $m(\widehat{AHB'}) = \alpha$ dır. Ayrıca ters açılardan $m(\widehat{A'HB}) = \alpha$ dır. Öte yandan $A'BC'H$ kirişler dörtgeni olduğundan $m(\widehat{A'CB}) = \alpha$ bulunur. Karşılıklı açılar toplamı $180°$ olduğundan $B'QC'R$ de bir kirişler dörtgenidir. Böylece $m(\widehat{B'RQ}) = \alpha$ elde ederiz. Bu ise AH nin QR ye paralel olduğunu ve dolayısıyla QR nin BC ye dik olduğunu gösterir.

2. $ABCD$ bir kirişler dörtgeni olmak üzere, H_c ve H_d sırasıyla ABD ve ABC üçgenlerinin diklik merkezleri olsun. CDH_cH_d nin bir paralelkenar olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: CH_d ve DH_c, AB ye dik oldukları için paraleldirler. Ayrıca $ABCD$ kirişler dörtgeni olduğu için $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \alpha$ olur. Diklik merkezinin bir özelliğinden (1) dolayı $|CH_d| = |DH_c| = |AB||\cot\alpha|$ olur. Dolayısıyla CDH_cH_d nin bir paralelkenardır.

3 Eşitsizlikler

Üçgen eşitsizliği. Bir düzlemdeki herhangi A, B ve C noktaları için

$$|AB| + |BC| \geq |AC|$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik sadece A, B ve C noktalarının bu sırayla aynı doğru üzerinde olması durumunda mümkündür.
Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar vardır.
Batlamyus (Ptolemy) eşitsizliği. Düzlemdeki A, B, C, D farklı noktaları için

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik sadece verilen noktalar doğrusal veya $ABCD$ dışbükey kirişler dörtgeni olduğunda sağlanır.
Paralelkenar eşitsizliği. Bir $ABCD$ dörtgeninde

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \geq |AC|^2 + |BD|^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik sadece $ABCD$ bir paralelkenar olduğunda sağlanır.
Bir üçgende $R \geq 2r$ dir. Eşitlik sadece üçgen eşkenar olduğunda mümkündür.
Örnekler:

1. $\triangle ABC$ nin A kenarından çıkan bir doğru BC yi X de ve $\triangle ABC$ nin çevrel çemberini de Y de kesiyor ise
$$\frac{1}{|AX|} + \frac{1}{|XY|} \geq \frac{4}{|BC|}$$
olduğunu gösteriniz. Eşitlik hangi durumda mümkündür?

   Çözüm: HO≤GO eşitsizliğini kullanarak
$$\frac{1}{|AX|} + \frac{1}{|XY|} \geq \frac{2}{\sqrt{|AX| \cdot |XY|}}$$
elde ederiz. X noktasının çembere göre kuvvetinden bulunan $|AX| \cdot |XY| = |BX| \cdot |XC|$ eşitiğini kullanarak
$$\frac{1}{|AX|} + \frac{1}{|XY|} \geq \frac{2}{\sqrt{|BX| \cdot |XC|}}$$
olduğunu buluruz. Ayrıca GO≤AO eşitsizliğinden dolayı
$$\sqrt{|BX| \cdot |XC|} \leq \frac{|BX| + |XC|}{2} = \frac{|BC|}{2}$$
olur. Buradan da istenilen sonuç elde edilir. Eşitlik hali ancak $|AX| = |XY|$ ve $|BX| = |XC|$ olduğunda mümkündür.

2. P, $\triangle ABC$ nin bir iç noktası olsun. P den geçen ve AB, BC, CA ya paralel olan

doğrular sırasıyla BC yi L de, CA yı M de ve AB yi de N de kesiyor ise

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} \leq \frac{1}{8}$$

olduğunu gösteriniz. Eşitliğin olması için P nin yerini belirleyiniz.

Çözüm: Bir ABC üçgeninin alanını $S(ABC)$ ile gösterelim. PLC ve ZBC üçgenleri benzer ve aynı yüksekliğe sahip üçgenlerde alanlar kenar uzunluklarıyla orantılı olduğu için

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|ZP|}{PC|} = \frac{S(BPZ)}{S(BPC)} = \frac{S(APZ)}{S(APC)}$$

olur. Buradan

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{S(BPZ) + S(APZ)}{S(BPC) + S(APC)} = \frac{S(APB)}{S(BPC) + S(APC)}$$

bulunur. $x = S(BPC), y = S(APC)$ ve $z = S(APB)$ olarak alırsak,

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{z}{x+y}$$

olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde

$$\frac{|CM}{|MA|} = \frac{x}{y+z} \quad \text{ve} \quad \frac{|AN}{|NB|} = \frac{y}{x+z}$$

elde edilir. Böylece istenilen eşitsizlik

$$\frac{z}{x+y} \cdot \frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{x+z} \leq \frac{1}{8}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada AG eşitsizliğini kullanarak

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}, \quad y + z \geq 2\sqrt{yz}, \quad x + z \geq 2\sqrt{xz}$$

elde ederiz. Bu ifadeleri taraf tarafa çarparak istenilen eşitsizliği göstermiş oluruz. Eşitlik hali ise AG eşitsizlikten dolayı $x = y = z$ durumunda mümkündür. Yani P ağırlık merkezi olmalıdır.

4 Trigonometri

4.1 Trigonometrik fonksiyonlar

Bir ABC dik üçgeninde C açısı 90° ve kenar uzunlukları a, b, c olmak üzere A açısının trigonometrik fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{a}{c}, & \cos A &= \frac{b}{c}, \\ \tan A &= \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A}, & \cot A &= \frac{b}{a} = \frac{\cos A}{\sin A}, \\ \sec A &= \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos A}, & \csc A &= \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin A}. \end{aligned}$$

Yarıçapı r olan çember yardımıyla 90° den büyük açılar için de benzer şekilde trigonometrik fonksiyonları tanımlayabiliriz. Çemberin merkezi ile xy koordinat sisteminin merkezlerini O noktasında çakıştırdığımızda çember üzerindeki herhangi bir P noktasının koordinatlarını (x, y) ile gösterebiliriz. Bu durumda $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ olduğunu biliyoruz. OX ışını ile OP doğru parçası arasında kalan açının (saat yönünün tersi istikametinde hareket ettiğimiz kabul ediyoruz) trigonometrik fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{|y|}{r}, & \cos A &= \frac{|x|}{r}, \\ \tan A &= \frac{|y|}{|x|} = \frac{\sin A}{\cos A}, & \cot A &= \frac{|x|}{|y|} = \frac{\cos A}{\sin A}, \\ \sec A &= \frac{r}{|x|} = \frac{1}{\cos A}, & \csc A &= \frac{r}{|y|} = \frac{1}{\sin A}. \end{aligned}$$

Yarıçapı r olan bir çemberde, r uzunluğunda bir yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 *radyan* denir. Dolayısıyla 2π *radyan* = 360° olur. Buradan

$$1\ radyan = 180°/\pi \quad \text{ve} \quad 1° = \pi/180\ radyan$$

elde edilir.

Trigonometrik fonksiyonların alacağı değerlerin işaretlerini ve değişimlerini aşağıdaki tablodaki gibi özetleyebiliriz.

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$
$0° - 90°$	$+$ $0 \to 1$	$+$ $1 \to 0$	$+$ $0 \to \infty$	$+$ $\infty \to 0$	$+$ $1 \to \infty$	$+$ $\infty \to 1$
$90° - 180°$	$+$ $1 \to 0$	$-$ $0 \to -1$	$-$ $-\infty \to 0$	$-$ $0 \to -\infty$	$-$ $-\infty \to -1$	$+$ $1 \to \infty$
$180° - 270°$	$-$ $0 \to -1$	$-$ $-1 \to 0$	$+$ $0 \to \infty$	$+$ $\infty \to 0$	$-$ $-1 \to -\infty$	$-$ $-\infty \to -1$
$270° - 360°$	$-$ $-1 \to 0$	$+$ $0 \to 1$	$-$ $-\infty \to 0$	$-$ $0 \to -\infty$	$+$ $\infty \to 1$	$-$ $-1 \to -\infty$

Bazı temel açılar için trigonometrik fonksiyonların alacağı değerleri aşağıdaki tablodaki gibi özetleyebiliriz. Tabloda A açısının değeri derece ve radyan olarak verilmiştir.

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$
$0° = 0\ rad$	0	1	0	∞	1	∞
$15° = \frac{\pi}{12}\ rad$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
$30° = \frac{\pi}{6}\ rad$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$45° = \frac{\pi}{4}\ rad$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60° = \frac{\pi}{3}\ rad$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$75° = \frac{5\pi}{12}\ rad$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
$90° = \frac{\pi}{2}\ rad$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1

4.2 Temel eşitlikler ve açılım formülleri

Bu bölümde çeşitli sorularda karşımıza çıkan temel trigonometrik özdeşlikleri vereceğiz.

1. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,
2. $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$,
3. $\csc^2 A - \cot^2 A = 1$,
4. $\sin(-A) = -\sin A, \quad \csc(-A) = -\csc A$,
5. $\cos(-A) = \cos A, \quad \sec(-A) = \sec A$,
6. $\tan(-A) = -\tan A, \quad \cot(-A) = -\cot A$.

İki açı toplamını veya farkını içeren özdeşlikler aşağıdakilerdir.

- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$,
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$,
- $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$,
- $\cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot A \pm \cot B}$.

$2A$ ve $3A$ değerlerini içeren özdeşlikler aşağıdakilerdir.

- $\sin 2A = 2\sin A \cos A$,
- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$,
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$,
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$,
- $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$,
- $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$.

Trigonometrik fonksiyonların toplamını, farkını veya çarpımını içeren özdeşlikler aşağıdakilerdir.

- $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$,
- $\sin A - \sin B = 2\sin\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}$,
- $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$,
- $\cos A - \cos B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}$,
- $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$,
- $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$,
- $2\sin A\sin B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$.

- Her $x \in \mathbb{R}$ için, $t = \tan\dfrac{x}{2}$ olmak üzere $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ve $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ olur.
- Bir üçgenin iç açıları α, β, γ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$, ve

  $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$.

- Trigonometrik Ceva Teoremi.

  Bir ABC üçgeninde X, Y, Z sırasıyla BC, CA, AB kenarları üzerinde ve köşelerden farklı noktalar olmak üzere, AX, BY, CZ doğruları ancak ve ancak

  $$\frac{\sin(\widehat{BAX})}{\sin(\widehat{XAC})} \cdot \frac{\sin(\widehat{CBY})}{\sin(\widehat{YBA})} \cdot \frac{\sin(\widehat{ACZ})}{\sin(\widehat{ZCB})} = 1$$

  olduğunda bir noktada kesişirler.

Örnekler:

1. Bir $ABCD$ karesi veriliyor. Eğer B ve K, AC doğrusunun aynı tarafında ve ACK hipotenüsü AC olan bir dik üçgen ise

$$|BK| = \frac{||AK| - |CK||}{\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad |DK| = \frac{|AK| + |CK|}{\sqrt{2}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $m(\widehat{KCA}) = \alpha \leq 45°$ olsun. A, K, B, C, D noktaları çapı AC olan çember üzerinde olduğu için

$$|BK| = |AC| \sin(45° - \alpha) = \frac{|AC|(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sqrt{2}}$$

ve

$$|DK| = |AC| \sin(45° + \alpha) = \frac{|AC|(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Ayrıca $|AC|\cos\alpha = |CK|$ ve $|AC|\sin\alpha = |AK|$ olduğundan istenen sonuç elde edilir.

2. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 40°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 60°$ dir. D ve E sırasıyla AC ve AB kenarları üzerinde $m(\widehat{CBD}) = 40°$ ve $m(\widehat{BCE}) = 70°$ olacak şekilde iki nokta olsun. $BD \cap CE = \{F\}$ ise $AF \perp BC$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Verilenlerden $m(\widehat{ABD}) = 20°, m(\widehat{BCA}) = 80°$ ve $m(\widehat{ACE}) = 90°$ olduğu kolayca görülür. A dan BC ye inilen dikmenin ayağı G olsun. Bu durumda $m(\widehat{BAG}) = 30°$ ve $m(\widehat{CAG}) = 10°$ olur ve

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\widehat{BAG})\sin(\widehat{ACE})\sin(\widehat{CBD})}{sin(\widehat{CAG})\sin(\widehat{BCE})\sin(\widehat{ABD})} &= \frac{\sin 30° \sin 10° \sin 40°}{\sin 10° \sin 70° \sin 20°} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sin 10°(2\sin 20° \cos 20°)}{\sin 10° \sin 70° \sin 20°} = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Trigonometrik Ceva Teoreminden dolayı AG, BD ve CE doğruları bir noktada kesişirler. Dolayısıyla F, AG üzerindedir ve $AF \perp BC$ dir.

5 Analitik Geometri

$P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ bir düzlemde iki nokta olsun.

- İki nokta arasındaki uzaklık formülü: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- İki nokta arasındaki orta nokta: $P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

- İki nokta arasındaki doğrunun denklemi: $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m =$ eğim.
- Eğimi m ve $y-$keseni b olan doğrunun denklemi: $y = mx + b$.
- $x-$keseni $a \neq 0$ ve $y-$keseni $b \neq 0$ olan doğrunun denklemi: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.
- (x_1, y_1) noktasının $Ax+By+C = 0$ doğrusuna olan uzaklık formülü: $\dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
- Eğimleri m_1 ve m_2 olan iki doğru arasındaki açı α ise $\tan\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ dir.
- İki doğru birbirine ancak ve ancak $m_1 = m_2$ ise paraleldir.
- İki doğru birbirine ancak ve ancak $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ ise diktir. (Burada yatay ve dikey doğruları ele almıyoruz.)
- (x_0, y_0) merkezli ve R yarıçaplı çemberin denklemi: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$.
- Köşeleri $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ve (x_3, y_3) noktalarında olan üçgenin alanı:

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_3 + y_3x_2 - y_2x_3 - y_1x_2 - x_1y_3).$$

Örnekler:

1. O, bir ABC üçgeninin çevrel çember merkezi ve CD, AB kenarına çizilen kenarortay olsun. E, ACD üçgeninin ağırlık merkezi ise $OE \perp CD$ ancak ve ancak $|AB| = |AC|$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Üçgeninin kartezyen koordinatları $B(0,0), C(6a,0)$ ve $A(4b,2c)$ olsun. Bunlara göre diğer noktaların koordinatlarını hesaplayabiliriz. D, AB nin orta noktası olduğu için $D(2b,c)$ dir. E, ADC üçgeninin ağırlık merkezi olduğu için DE bir kenarortaydır, dolayısıyla AC ile orta nokta $F(3a+2b,c)$ de kesişir. $|DE| : |EF| = 2:1$ olduğu için $E(2b+2a,c)$ dir. R, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı olmak üzere, O nun koordinatları $(3a, \sqrt{R^2-9a^2}$ dir. Buradan

$$CD \text{ nin eğimi} = \frac{-c}{6a-2b} \quad \text{ve} \quad OE \text{ nin eğimi} = \frac{\sqrt{R^2-9a^2}-c}{a-2b}$$

   bulunur. $CD \perp OE$ olması ancak eğimlerin çarpımının -1 olması durumunda mümkündür. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{-c}{6a-2b} \cdot \frac{\sqrt{R^2-9a^2}-c}{a-2b} &= 1 \\
c(\sqrt{R^2-9a^2}-c) &= (6a-2b)(a-2b) \\
c\sqrt{R^2-9a^2} &= c^2 + 6a^2 - 14ab + 4b^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan $AO = R$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
|AO|^2 = (3a-4b)^2 + (\sqrt{R^2-9a^2}-2c)^2 &= R^2 \\
(3a-4b)^2 + R^2 - 9a^2 - 4c\sqrt{R^2-9a^2} + 4c^2 &= R^2 \\
9a^2 - 24ab + 16b^2 - 9a^2 + 4c^2 &= 4c\sqrt{R^2-9a^2} \\
-6ab + 4b^2 + c^2 &= c\sqrt{R^2-9a^2}
\end{aligned}$$

buluruz. Dolayısıyla $CD \perp OE$ olması ancak ve ancak

$$\begin{aligned}
-6ab + 4b^2 + c^2 &= c^2 + 6a^2 - 14ab + 4b^2 \\
8ab &= 6a^2 \\
4b &= 3a
\end{aligned}$$

olması durumunda mümkündür. Bu ise A noktasının BC nin orta dikmesi üzerinde olduğunu gösterir, dolayısıyla $|AB| = |AC|$ dir.

2. ABC ve AB_1C_1 yönleri farklı ve benzer iki dik üçgen olsun. Ayrıca bu üçgenlerde dik açıların C ve C_1 köşelerinde ve $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{C_1AB_1})$ olduğu veriliyor. $BC_1 \cap B_1C = \{M\}$ ise AM ve CC_1 doğruları varsa birbirine dik olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Kartezyen düzlemde A noktasını orijine yerleştirelim. $|BC| : |AC| = k$, $C(a,b)$ ve $C_1(a_1,b_1)$ olsun. Buradan B nin koordinatları $(a,b)+k(-b,a) = (a-kb, b+ka)$ olarak bulunur. Benzer şekilde $B_1(a+kb_1, b+ka)$ bulunur. Böylece BC_1 ve CB_1 doğrularının denklemleri sırasıyla $\dfrac{x-a_1}{y-b_1} = \dfrac{x-(a-kb)}{y-(b+ka)}$ ve $\dfrac{x-a}{y-b} = \dfrac{x-(a_1+kb_1)}{y-(b_1-ka_1)}$ olur. İçler-dışlar çarpımı yapılarak denklemler şu hale getirilebilir:

$$\begin{aligned}
BC_1:\ kax + kby &= kaa_1 + kbb_1 + ba_1 - ab_1 - (b-b_1)x + (a-a_1)y \\
CB_1: ka_1x + kb_1y &= kaa_1 + kbb_1 + ba_1 - ab_1 - (b-b_1)x + (a-a_1)y
\end{aligned}$$

   $M(x_0,y_0)$ bu iki denklemi birden sağladığı için $kax_0+kby_0 = ka_1x_0+kb_1y_0$ olmalıdır. Bu ise $\dfrac{x_0}{y_0} = -\dfrac{b_1-b}{a_1-a}$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla CC_1 ve AM doğruları diktir.

6 Geometrik yer ve çizim

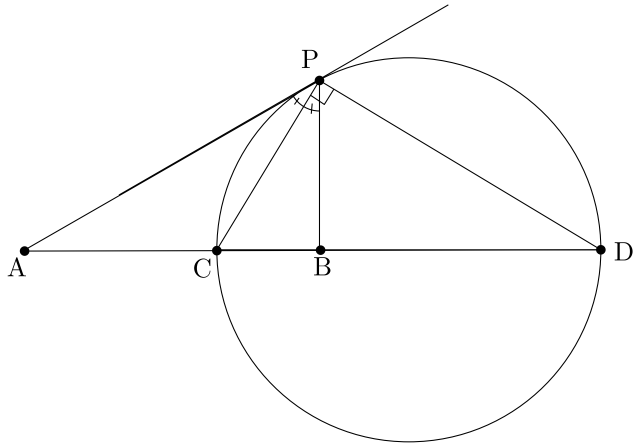
Verilen bir özelliği sağlayan tüm noktaların oluşturduğu bir küme veya bir şekil bir geometrik yerdir. Geometrik yer problemlerinde yapılması gereken, istenilen özelliği sağlayan noktaların bulunduğu bir şekil bulmak ve bu şekildeki her noktanın da istenilen özelliğini göstermektir. Bazen ikinci kısım gözden kaçabilir, buna dikkat edilmesi gerekir.

Bazı temel geometrik yerler:

- Verilen A ve B noktalarından eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri $[AB]$ nın orta dikmesidir.
- Verilen bir noktadan sabit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri bir çemberdir.
- Verilen $[AB]$ nı sabit açıyla gören açıların köşelerinin geometrik yeri $[AB]$ na göre simetrik iki çember yayının birleşimidir. Burada A ve B noktaları dahil değildir.

Örnekler:

1. **Apollonius çemberi.** A ve B herhangi iki nokta ve $k \neq 1$ pozitif reel sayı olmak üzere, $\dfrac{PA}{PB} = k$ eşitliğini sağlayan P noktalarının geometrik yeri, merkezi $[AB]$ üzerinde olan bir çemberdir. Bu çembere Apollonius çemberi denir.



İspat (Analitik geometri kullanarak.) $A(-a, 0)$ ve $B(a, 0)$ olsun. Şartı sağlayan bir nokta $P(x, y)$ ise aşağıdaki işlemleri yaparak geometrik yerin bir çember olduğunu buluruz.

$$
\begin{aligned}
\frac{|PA|^2}{|PB|^2} &= \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = k^2 \\
x^2 + 2ax + a^2 + y^2 &= k^2x^2 - 2k^2ax + k^2a^2 + k^2y^2 \\
(1-k^2)x^2 + 2a(1+k^2)x + (1-k^2)y^2 &= (k^2-1)a^2 \\
\left(x - a + \frac{2a}{1-k^2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{2a}{1-k^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Çemberin merkezi $\left(a - \dfrac{2a}{1-k^2}, 0\right)$ ve yarıçapı $\dfrac{2a}{1-k^2}$ dir.

2. $ABCD$ karesi içinde P köşelerden ve karenin M orta noktasından farklı bir nokta olsun. PD ile AC nin kesişimi E olsun (eğer varsa) ve PC ve BD nin kesişimi F olsun (eğer varsa). E ve F nin olduğu durumlardaki P ye kabul görmüş nokta

diyelim. EF nin AD ye paralel olduğu durumdaki kabul görmüş P noktalarının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: $DF \perp EC$ ve $EF \perp DC$ olduğu için F, DEC üçgeninin diklik merkezidir. Dolayısıyla $FC \perp DE$ dir. Böylece P nin DC çaplı yarı çember üzerinde olduğunu göstermiş oluruz. Burada P, C, D ve M den farklı olmalıdır. Öte yandan, bu yarıçemberin üzerinde fakat C, D ve M den farklı bir P noktası için $FC \perp DP$ yani $FC \perp DE$ dir. Ayrıca $DF \perp EC$ olduğu için yine F, DEC üçgeninin diklik merkezidir. Dolayısıyla $EF \perp DC$ olur ve bu P noktası istenilen özelliği sağlar. Sonuç olarak istenilen noktaların geometrik yeri C, D ve M den farklı olmak üzere DC çaplı yarı çember üzerindeki noktalardır.

3. Bir $ABCD$ eşkenar dörtgeni içerisinde $m(\widehat{AMD})+m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$ olacak şekildeki M noktalarının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$ olacak şekilde bir N noktası alalım. Bu durumda $m(\widehat{NAM}) = m(\widehat{DMA})$ ve $m(\widehat{NBM}) = m(\widehat{BMC})$ olur. Dolayısıyla $AMBN$ bir kirişler dörtgeni olur. Ayrıca bu kirişler dörtgeninde köşegenler eşit uzunlukta olduğu için $AM \parallel BN$ veya $BM \parallel AN$ dir. Birinci durumda

$$m(\widehat{AMD}) = m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{AMB})$$

ve ikinci durumda ise

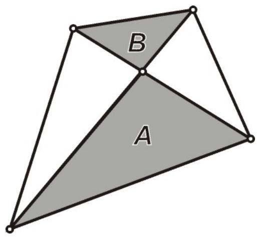
$$m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{MBA})$$

olur. Birinci durumda $m(\widehat{AMB}) + m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$ olur ve buradan M nin AC köşegeni üzerinde olduğu çıkar. Benzer şekilde ikinci durumda ise M nin BD köşegeni üzerinde olur. Diğer taraftan, M nin herhangi bir köşegen üzerinde olduğu durumda $m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$ olacağı açıktır. Sonuç olarak istenilen noktaların geometrik yeri $ABCD$ nin köşegenleridir.

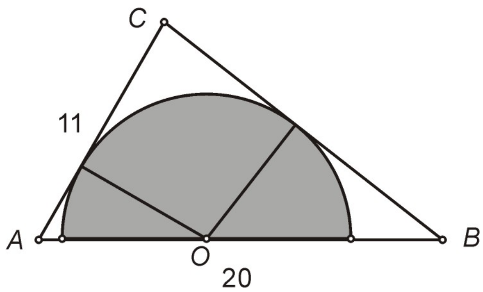
GEOMETRİ-PROBLEMLER

1. $ABCD$ kirişler dörtgeninde AC köşegeni $\widehat{DAB}$ açısının açı ortayıdır. Bu dörtgende AD kenarı D noktasının ötesindeki bir E noktasına uzatılıyor. Bu durumda $|CE| = |CA|$ eşitliğinin ancak ve ancak $|DE| = |AB|$ eşitliği sağlandığında doğru olduğunu gösteriniz.

2. Köşegenlerle dört üçgene bölünmüş olan bir yamuğun paralel kenarlarına komşu olan üçgenlerin alanlarına A ve B diyelim. Bu durumda yamuğun alanını A ve B cinsinden bulunuz.



3. Şekildeki gibi bir ABC üçgeninde $|AB| = 20$ cm, $|AC| = 11$ cm ve $|BC| = 13$ cm dir. ABC üçgeni içerisine merkezi $|AB|$ kenarı üzerinde yer alan bir yarım daire çiziliyor. Yarım daire $|AC|$ ve $|CB|$ kenarlarına teğet olduğuna göre yarı çemberin çapı kaç cm dir?



4. $|BC| = 7$, $|AC| = 3$ ve $m(\widehat{BAC}) = 30°$ olan bir ABC üçgeninde $|AB|$ kaçtır ?

5. Merkezi S ve yarıçapı $r = 2$ olan bir çemberde, $45°$ açı ile kesişen iki yarıçap SA ve SB verilsin. AB doğrusu ile AS doğrusunun S noktasındaki dikmesi K noktasında kesişsinler. ABS üçgeninde B köşesinden inilen dikme AS kenarını L noktasında kessin. $SKBL$ yamuğunun alanını bulunuz.

6. $m(\widehat{ACB}) = 90°$ olan bir ABC dik üçgeninin hipotenüsünün uzunluğu 10 cm, $m(\widehat{BAC}) = 30°$'dir. Üçgenin içinde bir D noktası, $m(\widehat{BDC}) = 90°$ ve $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DBA})$ olacak şekildedir. AB kenarıyla CD doğrusunun kesiştiği nokta ise E noktasıdır. Bu durumda $|AE|$ doğru parçasının uzunluğu nedir?

7. $ABCD$ karesinin AB kenarı üzerinde, $|AE| = 3|EB|$ olacak şekilde bir E noktası, DA kenarı üzerinde ise, $|AF| = 5|FD|$ olacak şekilde bir F noktası bulunmaktadır. DE ve FC doğru parçalarının kesiştiği nokta K, DE ve BF doğru parçalarının kesiştiği nokta L, FB ve EC doğru parçalarının kesiştiği nokta ise M noktası olsun. Bu durumda EML ve DKC üçgenlerinin alanlarının toplamı p_1, FLK ve MBC üçgenlerinin alanlarının toplamı p_2 ise, $p_1 : p_2$ oranı nedir?

8. $ABCD$ paralelkenarında $\widehat{ADC}$ açısının açıortayı BC kenarını E noktasında, AD kenarını dik kesen ve iki eşit parçaya bölen doğru parçasını M noktasında kesmektedir. Eğer AM ve BC doğruları F noktasında kesişiyorsa

   (a) $|DE| = |AF|$

   (b) $|AD| \cdot |AB| = |DE| \cdot |DM|$

   olduğunu ispatlayınız.

9. ABC üçgeninde $m(\widehat{ACB})$ açısının iç açıortayı AB'yi D noktasında kesmektedir. Eğer ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi ile BCD üçgeninin içteğet çemberinin merkezleri çakışıksa $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$ olduğunu gösteriniz.

10. Bir $ABCD$ dörtgeninde BC ve DA kenarlarının orta noktaları sırasıyla E ve F 'dir. EDA ve FBC üçgenlerinin alanları toplamının, $ABCD$ dörtgeninin alanına eşit olduğunu gösteriniz.

11. Bir ABC üçgeninde, $m(\widehat{ABC}) = 2m(\widehat{ACB})$ olduğuna göre,

    (a) $|AC|^2 = |AB|^2 + |AB| \cdot |BC|$

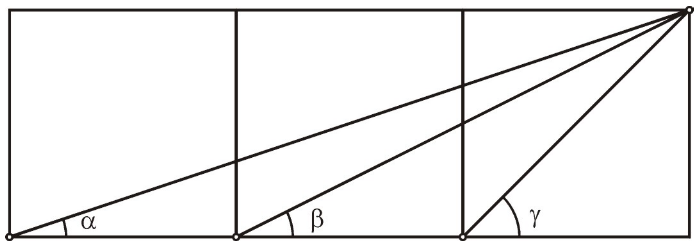
    (b) $|AB| + |BC| < 2|AC|$

    olduğunu kanıtlayınız.

12. P noktası, kenar uzunluğu 10 olan bir eşkenar üçgenin iç bölgesinde yer almaktadır. P noktasının üçgenin iki kenarına olan dik uzaklıkları 1 ve 3 ise üçüncü kenara olan uzaklığı kaçtır?

13. Şekilde bir dikdörtgen 3 kareye bölünmüştür. $\alpha + \beta = \gamma$ olduğunu gösteriniz.

14. C açısı dik olan ABC üçgeninde S, AB kenarının orta noktası, V ise AB kenarına inilen yüksekliğin ayağıdır. $|SV| = 1$ ve $|SC| = 2$ ise ABC üçgeninin açı ölçülerini bulunuz.



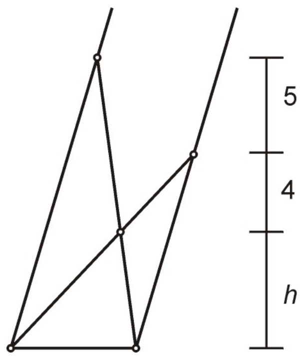
15. Bir ABC üçgeninin A, B ve C köşelerinden inen dikmelerin uzunlukları sırasıyla, 5, 4 ve 4 dür. $|BC|$ kenarının uzunluğunu bulunuz.

16. Kenar uzunluğu 2 olan bir $ABCD$ karesinde AD 'nin orta noktası E ve C' den BE 'ye inilen dikmenin ayağı F dir. $CDEF$ dörtgeninin alanını bulunuz.

17. Yüksekliklerinden ikisi 5 ve 7 olan bir üçgenin üçüncü yüksekliğinin üst sınırını bulunuz.

18. Bir üçgenin kenarları a, b, c ve çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu R olsun. Eğer $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$ ise üçgenin açılarını bulunuz.

19. İki merdiven, dar bir sokakta orantısız bir X-şekli biçiminde çaprazlama yerleştirilmiştir. Sokak duvarları zemine dik değil, fakat birbirlerine paraleldir. Zemin, düz ve yataydır. Her bir merdivenin tabanı, karşı duvara değecek şekilde yerleştirilmiştir. Uzun olan merdivenin sokak duvarına değen üst kısmı ile kısa olan merdivenin karşı duvara değen üst kısmı arasındaki mesafe dikey olarak 5 m 'dir. Kısa olan merdivenin karşı duvara değen üst kısmı ile de, iki merdivenin kesiştikleri nokta arasındaki mesafe dikey olarak 4 m 'dir. Merdivenlerin kesişim noktasının yere olan yüksekliği dikey olarak ne kadardır?



20. ABC üçgeninde, D noktası $[AC]$ üzerinde olmak üzere $[BD]$ ve E noktası $[AB]$ üzerinde olmak üzere $[CE]$ doğru parçaları çiziliyor. $[BD]$ ve $[CE]$ nin kesişim noktası X, Alan$(BXE) = a$, Alan$(BXC) = b$ ve Alan$(CXD) = c$ olmak üzere Alan$(AEXD)$ yi a, b ve c cinsinden bulunuz.

21. Kenar uzunlukları 10, 17 ve 21 olan bir üçgenin içine bir kenarı üçgenin en uzun kenarında ve diğer iki köşesi üçgenin kısa kenarları üzerinde olacak şekilde bir kare yerleştiriliyor. Karenin kenar uzunluğunu bulunuz.

22. $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB})$ ve $|AB| = |AD|$ olacak şekilde bir dışbükey $ABCD$ dörtgeni verilsin. A noktasından CB ve DB doğrularına çizilen dikmelerin kesişim noktaları sırasıyla N ve K olmak üzere NK doğrusunun AC doğrusuna dik olduğunu gösteriniz.

23. Bir $ABCD$ karesinin BC ve CD kenarlarından K ve L noktaları alınıyor. $m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{AKL})$ olduğuna göre $m(\widehat{KAL})$ kaçtır ?

24. Kenarları a, b ve c olan bir diküçgenin kenarları geometrik bir dizi oluşturduğuna ve $abc = 1$ olduğuna göre a, b, c yi bulunuz.

25. ABC dik üçgeninde AB hipotenüsünün orta noktası K olsun. M, BC kenarı üzerinde $|BM| = 2|MC|$ olacak şekilde bir nokta ise $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MKC})$ olduğunu gösteriniz.

26. Bir yamuğun orta tabanının uzunluğu 4 ve taban açıları 40° ve 50° 'dir. Alt ve üst tabanın orta noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu 1 ise taban uzunluklarını hesaplayınız.

27. ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC kenarına M, CA kenarına N, AB kenarına ise P noktalarında teğettir. NP doğrusu üzerinde $\dfrac{|DP|}{|DN|} = \dfrac{|BD|}{|CD|}$ olmak üzere bir D noktası olduğuna göre $DM \perp PN$ olduğunu gösteriniz.

28. M noktası, $ABCD$ karesinin çevrel çemberindeki CD yaylarından kısa olanının üzerinde bir nokta olsun. P ve R noktaları sırasıyla AM doğrusuyla BD ve CD doğru parçalarının kesişimlerini göstersin. Benzer şekilde, Q ve S noktaları da BM doğrusu ile sırasıyla AC ve DC doğru parçalarının kesişim noktaları olsunlar. PS ve QR doğrularının birbirlerine dik olduklarını gösteriniz.

29. Boyutları 25x36x12 olan ve yerde en büyük yüzlerinden birisi üzerinde duran bir kutunun alt köşelerinin birinde bulunan bir karınca, kutunun altından geçmeden, karşı çaprazdaki alt köşeye ulaşmaya çalışmaktadır. Karıncanın kullanabileceği en kısa yolun uzunluğu nedir?

30. Merkezleri O ve P olan iki tane daire alalım. Her bir dairenin merkezinden, diğer dairenin çevresine iki tane teğet çizelim. O merkezli daireden çizilen teğetler, O merkezli daireyi A ve B noktalarında; P merkezli daireden çizilen teğetler de, P merkezli daireyi C ve D noktalarında kessin. AB ve CD kirişlerinin eşit uzunlukta olduklarını gösteriniz.

31. Bir $ABCD$ dörtgeninde, $Alan(ABC) \leq Alan(BCD) \leq Alan(CDA) \leq Alan(DAB)$ ise $ABCD$ nin bir yamuk olduğunu kanıtlayınız.

32. Köşegenlerin kesişimi O olan $ABCD$ paralelkenarında, M ve N noktaları sırasıyla $[BO]$ ve $[CD]$ nin orta noktaları olsunlar. ABC ve AMN üçgenleri benzer ise, $ABCD$ nin bir kare olduğunu kanıtlayınız.

33. Bir düzgün dokuzgenin en uzun köşegeninin uzunluğunun, en kısa köşegeni ile bir kenarının uzunlukları toplamına eşit olduğunu gösteriniz.

34. Kenarları 20 ve 15 olan bir $ABCD$ dikdörtgeni verilsin. Merkezi A noktasında olan bir çember C köşesinden geçiyor. BD doğru parçasını içeren kirişin uzunluğunu bulunuz.

35. Yarı çapı r olan bir çemberle çevrelenmiş ve alanı $3r^2$ olan düzgün çokgenin kenar sayısı nedir?

36. ABC dar açılı üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. O_1 ise AB kenarını iki eşit parçaya ayıran ve O noktasından geçen doğrunun üzerinde, O noktasına göre AB kenarının diğer tarafında kalan bir nokta olsun. Merkezi O_1, yarı çapı AO_1 olan çembere K, CA ve CB doğrularının K ile kesiştiği noktalara ise sırasıyla A_1 ve B_1 diyelim. Bu durumda A_1B ve AB_1 doğruları ABC üçgeninin çevrel çemberinin üzerinde kesiştiğinde AO_1BO dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olduğunu gösteriniz.

37. P noktası bir çember üzerinde, Q noktası bir doğru üzerinde sabit; R noktası ise P noktasının bulunduğu çember üzerinde (P, Q, R bir doğru üzerinde olmayacak şekilde) değişken bir noktadır. P, Q ve R noktalarından geçen çember, Q noktasının bulunduğu doğruyu tekrar V noktasında kestiğine göre, VR doğrusunun bir sabit noktadan geçtiğini gösteriniz.

38. $ABCD$, bir kirişler dörtgeni olsun. AC köşegeni DAB açısının açıortayıdır. AD kenarı, D köşesinden uç noktası E olacak şekilde uzatılıyor. $|CE| = |CA| \Leftrightarrow |DE| = |AB|$ olduğunu ispatlayınız.

39. Alanı 7 olan bir ABC eşkenar üçgeninde M ve N noktaları sırasıyla AB ve AC üzerinde bulunan ve $AN = BM$ koşulunu sağlayan noktalar olsun. $O = BN \cap CM$ olmak üzere, BOC üçgeninin alanı 2 olsun.

    a) $MB : AB = 1 : 3$ veya $MB : AB = 2 : 3$ olduğunu ispatlayınız.

    b) AOB açısının ölçüsünü bulunuz.

40. Bir ABC üçgeninde a, b ve c sırasıyla A, B ve C köşelerinin karşısındaki kenarların uzunlukları ve r, ABC üçgeninin içteğet çemberinin yarı çapı olmak üzere ve $6(a+b+c)r^2 = abc$ eşitliğini sağlamaktadırlar. M, ABC üçgeninin içteğet çemberinin üzerinde bir nokta ve D, E, F sırası ile bu noktanın BC, AC ve AB kenarlarına izdüşümleridir.
$Alan(ABC) = S$ ve $Alan(DEF) = S_1$ ise $\frac{S_1}{S}$ kesirinin alacağı en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

41. Bir ABC üçgeninin alanını eşit alanlı ABM, BCM ve MCA üçgenlerine bölen M noktasının ağırlık merkezi olduğunu ispatlayınız.

42. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = 2.m(\widehat{C})$ ve A açısının açıortayı BC kenarını D noktasında kesmek üzere $|AB| = |CD|$ ise $m(\widehat{A})$ kaçtır?

43. $ABCD$ eşkenar dörtgen ve $m(\widehat{DAB}) = 60°$ olsun. K ve L noktaları AD ve DC kenarları üzerinde noktalar ve M noktası $KDLM$ paralel kenar oluşturacak şekilde AC köşegeni üzerinde bir nokta olsun. BKL üçgeninin eşkenar olduğunu ispatlayınız.

44. ABC dik üçgeninde D ve E sırası ile AB ve BC dik kenarları üzerinde $m(\widehat{BAE}) = 30°$ ve $m(\widehat{BDC}) = 45°$ olacak şekilde noktalar, F ise AE ve CD doğrularının keşisim noktasıdır. $|AE| = \sqrt{3}$, $|CD| = \sqrt{2}$ olduğuna göre, F noktasının AB kenarına olan uzaklığını bulunuz.

45. $ABCD$ yamuğunda AB tabanının orta noktası M 'dir. E, AC köşegeni üzerinde, BC ve ME, F noktasında; DE ve AB, H noktasında kesişecek şekilde seçilmiş bir noktadır. FD ve AB, G noktasında kesişiyor ise M noktasının GH nin orta noktası olduğunu gösteriniz.

46. P_n, çevrel çember yarıçapı 1 olan bir düzgün çokgendir. P_n 'nin alanınının çevresine oranının 0.25 den büyük olduğu en küçük n değerini bulunuz.

47. Herhangi bir üçgen kendisi ile benzer olan

    (a) 2002

    (b) 2003

    üçgene bölünebilir mi?

48. ABC üçgeninin içinde bir M noktası olsun. Bu üçgende $m(\widehat{BAC}) = 70°$, $m(\widehat{ABC}) = 80°$, $m(\widehat{ACM}) = 10°$ ve $m(\widehat{CBM}) = 20°$ olduğuna göre $|AB| = |MC|$ olduğunu gösteriniz.

49. $ABCD$ dörtgeni $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BDC}) = 36°$, $m(\widehat{CBD}) = 18°$ ve $m(\widehat{BAC}) = 72°$ olmak üzere bir dışbükey dörtgendir. AC ve BD köşegenlerinin kesiştiği nokta P olduğuna göre $\widehat{APD}$ açısının ölçüsünü bulunuz.

50. A ve B köşelerinden çizilen kenarortayların dik kesiştiği bir ABC üçgeninde en kısa kenarın AB olduğunu ispatlayınız.

51. ABC üçgeninde AB kenarının orta noktası M ve ABC açısının açıortayının AC kenarı ile kesiştiği nokta D olsun. $MD \perp BD$ ise, $|AB| = 3|BC|$ olduğunu gösteriniz.

52. Bir $ABCD$ dörtgenininde $m(\widehat{CAD}) = 45°$, $m(\widehat{ACD}) = 30°$ ve $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 15°$ olduğuna göre DBC açısının değeri nedir?

53. Bir dik üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı R, iç teğet çemberinin yarıçapı r olmak üzere

$$R \geq r(1+\sqrt{2})$$

olduğunu gösteriniz.

54. $|AC| = 6$, $|BC| = 2$ ve $m(\widehat{ACB}) = 120°$ olan bir ABC üçgeninin $\widehat{ACB}$ açısının açı ortayı AB kenarıyla D noktasında kesişiyor. Bu durumda CD doğru parçasının uzunluğunu bulunuz.

55. R çevrel çemberin yarıçapı olmak üzere, $R(b+c) = a\sqrt{bc}$ koşulunu sağlayan ABC üçgenini bulunuz.

56. Bir kenarı α olan ABC eşkenar üçgeninin dışına $m(\widehat{CAD}) = 90°$ olan ACD ikizkenar üçgeni çiziliyor. Burada DA ve CB kenarları E noktasında kesiştiğine göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

    (a) $\widehat{DBC}$ açısının ölçüsünü bulunuz.

    (b) CDE üçgeninin alanını α cinsinden bulunuz.

    (c) BD doğru parçasının uzunluğunu α cinsinden bulunuz.

57. Dar açılı bir ABC üçgeninde, BAC açısının açı ortayı, B köşesinden çizilen yükseklik ve AB kenarına ait kenar orta dikme bir noktada kesişmelerinin ancak ve ancak $m(\widehat{A}) = 60°$ olduğu zaman mümkün olduğunu kanıtlayınız.

58. Birim kareye sığabilecek en büyük yarım dairenin alanını bulunuz.

59. ABC, $|AC| = |BC|$ olacak şekilde bir ikizkenar üçgen olsun. Bu üçgenin çevrel çemberinin, C noktasını içermeyen AB yayının üzerindeki bir noktaya P noktası diyelim. C noktasından PB doğru parçası üzerine indirilen dikme ayağına ise D noktası diyelim. Bu durumda,

$$|PA| + |PB| = 2|PD|$$

olduğunu gösteriniz.

60. Kenarları $1, 1, \sqrt{2}$ olan ikizkenar diküçgen biçimindeki bir tahta parçası iki parçaya bölünecektir. İki parçanın alanını eşit yapacak en kısa kesitin yerini ve uzunluğunu ve bulunuz.

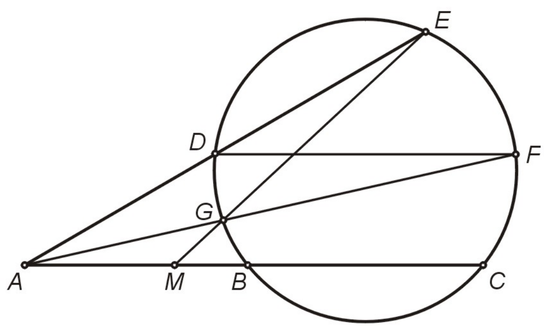
61. ABC ikizkenar üçgeninin, sırasıyla eşkenarlar AB ve AC üzerinde P ve Q noktaları, $|AP| = |CQ|$ olacak şekilde bulunmaktadır. Bununla birlikte P ya da Q, ABC üçgeninin bir köşesi değildir. Bu durumda APQ üçgeninin çevrel çemberinin ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezinden geçtiğini gösteriniz.

62. Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası M olmak üzere AB kenarını P noktasında, CD kenarını Q noktasında kesen ve M noktasından geçen g doğrusu dikkate alındığında APM, BPM, CQM ve DQM üçgenleri benzer olan bütün konveks $ABCD$ dörtgenleri bulunuz (üçgenlerin köşeleri aynı sırada olmak zorunda değil).

63. Bir çembere dışındaki bir A noktasından çizilen iki doğru, çemberi sırasıyla B, C ve D, E noktalarında kesmektedir. ($B \in [AC]$ ve $D \in [AE]$ dir.) D noktasından $[BC]$ ye çizilen paralel, çemberi F noktasında kesmektedir. A ve F noktalarından geçen doğrunun çemberi kestiği ikinci nokta G olsun. E, G noktalarından geçen doğru, $[AC]$ yi M noktasında kestiğine göre

$$\frac{1}{|AM|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$$

olduğunu kanıtlayınız.



64. ABC bir eşkenar üçgen ve P, çapı BC kenarı olan A köşesinden uzak olan yarımdairedir. A köşesinden geçen ve BC yi üç eş parçaya ayıran doğruların P yarımdairesini de üç eş parçaya ayırdığını gösteriniz.

65. Dikdörtgen şeklindeki bir kağıt, köşegen oluşturan iki köşesi üst üste gelecek şekilde katlanıyor. Kat yerinin oluşturduğu yeni kenarın (üst üste gelen köşelerin karşısındaki

kenar) uzunluğu, dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğuna eşitse dikdörtgenin uzun kenarının kısa kenarına oranı nedir?

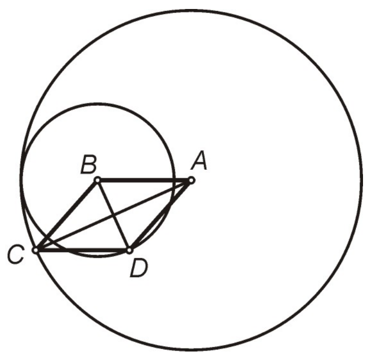
66. $ABCD$ karesi ile $ABEF$ karesinin bulunduğu düzlemler birbirlerine diktir. AE ve BF doğruları O noktasında kesişiyor ve $|AE| = 4$ cm ise

(a) B noktasından DOC ve DAF düzlemlerinin kesiştiği doğruya olan uzaklığını

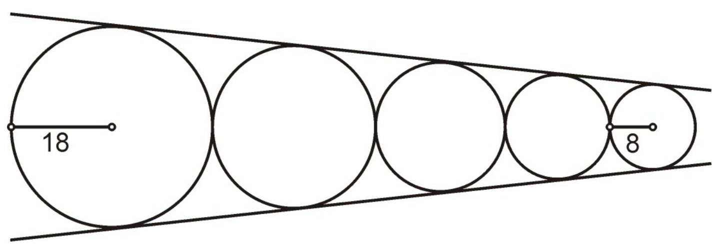
(b) AC ve BF doğruları arasındaki uzaklığı

bulunuz.

67. Çevresi 40 cm olan $ABCD$ eşkenar dörtgeninin A köşesini merkez olarak alan çember C, B köşesini merkez olarak alan çember ise D noktasından geçmektedir. Bu iki çember birbirlerine teğet ise, $ABCD$ eşkenar dörtgeninin alanı kaç cm^2dir?

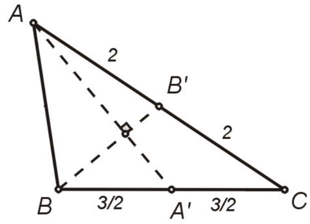


68. Değişik boyutlardaki beş bilye konik biçimindeki bir huniye koyuluyor. Her bilye bitişiğindeki bilyelerle ve huni yüzeyiyle temas halindedir.



En küçük bilyenin yarıçapı 8, en büyük bilyenin yarıçapı 18 milimetredir. Ortadaki bilyenin yarıçapını bulunuz.

69. ABC üçgeninin AA' ve BB' kenarortaylarının dik kesiştiklerini varsayalım. $|BC| = 3$ ve $|AC| = 4$ ise, AB kenarının uzunluğu ne olur?



70. $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olan bir ABC üçgeninde P, $P \neq B$ olan $|AB|$ üzerinde bir nokta ve Q, A dan çizilen yükseklik üzerinde $|PQ| = |QC|$ olacak şekilde bir nokta olsun. $m(\widehat{QPC})$ kaçtır ?

71. **a** Kenarı a olan ABC eşkenar üçgeni veriliyor. $MP \perp AB$, $NM \perp BC$, $PN \perp AC$ olmak üzere $P \in [AB]$, $M \in [BC]$, $N \in [AC]$ noktalarının oluşturduğu MNP üçgeni için MP uzunluğunu bulunuz.

    b Her ABC dar açılı üçgeni için $MP \perp AB$, $NM \perp BC$, $PN \perp AC$ olacak şekilde $P \in [AB]$, $M \in [BC]$, $N \in [AC]$ noktalarının bulunabileceğini gösteriniz.

72. BAC açısı sabit kalmak üzere, B ve C noktaları sabit, A noktası değişkendir. Burada AB ve AC kenarlarının orta noktaları sırasıyla D ve E noktaları olsun. Ayrıca $DF \perp AB$, $EG \perp AC$ ve BF ile CG doğruları BC doğrusuna dik olacak şekilde F ve G noktaları olsun. Bu durumda $|BF|.|CG|$ çarpımının A noktasının seçiminden bağımsız olduğunu gösteriniz.

73. Bir dikdörtgenin kenarları oranı $12 : 5$ tir. Köşegenlerin oluşturduğu 4 üçgenden bir kenarı komşu olanların içine çizilen çemberlerin yarıçapları r_1 ve r_2 olmak üzere $r_1 : r_2$ oranını bulunuz.

74. Çapı $\overline{AB}$ merkezi S olan yarıçember üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan C ve D noktaları verilsin.

    i C noktası AD yayı üzerindedir,

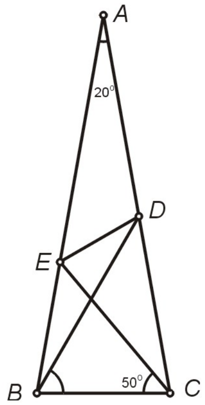
    ii CSD açısı dik açıdır.

    E noktası AC ve BD doğrularının kesişim noktası ve F noktası AD ve BC doğrularının kesişim noktası ise $|EF| = |AB|$ olduğunu gösteriniz.

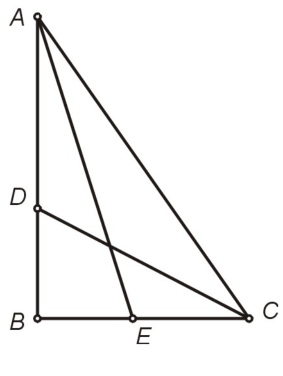
75. Bir üçgenin içindeki noktalardan kenara uzunlukları çarpımı en büyük noktanın ağırlık merkezi olduğunu gösteriniz.

76. $|AB| = |BC|$ ve $|CD| = |DA|$ olan $ABCD$ dörtgeninin AC ve BD köşegenlerinin kesiştiği nokta O noktası olsun. Ayrıca, ABD üçgeninin D köşesinden inen yüksekliğin ayağına N, BCD üçgeninin B köşesinden inen yüksekliğin ayağına K noktası diyelim. Bu durumda N, O ve K noktalarının bir doğru üzerinde olduğunu gösteriniz.

77. ABC ikizkenar ($|AB| = |AC|$) üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 20°$ dir . D noktası AC kenarının üzerinde, E noktası AB kenarının üzerinde, $m(\widehat{DBC}) = 60°$ ve $m(\widehat{ECB}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{EDB})$ yi bulunuz.



78. AC kenarı, ABC dik üçgeninin hipotenüsüdür. D noktası AB kenarının ve E noktası da BC kenarının üzerindedir. $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DCA})$ ve $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EAC})$ dir. AE kenarının uzunluğu 9 ve CD kenarnn uzunluğu $8\sqrt{2}$ olduğuna göre AC kenarının uzunluğunu bulunuz.



79. A,B ve C birbirlerine olan uzaklıkları eşit olan ($|AB| = |AC| = |BC|$) üç şehirdir. A şehrinden 3 km, B şehrinden 4 km uzakta olan bir aracın C şehrine olan uzaklığı en çok kaç kilometre olabilir?

80. Bir Kenarı 6 olan eşkenar üçgenin içine çizilen çember üzerindeki herhangi bir T noktası için $|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = 45$ olduğunu gösteriniz.

81. $ABCD$ yamuğunda köşegenler O noktasında dik olarak kesişmektedir. M ve N, sırasıyla OA ve OB doğru parçaları üzerinde $m(\widehat{ANC}) = m(widehatBMD) = 90°$ olacak şekilde noktalardır. E, MN doğru parçasının orta noktası ise

(a) OMN ve OBA üçgenlerinin benzer üçgenler olduklarını

(b) OE doğru parçasının AB 'ye dik olduğunu

gösteriniz.

82. G kapalı dörtgeni için

(a) Eğer üzerinden geçen her doğrunun G 'yi eşit iki alana ayırdığı bir X noktası varsa G bir paralelkenardır.

(b) Eğer G bir paralelkenarsa, üzerinden geçen her doğrunun G 'yi eşit iki alana ayırdığı bir X noktası vardır.

önermelerini ispatlayınız.

83. ABC dik üçgeninde $|AB| = |AC|$. $[AB]$ üzerinde $|AM| = |BP|$ olacak şekilde M ve P noktaları alalım. D noktası da $[BC]$ nin orta noktası olmak üzere, $[CM]$ ve $[BC]$ üzerinde sırasıyla R ve Q noktaları, A, R, Q doğrusal ve AQ ile CM dik olacak şekilde alınmıştır.

a-) $m(\widehat{AQC}) = m(\widehat{PQB})$

b-) $m(\widehat{DRQ}) = 45°$

olduğunu ispatlayınız.

84. ABC üçgeninin BC kenarının üzerindeki D ve E noktaları, (D, B'ye daha yakın); AC kenarının üzerindeki F ve G noktaları, (F, C'ye daha yakın); AB kenarının üzerindeki H ve K noktaları, (H, A'ya daha yakın) verilmiştir. $|AH| = |AG| = 1$, $|BK| = |BD| = 2$, $|CE| = |CF| = 4$, $m(\widehat{ABC}) = 60°$ olup D, E, F, G, H, K noktaları bir çember üzerindedir. Buna göre ABC üçgeninin iç teğet çemberinin yarı çapını bulunuz.

85. Köşeleri r yarıçaplı bir çemberin üzerinde olan tüm $ABCD$ dörtgenlerini ve $|CB| = |BP| = |PA| = |AB|$ olacak şekilde $[CD]$ kenarı üzerinde bir P noktası düşünelim.

a) Yukarıdaki koşulu sağlayan A, B, C, D, P noktalarının varlığını gösteriniz.

b) Yukarıdaki koşulu sağlayan tüm A, B, C, D, P noktaları için $|DA| = |DP| = r$ olduğunu kanıtlayınız.

86. ABC üçgeni, A noktasında dik açılıdır. D noktası, $CD = 1$ olacak şekilde AB kenarının üzerindedir. AE, A noktasından BC kenarına olan dik yüksekliktir. $BD = BE = 1$ ise, AD kenarının uzunluğu nedir?

87. $|AB| = |AC|$ olacak şekilde bir ABC üçgeninde D, A köşesinden inilen dikmenin ayağıdır. E noktası ise AB kenarı üzeriden bir nokta, $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ECB}) = 18^\circ$ ve $|AD| = 3$ ise $|CE| =?$

88. Eşkenar üçgenin içindeki bir noktanın köşelere uzaklıkları 3, 4 ve 5 ise üçgenin alanını bulunuz.

89. Kenar uzunlukları ve içteğer çemberinin çapı aritmetik dizi oluşturan üçgenin diküçgen olduğunu ispatlayınız.

90. $\widehat{pOq}$ açısı içinde yer alan S noktası, Op doğrusuna P noktasında, Oq doğrusuna ise Q noktasında teğet olan bir k çemberinin üzerinde bulunmaktadır. Op doğrusuna paralel olan ve S noktasından geçen s doğrusu ise Oq doğrusunu R noktasında kesmektedir. T noktası ise SQR üçgeninin çevrel çemberi ile PS doğrusunun kesiştiği noktadır ($T \neq S$). Bu durumda $OT//SQ$ olduğunu ve OT doğrusunun SQR üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

91. $ABCD$ dört yüzlüsünün ağırlık merkezi ile A ve B köşeleri arasındaki uzaklık eşit olduğuna göre

$$|AC|^2 + |AD|^2 = |BC|^2 + |BD|^2$$

olduğunu gösteriniz.

92. ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC, CA ve AB kenarlarına sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 noktalarında değiyor. Bu durumda $A_1B_1C_1$ üçgeninin açılarını ABC üçgeninin açıları cinsinden ifade ediniz.

93. p ve q yarıdoğruları O noktasında kesişiyorlar. A ve C noktaları p üzerinde, B ve D noktaları q üzerinde olmak üzere, CD doğrusu OAB üçgeninin A köşesinden çizilen kenarotayına paralel olduğuna göre AB kenarının OCD üçgeninin D köşesinden çizilen kenarortayına paralel olduğunu gösteriniz.

94. Bir ABC üçgeninde, $|AB| = |AC|$, D noktası $[BC]$ nin orta noktası olsun. M, $[AD]$ nin orta noktası ve N noktası D noktasının $[BM]$ üzerindeki dik izdüşümü olmak üzere, $m(\widehat{ANC}) = 90^\circ$ olduğunu kanıtlayınız.

95. ABC, $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ ve $|AB| = |AC|$ olacak şekilde bir üçgen olsun. BC kenarı üzerindeki N noktası ise, yine BC kenarı üzerindeki M noktası ve C noktasının arasında olacak şekilde ve

$$|BM|^2 - |MN|^2 + |NC|^2 = 0$$

eşitliğini sağladığına göre, $m(\widehat{MAN}) = 45^\circ$ olduğunu gösteriniz.

96. Dar açılı ABC üçgeninin AC ve BC kenarlarının dış tarafında $ACXE$ ve $CBDY$ kareleri bulunmaktadır. Bu durumda AD ve BE doğrularının kesiştiği noktanın, ABC üçgeninin C noktasından inen yüksekliği üzerinde olduğunu gösteriniz.

97. Bir dışbükey $ABCD$ dörtgeninin iç teğet çemberinin merkezi I olsun. $m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{ABC})/2$ olacak şekilde, $[AI]$ ve $[CI]$ doğru parçaları üzerinde, sırasıyla, M ve N noktaları seçilsin. $m(\widehat{MDN}) = m(\widehat{ADC})/2$ olduğunu kanıtlayınız.

98. Kenar uzunlukları a, b, c br olan bir üçgende $\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < 2$ olduğunu kanıtlayınız.

99. Kare şeklindeki tarlanın içine yerleştirilmiş bir karınca, tarlanın köşelerinin birinden 13 metre, bu köşenin çapraz olarak karşısındaki köşeden 17 metre ve üçüncü bir köşeden de 20 metre uzaklıktadır. Tarlanın alanını bulunuz. Burada, arazinin düzgün olduğu varsayılmaktadır.

100. İkizkenar bir ABC üçgeninin ($|AB| = |AC|$) AB kenarı üzerinde BCD açısı $15°$ olacak şekilde bir D noktası yer almaktadır. $|AD| = 1$ birim ve $|BC| = \sqrt{6}$ birim ise CAB açısının ölçüsü kaç derecedir?

101. $n \geq 4$ olmak kaydıyla, her pozitif n tam sayısı için, herhangi bir üçgenin n ikizkenar üçgene ayrılabileceğini gösteriniz.

102. ABC üçgeninin yükseklikleri $h_a \geq 3$ cm, $h_b \geq 4$ cm ve $h_c \geq 5$ cm eşitsizliklerini sağladığına göre, bu üçgeninin alanının mümkün olan en küçük değerini bulunuz.

103. ABC üçgeninde A açısının açıortayı, ABC üçgeninin çevrelçemberi ile A_1 noktasında kesişiyor. Aynı şekilde B açısının açıortayı çevrelçemberi B_1 noktasında, C açısının açıortayı da C_1 noktasında kesiyor. AA_1 doğrusu B ve C köşelerindeki dış açıların açıortayları ile $A°$ noktasında kesişiyor. $B°$ ve $C°$ noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor.

$$\begin{aligned} Alan(A°B°C°) &= 2 \cdot Alan(AC_1BA_1CB_1) \\ &\geq 4 \cdot Alan(ABC) \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

104. AC kenarı AB kenarından uzun olan bir ABC üçgeni verilsin. $BX = CA$ olacak şekilde BA kenarını A yönünde uzatalım. $CY = BA$ olacak şekilde CA kenarı üzerinde Y noktasını alalım. BC kenarının orta dikmesinin XY doğrusu ile kesiştiği yere P diyelim. $m(\widehat{BPC}) + m(\widehat{BAC}) = 180°$ olduğunu gösteriniz.

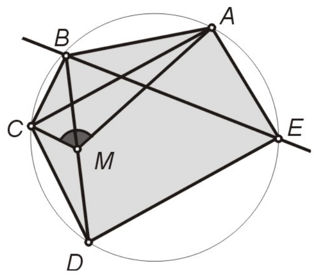
105. ABC ikizkenar ($|AB| = |AC|$) üçgeni veriliyor. $B \in |MC|$ olacak şekilde bir M noktası seçiliyor. AMB üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı ile AMC üçgeninin

M köşesine karşılık gelen dış teğet çemberinin yarıçapı toplamının sabit olduğunu ispatlayınız.

106. ABC dar açılı bir üçgendir. BC kenarı üzerinde bir D noktası alalım. E ve F noktaları da sırasıyla, D noktasının AB ve AC kenarlarına dik izdüşümü olsun. BF ve CE doğrularının keşiştiği noktaya da P diyelim. AD doğrusunun BAC üçgeninin açıortayı olmasının ancak ve ancak AP ve BC doğrularının birbirine dik olması durumunda olduğunu gösteriniz.

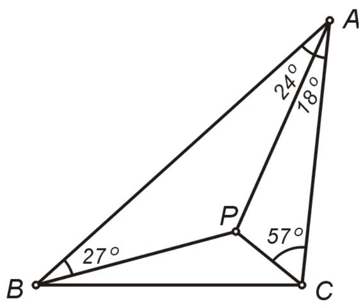
107. İki benzer üçgenin tam sayı değerli kenar uzunluklarının ikisi birbirine eşit olsun. Üçüncü kenarlarının farkı 20141 ise, bütün kenarlarını bulunuz.

108. Köşeleri bir çemberin üzerinde bulunan $ABCDE$ beşgeninde , $AC||DE$ ve M, BD doğru parçasının orta noktasıdır. $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BMC})$ olduğunda BE nin AC yi iki eşit parçaya ayırdığını gösteriniz.



109. ABC üçgeni, A noktasında dik açılı olsun. A köşesinden çizilen açıortay BC kenarını, D noktasında kessin. Dolayısıyla, $s(\widehat{DAB}) = 45°$ olur. $|CD| = 1$ ve $|BD| = |AD| + 1$ ise, AC ve AD uzunluklarını bulunuz.

110. ABC üçgeni içerisinde PAC açısı 18°, PCA açısı 57° , PAB açısı 24° ve PBA açısı 27° olacak şekilde bir P noktası olduğuna göre, ABC üçgeninin ikizkenar olduğunu gösteriniz.



111. Dar açılı bir üçgenin iç açılarını A, B ve C ile gösterelim.

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C &> 2\\ \cos A+\cos B+\cos C &> 1\\ \tan(\frac{A}{2})+\tan(\frac{B}{2})+\tan(\frac{C}{2}) &< 2\end{aligned}$$

eşitsizliklerini gösteriniz.

112. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 60°$ ve $|AB| \neq |AC|$ olsun. Ayrıca $\widehat{BAC}$ açısının açı ortayı AD doğrusu ve AD doğrusuna A noktasında dik olan ϵ doğrusunun BC ile kesiştiği nokta, $|BE| = |AB| + |AC|$ şartını sağlayan E noktası olsun.

Bu durumda ABC üçgeninin $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{BCA}$ açılarını bulunuz.

113. Kenar uzunlukları $1, 2, 3$ ve 4 birim olan bir dörtgenin alanının en büyük değeri nedir?

114. AB ve CD kenarları paralel olan bir $ABCD$ yamuğunda $\mathrm{m}(\widehat{DAB}) = 6$ ve $\mathrm{m}(\widehat{ABC}) = 42$ dir.AB kenarında $\mathrm{m}(\widehat{AXD}) = 78$ ve $\mathrm{m}(\widehat{CXB}) = 66$ olacak şekilde bir X noktası bulunmaktadır. $|AB|$ ve $|CD|$ doğru parçaları arasındaki uzaklık 1 ise $AD + DX - (BC + CX) = 8$ olduğunu gösteriniz.

115. Bir ABC eşkenar üçgeni verilsin. Ağırlık merkezi G olsun. M noktası herhangi bir iç nokta olmak üzere, $|MG|$ nin orta noktası O olsun. M noktasından geçen uç noktaları ABC üçgeninin kenarları üzerinde olan kenarlara paralel doğru parçaları çizilsin.

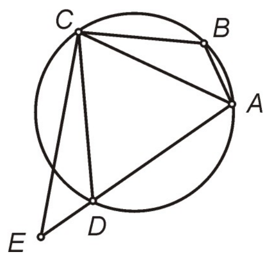
a. O noktasının doğru parçalarının orta noktalarına uzaklılarının eşit olduğunu gösteriniz.

b. Doğru parçalarının orta noktalarının bir eşkenar üçgenin köşeleri olduğunu gösteriniz.

GEOMETRİ-ÇÖZÜMLER

1. $ABCD$ kirişler dörtgeninde AC köşegeni $\widehat{DAB}$ açısının açı ortayıdır. Bu dörtgende AD kenarı D noktasının ötesindeki bir E noktasına uzatılıyor. Bu durumda $|CE| = |CA|$ eşitliğinin ancak ve ancak $|DE| = |AB|$ eşitliği sağlandığında doğru olduğunu gösteriniz.

   Çözüm.

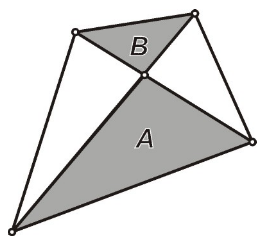
   $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAB})$ olduğundan ve çember üzerinde eşit açıların oluşturdukları yayların uzunlukları da birbirine eşit olacağından, $|BC| = |CD|$ elde ederiz. Ayrıca çemberin içindeki dörtgende karşılıklı açıların toplamı 180° olacağından $m(\widehat{EDC}) = 180° - m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{ABC})$ buluruz.

   $|DE| = |AB|$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda "Kenar-Açı-Kenar"dan dolayı ABC ve EDC üçgenleri eş üçgenler olur ve $|CE| = |CA|$ elde edilir.

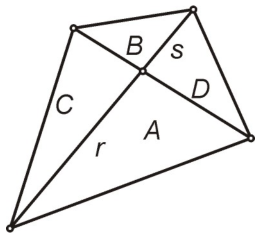
   Şimdi $|CE| = |CA|$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda CAE üçgeni ikizkenar üçgen olur ve $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{CEA})$ elde edilir. "Açı-Açı-Açı"dan dolayı ABC ve EDC üçgenleri eş üçgenler olur ve $|DE| = |AB|$ bulunur.

   Sonuç olarak bu iki durum birleştirildiğinde, $|DE| = |AB| \Leftrightarrow |CE| = |CA|$ olduğu görülür.

2. Köşegenlerle dört üçgene bölünmüş olan bir yamuğun paralel kenarlarına komşu olan üçgenlerin alanlarına A ve B diyelim. Bu durumda yamuğun alanını A ve B cinsinden bulunuz.

Çözüm. Sorunun çözümünde üçgenin alanının $1/2 \times$ taban $\times$ yükseklik olduğunu kullanacağız ancak burada unutulmaması gereken konu, tabanın, üçgenin herhangi bir kenarı olabileceği, ve yüksekliğin bu kenarın karşısındaki köşeden, kenarın üzerine (ya da bir uzantısına) indirilen dikme olduğudur.

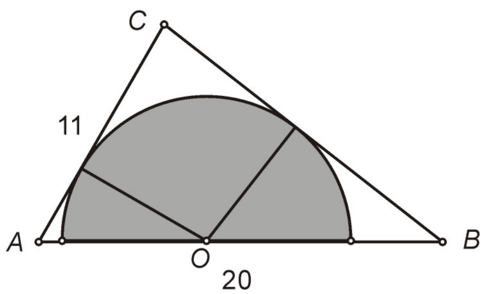


Şimdi, tabanları r ve s olan, ve alanları C ve B olan üçgenleri düşünelim. Bu iki üçgenin yükseklikleri aynı olduğu gibi tabanları da çakışıktır. Dolayısıyla $\frac{r}{s} = \frac{C}{B}$ olur. Benzer şekilde $\frac{r}{s} = \frac{A}{D}$ olur. Bu iki denklemi birleştirerek $AB = CD$ buluruz. Ayrıca, alanları $A+C$ ve $A+D$ olan üçgenleri düşünürsek, bu üçgenler aynı tabana, ve eşit yüksekliğe sahip olduklarından, $A + C = A + D$, yani $C = D$ bulunur.

Bunu daha önce bulduğumuz $AB = CD$ denkleminde yerine yazarsak, $C = D = \sqrt{AB}$ elde ederiz.

Sonuç olarak, yamuğun alanı $A + B + C + D = A + B + 2\sqrt{AB} = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$ olarak bulunur.

3. Şekildeki gibi bir ABC üçgeninde $|AB| = 20$ cm, $|AC| = 11$ cm ve $|BC| = 13$ cm dir. ABC üçgeni içerisine merkezi $|AB|$ kenarı üzerinde yer alan bir yarım daire çiziliyor. Yarım daire $|AC|$ ve $|CB|$ kenarlarına teğet olduğuna göre yarı çemberin çapı kaç cm dir?



Çözüm. Bu problemin çözümünü iki yolla yapabiliriz:
1)Açıortay teoremini kullanarak:
Öncelikle $|AB|$ doğru parçası üzerindeki yarım dairenin merkezine O, yarım dairenin $|AC|$ kenarına teğet olduğu noktaya E, yarım dairenin $|CB|$ kenarına teğet olduğu noktaya D diyelim ve $|OE|$ ve $|OD|$ doğru parçalarını çizelim.

$|CE|$ nin $|CD|$ ye eşit olduğu açıktır. Ayrıca, yarı çap olduklarından, $|OE|$ ve $|OD|$ de birbirlerine eşittir. Dolayısıyla ODC ve OEC üçgenleri eş üçgenlerdir. O halde ACO ve BCO açıları da eşittir. Bu durumda OC, $\widehat{BAC}$ açısının açıortaydır. ABC üçgeni için açıortay teoremini yazarsak

$$\begin{aligned} \frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{|AO|}{|BO|} \\ \frac{11}{13} &= \frac{|AO|}{20-|AO|} \end{aligned}$$

olur. Buradan $13|AO| = 11(20-|AO|)$ ve $|AO| = \frac{55}{6}$ elde edilir.

Şimdi de ABC ügenine kosinüs teoremini uygularsak $13^2 = 11^2 + 20^2 - 2 \cdot 11 \cdot 20 \cdot \cos A$ dan $\cos A = \frac{4}{5}$ elde edilir. Buradan da $\sin A = \frac{3}{5}$ olarak bulunur.

OEA üçgeninde $sin\ A = \frac{|OE|}{|AO|}$ olduğundan $|OE| = \frac{3}{5} \cdot \frac{55}{6} = \frac{11}{2}$ olur. Dolayısıyla yarım dairenin çapı 11 cm bulunur.

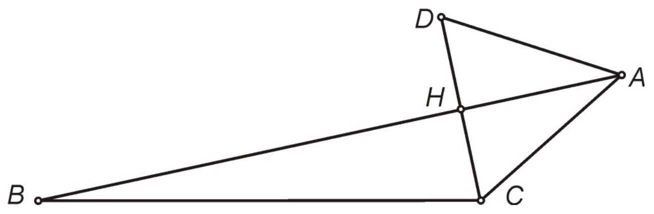
2)Üçgenin alanını kullanarak:
Heron formülünden üçgenin alanı $\sqrt{22(22-11)(22-13)(22-20)} = 66$ olarak bulunur. Yarım dairenin yarı çapına r dersek, AOC üçgeninin alanı $\frac{11r}{2}$, BCO üçgeninin alanı da $\frac{13r}{2}$ olur.

$$66 = \frac{11r}{2} + \frac{13r}{2} = 12r$$

Buradan da $r = \frac{11}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla yarım dairenin çapı 11 cm dir.

4. $|BC| = 7$, $|AC| = 3$ ve $m(\widehat{BAC}) = 30°$ olan bir ABC üçgeninde $|AB|$ kaçtır ?

Çözüm ABC üçgenini şekildeki gibi çizelim ve C noktasından AB kenarına inilen dikmenin ayağına H diyelim. C noktasının H ye göre simetiriği D noktası olsun. AHC ve AHD üçgenleri eştir.



$m(\widehat{CAB}) = 30°$ olduğu için $\widehat{ACH}$ açısı 60 derecedir. Yani, ACD üçgeni eşkenardır. Dolayısıyla, $|CH| = \dfrac{1}{2} \cdot |CD| = \dfrac{3}{2}$ dir. Pisagor teoreminden

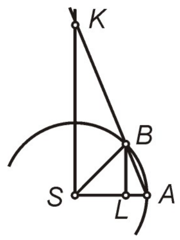
$$|AB| = |AH| + |HB| = \sqrt{|AC|^2 - |CH|^2} + \sqrt{|BC|^2 - |CH|^2}$$

$$= \sqrt{3^2 - (\frac{3}{2})^2} + \sqrt{7^2 - (\frac{7}{2})^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{187}{4}} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + \sqrt{187})$$

bulunur.

5. Merkezi S ve yarıçapı $r = 2$ olan bir çemberde, 45° açı ile kesişen iki yarıçap SA ve SB verilsin. AB doğrusu ile AS doğrusunun S noktasındaki dikmesi K noktasında kesişsinler. ABS üçgeninde B köşesinden inilen dikme AS kenarını L noktasında kessin. $SKBL$ yamuğunun alanını bulunuz.

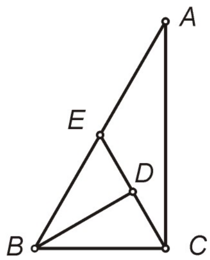
Çözüm



BSL açısı 45° olduğu için SLB üçgeni ikizkenar dik üçgendir.
BS yarıçapı 2 olduğu için $|SL| = |BL| = \sqrt{2}$ dir.
KSA üçgeni BLA üçgenine benzer olduğu için $\frac{|KS|}{|SA|} = \frac{|BL|}{|LA|}$ yazılabilir. Buradan $|KS| = \sqrt{2}(2 + \sqrt{2})$ bulunur.
Sonuç olarak $SKBL$ yamuğunun alanı $= \frac{|KS|+|BL|}{2}.|SL| = 3 + \sqrt{2}$ bulunur.

6. $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$ olan bir ABC dik üçgeninin hipotenüsünün uzunluğu 10 cm, $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$'dir. Üçgenin içinde bir D noktası, $m(\widehat{BDC}) = 90^\circ$ ve $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DBA})$ olacak şekildedir. AB kenarıyla CD doğrusunun kesiştiği nokta ise E noktasıdır. Bu durumda $|AE|$ doğru parçasının uzunluğu nedir?

Çözüm.



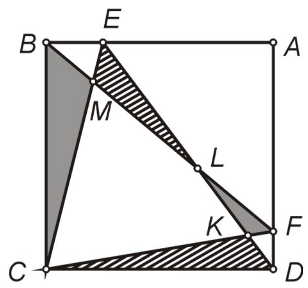
ABC üçgeni bir $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ üçgeni olduğundan $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$ olur. $m(\widehat{ACD}) = \varphi$ olsun. Bu durumda $m(\widehat{DCB}) = 90^\circ - \varphi$ ve

$$m(\widehat{CBD}) = 180^\circ - m(\widehat{BDC}) - m(\widehat{DCB}) = \varphi$$

bulunur. Şimdi, $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DBA}) = \varphi$ olduğundan, $60° = m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{CBD}) = 2\varphi$ yani $\varphi = 30°$ olarak bulunur. Buradan da $m(\widehat{CBE}) = 60°$ ve $m(\widehat{ECB}) = m(\widehat{DCB}) = 90° - \varphi = 60°$ olduğu için, EBC üçgeninin eşkenar üçgen olduğu görülür. Dolayısıyla, $|EB| = |BC| = \frac{1}{2}|AB|$ ve $|AE| = |AB| - |EB| = \frac{1}{2}|AB| = 5$ cm'dir.

7. $ABCD$ karesinin AB kenarı üzerinde, $|AE| = 3|EB|$ olacak şekilde bir E noktası, DA kenarı üzerinde ise, $|AF| = 5|FD|$ olacak şekilde bir F noktası bulunmaktadır. DE ve FC doğru parçalarının kesiştiği nokta K, DE ve BF doğru parçalarının kesiştiği nokta L, FB ve EC doğru parçalarının kesiştiği nokta ise M noktası olsun. Bu durumda EML ve DKC üçgenlerinin alanlarının toplamı p_1, FLK ve MBC üçgenlerinin alanlarının toplamı p_2 ise, $p_1 : p_2$ oranı nedir?

Çözüm. $CKLM$ dörtgeninin alanına p dersek, FBC üçgeninin alanı $p_2 + p$ olur.



FBC üçgeninde BC kenarını taban kabul eden yükseklik ise AB olduğundan üçgenin alanı aynı zamanda $\frac{|AB|\cdot|BC|}{2} = \frac{|AB|^2}{2}$ olarak yazılabilir. Buradan da,

$$p_2 = \frac{|AB|^2}{2} - p$$

denklemi bulunur.

Benzer şekilde DEC üçgeninin alanının $p_1 + p$ olduğunu görebiliriz. Bu durumda da $\frac{|DC|\cdot|CB|}{2} = \frac{|AB|^2}{2}$ olduğundan,

$$p_1 = \frac{|AB|^2}{2} - p$$

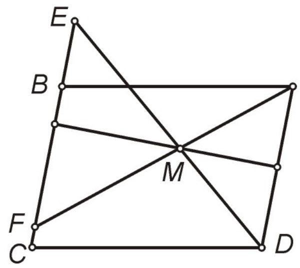
denklemi bulunur. Dolayısıyla $p_1 : p_2$ oranı 1'dir.

8. $ABCD$ paralelkenarında ADC açısının açıortayı BC kenarını E noktasında, AD kenarını dik kesen ve iki eşit parçaya bölen doğru parçasını M noktasında kesmektedir. Eğer AM ve BC doğruları F noktasında kesişiyorsa

(a) $|DE| = |AF|$

(b) $|AD| \cdot |AB| = |DE| \cdot |DM|$

olduğunu ispatlayınız.



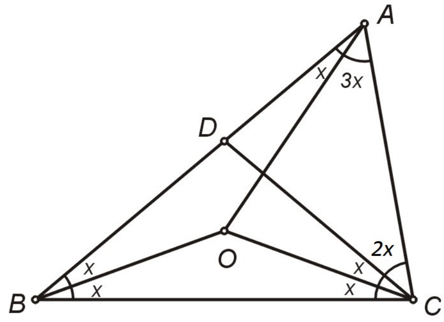
(a) AMD üçgeninde AD kenarının kenarortayı bu kenarı dik kestiği için bu üçgen ikizkenardır ve $|AM| = |MD|$ olur. O halde $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{ADM})$ 'dir. BC ve AD paralel doğru parçaları olduğundan $m(\widehat{MEF}) = m(\widehat{ADM})$ ve $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{EFM})$ 'dir. Buradan MEF üçgeninin de ikizkenar olduğu bulunur. Yani $|EM| = |FM|$ 'dir.
Buradan
$$|AF| = |AM| + |MF| = |DM| + |ME| = |DE|$$
bulunur.

(b) $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{MEF})$ ve $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{MDA})$ olduğundan MAD ve DEC üçgenleri benzer üçgenlerdir. Buradan
$$\begin{aligned} \frac{|DE|}{|DA|} &= \frac{|DC|}{|DM|} \\ |DA| \cdot |DC| &= |DM| \cdot |DE| \end{aligned}$$
elde edilir. $|DC| = |BA|$ olduğundan $|DA| \cdot |BA| = |DM| \cdot |DE|$ bulunur.

9. ABC üçgeninde $m(\widehat{ACB})$ açısının iç açıortayı AB'yi D noktasında kesmektedir. Eğer ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi ile BCD üçgeninin içteğet çemberinin merkezleri çakışıksa $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

A, B, C ve D köşelerini O noktasıyla birleştirelim. ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olduğu için $|AO| = |BO| = |CO|$ olur. Aynı nokta DCB üçgeninin iç teğet çemberi olduğu için de DO, BO ve CO açıortay olur.
$|CO| = |BO|$ olduğundan $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB})$ olur. $m(\widehat{OCB}) = x$ diyelim. O halde $m(\widehat{ABC}) = 2x$, $m(\widehat{BAO}) = x$ olacaktır. CO ve CD açıortaylar olduğundan $m(\widehat{BCD}) = 2x$ ve $m(\widehat{BCA}) = 4x$ olur. $|AO| = |CO|$ olduğundan da $m(\widehat{OAC}) = 3x$ dir. Buradan $m(\widehat{BAC}) = 4x$ elde edilir.



ACD ve ABC üçgenlerinde Açı-Açı-Açı benzerliği vardır. Bu benzerlik kullanılarak

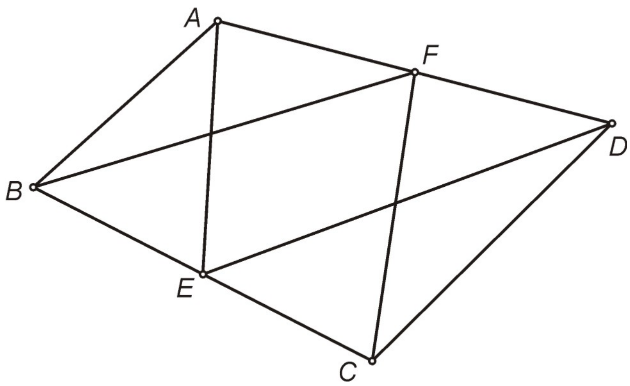
$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$$

bulunur.

10. Bir $ABCD$ dörtgeninde BC ve DA kenarlarının orta noktaları sırasıyla E ve F 'dir. EDA ve FBC üçgenlerinin alanları toplamının, $ABCD$ dörtgeninin alanına eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



DA kenarı BDA, EDA ve CDA üçgenlerinin ortak tabanı ve E, BC kenarının orta noktası olduğu için

$$Alan(EDA) = \frac{1}{2}\left(Alan(BDA) + Alan(CDA)\right)$$

olur. Benzer şekilde

$$Alan(FBC) = \frac{1}{2}\left(Alan(ABC) + Alan(DBC)\right)$$

'dir. Her iki eşitliği de taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned} Alan(EDA)+Alan(FBC) &= \frac{1}{2}\left(Alan(BDA)+Alan(DBC)+Alan(CDA)+Alan(ABC)\right) \\ &= \frac{1}{2}Alan(ABCD)+\frac{1}{2}Alan(ABCD) \\ &= Alan(ABCD) \end{aligned}$$

elde ederiz.

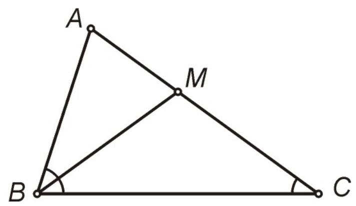
11. Bir ABC üçgeninde, $m(\widehat{ABC}) = 2m(\widehat{ACB})$ olduğuna göre,

(a) $|AC|^2 = |AB|^2 + |AB| \cdot |BC|$

(b) $|AB| + |BC| < 2|AC|$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. **(a)** $[BM], 376.jpg$ nin açıortayı olsun. Açı ortay teoreminden $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AM|}{|MC|}$, dolayısıyla $\dfrac{|AM|}{|AC|} = \dfrac{|AB|}{|AB|+|BC|}$ elde edilir ki bu da bize $|AM| = \dfrac{|AB|\cdot|AC|}{|AB|+|BC|}$ verir.



Öte yandan, $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{ACB})$ olduğu için, ABM ve ACB üçgenleri benzerdir. Buradan, $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AM|}{|AB|}$, ya da $|AM| = \dfrac{|AB|^2}{|AC|}$ bulunur.

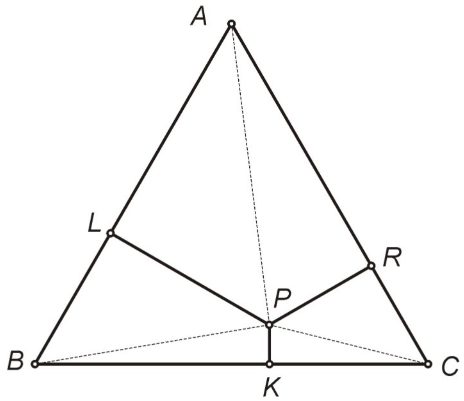
Şimdi $\dfrac{|AB|\cdot|AC|}{|AB|+|BC|} = \dfrac{|AB|^2}{|AC|}$ eşitliği düzenlenirse istenen sonuç elde edilir.

(b) ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R ve $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ olmak üzere, sinüs teoremini kullanarak istenilen eşitsizliği elde ederiz:

$$|AB|+|BC| = 2R\sin\alpha+2R\sin 3\alpha = 2R(sin\alpha+\sin 3\alpha) = 4R\sin 2\alpha\cos\alpha < 4R\sin 2\alpha = 2|AC|$$

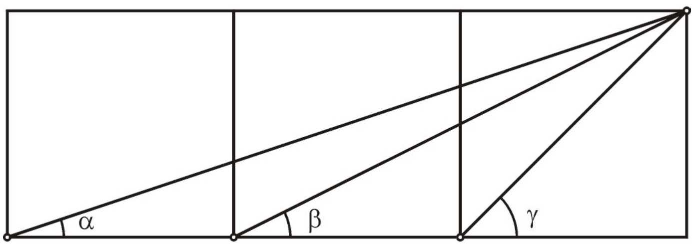
12. P noktası, kenar uzunluğu 10 olan bir eşkenar üçgenin iç bölgesinde yer almaktadır. P noktasının üçgenin iki kenarına olan dik uzaklıkları 1 ve 3 ise üçüncü kenara olan uzaklığı kaçtır?

Çözüm: Verilen üçgen ABC üçgeni, P noktasının AB,BC ve AC kenarlarına izdüşümleri de sırasıyla L,K ve R olsun. PL=1, $PR = 3$ alalım.



$$
\begin{aligned}
Alan(ABC) &= Alan(APB) + Alan(BPC) + Alan(CPA) \\
\frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} &= \frac{10 \cdot 1}{2} + \frac{10 \cdot |PK|}{2} + \frac{10 \cdot 3}{2} \\
25\sqrt{3} &= 5 + 5|PK| + 15 \\
25\sqrt{3} - 20 &= 5|PK| \\
5\sqrt{3} - 4 &= |PK|
\end{aligned}
$$

13. Şekilde bir dikdörtgen 3 kareye bölünmüştür. $\alpha + \beta = \gamma$ olduğunu gösteriniz.



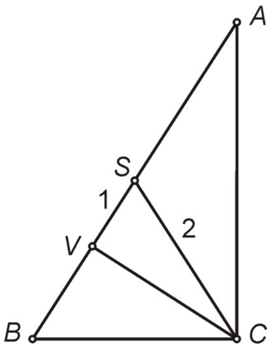
Çözüm:Şekilden $tan(\alpha) = \frac{1}{3}$, $tan(\beta) = \frac{1}{2}$ ve $tan(\gamma) = 1$ olduğu kolayca görülebilir. Buradan

$$
tan(\alpha + \beta) = \frac{tan(\alpha) + tan(\beta)}{1 - tan(\alpha)tan(\beta)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1 = tan(\gamma)
$$

bulunur.
$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ ve $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında tanjant fonksiyonu sürekli artan bir fonksiyon olduğundan elde edilen $tan(\alpha + \beta) = tan(\gamma)$ sonucu $\alpha + \beta = \gamma$ olduğunu gösterir.

14. C açısı dik olan ABC üçgeninde S, AB kenarının orta noktası, V ise AB kenarına inilen yüksekliğin ayağıdır. $|SV| = 1$ ve $|SC| = 2$ ise ABC üçgeninin açı ölçülerini bulunuz.

Çözüm:



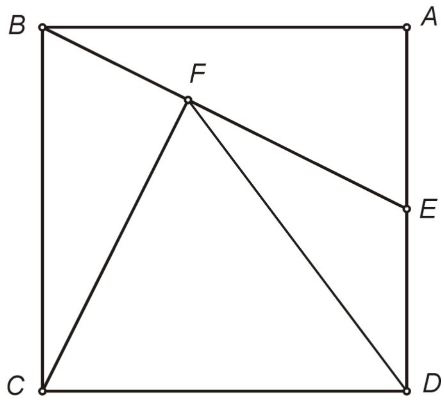
SVC dik üçgeninde $|SC| = 2|SV|$ 'dir. O halde $m(\widehat{VSC}) = 60°$ olur. S noktası, ABC üçganinin çevrel çemberinin merkezidir. Buradan SBC üçgeninin ikizkenar olduğu bulunur. $m(\widehat{SBC}) = \frac{1}{2}(180 - m(\widehat{VSC})) = 60°$. Buradan da $m(\widehat{CAB}) = 180 - 90 - 60 = 30°$ elde edilir.

15. Bir ABC üçgeninin A, B ve C köşelerinden inen dikmelerin uzunlukları sırasıyla, 5, 4 ve 4 dür. $|BC|$ kenarının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Üçgenin ikizkenar ve eşit kenarların $|AB| = |AC|$ olduğu açıktır. $Alan(ABC) = S$ olsun. BC nin orta noktası P olmak üzere $|AP| \cdot |BC| = S$ veya $|BP| = \frac{S}{5}$ yazılabilir. Benzer şekilde $AB = \frac{S}{2}$ olur. ABP dik üçgeni göz önüne alınarak $|AP|^{+}|BP|^2 = |AB|^2$ eşitliğinden $25 + \frac{S^2}{25} = \frac{S^2}{4}$ bulunur. Buradan da $S = \frac{50}{\sqrt{21}}$ ve $|BC| = \frac{20}{\sqrt{21}}$ elde edilir.

16. Kenar uzunluğu 2 olan bir $ABCD$ karesinde AD 'nin orta noktası E ve C' den BE 'ye inilen dikmenin ayağı F dir. $CDEF$ dörtgeninin alanını bulunuz.

Çözüm: BAE dik üçgeninde $|BE| = \sqrt{5}$ 'tir. CFB ve BAE üçgenlerin ben-



zerliğinden $Alan(CFB) = \left(\frac{CB}{BE}\right)^2 Alan(BAE) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \frac{1}{2}(2 \cdot 1) = \frac{4}{5}$ elde edilir. Dolayısı ile, $Alan(CDEF) = Alan(ABCD)Alan(BAE) - Alan(CFB) = 41\frac{4}{5} = \frac{11}{5}$ olur.

17. Yüksekliklerinden ikisi 5 ve 7 olan bir üçgenin üçüncü yüksekliğinin üst sınırını bulunuz.

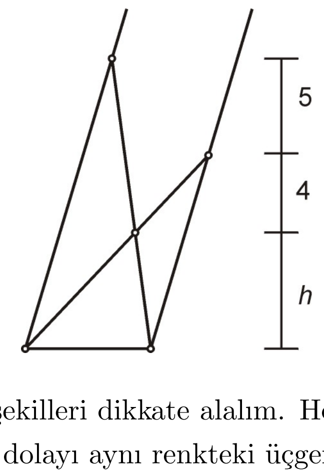
Çözüm: Üçgenin kenar uzunluklarını a, b ve c ile gösterelim. Uzunluğu a ve b olan kenarlara inilen dikmelerin uzunlukları sırasıyla 5 ve 7, diğer uzunluk da h olmak üzere $5a = 7b = hc$ olduğundan $\frac{a}{c} = \frac{h}{5}$ ve $\frac{b}{c} = \frac{h}{7}$ elde edilebilir. $a < b + c$ eşitsizliğini $\frac{a}{c} < \frac{b}{c} + 1$ biçiminde yazarsak $\frac{h}{5} < \frac{h}{7} + 1$ bulunur. Bu eşitsizlik çözülerek $h < 17.5$ bulunur.

18. Bir üçgenin kenarları a, b, c ve çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu R olsun. Eğer $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$ ise üçgenin açılarını bulunuz.

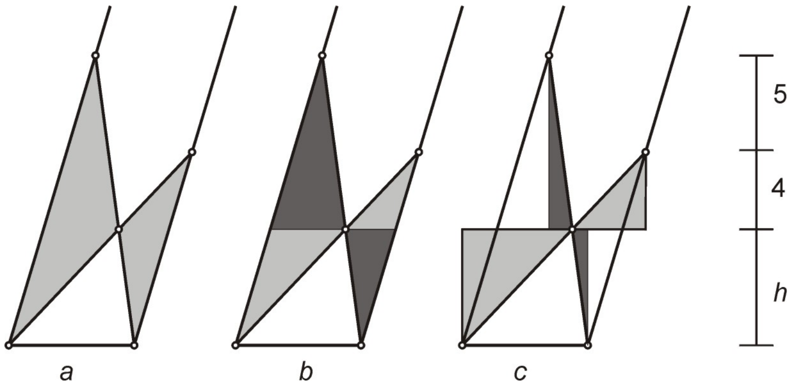
Çözüm. $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ olduğundan $\dfrac{\sqrt{bc}}{b+c} \leq \dfrac{1}{2}$ eşitsizliğini elde ederiz. Soruda verilen eşitliği kullanarak :
$\frac{R}{a} = \frac{\sqrt{bc}}{b+c} \leq \frac{1}{2}$ yani $a \geq 2R$ eşitsizliğini buluruz (bir üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğu çevrel çemberinin çapından büyük olamaz.).

Yani $a \leq 2R$dir ve buradan $a = 2R$ olduğunu görürüz.
Elimizdeki $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$ denklemindeki a yerine $2R$ koyarsak $1 = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}$ denklemini elde ederiz. Bu da $(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2$'nin açılımıdır. Buradan da $b = c$ bulmuş oluruz. Eğer $b = c$ ve $R = \frac{a}{2}$ ise bu üçgen ikiz kenar dik üçgendir.Yani üçgenin açılarını $\widehat{A} = 90°$ ve $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$ olarak buluruz.

19. İki merdiven, dar bir sokakta orantısız bir X-şekli biçiminde çaprazlama yerleştirilmiştir. Sokak duvarları zemine dik değil, fakat birbirlerine paraleldir. Zemin, düz ve yataydır. Her bir merdivenin tabanı, karşı duvara değecek şekilde yerleştirilmiştir. Uzun olan merdivenin sokak duvarına değen üst kısmı ile kısa olan merdivenin karşı duvara değen üst kısmı arasındaki mesafe dikey olarak 5 m 'dir. Kısa olan merdivenin karşı duvara değen üst kısmı ile de, iki merdivenin kesiştikleri nokta arasındaki mesafe dikey olarak 4 m 'dir. Merdivenlerin kesişim noktasının yere olan yüksekliği dikey olarak ne kadardır?



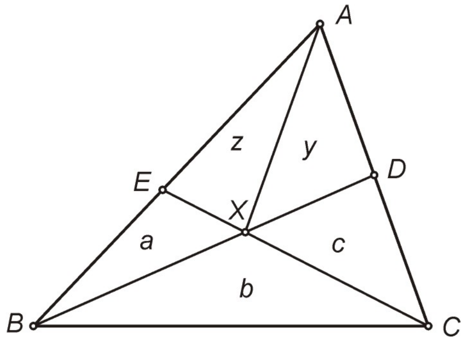
Çözüm. Aşağıdaki ardışık şekilleri dikkate alalım. Her birinde, sokak duvarlarının birbirine paralel olmasından dolayı aynı renkteki üçgenler benzerdir.



Benzer üçgenlerden, $\frac{9}{h} = \frac{h}{4}$ 'tür. Bu yüzden $h^2 = 36$ 'dır.
Uzunluk aradığımız için negatif kökü kullanılamayacağından, iki merdivenin kesiştikleri noktanın, yere olan dik yüksekliği, $h = 6\ m$' dir.

20. ABC üçgeninde, D noktası $[AC]$ üzerinde olmak üzere $[BD]$ ve E noktası $[AB]$ üzerinde olmak üzere $[CE]$ doğru parçaları çiziliyor. $[BD]$ ve $[CE]$ nin kesişim noktası X, Alan$(BXE) = a$, Alan$(BXC) = b$ ve Alan$(CXD) = c$ olmak üzere Alan$(AEXD)$ yi a, b ve c cinsinden bulunuz.

Çözüm. Önce AX doğru parçasını çizelim. A(AEX)=z ve A(AXD)=y olsun. BXE ve BXC üçgenlerinin tabanları sırasıyla EX ve XC alınırsa yükseklikleri



aynı olur. Dolayısıyla alanları oranı $\frac{a}{b} = \frac{|EX|}{|XC|}$ olur. Aynı şekilde BXC ve CXD üçgenlerinde tabanlar sırasıyla BX ve XD alınırsa bu iki üçgenin alanları oranı, $\frac{b}{c} = \frac{|BX|}{|XD|}$, AXB ve AXD üçgenlerinde de BX ve XD taban alındığında alanlar oranı $\frac{z+a}{y} = \frac{BX}{XD} = \frac{b}{c}$ olacaktır. Bu yolla AXE ve AXC üçgenlerinden de $\frac{z}{y+c} = \frac{|EX|}{|XC|} = \frac{a}{b}$ elde edilir. Bu denklemlerde içler dışlar çarpımı yapılırsa,

$$by = cz + ac \tag{7}$$

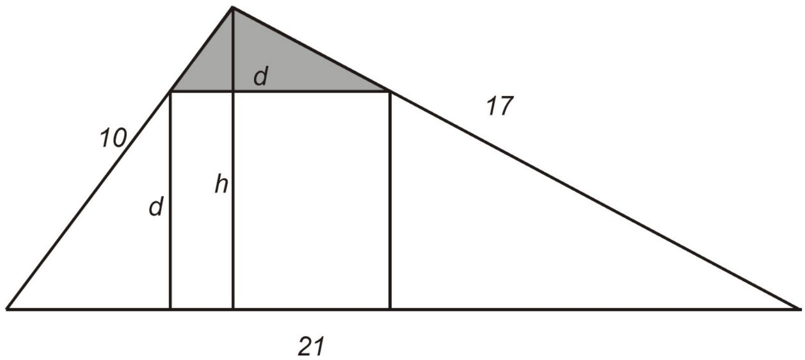
$$bz = ay + ac \tag{8}$$

bulunur. (7) eşitliğini b ile, (8) eşitliğini c ile çarpıp toplarsak $b^2y = acb + acy + ac^2$

elde edilir. Buradan $y = \frac{ac(b+c)}{b^2-ac}$ bulunur. y yi (7) ya da (8) eşitliğinde yerine yazarsak $z = \frac{ac(a+b)}{b^2-ac}$ olarak bulunur. $AEXD$ dörtgeninin alanı ise $z + y = \frac{ac(a+2b+c)}{b^2-ac}$ olur.

21. Kenar uzunlukları 10, 17 ve 21 olan bir üçgenin içine bir kenarı üçgenin en uzun kenarında ve diğer iki köşesi üçgenin kısa kenarları üzerinde olacak şekilde bir kare yerleştiriliyor. Karenin kenar uzunluğunu bulunuz.

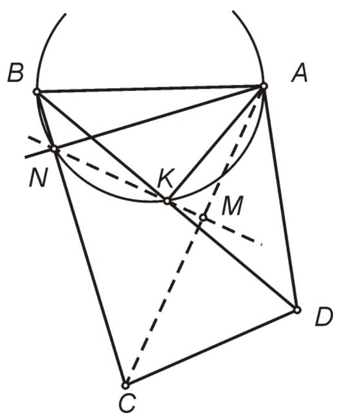
Çözüm. Heron formulünden, kenarları a, b, c olan üçgenin alanının, $s = (a+b+c)/2$ olmak üzere, $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $s = (10+17+21)/2 = 24$ ve $A = 84$ buluruz. En uzun kenara ait yüksekliğin uzunluğuna h dersek, $A = 1/2 \cdot \text{taban} \cdot \text{yükseklik}$ alan formülünden, üçgenin alanı $A = 21h/2 = 84$ bulunur ve buradan da $h = 8$ elde edilir.



Karenin bir kenar uzunluğuna d diyelim. Karenin üstündeki üçgen ile en büyük üçgen benzerdir. (Küçük üçgenin tabanının, büyük üçgenin tabanına paralel olduğuna dikkat ediniz.) Benzer üçgenlerdeki yüksekliklerinin tabanlarına oranlarından $8/21 = (8-d)/d = 8/d - 1$ buluruz. Dolayısıyla, karenin kenar uzunluğu $d = 168/29$ dur.

22. $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB})$ ve $|AB| = |AD|$ olacak şekilde bir dışbükey $ABCD$ dörtgeni verilsin. A noktasından CB ve DB doğrularına çizilen dikmelerin kesişim noktaları sırasıyla N ve K olmak üzere NK doğrusunun AC doğrusuna dik olduğunu gösteriniz.

Çözüm $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADB}$ olduğundan dolayı ABD üçgeni ikizkenardır. Dolayısıyla $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ABD})$ dir. $\widehat{ANB}$ ve $\widehat{AKB}$ açıları 90° olduklarından ve AB gördüklerinden dolayı $ABNK$ bir kirişler dörtgenidir. Buradan M noktası AC ve NK nın kesişim noktası olmak üzere $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ABK}) = m(\widehat{ANK}) = m(\widehat{ANM})$ eşitlikleri bulunur. AMN üçgenininden $m(\widehat{AMN}) + m(\widehat{ANM}) + m(\widehat{NAM}) = 180°$ yazılabilir. Buradan, $m(\widehat{AMN}) = 180° - m(\widehat{ANM}) - m(\widehat{NAM}) = 180° - m(\widehat{ACB}) - m(\widehat{NAC}) = m(\widehat{ANC}) = 90°$ yazılabilir. Sonuç olarak AC ve NK nın dikliği bulunmuş olur.



23. Bir $ABCD$ karesinin BC ve CD kenarlarından K ve L noktaları alınıyor. $m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{AKL})$ olduğuna göre $m(\widehat{KAL})$ kaçtır ?

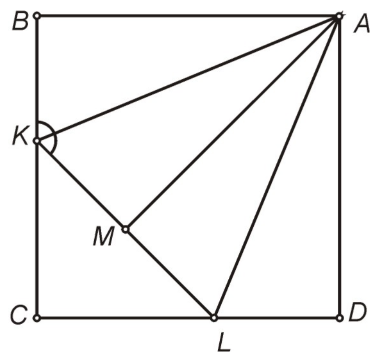
Çözüm. A köşesinden KL ye yükseklik çizilsin. ABK ve AMK dik üçgenleri denktir ve $|AM| = |AB| = |AD|$ dir. Yani AML ve ADL üçgenleri de aynı zamanda benzer dik üçgenlerdir.

$$m(\widehat{KAL}) = m(\widehat{KAM}) + m(\widehat{LAM}) = m(\widehat{KAB}) + m(\widehat{LAD})$$

yani

$$2m(\widehat{KAL}) = m(\widehat{KAM}) + m(\widehat{LAM}) + m(\widehat{KAB}) + m(\widehat{LAD}) = 90^\circ$$

olur. Dolayısıyla $m(\widehat{KAL}) = 45^\circ$ dir.

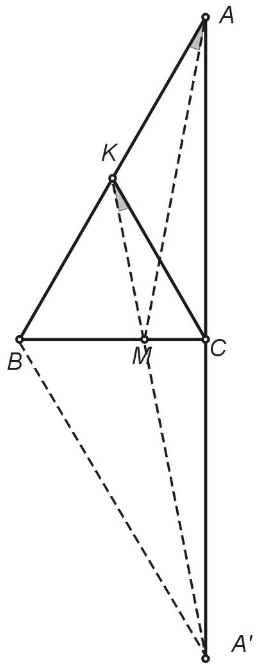


24. Kenarları a, b ve c olan bir diküçgenin kenarları geometrik bir dizi oluşturduğuna ve $abc = 1$ olduğuna göre a, b, c yi bulunuz.

Çözüm. Genelliği bozmadan $a < b < c$ olduğunu kabul edelim. Yani, $a = \frac{b}{q}$ ve $c = bq$ dur. $abc = 1$ olduğu için $b^3 = 1$ yani $b = 1$ dir. Pisagor teoreminden $(\frac{1}{q})^2 + 1 = q^2$ yani $q^4 - q^2 - 1 = 0$ dır. $x^2 - x - 1$ denkleminin pozitif kökü $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ olduğu için $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ ve $\frac{1}{q} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ dir.

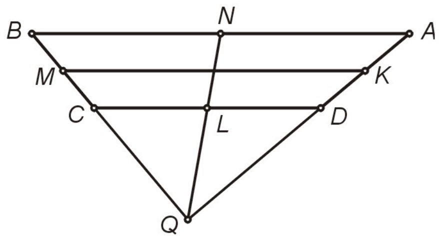
25. ABC dik üçgeninde AB hipotenüsünün orta noktası K olsun. M, BC kenarı üzerinde $|BM| = 2|MC|$ olacak şekilde bir nokta ise $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MKC})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: A', AC kenarı uzatılarak $|A'C| = |AC|$ olacak şekilde bir nokta olsun ve



$A'AB$ üçgenini oluşturalım. $|A'C| = |AC|$ ve $BC \perp AA'$ olduğundan $A'AB$ üçgeni ikizkenar üçgendir. Ayrıca M bu üçgenin ağırlık merkezidir. K 'de BA 'nın orta noktası olduğu için A', M ve K doğrusaldır. $|A'C| = |AC|$ ve $|AK| = |KB|$ olduğu için CK ve BA' paraleldir. Bu yüzden $m(\widehat{CKM}) = m(\widehat{MA'B}) = m(\widehat{MAB})$ 'dir.

26. Bir yamuğun orta tabanının uzunluğu 4 ve taban açıları $40°$ ve $50°$ 'dir. Alt ve üst tabanın orta noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu 1 ise taban uzunluklarını hesaplayınız.



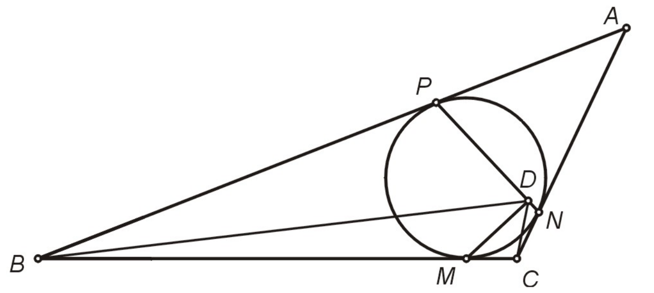
ABQ üçgeni dik olduğu için $|AN| = |BN| = |QN|$ ve $|DL| = |LC| = |QL|$ 'dir.

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{2} - \frac{|CD|}{2} &= |QN| - |QL| = |LN| = 1 \\ |KM| &= \frac{|AB| + |CD|}{2} = 4 \end{aligned}$$

denklemleri çözüldüğünde $|AB| = 5$, $|CD| = 3$ olarak bulunur.

27. ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC kenarına M, CA kenarına N, AB kenarına ise P noktalarında teğettir. NP doğrusu üzerinde $\dfrac{|DP|}{|DN|} = \dfrac{|BD|}{|CD|}$ olmak üzere bir D noktası olduğuna göre $DM \perp PN$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $|AP| = |AN|$ olduğundan $m(\widehat{ANP}) = m(\widehat{APN})$ yani $m(\widehat{NPB}) = m(\widehat{PNC})$ olur.



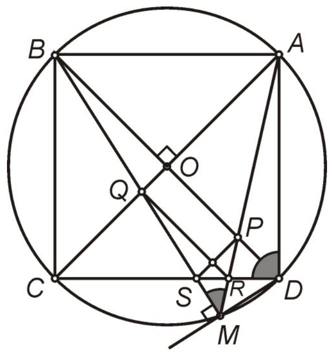
Bu durumda BDP ve CND üçgenleri benzer olduğundan ve $m(\widehat{CDN}) = m(\widehat{BDP})$ olduğundan, $\dfrac{|CD|}{|BD|} = \dfrac{|CN|}{|BP|} = \dfrac{|CM|}{|BM|}$ olduğu görülür.

Dolayısıyla DM doğrusu $\widehat{BDC}$ açısının açı ortayıdır ve bu nedenle $NP \perp MD$ olur.

28. M noktası, $ABCD$ karesinin çevrel çemberindeki CD yaylarından kısa olanının üzerinde bir nokta olsun. P ve R noktaları sırasıyla AM doğrusuyla BD ve CD doğru parçalarının kesişimlerini göstersin. Benzer şekilde, Q ve S noktaları da BM doğrusu ile sırasıyla AC ve DC doğru parçalarının kesişim noktaları olsunlar. PS ve QR doğrularının birbirlerine dik olduklarını gösteriniz.

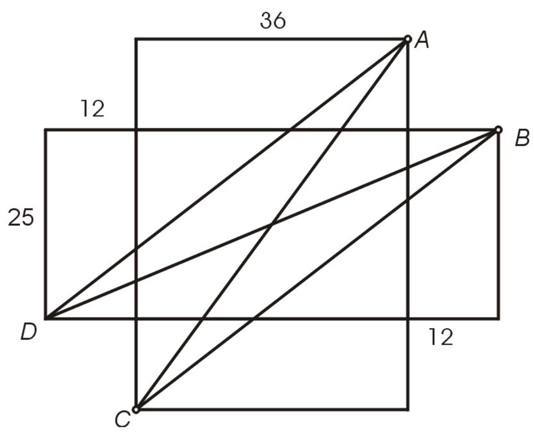
Çözüm. O noktası ile $ABCD$ karesinin merkezini gösterelim. M noktası, çemberin yukarıda söylenen yayının üzerinde olduğundan, AMB açısının ölçüsü merkezi AOB açısının (dik açı) yarısı kadardır, yani $45°$'dir. Bu açı $ABCD$ karesi içindeki BDC açısıyla aynı olduğundan, PS parçası D noktasından da M noktasından da $45°$ ile görülür. D ve M noktalarının her birisi PS yarı düzleminde olduklarından, $PSMD$ dörtgeni kirişler dörtgenidir. Bu dörtgenin DMS iç açısı dik açıdır (çünkü M noktası BD çapını görmektedir). Böylece DPS açısının da dik olduğu bulunur. Yani

$PS \perp BD$ dir. Benzer şekilde, $QR \perp AC$ olduğu da gösterilebilir. Böylece, $AC \perp BD$ olduğundan $PS \perp QR$ olacaktır.



29. Boyutları 25x36x12 olan ve yerde en büyük yüzlerinden birisi üzerinde duran bir kutunun alt köşelerinin birinde bulunan bir karınca, kutunun altından geçmeden, karşı çaprazdaki alt köşeye ulaşmaya çalışmaktadır. Karıncanın kullanabileceği en kısa yolun uzunluğu nedir?

Çözüm. Karınca, yerle kutunun birleştiği yerden yürüyerek kutunun etrafını dolaşabilir. Bu yol 25+36=61 birim uzunluğundadır. Kutunun üzerinden geçerse izleyebileceği 4 yol vardır. Bu yolları kutuyu açarak gösterirsek aşağıdaki şekli elde ederiz:



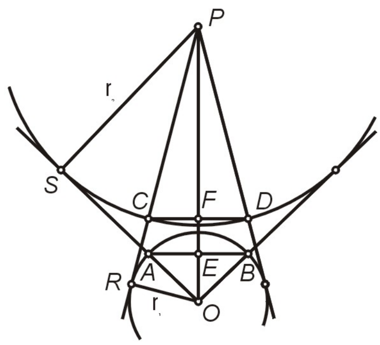
Pisagor teoremini kullanarak bu yolların uzunluklarını

$$
\begin{aligned}
|AD| &= \sqrt{(36+12)^2+(25+12)^2} = \sqrt{3673} \\
|BD| &= \sqrt{(12+36+12)^{+}25^2} = \sqrt{4225} \\
|AC| &= \sqrt{36^2+(12+25+12)^2} = \sqrt{3697} \\
|BC| &= \sqrt{(36+12)^2+(12+25)}^2 = \sqrt{3673}
\end{aligned}
$$

olarak buluruz. Bu dört yoldan en kısası $\sqrt{3673} \approx 60.6$ birim olarak bulunur. Bu mesafe ilk bulduğumuz 61 birimden de kısa olduğu için karıncanın kullanabileceği en kısa mesafedir.

30. Merkezleri O ve P olan iki tane daire alalım. Her bir dairenin merkezinden, diğer dairenin çevresine iki tane teğet çizelim. O merkezli daireden çizilen teğetler, O merkezli daireyi A ve B noktalarında; P merkezli daireden çizilen teğetler de, P merkezli daireyi C ve D noktalarında kessin. AB ve CD kirişlerinin eşit uzunlukta olduklarını gösteriniz.

Çözüm. $|OR| = r_1$ ve $|PS| = r_2$ olsun. OP, şeklin bir simetri ekseni olduğu için E noktası, AB kirişinin; F noktası da, CD kirişinin orta noktasıdır. Ayrıca; simetriden dolayı, AB ve CD, OP ile dik kesişirler. OS ve PR teğet oldukları için, ORP ve PSO açıları, dik açılardır.



OEA ve OPS üçgenlerinin bir açıları ortaktır ve her ikiside bir dik açı içermektedir. Bu yüzden, bu iki üçgen benzerdir. Dolayısıyla, $|AE|/|OA| = |PS|/|OP|$ 'dir. $|OA| = r_1$ ve $|PS| = r_2$ olduğu için, $|AE| = r_1r_2/|OP|$ olur. Bu yüzden, $|AB| = 2r_1r_2/|OP|$ 'dir.

Benzer şekilde, simetriden dolayı $|CD| = 2r_1r_2/|OP|$ 'dir. (PFC ve PRO benzer üçgenlerdir)

Sonuç olarak, AB ve CD kirişlerinin uzunlukları birbirine eşit olur.

31. Bir $ABCD$ dörtgeninde, $Alan(ABC) \leq Alan(BCD) \leq Alan(CDA) \leq Alan(DAB)$ ise $ABCD$ nin bir yamuk olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin kesişim noktası O olsun. $Alan(ABC) \leq Alan(BCD)$ olduğu için

$$Alan(AOB) + Alan(BOC) \leq Alan(BOC) + Alan(DOC)$$

buradan da

$$Alan(AOB) \leq Alan(DOC) \tag{9}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $Alan(CDA) \leq Alan(DAB)$ eşitsizliğinden

$$Alan(DOC) \leq Alan(AOB) \tag{10}$$

ve, (9) ve (10) den

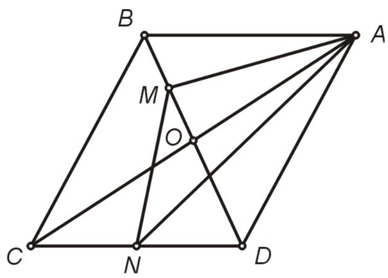
$$Alan(DOC) = Alan(AOB) \tag{11}$$

olduğunu görürüz. (11) ün her tarafına $Alan(BOC)$ eklersek, $Alan(BCD) = Alan(ABC)$ elde ederiz. Şimdi, ABC ve BCD üçgenlerinde, $[BC]$ kenarları ortak ve alanları eşit olduğu için, A ve D köşelerinden çizilen yüksekliklerin uzunlukları eşittir. Bu da bize $[AD]$ ve $[BC]$ nin paralel olduğunu, dolayısıyla $ABCD$ nin bir yamuk olduğunu gösterir.

32. Köşegenlerin kesişimi O olan $ABCD$ paralelkenarında, M ve N noktaları sırasıyla $[BO]$ ve $[CD]$ nin orta noktaları olsunlar. ABC ve AMN üçgenleri benzer ise, $ABCD$ nin bir kare olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. AMN ve ABC üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AC|} \tag{1}$$



elde edilir. Dolayısıyla,

$$m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{BAC}) \text{ ve } m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{CAN}) \tag{2}$$

olur. (1) ve (2) den BAM ve CAN üçgenlerinin benzer olduğunu görürüz. Buradan,

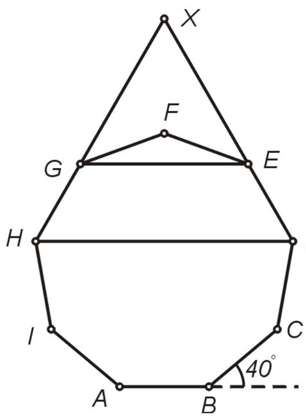
$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BM|}{|CN|} \tag{3}$$

ve $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{ACN})$ elde edilir. Dolayısıyla A, B, C, D noktaları merkezi O olan bir çember üzerindedir, ve $ABCD$ bir dikdörtgendir.

Şimdi, $|BM| = \frac{1}{4}|BD| = \frac{1}{4}|AC|$ ve $|CN| = \frac{1}{2}|AB|$ olduğunu buluruz. Dolayısıyla, (3) teki ikinci eşitlik bize $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{2|AB|}$ verir ve buradan $2|AB|^2 = |AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ elde ederiz ki bu da $ABCD$ nin kare olduğunu gösterir.

33. Bir düzgün dokuzgenin en uzun köşegeninin uzunluğunun, en kısa köşegeni ile bir kenarının uzunlukları toplamına eşit olduğunu gösteriniz.

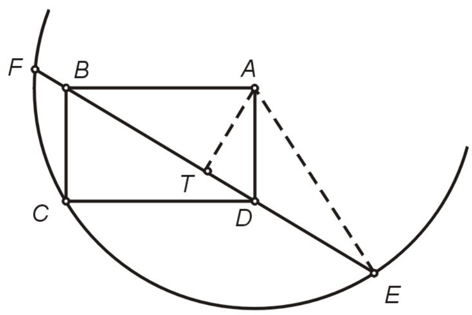
Çözüm. Bir düzgün dokuzgeni $ABCDEFGHI$ ile gösterelim. DE ve HG kenarları X noktasında kesişsinler. Simetriden dolayı $AC = EG$ ve $AF = DH$ olmalıdır. Açık bir şekilde, EG ve DH doğru parçaları AB kenarına paraleldir.



BC doğru parçası AB kenarıyla $40°$ lik açı yaptığından, CD kenarı AB ile $80°$ lik ve DE kenarı da AB ile $120°$ lik açı yapar. Yani, $m(\widehat{HDX}) = 60°$ ve $m(\widehat{XHD}) = 60°$ dir. Dolayısıyla XHD ve XGE üçgenleri eşkenar üçgenlerdir. $DH = DX$ ve $EG = EX$ dir. Buradan da $DX = DE + EX$ ve $DH = DE + EG$ bulunur.

34. Kenarları 20 ve 15 olan bir $ABCD$ dikdörtgeni verilsin. Merkezi A noktasında olan bir çember C köşesinden geçiyor. BD doğru parçasını içeren kirişin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm



T, EF nin orta noktası olsun. AT, EF ye diktir yani AT, BAD üçgeninin yüksekliğidir. Pisagor teoreminden dolayı

$$|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2$$

$$|BD|^2 = 20^2 + 15^2$$

$$|BD| = 25 \text{ dir.}$$

BAD üçgeninin alanını iki şekilde hesaplarsak:

$$\frac{|AD|\,|AB|}{2} = \frac{|BD|\,|AT|}{2}$$

$$\frac{15.20}{2} = \frac{25.\,|AT|}{2}$$
$$|AT| = 12$$

bulunur. AE yarıçap olduğu için AE uzunluğu AC uzunluğuna eşittir. ATE üçgenine Pisagor Teoremi uygularsak:

$$|AC|^2 = |AE|^2 = |AT|^2 + |TE|^2$$

$$25^2 = 12^2 + |TE|^2$$

$$|TE|^2 = 481$$

$$|TE| = \sqrt{481}$$

olur. EF uzunluğu TE nin iki katı olduğu için, $|EF| = 2\sqrt{481}$ olarak bulunur.

35. Yarı çapı r olan bir çemberle çevrelenmiş ve alanı $3r^2$ olan düzgün çokgenin kenar sayısı nedir?

Çözüm. Öncelikle düzgün çokgenin n kenarlı olduğunu düşünelim. Şimdi çokgeni, tabanı çokgenin bir kenarı, diğer kollarıysa çokgeni çevreleyen çemberin yarı çapı olacak şekilde eş üçgenlere ayıralım. Bu tür her üçgenin tepe açısı $\frac{2\pi}{n}$ olacaktır. Dolayısıyla her bir üçgenin alanı $\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$, ve n-gen'in alanı da $\frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$ olur. Buradan $3 \cdot r^2 = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$ denklemi elde edilir. Bu denklemi düzenlersek, $\frac{6}{n} = \sin\frac{2\pi}{n}$ yani $n = 12$ buluruz. Burada dikkat edilecek husus sadece onikigenin bu özelliği sağlamasıdır, çünkü aynı çemberin içine çizilecek olan başka bir düzgün çokgenin alanı kenar sayısıyla doğru orantılı olarak istenen değerden farklı olacaktır.

36. ABC dar açılı üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. O_1 ise AB kenarını iki eşit parçaya ayıran ve O noktasından geçen doğrunun üzerinde, O noktasına göre AB kenarının diğer tarafında kalan bir nokta olsun. Merkezi O_1, yarı çapı AO_1 olan çembere K, CA ve CB doğrularının K ile kesiştiği noktalara ise sırasıyla A_1 ve B_1 diyelim. Bu durumda A_1B ve AB_1 doğruları ABC üçgeninin çevrel çemberinin üzerinde kesiştiğinde AO_1BO dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olduğunu gösteriniz.

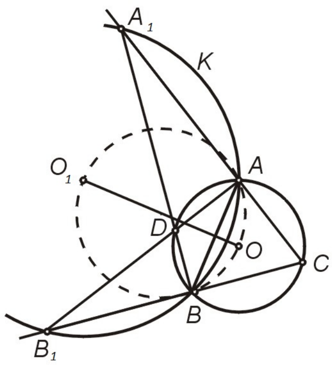
Çözüm. A_1B ve AB_1 doğruları ABC üçgeninin çevrel çemberinin üzerinde kesiştiği noktaya D noktası diyelim ve $m(\widehat{A_1AB_1}) = \alpha$ olsun. Bu durumda $m(\widehat{CAD}) = 180° - m(\widehat{DAA_1}) = 180° - \alpha$ olur. Burada A, C, B ve D noktaları bir çember üzerindeki noktalar oldukları için, $m(\widehat{CBD}) = 180° - m(\widehat{CAD}) = \alpha$ olur. Şimdi $\widehat{A_1AB_1}$

ve $\widehat{A_1BB_1}$ açıları K çemberi üzerinde A_1B_1 yayına baktıkları için eşit açılardır. Dolayısıyla $180° - \alpha = m(\widehat{A_1BB_1}) = m(\widehat{A_1AB}) = \alpha$ yani $\alpha = 90°$ olur.

Şimdi $m(\widehat{ACB}) = \gamma$, ve dolayısıyla $m(\widehat{AOB}) = 2m(\widehat{ACB}) = 2\gamma$ olsun. Ancak diğer taraftan $m(\widehat{AB_1C}) = 180° - m(\widehat{B_1AC}) - m(\widehat{ACB_1}) = 180° - 90° - \gamma = 90° - \gamma$ olduğundan, $m(\widehat{AO_1B}) = 2m(\widehat{AB_1B}) = 2m(\widehat{AB_1C}) = 2(90° - \gamma) = 180° - 2\gamma$ olur. Bunların ışığında

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BO_1A}) = 2\gamma + (180° - 2\gamma) = 180°$$

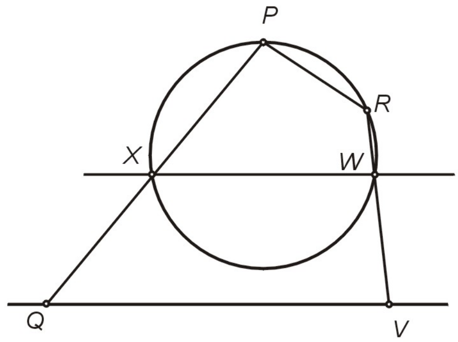
olduğundan $AOBO_1$ dörtgeni bir kirişler dörtgenidir.



37. P noktası bir çember üzerinde, Q noktası bir doğru üzerinde sabit; R noktası ise P noktasının bulunduğu çember üzerinde (P, Q, R bir doğru üzerinde olmayacak şekilde) değişken bir noktadır. P, Q ve R noktalarından geçen çember, Q noktasının bulunduğu doğruyu tekrar V noktasında kestiğine göre, VR doğrusunun bir sabit noktadan geçtiğini gösteriniz.

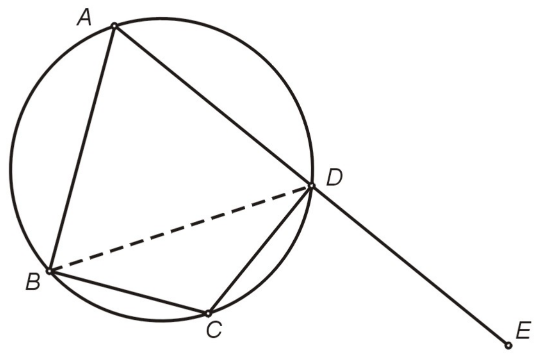
Çözüm. PQ doğrusunun çemberi kestiği diğer noktaya X, QV doğrusuna paralel olan ve X noktasından geçen doğrunun çemberi kestiği diğer noktaya ise W noktası diyelim. Bu durumda W çember üzerindeki bir sabit nokta olur. Şimdi W noktasının, RV doğrusu üzerinde olduğunu gösterelim.

$PQVR$ kirişler dörtgeni olduğu için $m(\widehat{PRV}) = 180° - m(\widehat{PQV})$'dir. Aynı şekilde $PXWR$ kirişler dörtgeni olduğu için, $m(\widehat{PRW}) = 180° - m(\widehat{PXW})$'dir. Ayrıca $XW//QV$ olduğu için, $m(\widehat{PXW}) = m(\widehat{PQV})$ olduğunu da biliyoruz. Bu durumda denklemleri beraber incelediğimizde $m(\widehat{PRW}) = m(\widehat{PRV})$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla R, W ve V noktaları aynı doğru üzerindedir. (Burada R noktasının PQ doğrusunun hangi tarafında olduğuna göre değişik şekiller olabilir ancak her durumda yukarıdaki gibi bir argüman kullanılabilir.)



38. $ABCD$, bir kirişler dörtgeni olsun. AC köşegeni DAB açısının açıortayıdır. AD kenarı, D köşesinden uç noktası E olacak şekilde uzatılıyor. $|CE| = |CA| \Leftrightarrow |DE| = |AB|$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:$ABCD$ kirişler dörtgenininde $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAB})$ olduğundan ve eşit açıların gördükleri kiriş uzunluklarının da aynı olacağından $|BC| = |CD|$ dir. $m(\widehat{EDC}) =$



$180 - m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{ABC})$ olduğundan CDE üçgenini C köşesi dönme noktası olacak, ve B ve D noktaları çakışacak şekilde döndürdüğümüzde $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{ABC})$ olduğundan E noktası BA doğrusu üzerinde yer alacaktır. Bu noktaya E' adı verelim. Döndürme, uzaklıkları koruyacağından $|CE| = |CE'|$ olur. Bu ise $E' = A$ olmasını gerektirir. Ayrıca $E' = A$ olması da $|CE| = |CA|$ olduğunu gösterir.

$$E' = A \Leftrightarrow |CE| = |CA|$$

Aynı şekilde $|DE| = |BE'|$ olması için de $A = E'$ olması ve $|DE| = |BE'|$ olması da $|DE| = |BE'|$ olmasını gerektirir.

$$A = E' \Leftrightarrow |DE| = |BE'|$$

Bu iki koşullu ifadeyi birleştirdiğimizde

$$|CE| = |CA| \Leftrightarrow |DE| = |BE'|$$

sonucu elde edilir.

39. Alanı 7 olan bir ABC eşkenar üçgeninde M ve N noktaları sırasıyla AB ve AC üzerinde bulunan ve $AN = BM$ koşulunu sağlayan noktalar olsun. $O = BN \cap CM$ olmak üzere, BOC üçgeninin alanı 2 olsun.

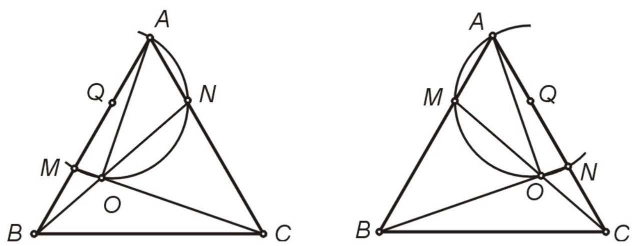
a) $MB : AB = 1 : 3$ veya $MB : AB = 2 : 3$ olduğunu ispatlayınız.

b) AOB açısının ölçüsünü bulunuz.

Çözüm. a) $\frac{MB}{AB} = x$ olsun.
Bu durumda $A(ABN) = 7x = A(BMC)$, $A(BOM) = 7x - 2$ ve $A(AMON) = A(BOC) = 2$ olur.
Ayrıca, $A(CON) = 7-2-2-(7x-2) = 5-7x$, $A(ANO) = \frac{x}{1-x} \cdot A(CNO) = \frac{x(5-7x)}{1-x}$ ve $A(AMO) = \frac{1-x}{x} \cdot A(BOM) = \frac{1-x}{x}(7x-2)$ bulunur.
Buradan, $A(AMON) = A(ANO) + A(AMO)$ ifadelerini yerlerine yazarsak,

$$2 = \frac{x(5-7x)}{1-x} + \frac{1-x}{x}(7x-2)$$

bulunur. Yani $9x^2 - 9x + 2 = 0$ ve buradan da $x = \frac{1}{3}$ ve ya $x = \frac{2}{3}$ elde edilir.



b) ABN ve BMC üçgenleri benzer üçgenler oldukları için

$$m(\widehat{BOM}) = m(\widehat{BCM}) + m(\widehat{CBO}) = m(\widehat{MBO}) + m(\widehat{CBO}) = 60^\circ$$

dir. Dahası, $m(\widehat{MAN}) + m(\widehat{MON}) = 180^\circ$ olduğu için $AMON$ dörtgeni bir kirişler dörtgenidir.
$\frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$ olsun. Yani, $AM = 2BM = 2AN$ olsun. AM kenarının ortanoktasına Q dersek, AQN üçgeni ikizkenar olur ve $m(\widehat{AQN}) = 60^\circ$ olur. Dolayısıyla AQN eşkenar

üçgendir. Bundan dolayı Q, $AMQN$ dörtgeninin çevrel çemberinin merkezidir ve $m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{ANM}) = 90°$ dir. Dolayısıyla $m(\widehat{AOB}) = 150°$ dir. Benzer şekilde, eğer $AB = \frac{2}{3}$ ise yani $2AM = MB = AN$ ise $m(\widehat{AMN}) = m(\widehat{AON}) = 90°$ dir. Yani $m(\widehat{AOB}) = 90°$ dir.

40. Bir ABC üçgeninde a, b ve c sırasıyla A, B ve C köşelerinin karşısındaki kenarların uzunlukları ve r, ABC üçgeninin içteğet çemberinin yarı çapı olmak üzere ve $6(a+b+c)r^2 = abc$ eşitliğini sağlamaktadırlar. M, ABC üçgeninin içteğet çemberinin üzerinde bir nokta ve D, E, F sırası ile bu noktanın BC, AC ve AB kenarlarına izdüşümleridir.
$Alan(ABC) = S$ ve $Alan(DEF) = S_1$ ise $\frac{S_1}{S}$ kesirinin alacağı en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

Çözüm: ABC üçgeninin yarı çevresi p ve çevrel çemberinin yarıçapı R olmak üzere $abc = 4RS$ ve $S = pr$ ile, verilen $6(a+b+c)r^2 = abc$ eşitlikleri kullanılarak $R = 3r$ elde edilir. O noktası çevrel çemberin merkezi ve I noktası ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olsun. Euler'in $|IO|^2 = R(R-2r)$ eşitliğinde $R = 3r$ yazarsak $|IO| = r\sqrt{3}$ bulunur. Dolayısıyla $|IO| > r$ olur ve O noktası içteğet çemberin dışında yer alır.
K ve L noktaları, K noktası O noktasına daha yakın olacak şekilde IO doğrusunun içteğet çemberi ile kesiştiği noktalar olsun. O halde

$$|OK| \le |OM| \le |OL| \le R$$

'dir.

$$\frac{S_1}{S} = \frac{|R^2 - |OM|^2|}{4R^2}$$

olduğundan

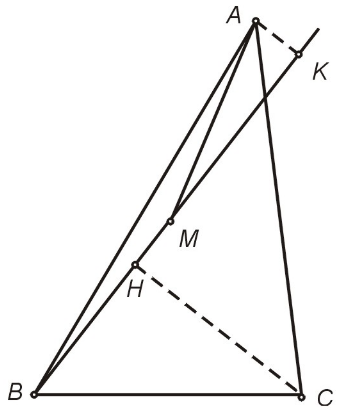
$$\frac{5-2\sqrt{3}}{36} = \frac{|R^2 - |OL|^2|}{4R^2} \le \frac{S_1}{S} \le \frac{|R^2 - |OK|^2|}{4R^2} = \frac{5+2\sqrt{3}}{36}$$

elde edilir.

41. Bir ABC üçgeninin alanını eşit alanlı ABM, BCM ve MCA üçgenlerine bölen M noktasının ağırlık merkezi olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. İspat için ABM ve BCM eşit alanlı üçgenler olduğunda M noktasının B den çizilen kenarortay üzerinde olduğunu göstermek yeterlidir.

A ve C noktalarının BM kenarına dik izdüşüm noktaları K ve H olmak üzere BM



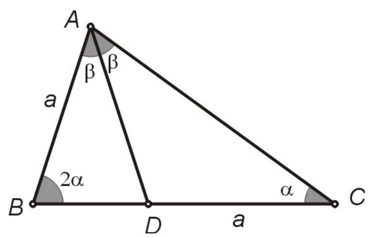
ile AC nin kesişim noktası L olsun. Bu durumda

$$\frac{|BM|\,.\,|AK|}{2} = S_{ABM} = S_{BCM} = \frac{|BM|\,.\,|CH|}{2}$$

dir. Yani $|AK| = |CH|$ dir. Eğer AC, BM kenarına dik değilse K ve H noktalarından biri ABC üçgeninin içinde diğeri ise dışında kalır. Dolayısıyla $m(\widehat{AKL}) = 90° = m(\widehat{CHL})$ ve $m(\widehat{ALK}) = m(\widehat{CLH})$ olur. Yani AKL ve CHL üçgenleri eştir. Dolayısıyla $|AL| = |LC|$ dir ve BL kenarortaydır. Eğer AC, BM kenarına dik ise K, L ve H noktaları çakışık olur. Bu durumda da yine BL kenarortaydır.

42. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = 2.m(\widehat{C})$ ve A açısının açıortayı BC kenarını D noktasında kesmek üzere $|AB| = |CD|$ ise $m(\widehat{A})$ kaçtır?

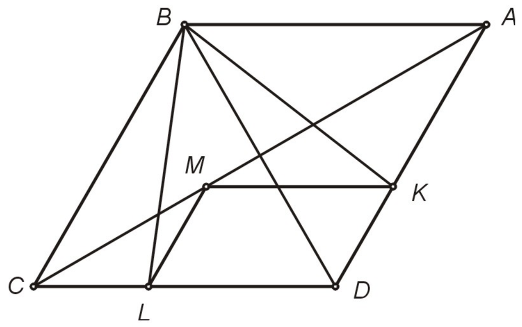
Çözüm.$|AB| = |CD| = a$, $m(\widehat{C}) = \alpha$ ve $m(\widehat{A}) = 2\beta$ olmak üzere $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{BAD}) = \beta$, $m(\widehat{B}) = 2\alpha$ ve $m(\widehat{BDA}) = \alpha + \beta$ dır.



ACD ve ABD üçgenlerine sinüs kuralını uygularsak $\dfrac{sin\alpha}{sin\beta} = \dfrac{|AD|}{a} = \dfrac{sin2\alpha}{sin(\alpha+\beta)}$ bulunur. Buradan yarım açı ve toplam formülleri kullanarak $2sin\beta cos\alpha = sin(\alpha+\beta)$ ve $tan\alpha = tan\beta$ eşitlikleri bulunur. Ayrıca $0 < \alpha, \beta < 90°$ olduğu için $\alpha = \beta$ dır. $180° = 2\beta + 2\alpha + \alpha$ olduğu için $\beta = 36°$ dir. Sonuç olarak $m(\widehat{A}) = 2\beta = 72°$ bulunur.

43. $ABCD$ eşkenar dörtgen ve $m(\widehat{DAB}) = 60°$ olsun. K ve L noktaları AD ve DC kenarları üzerinde noktalar ve M noktası $KDLM$ paralel kenar oluşturacak şekilde AC köşegeni üzerinde bir nokta olsun. BKL üçgeninin eşkenar olduğunu ispatlayınız.

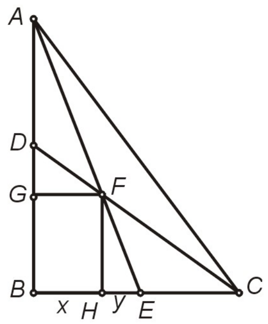
Çözüm. $ABCD$ eşkenar dörtgeni ABD ve BCD olmak üzere iki tane eşkenar üçgen içerir. Eğer $|KD| = |LC|$ olduğu gösterilirse KBD ve LBC üçgenleri benzer üçgenler, $|KB| = |LB|$ ve $m(\widehat{KBD}) = m(\widehat{LBC})$ olur. Yani, $m(\widehat{KBL}) = m(\widehat{DBC}) = 60°$ ve BKL üçgeni eşkenar üçgen olur.



LM, AD ye paralel ve $m(\widehat{LMC}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{LCM})$ dir. Dolayısıyla MLC ikizkenar üçgendir; yani $|LC| = |LM| = |KD|$ dir.

44. ABC dik üçgeninde D ve E sırası ile AB ve BC dik kenarları üzerinde $m(\widehat{BAE}) = 30°$ ve $m(\widehat{BDC}) = 45°$ olacak şekilde noktalar, F ise AE ve CD doğrularının keşisim noktasıdır. $|AE| = \sqrt{3}$, $|CD| = \sqrt{2}$ olduğuna göre, F noktasının AB kenarına olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm:



F noktasının AB kenarına olan izdüşümü G, CB kenarına olan izdüşümü de H olsun. $|FG| = |HB| = x$ ve $|HE| = y$ diyelim. $m(\widehat{HFE}) = 30°$ olduğundan $|FH| = \sqrt{3}|EH| = \sqrt{3}y$ 'dir. $|AE| = \sqrt{3}$ ve $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{HFE}) = 30°$ olduğu için $|BE| = x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (*) bulunur. $|DC| = \sqrt{2}$ ve $m(\widehat{BDC}) = 45°$ bilgileri kullanılarak da $|DB| = DG| + |GB| = 1$, ve buradan da $x + y\sqrt{3} = 1$ (**) elde edilir. (**)

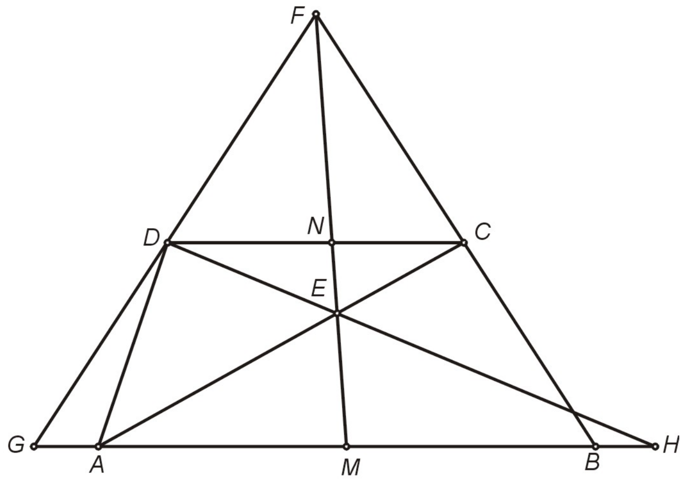
eşitliğinde, (*) eşitliğinden elde edilen $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} x + y\sqrt{3} &= 1 \\ x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right) \cdot \sqrt{3} &= 1 \\ x &= \frac{1}{2(\sqrt{3}-1)} \end{aligned}$$

bulunur.

45. $ABCD$ yamuğunda AB tabanının orta noktası M 'dir. E, AC köşegeni üzerinde, BC ve ME, F noktasında; DE ve AB, H noktasında kesişecek şekilde seçilmiş bir noktadır. FD ve AB, G noktasında kesişiyor ise M noktasının GH nin orta noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



CD ve EF doğrularının kesişim noktasına N diyelim. $DC \| GB$ ve M, N, F doğruları doğrusal olduğundan

$$\frac{|GM|}{|MB|} = \frac{|DN|}{|NC|}$$

olur. $AH \| DC$ ve M, E, N noktaları doğrusal olduğu için de

$$\frac{|AM|}{|MH|} = \frac{|NC|}{|DN|}$$

olur. Buradan

$$\frac{|GM|}{|MB|} \cdot \frac{|AM|}{|MH|} = 1$$

elde edilir. $|AM| = |MB|$ olduğundan $|GM| = |MH|$ bulunur.

46. P_n, çevrel çember yarıçapı 1 olan bir düzgün çokgendir. P_n nin alanınının çevresine oranının 0.25 den büyük olduğu en küçük n değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} Alan(P_n) &= n\left(\frac{1}{2}\right)2sin\left(\frac{\pi}{n}\right)cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ Çevre(P_n) &= n(2sin\left(\frac{\pi}{n}\right)) \\ \frac{Alan(P_n)}{Çevre(P_n)} &= \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

$\frac{Alan(P_n)}{Çevre(P_n)}$ oranı 0.25 'ten büyük olması için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{n}\right) &\geq 0.25 \\ cos\left(\frac{\pi}{n}\right) &\geq 0.5 \end{aligned}$$

$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ olduğundan ve $cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, n arttıkça arttığından en küçük n değeri 4 'tür.

47. Herhangi bir üçgen kendisi ile benzer olan

(a) 2002

(b) 2003

üçgene bölünebilir mi?

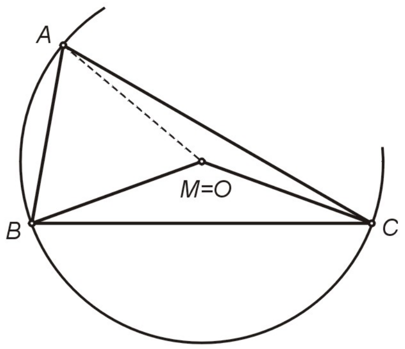
Çözüm: Herhangi bir n tamsayısı için herhangi bir üçgen kendisi ile benzer olan n^2 üçgene bölünebilir. O halde bir üçgen $45^2 = 2025$ üçgene bölünebilir. Benzer şekilde n^2 benzer üçgen de, birleştirilerek bu üçgenlere benzer olan bir üçgen oluşturulabilir.

(a) Bir üçgen $45^2 = 2025$ benzer üçgene bölünebilir. Oluşturulan küçük üçgenlerin $4^2 = 16$ tanesi ve $3^2 = 9$ tanesi ayrı ayrı birleştirildiğinde üçgen sayısı oluşan yeni iki üçgenle birlikte $16 - 1 + 9 - 1 = 23$ azalır. Geriye $2025 - 23 = 2002$ benzer üçgen kalır.

(b) 2025 benzer üçgenden 2 defa $2^2 = 4$ üçgen ve 2 defa $3^2 = 9$ üçgen ayrı ayrı birleştirildiğinde üçgen sayısı $2(4-1)+2(9-1) = 22$ azalır. Geriye $2025-22 = 2003$ benzer üçgen kalır.

48. ABC üçgeninin içinde bir M noktası olsun. Bu üçgende $m(\widehat{BAC}) = 70°$, $m(\widehat{ABC}) = 80°$, $m(\widehat{ACM}) = 10°$ ve $m(\widehat{CBM}) = 20°$ olduğuna göre $|AB| = |MC|$ olduğunu gösteriniz.

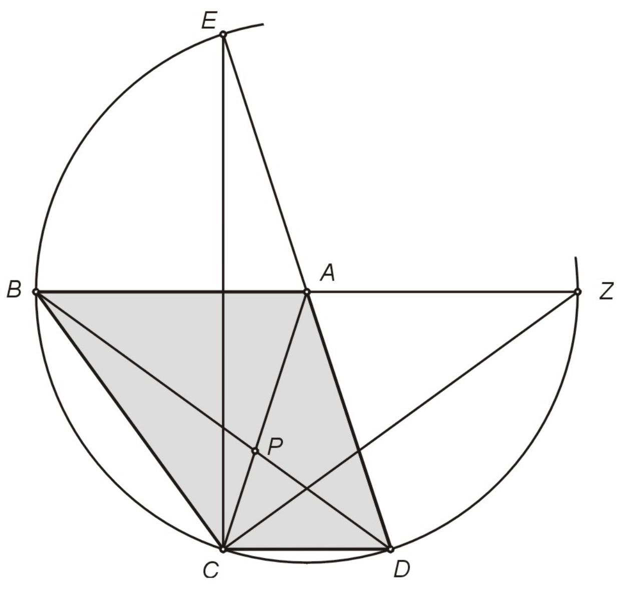
Çözüm. ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O noktası olsun. ABC dar açılı bir üçgen olduğu için O noktası üçgenin içindedir.



Bu durumda $m(\widehat{AOC}) = 2m(\widehat{ABC}) = 160°$ olduğundan $m(\widehat{ACO}) = 10°$, $m(\widehat{BOC}) = 2m(\widehat{BAC}) = 140°$ olduğundan $m(\widehat{CBO}) = 20°$ olur. Dolayısıyla $O \equiv M$ ve dolayısıyla $|MA| = |MB| = |MC|$ olduğu görülür. Bu durumda $m(\widehat{ABO}) = 80° - 20° = 60°$ olduğundan ABM üçgeni eşkenar üçgendir. Yani $|AB| = |MB| = |MC|$ olduğu görülür.

49. $ABCD$ dörtgeni $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BDC}) = 36°$, $m(\widehat{CBD}) = 18°$ ve $m(\widehat{BAC}) = 72°$ olmak üzere bir dışbükey dörtgendir. AC ve BD köşegenlerinin kesiştiği nokta P olduğuna göre $\widehat{APD}$ açısının ölçüsünü bulunuz.

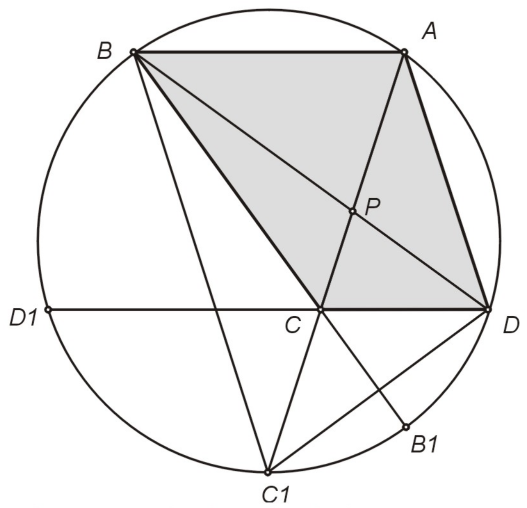
Birinci Çözüm. DA ve BA doğruları üzerinde $|AC| = |AE| = |AZ|$ olacak şekilde E ve Z noktaları olsun.



Bu durumda $m(\widehat{DEC}) = \dfrac{m(\widehat{DAC})}{2} = 18^\circ = m(\widehat{CBD})$ olduğundan $DEBC$ dörtgeni bir kirişler dörtgenidir. Benzer şekilde $m(\widehat{AZC}) = \dfrac{m(\widehat{BAC})}{2} = 36^\circ$ olduğundan $CBZD$ dörtgeni de bir kirişler dörtgenidir.

Dolayısıyla $BCDZE$ beşgeninin köşeleri A merkezli çemberin üzerindedir. Yani $|AC| = |AD|$ ve $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ADC}) = \dfrac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$ olur ve bunların sonucunda $m(\widehat{ADP}) = 36^\circ$ ve $m(\widehat{APD}) = 108^\circ$ olarak bulunur.

İkinci Çözüm. Aşağıdaki resimde de görülebileceği gibi BB_1 ve DD_1 doğruları sırasıyla $\widehat{DBC_1}$ ve $\widehat{BDC_1}$ açılarının açı ortaylarıdır.



Dolayısıyla C noktası BDC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir. Bu durumda

$$m(\widehat{DC_1A}) = m(\widehat{AC_1B}) = 36^\circ, \quad m(\widehat{DPA}) = \frac{72^\circ + 144^\circ}{2} = 108^\circ$$

olduğu açıkça görülür.

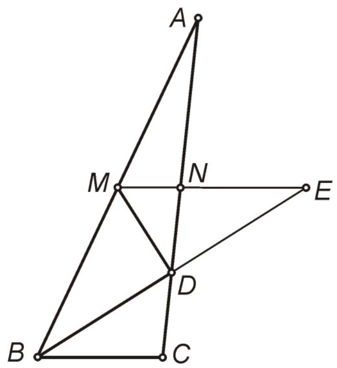
50. A ve B köşelerinden çizilen kenarortayların dik kesiştiği bir ABC üçgeninde en kısa kenarın AB olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: A ve B köşelerinden çizilen kenarortayların kesiştiği nokta M, C köşesinden çizilen kenarortayın AB kenarını kestiği nokta F olsun. Bu durumda F, ABM dik üçgeninin hipotenüsünün orta noktası, dolayısıyla da ABM üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir. Bu da $|AB| = 2|FM|$ olduğunu gösterir. M, CF kenarortayını $2 : 1$ oranında böldüğü için $|AB| = |CM|$ olur. AMC üçgeninin en büyük açısı, bir geniş açı olan, $\widehat{AMC}$ dir. O halde $|AC|$ bu üçgenin en uzun kenarıdır. Buradan $|AC| \geq |MC| = |AB|$ olduğu sonucu çıkar. Benzer şekilde $|BC| \geq |AB|$ olduğu da ispatlanabilir.

$m(\widehat{DEC}) = \frac{m(\widehat{DAC})}{2} = 18^\circ = m(\widehat{CBD})$ 'dir. Buradan, A noktası merkez olmak üzere, $DEBC$ dörtgeninin köşelerinin bir çember üzerine yerleştirilebileceği (çembersel olduğu) sonucu çıkar.

51. ABC üçgeninde AB kenarının orta noktası M ve ABC açısının açıortayının AC kenarı ile kesiştiği nokta D olsun. $MD \perp BD$ ise, $|AB| = 3|BC|$ olduğunu gösteriniz.

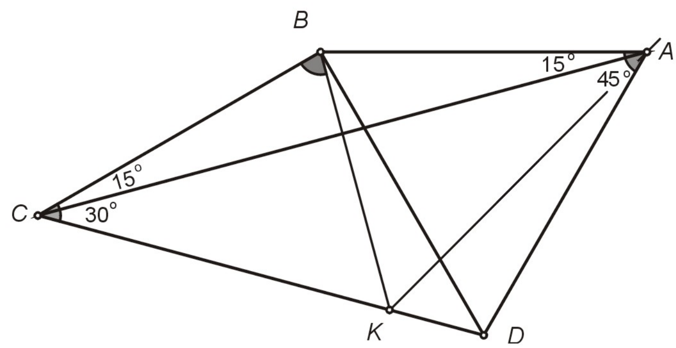
Çözüm: AC kenarının orta noktasına N diyelim ve bu noktayı M noktası ile birleştirelim. B köşesi ile D noktasını da birleştirelim.



MN doğru parçası BC kenarına paralel olacaktır. MN ile BD nin kesiştiği noktaya P dersek MBP üçgeni ikizkenar ve $|BD| = |DP|$ olur. Ayrıca NDP ve CDB üçgenleri eş üçgenlerdir. Dolayısıyla $|ND| = |DC|$ ve $|AN|$=2 birim, $|ND| = |DC| =$ 1 birim olduğu elde edilir. BD açıortay olduğu için $3 = \frac{|AD|}{|DC|} = |\frac{|AB|}{|BC|}$ bulunur.

52. Bir $ABCD$ dörtgenininde $m(\widehat{CAD}) = 45^\circ$, $m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) =$ 15° olduğuna göre DBC açısının değeri nedir?

Çözüm. CD kenarı üzerinde, $m(\widehat{CAK}) = 30^\circ$ olacak şekilde bir K noktası olsun.



Bu durumda AKC üçgeni $m(\widehat{CAK}) = m(\widehat{ACK}) = 30^\circ$ olduğundan, bir ikizkenar üçgen olur. Ayrıca soruda verildiği üzere ABC üçgeni de ikizkenar olduğundan,

$KB \perp AC$ olur ve dolayısıyla $m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{BKC}) = 60°$ ve $m(\widehat{AKD}) = 60°$ olduğu görülür. Bunların dışında,

$$\begin{aligned} m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BKD}) &= m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAD}) + m(\widehat{BKA}) + m(\widehat{AKD}) \\ &= 15° + 45° + 60° + 60° \\ &= 180° \end{aligned}$$

olduğu için A, B, K ve D noktaları bir çember üzerindedir. Dolayısıyla $m(\widehat{DBK}) = m(\widehat{DAK}) = 45° - 30° = 15°$ olduğunu görür ve buradan da sonucu yani

$$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DBK}) + m(\widehat{KBC}) = 15° + (90° - m(\widehat{BCA})) = 15° + (90° - 15°) = 90°$$

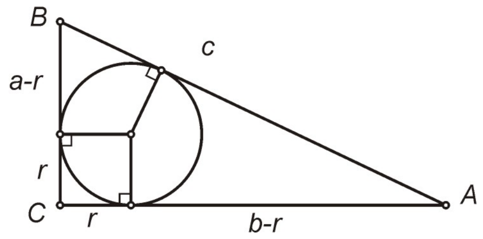
değerini buluruz.

53. Bir dik üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı R, iç teğet çemberinin yarıçapı r olmak üzere

$$R \geq r(1 + \sqrt{2})$$

olduğunu gösteriniz.

Birinci Çözüm. Bir dik üçgende $c = 2R$ ve $(a - r) + (b - r) = c$, yani $a + b = c + 2r$ olduğu açıktır.



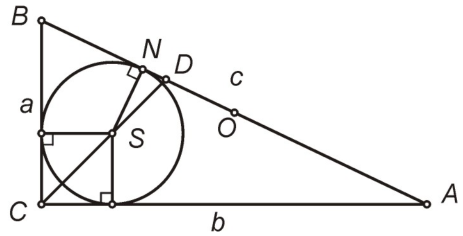
Bu durumda $(a - b)^2 \geq 0$ olduğundan, $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, yani $\sqrt{2}c \geq a + b$ olduğu görülür. Son eşitsizliği ve $a + b = c + 2r$ denklemini birleştirerek,

$$c + 2r \leq \sqrt{2}c \text{ , yani } 2R + 2r \leq 2\sqrt{2}R$$

elde edilir.

Dolayısıyla $(\sqrt{2} - 1)R \geq r$, yani $R \geq (1 + \sqrt{2})r$ olduğu görülür.

İkinci Çözüm. Bu üçgende iç teğet çemberin merkezi S, çevrel çemberin merkezi O, hipotenüsle iç teğet çemberin kesiştiği nokta N, dik açının açı ortayının hipotenüsle kesiştiği nokta ise D noktası olsun.



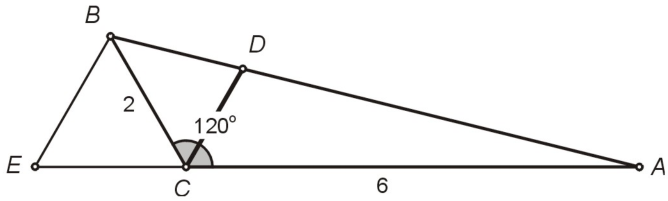
Bu durumda,

$$r(\sqrt{2}+1) = r\sqrt{2}+r = |CS|+|SN| \leq |CS|+|SD| = |CD| \leq |CO| = R$$

olduğu görülür. Burada dikkat edilecek husus $a = b$ durumunda D ve N noktalarının çakışık olacağıdır. Ancak bu durumda yukarıdaki ifadenin eşitlik durumunun sağlandığı kolayca görülebilir.

54. $|AC| = 6$, $|BC| = 2$ ve $m(\widehat{ACB}) = 120°$ olan bir ABC üçgeninin $\widehat{ACB}$ açısının açı ortayı AB kenarıyla D noktasında kesişiyor. Bu durumda CD doğru parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm. AC doğrusu üzerinde bir E noktası, C noktası A ve E noktaları arasında kalacak ve $|CE| = |CB|$ olacak şekilde olsun.



Bu durumda ECB üçgeni bir eşkenar üçgen ve $BE//DC$ olduğu görülür. Dolayısıyla ACD ve AEB üçgenleri benzer üçgenler olacağından,

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|AE|} \Rightarrow |CD| = \frac{3}{2}$$

elde edilir.

55. R çevrel çemberin yarıçapı olmak üzere, $R(b+c) = a\sqrt{bc}$ koşulunu sağlayan ABC üçgenini bulunuz.

Çözüm. Bir çemberde çap herhangi bir kirişden daha kısa değildir, dolayısıyla $2R \geq a$ olur. $AO-GO$ eşitsizliğinden $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$ elde edilir. Dolayısıyla $R(b+c) \geq a\sqrt{bc}$ olur. Eşitlik $a = 2R$ ve $b = c$ olduğu zaman sağlanır. Bu koşulları sağlayan üçgen, bir ikizkenar dik üçgendir.

56. Bir kenarı α olan ABC eşkenar üçgeninin dışına $m(\widehat{CAD}) = 90°$ olan ACD ikizkenar üçgeni çiziliyor. Burada DA ve CB kenarları E noktasında kesiştiğine göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

(a) $\widehat{DBC}$ açısının ölçüsünü bulunuz.

(b) CDE üçgeninin alanını α cinsinden bulunuz.

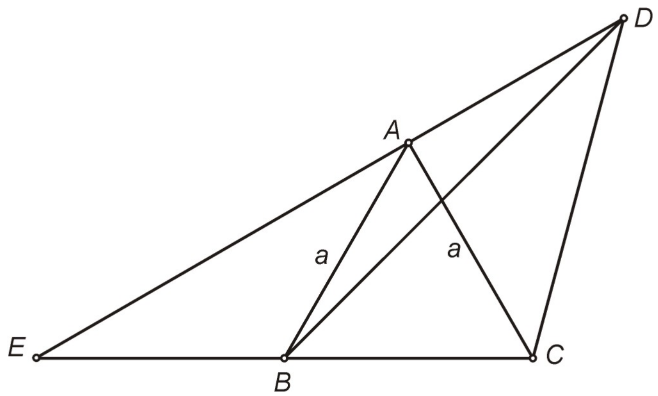
(c) BD doğru parçasının uzunluğunu α cinsinden bulunuz.

Çözüm.

(a) $|AB| = |AD| = \alpha$ olduğundan, ABD üçgeni ikizkenar üçgendir ve

$$m(\widehat{ABD}) = \frac{180° - (60° + 90°)}{2} = 15°$$

olur.



Dolayısıyla $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{ABD}) = 60° - 15° = 45°$ olarak bulunur.

(b) $m(\widehat{ACE}) = 60°$ ve $m(\widehat{AEC}) = 30°$ olduğundan ACE üçgeni bir dik üçgendir. Dolayısıyla $|CE| = 2.|AC| = 2\alpha$ ve $|AE| = \dfrac{2\alpha\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}$ olur. Buradan da $|DE| = \alpha + \alpha\sqrt{3}$ olarak bulunur. Bu durumda

$$Alan(CDE) = \frac{1}{2}.|DE|.|AC| = \frac{1}{2}.(\alpha + \alpha\sqrt{3}).\alpha = \frac{\alpha^2(1+\sqrt{3})}{2}$$

olduğu görülür.

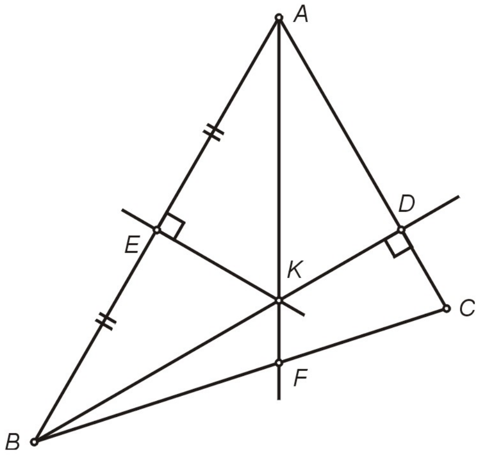
(c) CBD ve CDE üçgenlerinin açıları birbirine eşit olduğu için bu üçgenler benzer üçgenlerdir. Dolayısıyla

$$\frac{|BD|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|CD|} \Leftrightarrow \frac{|BD|}{\alpha(1+\sqrt{3})} = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{2}} \Rightarrow |BD| = \frac{\alpha(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \Rightarrow |BD| = \frac{\alpha(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$$

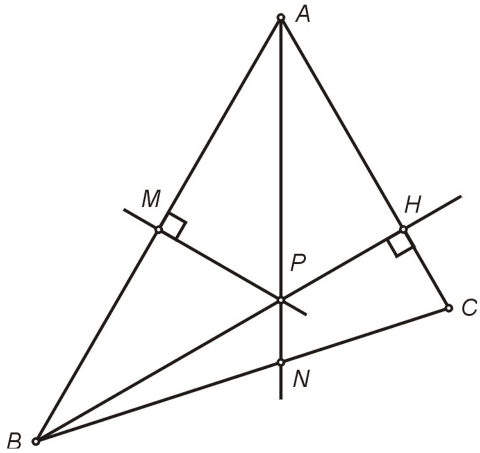
olduğu görülür.

57. Dar açılı bir ABC üçgeninde, BAC açısının açı ortayı, B köşesinden çizilen yükseklik ve AB kenarına ait kenar orta dikme bir noktada kesişmelerinin ancak ve ancak $m(\widehat{A}) = 60°$ olduğu zaman mümkün olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Şekilde gösterildiği gibi $[AF]$ açıortayı, $[BD]$ yüksekliği ve $[EK]$ kenar orta dikmesi, K noktasında kesişsinler. $m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{FAC}) = \alpha$ olsun. ABK üçgeninde, $|AE| = |EB|$ ve $[EK] \perp [AB]$ olduğu için, ABK üçgeni ikizkenar bir üçgendir ve $m(ABK) = \alpha$ olur. Şimdi, ABD üçgeninde iç açıların toplamı $180°$ olduğu için, $\alpha = 30°$ ve $m(\widehat{BAC}) = 60°$ elde edilir.



Öteki taraftan, $m(\widehat{A}) = 60°$ olsun. Şekilde gösterildiği gibi, $[AN]$ açıortayı ve $[BH]$ yüksekliği bir P noktasında kesişsinler. $[AN]$ açıortay olduğu için, $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{NAC}) = 30°$ olur. ABH üçgeninde iç açıların toplamı $180°$ olduğu için, $m(\widehat{HBA}) = 30°$ dir. Şimdi, ABP üçgeni bir ikizkenar üçgen olduğu için, P noktasından çizilen yükseklik tabanı ortalar, yani $[PM]$ yüksekliği orta dikmedir.



58. Birim kareye sığabilecek en büyük yarım dairenin alanını bulunuz.

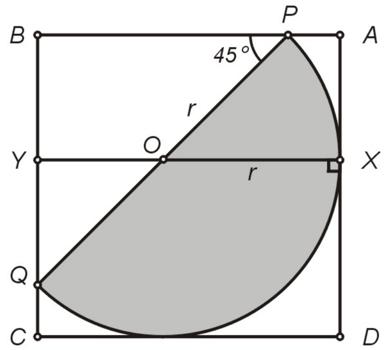
Çözüm. Yarım dairenin, karenin kenarlarına teğet olacağı açıktır. Olası bir çözüm, karenin bir kenarını çap olarak alan bir yarım dairedir. Bu yarım dairenin çapı 1 birim olacaktır. Alanı ise

$$\frac{1}{2} \cdot \pi(\frac{1}{2})^2 \approx 0,3927$$

olur.

Yarım dairenin alanının en büyük olması için komşu iki kenara teğet olması gerekir.

Şekil BD köşegenine göre simetrik olduğu için m$(\widehat{QPB}) = 45°$. X noktasından geçen ve AB kenarına paralel olan bir doğru yarım dairenin merkezinden geçer.



$|OY| = r \cdot \cos(45°) = \frac{r}{\sqrt{2}}$ olduğundan

$$1 = |AB| = r + \frac{r}{\sqrt{2}} = r(1 + \frac{1}{2})$$

elde edilir. Buradan da yarım dairenin yarı çapı

$$r = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 - \sqrt{2}$$

olarak bulunur. Yarıçapı $2 - \sqrt{2}$ olan yarım dairenin alanı da,

$$\frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = \pi(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0,539$$

dur.

59. ABC, $|AC| = |BC|$ olacak şekilde bir ikizkenar üçgen olsun. Bu üçgenin çevrel çemberinin, C noktasını içermeyen AB yayının üzerindeki bir noktaya P noktası diyelim. C noktasından PB doğru parçası üzerine indirilen dikme ayağına ise D noktası diyelim. Bu durumda,

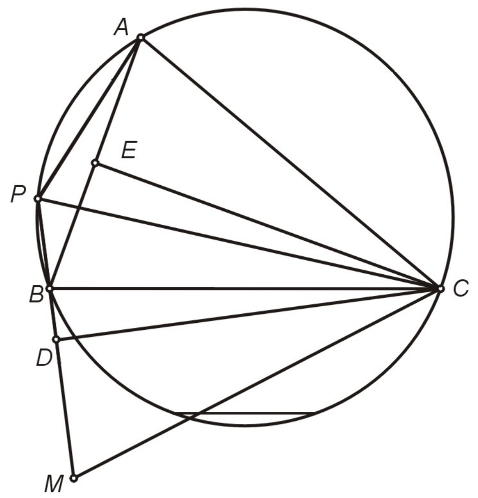
$$|PA| + |PB| = 2|PD|$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, PB doğru parçasını $|BM| = |AP|$ olacak şekilde uzatalım. Burada $m(\widehat{CBP}) = 180° - m(\widehat{CAP})$ olduğundan $m(\widehat{CAP}) = m(\widehat{CBM})$ bulunur. Bu durumda $|CA| = |CB|$ ve $|AP| = |BM|$ olduğundan BCM ve ACP üçgenleri eş üçgenler olur. Dolayısıyla $|CP| = |CM|$ olur ve CPM üçgeni de, CD doğru parçasını yükseklik olarak kabul eden ikizkenar üçgen olur. Sonuç olarak D, PM doğru parçasının orta noktası olacağından,

$$2|PD| = |PM| = |PB| + |BM| = |PB| + |PA|$$

olduğu görülür.

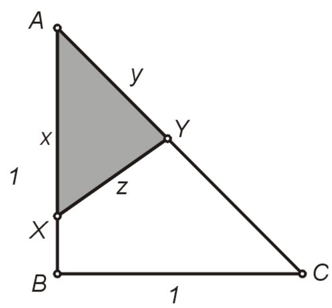


60. Kenarları $1, 1, \sqrt{2}$ olan ikizkenar diküçgen biçimindeki bir tahta parçası iki parçaya bölünecektir. İki parçanın alanını eşit yapacak en kısa kesitin yerini ve uzunluğunu ve bulunuz.

Çözüm. İki durum inceleyeceğiz:

- 1. durum : dar açılardan biri üzerinden kesim.
- 2. durum : dik açı üzerinden kesim.

1. durum: X noktası AB kenarı üzerinde ve $|AX| = x$, Y noktası AC kenarı üzerinde ve $|AY| = y$ olsun. XY uzunluğu z olan bir kesittir.
Alan(ABC) = $1/2 \cdot$ taban $\cdot$ yükseklik $= 1/2$ dir.
AXY üçgeninin alanı Alan$(AXY) = 1/2 \cdot x \cdot (y/\sqrt{2}) = xy/\sqrt{2}$ dir.
Alan$(AXY) = 1/2 \cdot$ Alan(ABC) den $xy = 1/\sqrt{2}$ buluruz.

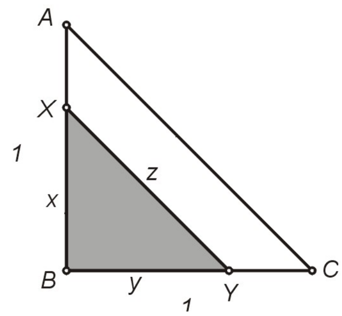


AXY üçgeninde cosinüs teoreminden

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cos A \\ &= x^2 + y^2 - 1 \quad (\cos A = 1/\sqrt{2}) \\ &= (x-y)^2 + (\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan z^2 nin en küçük değeri, $x = y$ iken $z^2 = \sqrt{2} - 1$ olarak bulunur. $xy = 1/\sqrt{2}$ olduğu için $x = y = 1/\sqrt[4]{2}$ olur.

2. durum: Y noktası AB kenarı üzerinde ve $|BY| = y$, X noktası BC kenarı üzerinde ve $|BX| = x$ olsun. XY uzunluğu z olan bir kesittir.



Alan$(BXY) = xy/2$ dir.
Alan$(BXY) = 1/2\cdot$Alan(ABC) olduğundan, $xy = 1/2$ bulunur. BXY üçgeninde pisagor teoreminden $z^2 = x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 1$ elde edilir.
Dolayısıyla, z^2 nin en küçük değeri, $x = y$ iken $z^2 = 1$ olarak bulunur. Bu 1. durumdan elde edilen uzunluktan daha uzundur.

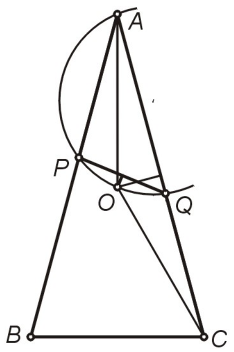
Sonuç olarak, en kısa kesit 1. durumda elde edilen şekilde, $|AX| = |BY| = 1/\sqrt[4]{2}$ ve kesit uzunluğu $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ olmalıdır. (Simetriden dolayı, benzer kesit BC kenarından AB kenarına çizilerek de elde edilebilir.)

61. ABC ikizkenar üçgeninin, sırasıyla eşkenarlar AB ve AC üzerinde P ve Q noktaları, $|AP| = |CQ|$ olacak şekilde bulunmaktadır. Bununla birlikte P ya da Q, ABC üçgeninin bir köşesi değildir. Bu durumda APQ üçgeninin çevrel çemberinin ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezinden geçtiğini gösteriniz.

Çözüm. PQ ve AC'nin orta dikmelerinin kesiştiği nokta O olsun. Bu durumda, $|OP| = |OQ|$, $|OA| = |OC|$ ve $|AP| = |CQ|$ olduğundan, APO ve CQO eş üçgenlerdir. Dolayısıyla $m(\widehat{CQO}) = m(\widehat{APO})$ olduğu için $APOQ$ dörtgeninin bir çember üzerinde olduğu görülür. Ayrıca $m(\widehat{OCQ}) = m(\widehat{OAP}) = m(\widehat{OQP}) = m(\widehat{OPQ}) = m(\widehat{OAQ})$ olduğundan OA, BAC açısının açıortayıdır ve ABC ikizkenar üçgen olduğu için aynı zamanda BC kenarının orta dikmesidir.

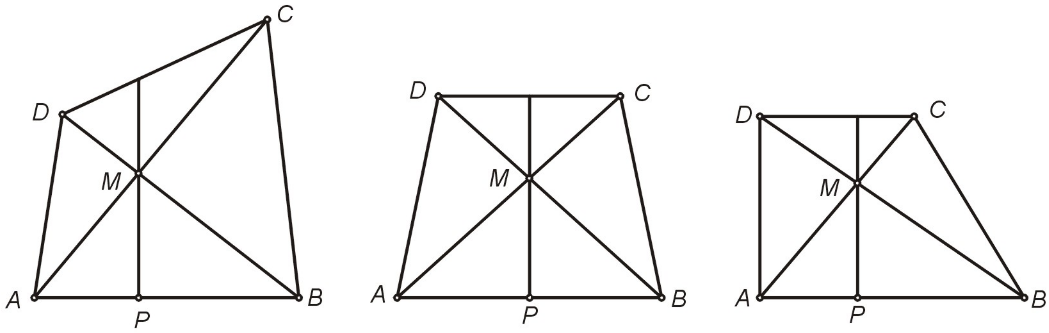
Bu durumda O hem BC kenarının hem de AC kenarının orta dikmesi üzerinde olduğundan ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.

62. Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası M olmak üzere AB kenarını P noktasında, CD kenarını Q noktasında kesen ve M noktasından geçen g doğrusu dikkate alındığında APM, BPM, CQM ve DQM üçgenleri benzer olan



bütün konveks $ABCD$ dörtgenleri bulunuz (üçgenlerin köşeleri aynı sırada olmak zorunda değil).

Çözüm Eğer $m(widehatMPB) > 90°$ ise, $m(\widehat{MPA}) = 180° - m(\widehat{MPB}) < 90° < m(\widehat{MPA})$ (şekil a). $m(\widehat{MPB}) = m(\widehat{MAP}) + m(\widehat{AMP})$ olduğundan $m(\widehat{MAP}) < m(\widehat{MPB})$ ve $m(\widehat{AMP}) < m(\widehat{MPB})$ dır. Yani, APM üçgenindeki bütün açılar $m(\widehat{MPB})$ dan küçüktür. Bu APM üçgeninin BPM üçgenine benzer olmasıyla çelişir. Benzer şekilde $m(\widehat{MPA}) > 90°$ olması durumunda APM üçgeni ile BPM üçgenleri benzer olamazlar. Dolayısıyla, MP doğrusu AB doğrusuna dik olmak zorundadır. Aynı inceleme MQ için yaparsak MP doğrusunun CD doğrusuna dik olması gerektiği bulunur. Yani AB ve CD doğruları paraleldir. Dolayısıyla $ABCD$ bir yamuk olmalıdır.



$m(\widehat{DCM}) = m(\widehat{BAM})$ ve $m(\widehat{CDM}) = m(\widehat{ABM})$ olduğu için APM ve CQM üçgenleri benzerdir. Benzer şekilde BPM ve DQM üçgenleri de benzerdir. Bu koşullar altında iki farklı durum olabilir.

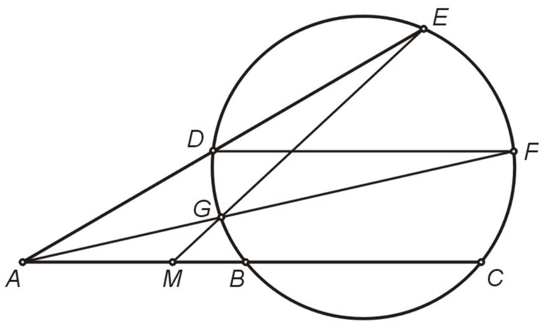
- 1. durum: $m(\widehat{AMP}) = m(\widehat{BMP})$ (sekil b). Dolayısıyla, $m(\widehat{MAP}) = m(\widehat{MBP})$. Yani, $ABCD$ ikizkenar yamuktur. $APM \approx BPM \approx CQM \approx DQM$ bulunur.
- 2. durum: $m(\widehat{AMP}) = m(\widehat{MBP})$ (şekil c). Dolayısıyla $m(\widehat{BMP}) = m(\widehat{MAP})$

ve $m(\widehat{MAP}) + m(\widehat{AMP}) = 90°$. Yani, $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AMP}) + m(\widehat{BMP}) = 90°$ dir. Buradan $ABCD$ yamuğunun köşegenlerinin birbirlerine dik olduğu bulunmuş olur. Dolayısıyla, $APM \approx BPM \approx CQM \approx DQM$ dir.

63. Bir çembere dışındaki bir A noktasından çizilen iki doğru, çemberi sırasıyla B, C ve D, E noktalarında kesmektedir. ($B \in [AC]$ ve $D \in [AE]$ dir.) D noktasından $[BC]$ ye çizilen paralel, çemberi F noktasında kesmektedir. A ve F noktalarından geçen doğrunun çemberi kestiği ikinci nokta G olsun. E, G noktalarından geçen doğru, $[AC]$ yi M noktasında kestiğine göre

$$\frac{1}{|AM|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$$

olduğunu kanıtlayınız.

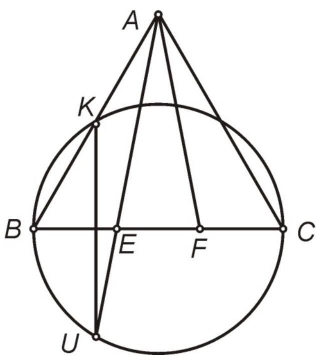


Çözüm. $[DF]//[AC]$ olduğu için $m(\widehat{DFA}) = m(\widehat{FAC})$ dir. Öteki taraftan, $\widehat{DFA}$ ve $\widehat{DEG}$ aynı yayı gören çevre açılar olduklarından ölçüleri eşittir ve $m(\widehat{CAF}) = m(\widehat{DEG})$ dir. Dolayısıyla, AMG ve EMA üçgenleri benzerdir. Benzerlikten, $\frac{|AM|}{|MG|} = \frac{|EM|}{|AM|}$ ya da $|AM|^2 = |MG| \cdot |EM|$ elde edilir.

M noktasının çembere göre kuvvetinden, $|MG| \cdot |EM| = |MB| \cdot |MC|$ yazılır. Dolayısıyla, $|AM|^2 = |MB| \cdot |MC| = (|AB| - |AM|)(|AC| - |AM|) = |AB| \cdot |AC| - |AM|(|AB| + |AC|) + |AM|^2$ buradan da $|AB| \cdot |AC| = |AM|(|AB| + |AC|)$ bulunur. Son eşitliğin her tarafı $|AM| \cdot |AB| \cdot |AC|$ ye bölünürse istenen ifade elde edilir.

64. ABC bir eşkenar üçgen ve P, çapı BC kenarı olan A köşesinden uzak olan yarımdairedir. A köşesinden geçen ve BC yi üç eş parçaya ayıran doğruların P yarımdairesini de üç eş parçaya ayırdığını gösteriniz.

Çözüm: E ve F noktaları, BC kenarını sırasıyla BE, EF ve FC olmak üzere üç eşit parçaya ayıran noktalar olsun. AE doğrusu ile P yarımdairesi U noktasında kesişsin. Yarımdaireyi tam daireye tamamladığımızda AB ve AC kenarları ile üst yarımdaire P', K ve L noktalarında kesişsinler.

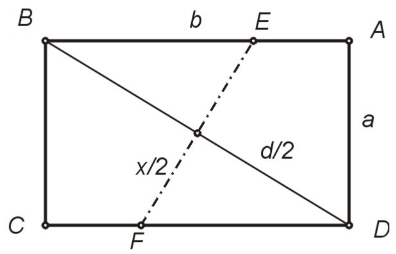


BKC açısı çapı gördüğü için bir dik açıdır. Ayrıca $|BC| = |AC|$ olduğu için KC kenarortaydır, aynı zamanda açıortaydır, yani K, AB nin orta noktasıdır ve $m(\widehat{BCK}) = 30°$ dir. Benzer şekilde $m(\widehat{CBL}) = 30°$ dir. Böylece K ve L, P' yarımdairesini üç eşit parçaya böler. Dolayısıyla K noktasının, BC kenarına göre, U noktasının simetriği olduğunu göstermemiz yeterlidir.

E de BF nin orta noktası olduğu için KE ile AF paraleldir. O halde $m(\widehat{BEU}) = m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{KEB})$ olur. Dolayısıyla U ve K, BC çapına göre simetriktir.

65. Dikdörtgen şeklindeki bir kağıt, köşegen oluşturan iki köşesi üst üste gelecek şekilde katlanıyor. Kat yerinin oluşturduğu yeni kenarın (üst üste gelen köşelerin karşısındaki kenar) uzunluğu, dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğuna eşitse dikdörtgenin uzun kenarının kısa kenarına oranı nedir?

Çözüm. $ABCD$'yi katladığımız kağıt olarak alalım. $a \leq b$ olacak şekilde $AD = a$, $AB = b$ olsun. Katlama sonunda oluşan yeni kenara EF ve uzunluğuna x diyelim. Köşegen uzunluğu da $d^2 = a^2 + b^2$ olacaktır.



Simetriden dolayı BD köşegeni ve EF dik kesişecek ve birbirlerini iki eş parçaya böleceklerdir. DAB üçgeni ve XEB üçgeni iki ortak açıya sahip oldukları için $(m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{XBE})$ ve

$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{XEB})$) benzer üçgenlerdir:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{x}{d}$$

O halde

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{(a^2 + b^2)} \qquad (12)$$

EF nin uzunluğu, dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğuna eşit olduğundan $x = b$ dir. (12) de yerine yazarsak:

$$\begin{aligned} b &= \frac{a}{b}\sqrt{a^2 + b^2} \\ b^2 &= \frac{a^2}{b^2}(a^2 + b^2) \\ b^4 &= a^2(a^2 + b^2) \\ 0 &= b^4 - a^2b^2 - a^4 \end{aligned}$$

Denklemi çözersek

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^4}}{2} \\ &= \frac{a^2(1 \pm \sqrt{5})}{2} \end{aligned}$$

bulunur. $a, b \geq 0$ olduğu için negatif kökü gözardı edersek uzun kenarın kısa kenara oranı

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

olur.

66. $ABCD$ karesi ile $ABEF$ karesinin bulunduğu düzlemler birbirlerine diktir. AE ve BF doğruları O noktasında kesişiyor ve $|AE| = 4$ cm ise

(a) B noktasından DOC ve DAF düzlemlerinin kesiştiği doğruya olan uzaklığını

(b) AC ve BF doğruları arasındaki uzaklığı

bulunuz.

Çözüm:E ve F noktalalarından sırasıyla C ve D noktalarına 4 cm uzaklıkta olan E' ve F' noktalarını kullanarak $ABEFCDE'F'$ küpünü oluşturalım.

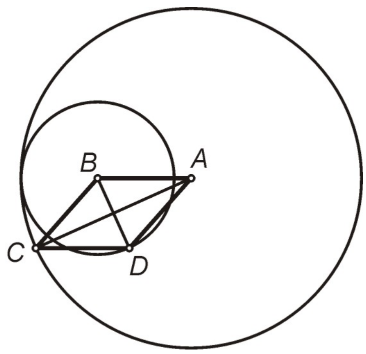
(a) DOC düzlemi AF kenarı ile M noktasından kesişsin. DC, $ABEF$ ile paralel olduğundan OM 'de DC 'ye paraleldir. O halde M, AF 'nin orta noktası ve DM 'de DOC ve DAF düzlemklerinin kesişim doğrusudur. Dolayısıyla istenilen uzaklık B 'den MD 'ye olan uzaklıktır. Burada uzaklık $|MB| = |MD| = 2\sqrt{5}$ ve $|BD| = 4\sqrt{2}$ 'dir. Buradan BDM 'nin alanı da $4\sqrt{6}$ olarak bulunur. O halde B 'den MD doğrusuna olan dik uzaklık $\frac{4\sqrt{30}}{5}$ 'tir.

(b) BF ve AC doğruları $E'BF$ ve ACF' paralel düzlemlerinde yer almaktadır. O halde aralarındaki uzaklık bulundukları düzlemler arasındaki uzaklığa eşitir. DE, $E'BF$ ve ACF' düzlemlerine dik ve bu düzlemler tarafından 3 eşit parçaya bölünüğünden bu düzlemler arasındaki uzaklık

$$\frac{1}{3} \cdot |DE| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

olarak bulunur.

67. Çevresi 40 cm olan $ABCD$ eşkenar dörtgeninin A köşesini merkez olarak alan çember C, B köşesini merkez olarak alan çember ise D noktasından geçmektedir. Bu iki çember birbirlerine teğet ise, $ABCD$ eşkenar dörtgeninin alanı kaç cm^2dir?

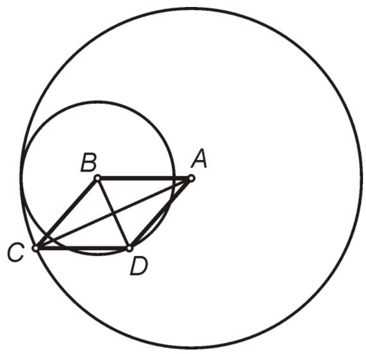


Çözüm:$ABCD$, eşkenar dörtgen olduğu için, köşegenleri birbirlerini orta noktalarından keserler. Ayrıca köşegenler dik kesişirler.
(Dik kesiştiklerinin küçük bir ispatı vektörler kullanılarak yapılabilir:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ve $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} - \overline{AD} \cdot \overline{AB} \\
&= \overline{AD} \cdot \overline{AD} - \overline{AB} \cdot \overline{AB} \\
&= \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2
\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$,olduğundan $\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ yani $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ dır. Dolayısıyla $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$)



Büyük çemberim yarı çapına R $(= |AC|)$, küçük çemberin yarı çapına r $(= |BD|)$ diyelim. Dörtgenin alanı, içindeki dört eş üçgenin alanlarının toplamına eşittir:

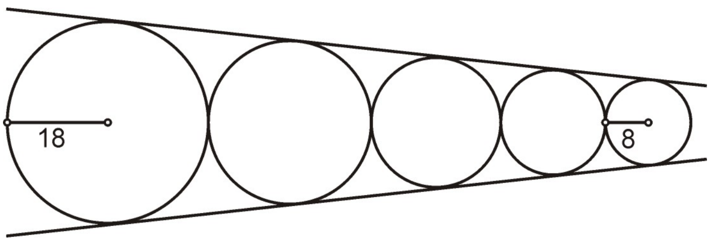
$$\text{A}(ABCD) = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{R}{2} \cdot \tfrac{r}{2}\right) = \tfrac{R \cdot r}{2}$$

Ayrıca Pisagor bağıntısından, $\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 10^2$, olduğundan $R^2 + r^2 = 400$ dür. İki çemberin merkezi aynı doğru üzerinde olduğu için iki çemberin teğet olduğu nokta da bu doğru üzerindedir. AB doğru parçasını uzatalım. Bu yeni doğru parçası çemberleri teğet noktasında kesecektir. Bu noktaya E dersek, $|AE| = R$, $|AB| = 10$ ve $|BE| = r$ olduğundan $R - r = 10$ olur. O halde;

$$\begin{aligned}
(R - r)^2 &= 10^2 \\
R^2 - 2 \cdot R \cdot r + r^2 &= 100 \\
R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r = 400 - 2 \cdot R \cdot r &= 100 \\
R \cdot r &= 150
\end{aligned}$$

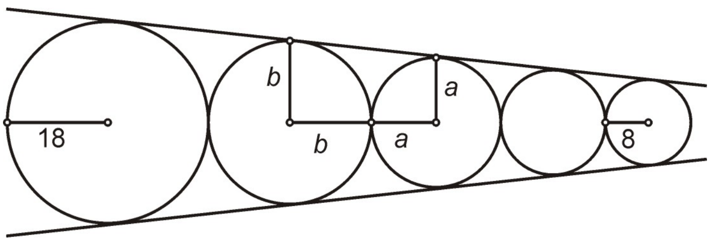
O halde $ABCD$ eşkenar dörtgeninin alanı $\frac{R \cdot r}{2} = 75\ cm^2$ dir.

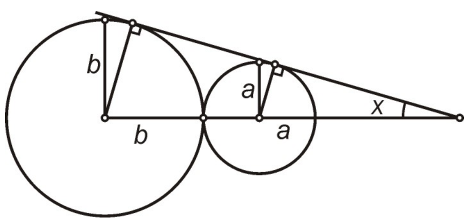
68. Değişik boyutlardaki beş bilye konik biçimindeki bir huniye koyuluyor. Her bilye bitişiğindeki bilyelerle ve huni yüzeyiyle temas halindedir.



En küçük bilyenin yarıçapı 8, en büyük bilyenin yarıçapı 18 milimetredir. Ortadaki bilyenin yarıçapını bulunuz.

Çözüm: Cevap 12 milimetredir. Bitişik iki bilyenin yarıçapları $a < b$ olsun. $\frac{b}{a}$'nın sadece huninin yüzeyinin eğimine bağlı olan bir sabit olduğunu göstereceğiz.
Bilyeler birbirleri ile temas halinde oldukları için bilyelerin merkezlerinin uzaklığı $a + b$'dir.
Bilyeler huni yüzeyiyle de temasta olduğu için ve huni yüzeyinin (enine kesitinin) eğimi sabit olduğu için, şekildeki iki taralı üçgen benzerdir. Huni yüzeyinin dikey eksenle yaptığı açıya x dersek eğer, $c = sec(x)$ huni yüzeyinin eğimine bağlı olan bir sabittir. Dolayısıyla bilyelerin merkezlerinin huni duvarına olan yatay uzaklıkları bc ve ac'dir.



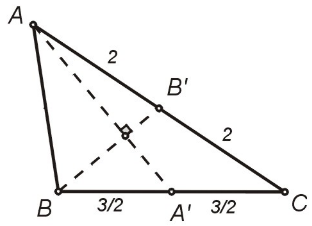


Huni yüzeyinin eğimini m ile gösterelim. Dolayısıyla $m = \frac{b+a}{(b-a)c}$ olur. Buradan $\frac{b}{a} = \frac{mc+1}{mc-1}$ elde edilir.

Dolayısıyla bitişik bilyelerin yarıçaplarının oranı sadece huni yüzeyinin eğimine bağlı olan bir sabittir. Bu sabiti k ile gösterelim.

En küçük bilyenin yarıçapı 8 olduğu için, onun üstündeki bilyenin yarıçapı $8k$ olacaktır. Yine aynı şekilde ortadaki bilyenin yarıçapı $8k^2$, onun üstündekinin yarıçapı $8k^3$ ve en büyük bilyenin yarıçapı $8k^4$ olacaktır. En büyük bilyanin yarıçapı 18 olduğu için $18 = 8k^4$ elde edilir. Buradan $k^2 = \frac{3}{2}$ bulunur. Dolayısıyla ortadaki bilyenin yarıçağı $8k^2 = 12$ olur.

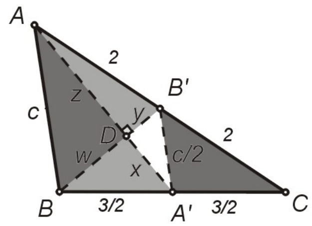
69. ABC üçgeninin AA' ve BB' kenarortaylarının dik kesiştiklerini varsayalım. $|BC| = 3$ ve $|AC| = 4$ ise, AB kenarının uzunluğu ne olur?



Çözüm: Bu probleme bir kaç yaklaşımda bulunmak mümkündür.

Geometrik Çözüm:

Aşağıdaki şekilde $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{A'CB'}$ ve $\frac{CA'}{CB} = \frac{CB'}{CA} = \frac{1}{2}$ 'dir.
Bu yüzden CAB ve $CB'A'$ üçgenleri benzerdir ve $A'B' = \frac{1}{2}BA$ 'dır.
AA' ve BB', D noktasında kesişsinler.
$A'D = x$, $B'D = y$, $AD = z$, $BD = w$ ve $AB = c$ olsun. Dolayısıyla $A'B' = \frac{1}{2}c$ olur.



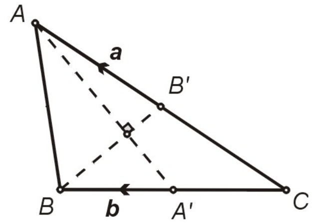
Yukarıdaki şekilde gözüken dört dik üçgenin herbirine Pisagor Teoremini uygularsak ;

$$\begin{array}{rcll} \Delta A'B'D & \Rightarrow & y^2 + x^2 = c^2/4 & (1) \\ \Delta B'AD & \Rightarrow & y^2 + z^2 = 4 & (2) \\ \Delta ABD & \Rightarrow & w^2 + z^2 = c^2 & (3) \\ \Delta BA'D & \Rightarrow & w^2 + x^2 = 9/4 & (4) \end{array}$$

denklemlerini elde ederiz. Buradan, (1) - (2) + (3) - (4) $\Rightarrow 0 = 5c^2/4 - 25/4$. Dolayısıyla, $c^2 = 5$ olur.
Bu yüzden, AB kenarının uzunluğu $\sqrt{5}$ 'dir.

Vektörel Çözüm:

C noktası orijin olsun.
$\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ve $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ olsun.



$\overrightarrow{AA'}$ ve $\overrightarrow{BB'}$ vektörleri birbirlerine dik olduklarından, iç çarpımları sıfırdır.

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

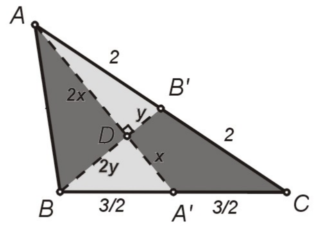
$AA' \perp BB' \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \,.\, \overrightarrow{BB'} = 0$ 'dır.
Bu yüzden $(\vec{b} - 2\vec{a}).(\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$ ve dolayısıyla $5\vec{a}.\vec{b} - 2a^2 - 2b^2 = 0$ 'dır.
$a = 4$ ve $b = 3$ olduğu için, $5\vec{a}.\vec{b} = 2(4^2 + 3^2) = 50$ olur.
Bu yüzden, $\vec{a}.\vec{b} = 10$ 'dur. O halde,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AB} &= (\vec{b} - \vec{a}).(\vec{b} - \vec{a}) \\
&= b^2 + a^2 - 2\vec{a}.\vec{b} \\
&= 3^2 + 4^2 - 2 \times 10 \\
&= 5
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, AB kenarının uzunluğu $\sqrt{5}$ olur.

Kenarortayların Bir Özelliği Kullanılarak Yapılan Geometrik Çözüm:

AA' ve BB', D noktasında kesişsinler.
Bu çözümde; bir üçgenin kenarortayları, üçgenin tepe noktasından karşı kenarın orta noktasına giden yolun 2/3'ünde kesişirler, sonucunu kullanacağız.
Bu yüzden, $A'D = x$, $DA = 2x$ ve $B'D = y$, $DB = 2y$ diyebiliriz.



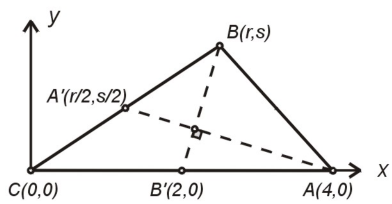
Yukarıdaki şekilde gözüken üç dik üçgenin her birine Pisagor Teoremini uygulayarsak ;

$$\Delta A^{'}DB \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 9/4 \qquad (1)$$
$$\Delta ADB^{'} \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 4 \qquad (2)$$
$$\Delta ABD \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = c^2 \qquad (3)$$

denklemlerini elde ederiz. Buradan, (1) + (2) $\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 = 25/4$ 'dür.
Bu sonucu (3) ile birleştirirsek, $c^2 = (4/5) \times (25/4) = 5$ elde ederiz.
Dolayısıyla, AB kenarının uzunluğu $\sqrt{5}$ olur.

Kartezyen Çözüm:

Kartezyen çözüm, kısa olmasına rağmen, diğer çözümlere göre pek şık değildir. Burada, birbirlerine dik doğruların eğimlerinin çarpımı -1 dir, gerçeğini kullanacağız. C noktası orijin olsun. A noktasının koordinatları $(4, 0)$, B noktasının koordinatları ise (r, s) olsun. $AA^{'}$ ve $BB^{'}$ doğru parçalarının eğimlerinin zıt işaretli olmak zorunda olduklarına dikkat edelim. Bu yüzden, $r > 2$ olur.



$BB^{'}$ 'ın eğimi $s/(r-2)$ ve $AA^{'}$ 'ın eğimi $(s/2)/(r/2-4) = s/(r-8)$ 'dir.
$AA^{'} \perp BB^{'} \Rightarrow AA^{'}$ ve $BB^{'}$ 'ın eğimlerinin çarpımı -1 'e eşittir.
Bu yüzden, $s^2/(r-2)(r-8) = -1$ 'dir. İfadeyi düzenlersek, $s^2 = -r^2 + 10r - 16$ denklemini elde ederiz.
Ayrıca; $BC = 3$ olduğu için, $r^2 + s^2 = 9$ 'dur. Buradan $10r - 16 = 9$ ve dolayısıyla

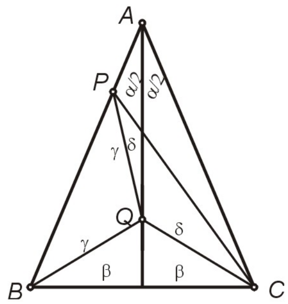
$r = 5/2$'dir. O halde,

$$\begin{aligned} AB^2 &= s^2 + (4-r)^2 \\ &= s^2 + r^2 - 8r + 16 \\ &= 9 - 20 + 16 \\ &= 5 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, AB kenarının uzunluğu $\sqrt{5}$ olur.

70. $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olan bir ABC üçgeninde P, $P \neq B$ olan $|AB|$ üzerinde bir nokta ve Q, A dan çizilen yükseklik üzerinde $|PQ| = |QC|$ olacak şekilde bir nokta olsun. $m(\widehat{QPC})$ kaçtır ?

Çözüm. $|AB| = |AC|$ olduğu için A dan çizilen yükseklik aynı zamanda açıortaydır. Aynı zamanda $|QB| = |QC| = |PQ|$ ve BQC, BQP, PQC üçgenleri ikizkenar olur.



$m(\widehat{QBC}) = m(\widehat{QCB}) = \beta$, $m(\widehat{QBP}) = m(\widehat{QPB}) = \gamma$ ve $m(\widehat{QPC}) = m(\widehat{QCP}) = \delta$ ise $m(\widehat{QCA}) = \gamma$ dır. ABC ve BPC birer üçgen oldukları için $\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$ ve $2\delta + 2\beta + 2\gamma = 180°$ eşitliklerini kullanarak $m(\widehat{QPC}) = \delta = \frac{\alpha}{2}$ bulunur.

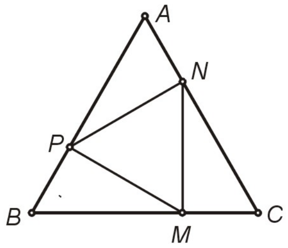
71. **a** Kenarı a olan ABC eşkenar üçgeni veriliyor. $MP \perp AB$, $NM \perp BC$, $PN \perp AC$ olmak üzere $P \in [AB]$, $M \in [BC]$, $N \in [AC]$ noktalarının oluşturduğu MNP üçgeni için MP uzunluğunu bulunuz.

b Her ABC dar açılı üçgeni için $MP \perp AB$, $NM \perp BC$, $PN \perp AC$ olacak şekilde $P \in [AB]$, $M \in [BC]$, $N \in [AC]$ noktalarının bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm.

a NPM ve ABC üçgenleri benzer üçgenlerdir. Dolayısıyla, NPM üçgeni de eşkenar üçgendir. Yani, $\triangle APN \equiv \triangle BMP \equiv \triangle CNM$ dir. Eğer $|AP| = x$ ise $|AN| = \frac{x}{2}$ ve $|NC| = a - \frac{x}{2}$ olur. Ayrıca $|AP| = |NC|$ olduğu için $x = a - \frac{x}{2}$ ve $x = \frac{2a}{3}$ bulunur. Buradan $|PN| = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

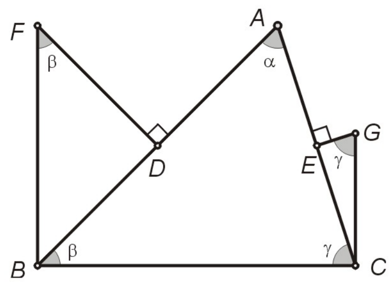
b AB üzerinde herhangi bir P_0 noktası alınsın ve P_0 noktasının $|AC|$ üzerindeki izdüşüm noktası N_0 olsun. M_0, N_0 noktasından BC ye çizilen izdüşüm ile AB



doğrusuna P_0 noktasından çizilen dikmenin kesişim noktası olsun. AM_0 nin BC ile M noktasında kesiştiğini varsayalım. A merkezli homoteti ve $\frac{AM}{AM_0}$ oranı $M_0N_0P_0$ üçgenini MNP üçgenine götürür.

72. BAC açısı sabit kalmak üzere, B ve C noktaları sabit, A noktası değişkendir. Burada AB ve AC kenarlarının orta noktaları sırasıyla D ve E noktaları olsun. Ayrıca $DF \perp AB$, $EG \perp AC$ ve BF ile CG doğruları BC doğrusuna dik olacak şekilde F ve G noktaları olsun. Bu durumda $|BF|.|CG|$ çarpımının A noktasının seçiminden bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm. ABC üçgeninin açılarına α, β, γ diyelim.



Bu durumda

$$|BF| = \frac{|AB|}{2\sin\beta}\ , |CG| = \frac{|AC|}{2\sin\gamma}$$

eşitliklerinden

$$|BF| \cdot |CG| = \frac{1}{4} \cdot \frac{|AB|}{\sin\gamma} \cdot \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{1}{4}\left(\frac{|BC|}{\sin\alpha}\right)^2$$

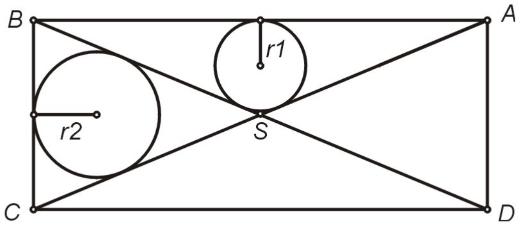
denklemini elde ederiz.

Denklemde de açıkça görüldüğü gibi sonuç A noktasının pozisyonundan bağımsızdır.

73. Bir dikdörtgenin kenarları oranı 12 : 5 tir. Köşegenlerin oluşturduğu 4 üçgenden bir kenarı komşu olanların içine çizilen çemberlerin yarıçapları r_1 ve r_2 olmak üzere $r_1 : r_2$ oranını bulunuz.

Çözüm. Köşegenlerin kesim noktasına S diyelim. ABS ve BCS üçgenlerini gözönüne alalım. ABS üçgeninin içinde kalan çemberin yarıçapı r_1, üçgenin çevresinin yarısı

s_1 ve BCS üçgeninin içinde kalan çemberin yarıçapı r_2, üçgenin çevresinin yarısı s_2 olsun. Üçgenlerinin alanları eşit olduğu için $r_1 s_1 = r_2 s_2$ dir. Denklem düzenlenirse $r_1 : r_2 = s_2 : s_1$ bulunur. $|AB| = a, |BC| = b$ olsun. Köşegen uzunluğu d ise $s_1 = \frac{\frac{d}{2}+\frac{d}{2}+a}{2} = \frac{a+d}{2}$ dir. Benzer şekilde $s_2 = \frac{b+d}{2}$ dir. Yani, $r_1 : r_2 = (b+d) : (a+d)$ dir.



$a = 12k$ ve $b = 5k$ dersek, Pisagor teoreminden dolayı $d^2 = a^2+b^2 = (12k)^2+(5k)^2 = 169k^2$ olur. Buradan $d = 13k$ dır. Sonuç olarak $r_1 : r_2 = (13k+5k) : (13k+12k) = 18 : 25$ bulunur.

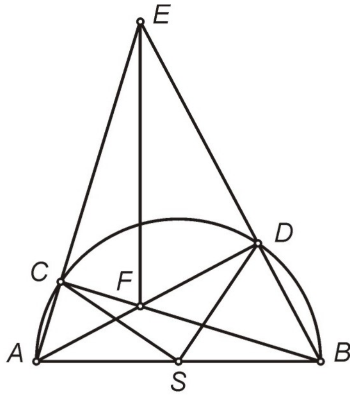
74. Çapı $\overline{AB}$ merkezi S olan yarıçember üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan C ve D noktaları verilsin.

i C noktası AD yayı üzerindedir,

ii CSD açısı dik açıdır.

E noktası AC ve BD doğrularının kesişim noktası ve F noktası AD ve BC doğrularının kesişim noktası ise $|EF| = |AB|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. C ve D noktaları çember üzerinde oldukları için Thales teoremine göre $AD \perp BD$ ve $BC \perp AC$ dir.



F noktası ABE üçgeninin yüksekliklerin kesim noktasıdır yani $EF \perp AB$ dir. CSD açısı $90°$ olduğu için CAD açısı $45°$ dir. Dolayısıyla ACF üçgeni ikizkenar diküçgendir.

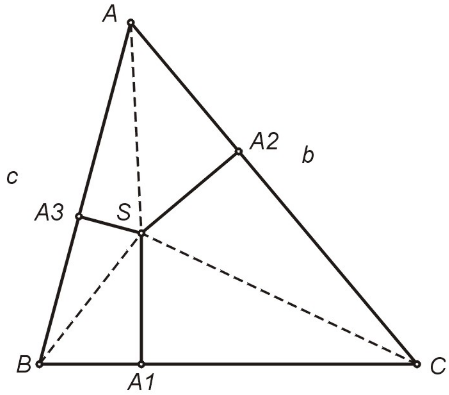
Ayrıca, $m(\widehat{ECF}) = m(\widehat{BCA}) = 90°$ ve $m(\widehat{EFC}) = m(\widehat{BAC})$ dir. Dolayısıyla ECF ve BCA üçgenleri denktir yani $|EF| = |AB|$ dir. Sonuç olarak $|EF|$, C ve D noktalarının seçimlerinden bağımsızdır.

75. Bir üçgenin içindeki noktalardan kenara uzunlukları çarpımı en büyük noktanın ağırlık merkezi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. ABC üçgeni ve bu üçgenin içinde bir S noktası alalım. l_1, l_2 ve l_3 S noktasının a, b, c kenarlarına uzaklıkları olsun. Aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(al_1).(bl_2).(cl_3) \leq \left(\frac{al_1 + bl_2 + cl_3}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}Alan(ABC)\right)^3.$$

Sağ taraf S noktasının seçiminden bağımsız olduğu için sol tarafın maksimumu için eşitlik elde edilerek bulunabilir yani $al_1 = bl_2 = cl_3$ olmalı.



$al_1 = bl_2 = cl_3$ koşulunu sağlayan S noktasının ağırlık merkezi olduğunu gösterelim:

$$|BA_1| : |A_1C| = Alan(BA_1A) : Alan(A_1CA) = Alan(ASB) : Alan(ASC) = cl_3 : bl_2 = 1,$$

yani $\overline{AA_1}$ kenarortaydır. Benzer şekilde S nin diğer iki açıortayın da üzerinde olduğu gösterilebilir. Yani S noktası ağırlık merkezidir.

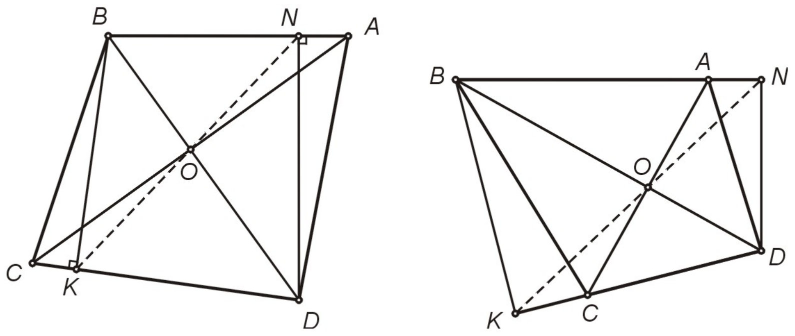
76. $|AB| = |BC|$ ve $|CD| = |DA|$ olan $ABCD$ dörtgeninin AC ve BD köşegenlerinin kesiştiği nokta O noktası olsun. Ayrıca, ABD üçgeninin D köşesinden inen yüksekliğin ayağına N, BCD üçgeninin B köşesinden inen yüksekliğin ayağına K noktası diyelim. Bu durumda N, O ve K noktalarının bir doğru üzerinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $ABCD$ dörtgeni bir deltoid olduğundan, AC ve BD köşegenleri birbirine diktir. Dolayısıyla (aşağıdaki şekillerden soldakinde görülebileceği gibi) $m(\widehat{AOD}) = 90° = m(\widehat{AND})$ olur. Yani A, N, O, D noktaları bir çember üzerinde olur ve buradan da

$$m(\widehat{NOA}) = m(\widehat{NDA}) = 90° - m(\widehat{DAN})$$

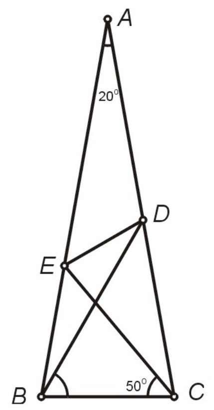
olduğu görülür.

Benzer şekilde $m(\widehat{COK}) = 90° - m(\widehat{BCK})$ olduğu da açıktır ve $ABCD$ deltoid olduğundan $m(\widehat{DAN}) = m(\widehat{BCK})$, ve dolayısıyla $m(\widehat{NOA}) = m(\widehat{KOC})$ olur. Bu açıların eşit olması, bu açıların ters açılar olduğunu yani N, O, K noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu gösterir.

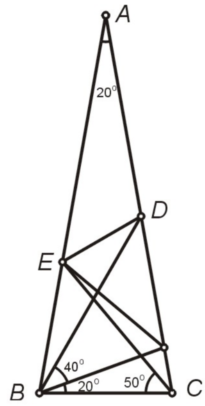


Benzer bir argümanla sağdaki şekilde verilen durum da ele alınabilir.

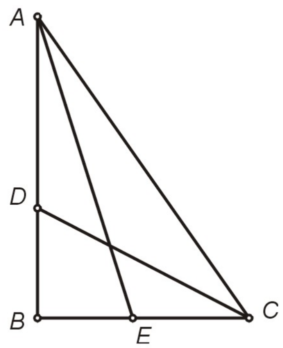
77. ABC ikizkenar ($|AB| = |AC|$) üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 20°$ dir . D noktası AC kenarının üzerinde, E noktası AB kenarının üzerinde, $m(\widehat{DBC}) = 60°$ ve $m(\widehat{ECB}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{EDB})$ yi bulunuz.



Çözüm. $m(\widehat{KBC}) = 20°$ olmak üzere AC üzerinde bir K noktası alalım. E ile D yi ve K ile B yi birleştirelim. $m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{ECB})$ olduğu için BEC üçgeni, BE ve BC kenarlarının uzunlukları eşit olan bir ikizkenar üçgendir. $m(\widehat{BKC}) = m(\widehat{BCK})$ olduğu için BKC üçgeni, BK ve BC kenarlarının uzunlukları eşit olan bir ikizkenar üçgendir. Buradan $|BE| = |BK|$ elde edilir. $|BE| = |BK|$ ve $m(\widehat{EBK}) = 60°$ olmasından dolayı EBK üçgeni eşkenar üçgendir. $m(\widehat{BDK}) = m(\widehat{DBK}) = 40°$ olduğu için BDK üçgeni, DK ve BK kenarlarnn uzunluklar eşit olan bir ikizkenar üçgendir. $|KE| = |KD|$ olduğu için KDE ikizkenar üçendir. $m(\widehat{EKD}) = 40°$ olduğu açıktr. Buradan $m(\widehat{EDK}) = 70°$ ve dolayısıyla $m(\widehat{EDB}) = 30°$ bulunur.



78. AC kenarı, ABC dik üçgeninin hipotenüsüdür. D noktası AB kenarının ve E noktası da BC kenarının üzerindedir. $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DCA})$ ve $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EAC})$ dir. AE kenarının uzunluğu 9 ve CD kenarnn uzunluğu $8\sqrt{2}$ olduğuna göre AC kenarının uzunluğunu bulunuz.



Çözüm. $m(\widehat{BAE}) = x$ ve $m(\widehat{BCD}) = y$ olsun. Buradan:
$|AB| = 9\cos(x) = |AC| \cdot \cos(2x)$ ve
$|BE| = 8\sqrt{2}\cos(y) = |AC| \cdot \cos(2y)$
denklemleri elde edilir. $|AC|$ iki denklemden de çekip eşitlersek

$$\frac{9\cos(x)}{\cos(2x)} = \frac{8\sqrt{2}\cos(y)}{\cos(2y)} \tag{13}$$

bulunur.

$y = 45° - x$ ve bundan dolayı $2y = 90° - 2x$ olduğu için $\cos(2y) = \sin(2x)$ olduğu görülür. Bunu (13) de yerine koyarsak

$$\frac{9\cos(x)}{\cos(2x)} = \frac{8\sqrt{2}\cos(45^\circ - x)}{\sin(2x)} \tag{14}$$

buluruz. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ eşitsizliğini kullanarak

$$\cos(45^\circ - x) = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

elde ederiz. (14) nin termilerini düzenlediğimizde

$$\tan(2x) = \frac{8(\cos(x) + \sin(x))}{9\cos(x)} \tag{16}$$

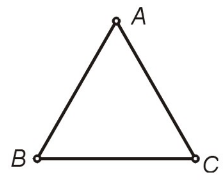
olduğunu görürüz. $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$ özdeşliğini kullanıp, $t = \tan(x)$ dersek $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{8(1+t)}{9}$ elde ederiz. Buradan $\frac{9t}{4} = (1+t)(1-t^2) = 1 + t - t^2 - t^3$ ve dolayısıyla

$$t^3 + t^2 + \frac{5}{4}t - 1 = 0 \tag{17}$$

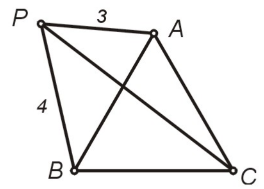
buluruz. Bu denklemin köklerinden biri $\frac{1}{2}$ dir. Bu bilgiyi kullanarak (17) denklemindeki polinomu $t^3 + t^2 + \frac{5}{4}t - 1 = (t - \frac{1}{2})(t^2 + 3\frac{t}{2} + 2) = 0$ şeklinde çarpanlarına ayırırız. Diskriminant hesabıyla, ikinci derece çarpanın gerçel köklerinin olmadığı kolayca görülür. Dolayısıyla (17) denkleminin tek gerçel kökü $\frac{1}{2}$ dir. Trigonometrik özdeşlikler kullanılarak $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ve $\cos(2x) = \frac{(1-t^2)}{1+t^2}$ bulunur. $|AC| = \frac{9\cos(x)}{\cos(2x)}$ olduğu için, $|AC| = \frac{9\sqrt{1+t^2}}{1-t^2}$ elde ederiz. Buradan $|AC| = \frac{9\sqrt{5}/2}{3/4} = 6\sqrt{5}$ bulunur.

79. A,B ve C birbirlerine olan uzaklıkları eşit olan ($|AB| = |AC| = |BC|$) üç şehirdir. A şehrinden 3 km, B şehrinden 4 km uzakta olan bir aracın C şehrine olan uzaklığı en çok kaç kilometre olabilir?

Çözüm. A, B ve C şehirlerinin birbilerine olan uzaklıkları eşit olduğu için bu üç şehir bir eşkenar üçgen oluşturur.



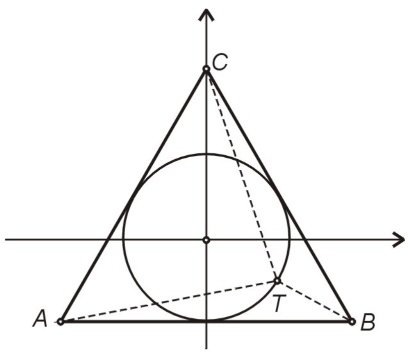
Arabanın bulunduğu noktaya P dersek, P noktasının C ye olabilecek en uzak mesade olması için, C ve P nin $|AB|$ doğru parçasının farklı taraflarında olması gerekir.



Ptolemy eşitsizliğinden[2] $AB \cdot CP \leq AP \cdot BC + BP \cdot CA$ yazılabilir. $AB = BC = CA$ olduğundan $CP \leq AP + BP$ elde edilir. $|AP| = 3$ ve $|BP| = 4$ yerine koyulursa $CP \leq 7$ olur. Dolayısıyla, Aracın C şehrine olabilecek en uzak mesafesi 7 km dir.

80. Bir Kenarı 6 olan eşkenar üçgenin içine çizilen çember üzerindeki herhangi bir T noktası için $|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = 45$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm



Çemberin merkezine şekildeki gibi bir koordinat ekseni yerleştirelim. Üçgenin yüksekliği $6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ dür. Çemberin merkezi ağırlık merkezinde olduğu için yarıçapı $r = \sqrt{3}$ dür. Bu nedenle köşe noktaları $A(-3, -\sqrt{3}), B(3, -\sqrt{3}, c(0, 2\sqrt{3}$ dür. Çemberin üzerindei,ki herhangi bir nokta $T(x, y)$ olsun. Çember denkleminden dolayı $x^2 + y^2 = 3$ tür. İki noktanın uzaklık formülünden:

$$|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = (x+3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 + x^2 + (y-2\sqrt{3})^2$$

$$= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 + x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}y + 12$$

$$= 3(x^2 + y^2) + 36$$

[2]Ptolemy (Batlamyus) Eşitsizliği: Bir $ABCD$ dörtgeni için, AB,BC,CD ve DA kenarlar, AC ve BD köşegenler olmak üzere,

$$AB \cdot CP \leq AP \cdot BC + BP \cdot CA$$

olur. Eşitlik durumu sadece A,B,C ve D çembersel olduğunda geçerlidir.

$$= 9 + 36 = 45.$$

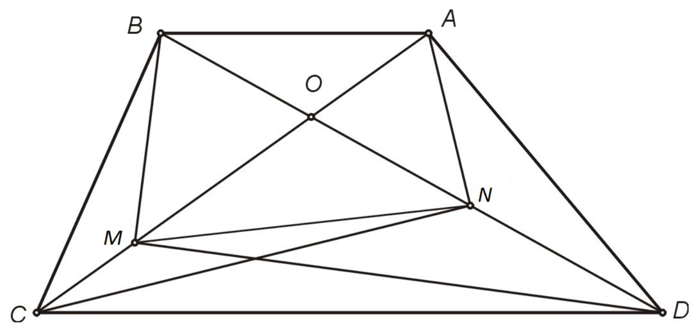
81. $ABCD$ yamuğunda köşegenler O noktasında dik olarak kesişmektedir. M ve N, sırasıyla OC ve OD doğru parçaları üzerinde $m(\widehat{ANC}) = m(\widehat{BMD}) = 90°$ olacak şekilde noktalardır. E, MN doğru parçasının orta noktası ise

   (a) OMN ve OBA üçgenlerinin benzer üçgenler olduklarını

   (b) OE doğru parçasının AB 'ye dik olduğunu

gösteriniz.

Çözüm:



(a) ANC ve BMD dik üçgenlerinde, dik üçgende yükseklik bağıntısı kullanarak

$$|ON|^2 = |AO| \cdot |OC|$$

ve

$$|OM|^2 = |OB| \cdot |DO|$$

elde edilir. AOB ve COD üçgenleri benzer üçgenlerdir. O halde

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|DC|}$$
$$\frac{|ON|^2}{|OA|^2} = \frac{|OA| \cdot |OC|}{|OA|^2} = \frac{|DC|}{|AB|}$$

olur. Benzer şekilde

$$\frac{|OM|^2}{|OB|^2} = \frac{|DC|}{|AB|}$$

bulunur. Ayrıca OMN ve OBA üçgenlerinde $\widehat{MOP}$ ortaktır. Dolayısıyla bu üçgenler benzerdir.

(b) İlk şıktan OMN ve OBA üçgenlerinin benzer olduğu elde edilmişti. O halde $m(\widehat{OMN}) = m(\widehat{OBA})$ dır.
OE, OMN üçgeninde hipotenüse ait kenarortay olduğunda $|OE| = |EM|$ olur. Buradan $m(\widehat{EOM}) = m(\widehat{EMO}) = m(\widehat{OBA})$ bulunur. $m(\widehat{MOE}) + m(\widehat{NOE}) = 90°$ olduğundan $m(\widehat{OBA}) + m(\widehat{NOE}) = 90°$ ve $OE \perp AB$ bulunur.

82. G kapalı dörtgeni için

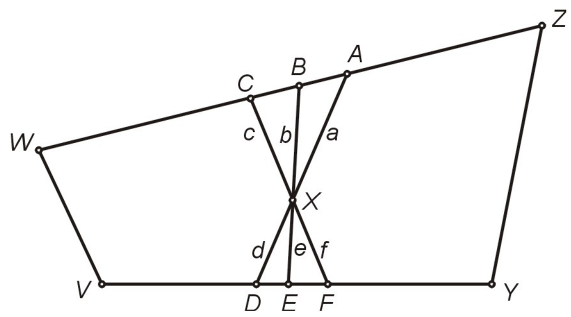
(a) Eğer üzerinden geçen her doğrunun G 'yi eşit iki alana ayırdığı bir X noktası varsa G bir paralelkenardır.

(b) Eğer G bir paralelkenarsa, üzerinden geçen her doğrunun G 'yi eşit iki alana ayırdığı bir X noktası vardır.

önermelerini ispatlayınız.

Çözüm:

(a) G dörtgeninin köşeleri $WVYZ$ olsun. X, dörtgenin dışında olduğu zaman köşelere çizilecek paralel doğrulardan en az bir tanesi dörtgeni kesmeyeceğinden, X 'in üzerinden geçen her doğrunun G 'yi eşit iki alana bölebilmesi için X 'in G 'nin içinde olması gerekir. G ve X şekildeki gibi olsun X 'in özelliğinden dolayı



$ADVW$ ve $ADYZ$ nin alanları eşittir. $BEVW$ ve $BEYZ$ nin alanları da eşittir. Bu alanların hepsi G nin alanının yarısına eşittir. $ADWV$ ve $BEVW$ nun ortak alanlarını çıkardıktan sonra kalan BXA ve DXE üçgenlerinin alanlarının eşit olması gerekir. Yani

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin(\widehat{BXA}) = \frac{1}{2} \cdot d \cdot e \cdot sin(\widehat{DXE})$$

eşitliği vardır. BXA ve DXE açıları eşit olduğu için

$$a \cdot b = d \cdot e$$

elde edilir.

Benzer şekilde $BEVW$ ve $WCFV$ dörtgenlerinin alanlarını kullanarak $b \cdot c = e \cdot f$ ve $WCFV$ ve $ADYZ$ dörtgenlerinin alanlarını kullanarak da $a \cdot c = d \cdot f$ eşitlikleri elde edilebilir.
İlk iki eşitliği çarptığımızda

$$a \cdot b^2 \cdot c = d \cdot e^2 \cdot f$$

bulunur. Son eşitliği kullanarak $b^2 = e^2$ elde edilir. b ve e sıfırdan büyük tamsayılar olduğu için bu da $b = e$ olduğunu gösterir. Diğer eşitlikler de uygun şekilde çarpıldığında $a = d$ ve $c = f$ elde edilebilir.
O halde AXB ve DXE üçgenlerinde kenar-açı-kenar benzerliği vardır. Bu da $m(\widehat{XAB}) = m(\widehat{XDE})$ anlamına gelir. Yani WZ ve VY birbirlerine paralel doğrulardır.
Aynı şekilde WV ve ZY doğrularını kesen ve X 'den geçen 3 doğru alındığında WV ile ZY 'nin birbirine paralel olduğu gösterilebilir.
Dolayısyla $WVYZ$ bir paralelkenardır.

(b) G, köşeleri $ABCD$ olan bir paralelkenar olsun. Köşegenlerin kesişim noktasını F olarak alalım. Şimdi F 'den geçen her doğrunun G 'yi eşit iki alana ayırdığını gösterelim.
F 'den geçen ve BC doğru parçasını E, AD doğru parçasını da H noktasında kestiğini düşünelim. Paralelkenarda köşegenlerin kesim noktası aynı zamanda köşegenlerin orta noktası olduğundan $|AF| = |FC|$ ve $|FD| = |FB|$ 'dir. Aynı zamanda AB ve DC de eşit uzunluktadır. Dolayısıyla AFB ve DFC üçgenleri eş üçgenlerdir ve alanları da eşittir.
AD ve BC paralel oldukları için $m(\widehat{AHF}) = m(\widehat{FEC})$ ve $m(\widehat{FAH}) = m(\widehat{ECF})$.
Ayrıca iç-ters-açılar oldukları için $m(\widehat{HFA}) = m(\widehat{EFC})$. AHF ve CFE üçgenlerinde $|FA| = |FC|$ olduğundan ve bütün açıları eşit olduğundan bu üçgenler eş üçgenlerdir ve alanları aynıdır.
F, G 'nin yüksekliğini de iki eş parçaya ayırdığı için ve taban uzunlukları aynı olduğu için, AFD ve BFC üçgenlerinin alanları aynıdır. Daha önce AFH ve EFC üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu bulmuştuk dolayısıyla BEF ve HFD üçgenlerinin de alanları eşittir.

O halde EH doğru parçası, G 'yi CB, BE ve AD doğrularına göre eşit iki alana ayırmıştır. Bu F 'den geçen her doğru için kolayca genelleştirilebileceğinden F 'den geçen her doğru G 'yi eşit iki alana ayırır.

83. ABC dik üçgeninde $|AB| = |AC|$. $[AB]$ üzerinde $|AM| = |BP|$ olacak şekilde M ve P noktaları alalım. D noktası da $[BC]$ nin orta noktası olmak üzere, $[CM]$ ve

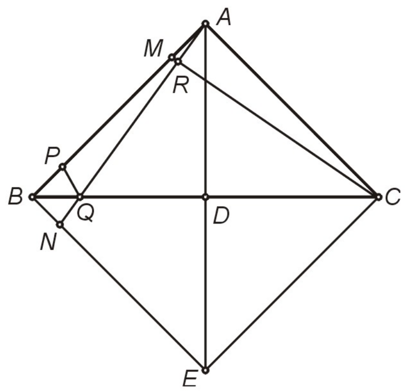
$[BC]$ üzerinde sırasıyla R ve Q noktaları, A, R, Q doğrusal ve AQ ile CM dik olacak şekilde alınmıştır.

a-) $m(\widehat{AQC}) = m(\widehat{PQB})$

b-) $m(\widehat{DRQ}) = 45°$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Genelliği bozmadan noktaların A, M, P, B şeklinde sıralandığını kabul edebiliriz. $ABEC$ dörtgeninin merkezi D olan kare olacak şekilde E noktası işaretleyelim. N noktası da AQ ve EB doğrularının kesişim noktası olsun.



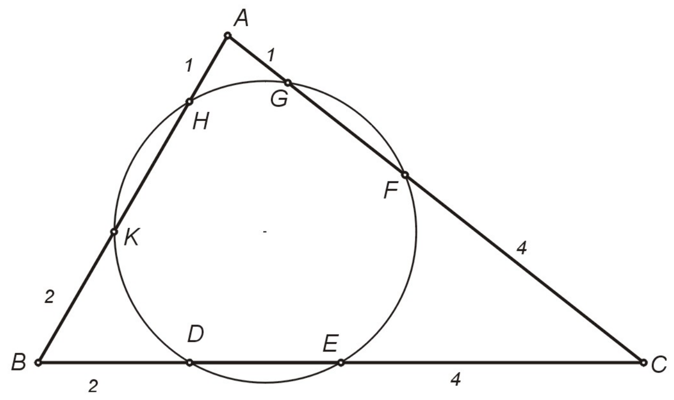
a-) $m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{BAN})$ ve $m(\widehat{ABN}) = m(\widehat{CAM}) = 90°$ olduklarına göre AMC ve BNA benzer üçgenlerdir. Ayrıca $|AC| = |BA|$ olduğuna göre bu üçgenler eş üçgenlerdir. Buradan $|AM| = |BN|$ eşitliğini elde ederiz. Bunu soruda verilen $|AM| = |BP|$ ile birleştirirsek $|BN| = |PB|$ çıkar. $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CBE})$ ve QB ortak kenar olduğuna göre PQB ile NQB eş üçgenlerdir. Buradan $m(\widehat{PQB}) = m(\widehat{NQB})$ elde ederiz ve $m(\widehat{CQA}) = m(\widehat{NQB})$ olduğuna göre $m(\widehat{AQC}) = m(\widehat{PQB})$ çıkar.

b-) AD ikizkenar üçgende açıortay olduğundan $m(\widehat{ADQ}) = 90°$'dır. $m(\widehat{ADQ}) = m(\widehat{QRC})$ ve $m(\widehat{AQC}) = m(\widehat{RQC})$ olduğuna göre ADQ ve RCQ benzer üçgenlerdir. Buradan $\frac{|DQ|}{|RQ|} = \frac{|AQ|}{|CQ|}$ elde ederiz. $m(\widehat{CQA})$, DRQ ve ACQ üçgenlerinde ortak açı olduğuna göre yukarıdaki eşitlikten iki üçgenin benzer olduğunu çıkarırız. Dolayısıyla $m(\widehat{DRQ}) = m(\widehat{ACQ}) = 45°$ elde ederiz.

84. ABC üçgeninin BC kenarının üzerindeki D ve E noktaları, (D, B'ye daha yakın); AC kenarının üzerindeki F ve G noktaları, (F, C'ye daha yakın); AB kenarının üzerindeki H ve K noktaları, (H, A'ya daha yakın) verilmiştir. $|AH| = |AG| = 1$,

$|BK| = |BD| = 2$, $|CE| = |CF| = 4$, $m(\widehat{ABC}) = 60°$ olup D, E, F, G, H, K noktaları bir çember üzerindedir. Buna göre ABC üçgeninin iç teğet çemberinin yarı çapını bulunuz.

Çözüm.



$|AH| = |AG|$, $|BK| = |BD|$ ve $|CE| = |CF|$ olduğundan, kiriş teoremini D, E, F, G, H, K noktalarından geçen çembere uyguladığımızda $|ED| = |FG| = |HK|$ elde ederiz. Bu uzunluğa x diyelim. Bu durumda ABC üçgeninin kenar uzunlukları $x+3$, $x+5$ ve $x+6$ olur. ABC açısının $60°$ olduğunu ve kosinüs teoremini kullanarak $x = 2$ elde ederiz. Son olarak, kenar uzunlukları 5, 7 ve 8 olan bir üçgenin iç teğet çemberinin yarı çapını bulmak için, $ur = Alan(ABC)$ formülünü kullanarak

$$\frac{5+7+8}{2} \cdot r = \frac{5 \cdot 8 \cdot \sin 60°}{2}$$

elde ederiz ve buradan da $r = \sqrt{3}$ buluruz.

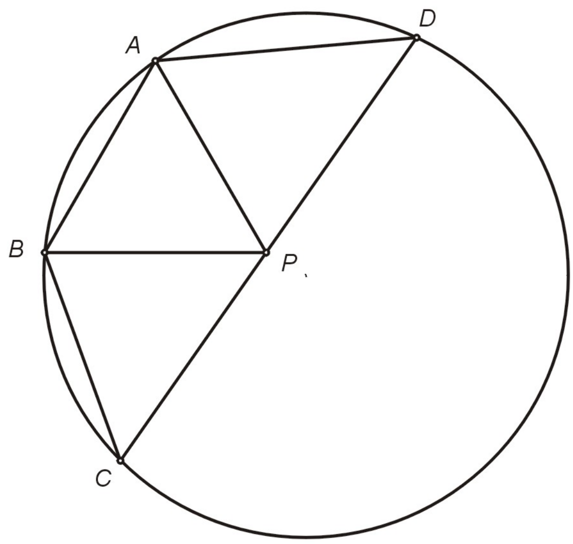
85. Köşeleri r yarıçaplı bir çemberin üzerinde olan tüm $ABCD$ dörtgenlerini ve $|CB| = |BP| = |PA| = |AB|$ olacak şekilde $[CD]$ kenarı üzerinde bir P noktası düşünelim.

a) Yukarıdaki koşulu sağlayan A, B, C, D, P noktalarının varlığını gösteriniz.

b) Yukarıdaki koşulu sağlayan tüm A, B, C, D, P noktaları için $|DA| = |DP| = r$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm.

a $|AB| < r\sqrt{3}$ olacak şekilde bir AB kirişi ve ABP eşkenar üçgen olacak şekilde çemberin içinde bir P noktası alalım. C noktası çemberin üzerinde, $|BP| = |BC|$ ve $[AC] \cap [BP] \neq \emptyset$ olacak şekilde seçilsin. P ve C noktalarından geçen doğrunun çemberi kestiği noktaya D diyelim. Bu şekilde seçilen A, B, C, D, P noktaları istenen koşulu sağlamaktadır.



b $m(\widehat{BPC}) = m(\widehat{BCP}) = x$ olsun. BPC ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{PBC}) = 180° - 2x$ olur. $ABCD$ kirişler dörtgeni ve $m(\widehat{BCD}) = x$ olduğu için $m(\widehat{DAB}) = 180° - x$, dolayısıyla $m(\widehat{DAP}) = 120° - x$ dir. $m(\widehat{ABC}) = 240° - 2x$ olduğundan $m(\widehat{ADC}) = 2x - 60°$ olur. DAP üçgeninde $m(\widehat{APD}) = 120° - x$, ve $|DA| = |DP|$ bulunur.

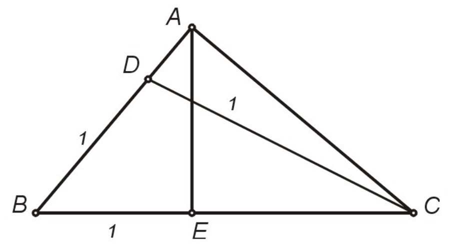
ABD ve PBD üçgenleri eş üçgenlerdir. Buradan $m(\widehat{ABD}) = 30°$ ve $|AD| = r$ elde edilir.

86. ABC üçgeni, A noktasında dik açılıdır. D noktası, $CD = 1$ olacak şekilde AB kenarının üzerindedir. AE, A noktasından BC kenarına olan dik yüksekliktir. $BD = BE = 1$ ise, AD kenarının uzunluğu nedir?

Çözüm: Bu sorunun çözümüne bir kaç yaklaşımda bulunmak mümkündür. Aşağıda, iki yoldan çözüm yapılacaktır. Birinci çözüm, uzun olmasına rağmen diğerine göre daha basittir.

Geometrik Çözüm:

$AD = x$, $CE = y$ ve $m(\widehat{ABC}) = t$ olsun. AE ve CD, F noktasında kesişsinler.
$\triangle$ BCD ikizkenar olduğu için, $m(\widehat{BCD}) = t$ 'dir.
Bu yüzden, $m(\widehat{CFE}) = 90° - t$ ve bu yüzden de $m(\widehat{DFA}) = 90° - t$ 'dir.
Ayrıca, $m(\widehat{FAD}) = m(\widehat{EAB}) = 90° - t$ olduğundan dolayı, $\triangle$ DFA ikizkenar ve bu yüzden $DF = AD = x$ dir.
Dolayısıyla, $CF = 1 - x$ olur.



ABE ve CFE üçgenlerinin her ikisi de birer dik açı içerdikleri ve $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ECF})$ olduğu için, bu iki üçgen benzerdir.
Bu yüzden, $y/(1-x) = 1/(1+x)$ ve dolayısıyla

$$y = (1-x)/(1+x) \qquad (1)$$

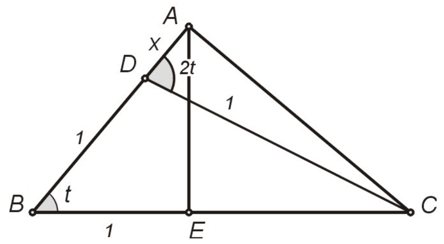
denklemi elde edilir.
ABC ve ABE üçgenlerinin her ikisi de birer dik açı içerdikleri ve $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ABE})$ olduğu için, bu iki üçgen benzerdir.
Bu yüzden, $(1+x)/(1+y) = 1/(1+x)$ ve dolayısıyla

$$(1+x)^2 = 1 + y \qquad (2)$$

denklemi elde edilir.
(1) deki y değerini (2) de yerine koyarsak, $(1+x)^2 = 1 + (1-x)/(1+x) = 2/(1+x)$ ve buradan da $(1+x)^3 = 2$ olduğu görülür.
Bu yüzden, AD 'nin uzunluğu $\sqrt[3]{2} - 1$ bulunur.

Trigonometrik Çözüm:

$AD = x$ ve $m(\widehat{ABC}) = t$ olsun.
$\triangle$ BCD ikizkenar olduğu için, $m(\widehat{BCD}) = t$ 'dir.
Ayrıca, $m(\widehat{BCA}) = 90° - t$ ve bu yüzden $m(\widehat{DCA}) = 90° - 2t$ 'dir.
Dolayısıyla, $m(\widehat{ADC}) = 2t$ bulunur.



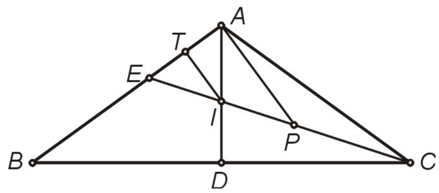
ABE ve ADC üçgenlerini dikkate alırsak, sırasıyla

$$\begin{aligned}\cos t &= 1/(1+x)\\ \cos 2t &= x\end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz.
$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ formülünü kullanarak, $x = 2/(1+x)^2 - 1$ eşitliğini elde ederiz.
Bu nedenle, $(1+x) = 2/(1+x)^2$ ve dolayısıyla $(1+x)^3 = 2$ olur.
Bu yüzden, AD 'nin uzunluğu $\sqrt[3]{2} - 1$ bulunur.

87. $|AB| = |AC|$ olacak şekilde bir ABC üçgeninde D, A köşesinden inilen dikmenin ayağıdır. E noktası ise AB kenarı üzeriden bir nokta, $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ECB}) = 18°$ ve $|AD| = 3$ ise $|CE| =$?

Çözüm:AD ve CE açıortaylarının kesiştiği noktaya I diyelim. I, ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olacaktır. O halde I, BA ve BC kenarlarına eşit uzaklıktadır. T, I noktasının AB kenarına izdüşümü olmak üzere $|ID| = |IT|$ 'dir. CE doğrusu üzerinde $AP \perp AB$ olacak şekilde bir P noktası alalım.



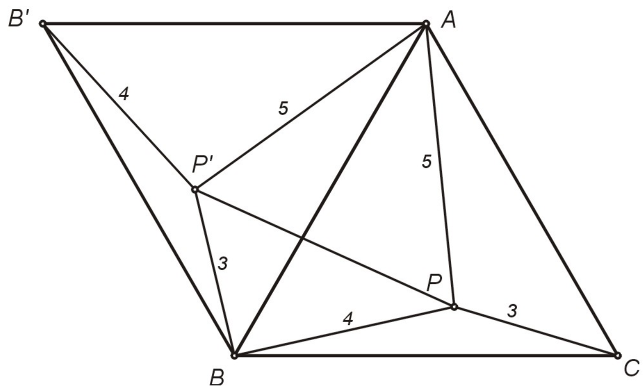
$m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ACB}) = 18°$ olduğundan $m(\widehat{ACD}) = 36°$ ve $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{IEA}) = 54°$ olur. Buradan AEI üçgeni $|AI| = |EI|$ olacak şekilde ikizkenar üçgen olur. Ayrıca $m(\widehat{IAP}) = 90° - m(\widehat{EIA}) = 90° - 54° = 36°$ ve $m(\widehat{EPA}) = 90° - m(\widehat{AEP}) = 90° - 54° = 36°$ olduğundan $|AI| = |IP|$ 'dir. T, AE kenarına dik, EIA üçgeni ikizkenar ve $|EI| = |AI| = |IP|$ olduğu için T, EA, I da EP kenarlarının orta noktasıdır. O halde $|IT| = \frac{1}{2}|AP|$ 'dir. $m(\widehat{PAC}) = m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{EAP}) = 2 \cdot 54° - 90° = 18° = m(\widehat{ACP})$ eşitliğinden $|AP| = |PC| = 2|IT| = 2|ID|$ elde edilir. Buradan da

$$|CE| = |EI| + |IP| + |PC| = |AI| + |AI| + 2|ID| = 2(|AI| + |ID|) = 2|AD| = 2 \cdot 3 = 6$$

bulunur.

88. Eşkenar üçgenin içindeki bir noktanın köşelere uzaklıkları 3, 4 ve 5 ise üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm. Bir ABC üçgeni ve $|PA| = 5$, $|PB| = 4$ ve $|PC| = 3$ olan bir P noktası alınsın. Üçgeni A noktası etrafında $60°$ şekildeki gibi döndürülsün.



$|P'B| = |PC| = 3$, $|P'B'| = |PB| = 4$ ve $|P'A| = |PA| = 5$ tir. APP' eşkenar üçgen olduğu için $|PP'| = 5$ tir. $|PB|^2 + |P'B|^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 = |PP'|^2$ yani $m(\widehat{PBP'}) = 90°$ dir. APB ve $BP'B'$ üçgenlerinden $m(\widehat{ABP}) + m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{ABP}) + m(\widehat{B'BP'}) = 120° - 90° = 30°$ ve $m(\widehat{APB}) = 180° - 30° = 150°$ dir. APB üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2 - 2.|AP|.cos(m(\widehat{APB})) = 25 + 12\sqrt{3}$$

ve alan

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}.|AB|^2 = \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$$

bulunur.

89. Kenar uzunlukları ve içteğer çemberinin çapı aritmetik dizi oluşturan üçgenin diküçgen olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. İçteğet çemberin merkezinden üçgenin kenarlarına paralel çizilen doğrular yardımıyla içteğet çemberin çapının, üçgenin kenarlarından daha küçük olduğu kolaylıkla görülebilir. x içteğet çemberin çapı ve $d > 0$ aritmetik dizinin farkı ise üçgenin kenarları $x + d, x + 2d, x + 3d$ dir. Üçgenin alanı S iki farklı yolla hesaplanabilir. Üçgenin çevresinin yarısı p olmak üzere,

$$p.\frac{x}{2} = S = \sqrt{p \cdot (p - (x + d)) \cdot (p - (x + 2d)) \cdot (p - (x + 3d))}.$$

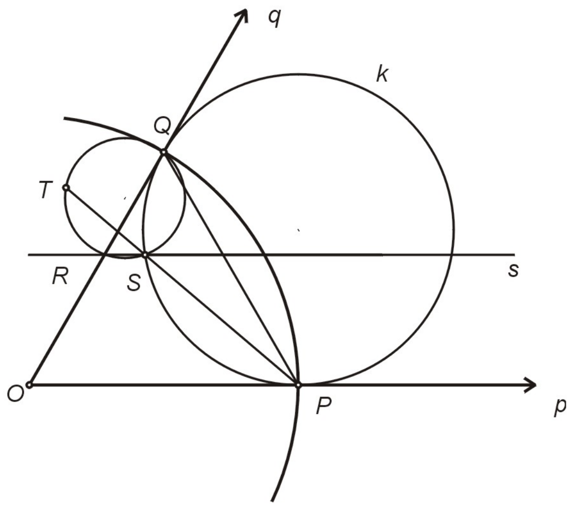
Denklemde $p = \frac{3(x+2d)}{2}$ yerine yazılırsa,

$$\frac{3(x + 2d)x}{4} = \sqrt{\frac{3(x + 2d)(x + 4d)(x + 2d)x}{16}}.$$

Dolayısıyla $3x = x + 4d$ yani $x = 2d$. Üçgenin kenarları $x + d = 3d, x + 2d = 4d$ ve $x + 3d = 5d$ bulunur. Sonuç olarak üçgen diküçgendir.

90. $\widehat{pOq}$ açısı içinde yer alan S noktası, Op doğrusuna P noktasında, Oq doğrusuna ise Q noktasında teğet olan bir k çemberinin üzerinde bulunmaktadır. Op doğrusuna paralel olan ve S noktasından geçen s doğrusu ise Oq doğrusunu R noktasında kesmektedir. T noktası ise SQR üçgeninin çevrel çemberi ile PS doğrusunun kesiştiği noktadır ($T \neq S$). Bu durumda $OT//SQ$ olduğunu ve OT doğrusunun SQR üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $m(\widehat{OPS}) = \varphi_1$ ve $m(\widehat{OQS}) = \varphi_2$ olsun. Bu durumda $m(\widehat{OPS}) = m(\widehat{PQS}) = \varphi_1$ ve $m(\widehat{OQS}) = m(\widehat{QPS}) = \varphi_2$ olduğunu biliyoruz (k çemberinin teğetleri).



Şimdi $RS//OP$ olduğu için $m(\widehat{OPS}) = m(\widehat{RST}) = \varphi_1$ olur ve $RSQT$ bir kirişler dörtgeni olduğu için $m(\widehat{RQT}) = m(\widehat{RST}) = \varphi_1$ olur.

Dolayısıyla $m(\widehat{OPT}) = \varphi_1 = m(\widehat{RQT}) = m(\widehat{OQT})$ olduğundan $OPQT$ dörtgeni bir kirişler dörtgenidir. Buradan $m(\widehat{QOT}) = m(\widehat{QPT}) = \varphi_2 = m(\widehat{OQS})$ olduğu yani $OT//SQ$ olduğu görülür. Burada $OPQT$ kirişler dörtgeni olduğundan

$$m(\widehat{OTR}) = m(\widehat{OTP}) - m(\widehat{RTS}) = m(\widehat{OQP}) - m(\widehat{RQS}) = (\varphi_1 + \varphi_2) - \varphi_2 = \varphi_1 = m(\widehat{RQT})$$

olduğu görülür. Dolayısıyla OT doğrusu SQR üçgeninin çevrel çemberine teğettir.

91. $ABCD$ dört yüzlüsünün ağırlık merkezi ile A ve B köşeleri arasındaki uzaklık eşit olduğuna göre

$$|AC|^2 + |AD|^2 = |BC|^2 + |BD|^2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. A, B, C ve D noktalarının vektörleri sırasıyla $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ ve $\vec{r}_D$; dört yüzlünün ağırlık merkezi T noktası olsun. Burada verilen durum

$$\vec{AT}^2 = \vec{BT}^2$$

olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla bu denklem vektörel olarak ifade edildiğinde

$$(\vec{r}_T - \vec{r}_A)^2 = (\vec{r}_T - \vec{r}_B)^2$$

ve bunun sonucunda

$$\vec{r}_A^2 - \vec{r}_B^2 - 2.\vec{r}_A.\vec{r}_T + 2.\vec{r}_B.\vec{r}_T = 0$$

elde edilir. Son denklemde $\vec{r}_T = \dfrac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D)$ değişimi uygulandığında

$$\vec{r}_A^2 - \vec{r}_B^2 - \vec{r}_A.\vec{r}_C + \vec{r}_B.\vec{r}_C - \vec{r}_A.\vec{r}_D + \vec{r}_B.\vec{r}_D = 0$$

eşitliği elde edilir.

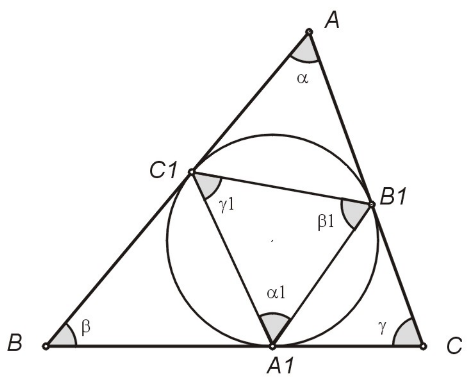
Öte yandan soruda istenen eşitlik

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_A)^2 + (\vec{r}_D - \vec{r}_A)^2 - (\vec{r}_C - \vec{r}_B)^2 - (\vec{r}_D - \vec{r}_B)^2 = 0$$

olarak ifade edilebilir. Burada bulduğumuz bir önceki denklemin bu denkleme eşit olduğu kolayca görülebilir.

92. ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC, CA ve AB kenarlarına sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 noktalarında değiyor. Bu durumda $A_1B_1C_1$ üçgeninin açılarını ABC üçgeninin açıları cinsinden ifade ediniz.

Çözüm. AC_1B_1, BA_1C_1 ve CB_1A_1 üçgenleri ikizkenar üçgenlerdir.



Dolayısıyla

$$m(\widehat{BA_1C_1}) = m(\widehat{BC_1A_1}) = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$$

ve

$$m(\widehat{CB_1A_1}) = m(\widehat{CA_1B_1}) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$$

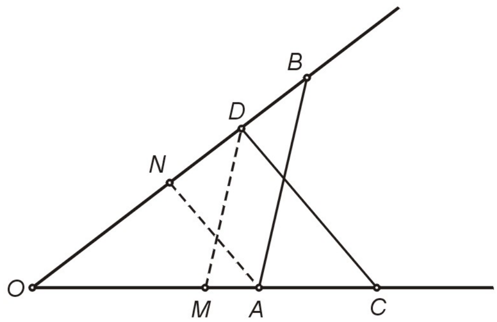
olduğunu biliyoruz. Buradan da,

$$\alpha_1 = 180° - m(\widehat{BA_1C_1}) - m(\widehat{CA_1B_1}) = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$$

elde edilir. Benzer şekilde $\beta_1 = 90° - \frac{1}{2}\beta$ ve $\gamma_1 = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ olarak bulunur.

93. p ve q yarıdoğruları O noktasında kesişiyorlar. A ve C noktaları p üzerinde, B ve D noktaları q üzerinde olmak üzere, CD doğrusu OAB üçgeninin A köşesinden çizilen kenarotayına paralel olduğuna göre AB kenarının OCD üçgeninin D köşesinden çizilen kenarortayına paralel olduğunu gösteriniz.

Çözüm. D noktasından AB doğrusuna çizilen paralelin p noktasını kestiği yere M ve A noktasından DC doğrusuna çizilen paralelin q noktasını kestiği yere N diyelim.



OAB ve OMD üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OD|}{|OB|}$ ve benzer şekilde OCD ve OAN üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|ON|}{|OD|}$ bulunur. Yani $|OM|\,.\,|OB| = |OC|\,.\,|ON|$ dir. CD doğrusu OAB üçgeninin kenarortayına paralel olduğu için $\overline{AN}$ kenarortaydır. Dolayısıyla $\bar{O}B$ kenarının orta noktası N dir. Yani, $|OB| = 2\,|ON|$ dir. $|OM|\,.\,|OB| = |OC|\,.\,|ON|$ den dolayı $|OC| = 2\,|OM|$ dir. $\overline{OC}$kenarının orta noktası M dir yani sonuç olarak $\overline{DM}$ doğrusu OCD üçgeninin kenarortayıdır.

94. Bir ABC üçgeninde, $|AB| = |AC|$, D noktası $[BC]$ nin orta noktası olsun. M, $[AD]$ nin orta noktası ve N noktası D noktasının $[BM]$ üzerindeki dik izdüşümü olmak üzere, $m(\widehat{ANC}) = 90°$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $ABDS$ paralelkenar olacak şekilde bir S noktası alalım. $ADCS$ nin bir dikdörtgen olduğu açıktır. R noktası dikdörtgenin köşegenlerinin kesişim noktası olsun. DNS dik üçgeninde $[NR]$, $[SD]$ ye ait kenarortay olduğundan $|NR| = 1/2 \cdot |SD| = 1/2 \cdot |AC|$ olur.

R noktası $[AC]$ nin orta noktası ve $|NR| = 1/2 \cdot |AC|$ olduğu için ANC üçgeni dikaçılı bir üçgendir. Yani, $m(\widehat{ANC}) = 90°$ dir.

95. ABC, $m(\widehat{BAC}) = 90°$ ve $|AB| = |AC|$ olacak şekilde bir üçgen olsun. BC kenarı üzerindeki N noktası ise, yine BC kenarı üzerindeki M noktası ve C noktasının arasında olacak şekilde ve

$$|BM|^2 - |MN|^2 + |NC|^2 = 0$$

eşitliğini sağladığına göre, $m(\widehat{MAN}) = 45°$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Kosinüs Teoreminden,

$$|MN|^2 = |AM|^2 + |AN|^2 - 2|AM| \cdot |AN| \cdot \cos(\widehat{MAN}) \tag{18}$$

olduğunu biliyoruz. Yine Kosinüs Teoreminden

$$|AM|^2 = |AB|^2 + |BM|^2 - 2|AB| \cdot |BM| \cdot \cos(45°)$$

ve

$$|AN|^2 = |AC|^2 + |CN|^2 - 2|AC| \cdot |CN| \cdot \cos(45°)$$

bulunur. Burada (18) eşitliğinde $|AM|^2$ ve $|AN|^2$ değerlerini yerlerine yazdığımızda, $|AB| = |AC|$ olduğundan

$$\cos(\widehat{MAN}) = \frac{2|AB|^2 - |AB| \cdot |BM|\sqrt{2} - |AB| \cdot |CN|\sqrt{2}}{2|AM| \cdot |AN|} \tag{19}$$

elde ederiz. Öte yandan,

$$\begin{aligned} Alan(MAN) &= Alan(ABC) - Alan(ABM) - Alan(ACN) \\ &= \frac{2|AB|^2 - |AB| \cdot |MB|\sqrt{2} - |AB| \cdot |CN|\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

ve

$$Alan(MAN) = \frac{|AM| \cdot |AN| \sin(\widehat{MAN})}{2}$$

olduğunu bildiğimizden, bu iki eşitliği birleştirdiğimizde

$$\sin(\widehat{MAN}) = \frac{2|AB|^2 - |AB| \cdot |BM|\sqrt{2} - |AB| \cdot |CN|\sqrt{2}}{2|AM| \cdot |AN|} \tag{20}$$

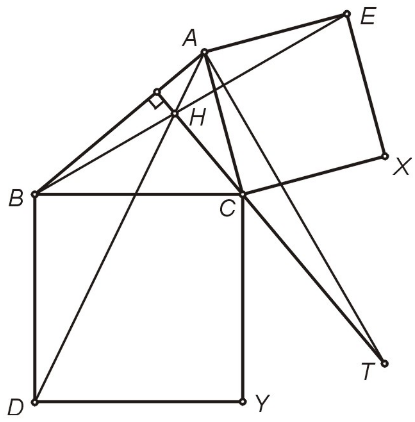
eşitliğini elde ederiz.

Sonuç olarak, (19) ve (20) eşitliklerini kullanarak $\tan(\widehat{MAN}) = 1$ olarak bulunur.

Yani $m(\widehat{MAN}) = 45°$'dir.

96. Dar açılı ABC üçgeninin AC ve BC kenarlarının dış tarafında $ACXE$ ve $CBDY$ kareleri bulunmaktadır. Bu durumda AD ve BE doğrularının kesiştiği noktanın, ABC üçgeninin C noktasından inen yüksekliği üzerinde olduğunu gösteriniz.

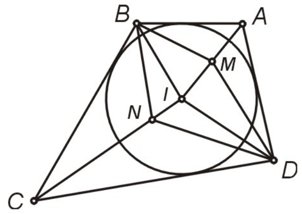
Çözüm. AD ve BE doğrularının kesiştiği noktaya H diyelim. Ayrıca $AT \perp EB$ ve $CT \perp AB$ olmak üzere de bir T noktası olsun. Bu durumda $|EA| = |AC|$, $m(\widehat{BEA}) = m(\widehat{TAC})$ ve $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ATC})$ olduğundan EAB ve ACT üçgenleri benzerdir. Dolayısıyla $|CT| = |AB|$ olur.



Şimdi $BT' \perp AD$ ve $CT' \perp AB$ olacak şekilde bir T' noktası olsun. Yukarıdakine benzer bir argümanla ABD ve $T'CD$ üçgenlerinin benzer üçgenler olduğu görülür ve dolayısıyla $|CT'| = |AB|$ olur. Bu durumda $|CT| = |CT'|$ olur ki bu da T ve T' noktalarının aynı nokta olduğunu gösterir. Burada ABT üçgeninin yükseklikleri BE, AD ve TC doğruları üzerindedir. Dolayısıyla H noktası diklik merkezidir ve CT doğrusu üzerinde yer almaktadır. Sonuç olarak AD ve BE doğrularının kesiştiği nokta ABC üçgeninin AB kenarına inen yüksekliğin üzerindedir.

97. Bir dışbükey $ABCD$ dörtgeninin iç teğet çemberinin merkezi I olsun. $m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{ABC})/2$ olacak şekilde, $[AI]$ ve $[CI]$ doğru parçaları üzerinde, sırasıyla, M ve N noktaları seçilsin. $m(\widehat{MDN}) = m(\widehat{ADC})/2$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $[BI]$, ABC açısının açıortayı olduğu için, $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{B})/2$ dir. Dolayısıyla, $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{IBN})$ ve $m(\widehat{MBI}) = m(\widehat{NBC})$ olur.
$m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{IBN}) = \alpha_1$, $m(\widehat{MBI}) = m(\widehat{NBC}) = \alpha_2$, $m(\widehat{ADM}) = \beta_1, m(\widehat{MDI}) = \beta_2$, $m(\widehat{IDN}) = \beta_3$ ve $m(\widehat{NDC}) = \beta_4$ olsun.
AMB ve MBI üçgenlerinde sinüs teoreminden



$$\frac{|AM|}{\sin\alpha_1} = \frac{|BM|}{\sin(\widehat{A}/2)} \quad \text{ve} \quad \frac{|MI|}{\sin\alpha_2} = \frac{|BM|}{\sin(\widehat{BIM})}$$

elde edilir.
Dolayısıyla

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{|AM|\cdot\sin(\widehat{A}/2)}{|MI|\cdot\sin(\widehat{BIA})}$$

bulunur. Benzer şekilde, AMD ve MID üçgenlerinden

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{|AM|\cdot\sin(\widehat{A}/2)}{|MI|\cdot\sin(\widehat{DIA})}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin(\widehat{DIA})}{\sin(\widehat{BIA})} \tag{$*$}$$

olur. Benzer şekilde, önce IBN ve NBC, sonra da IDN ve NDC üçgenlerinde sinüs teoremini kullanıp

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\beta_4}{\sin\beta_3}\cdot\frac{\sin(\widehat{DIC})}{\sin(\widehat{BIC})} \tag{$**$}$$

elde ederiz. Şimdi ABI ve DIC üçgenlerini düşünelim:

$$\begin{aligned}
m(\widehat{BIA}) &= 180^\circ - \frac{m(\widehat{A})}{2} - \frac{m(\widehat{B})}{2}\\
&= \left(\frac{m(\widehat{A})}{2} + \frac{m(\widehat{B})}{2} + \frac{m(\widehat{C})}{2} + \frac{m(\widehat{D})}{2}\right) - \frac{m(\widehat{A})}{2} - \frac{m(\widehat{B})}{2}\\
&= \frac{m(\widehat{C})}{2} + \frac{m(\widehat{D})}{2}\\
&= 180^\circ - m(\widehat{DIC})
\end{aligned}$$

yani, $\sin(\widehat{BIA}) = \sin(\widehat{DIC})$ dir. Benzer şekilde, AID ve IBC üçgenlerinden,

$\sin(\widehat{AID}) = \sin(\widehat{BIC})$ olduğunu görürüz. $(*)$ ve $(**)$ taraf tarafa çarpılırsa

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{\sin\beta_3}{\sin\beta_4}$$

elde edilir.

$\beta_1+\beta_2 = \beta_3+\beta_4 = m(\widehat{D})/2 < 90^\circ$ olduğu için, $f(\beta) = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\frac{m(\widehat{D})}{2}-\beta)}$ fonksiyonu $\beta \in (0, \frac{m(\widehat{D})}{2})$ aralağında artandır. Dolayısıyla, $\beta_1 = \beta_3$ ve $\beta_2 = \beta_4$ olur. Bu da bize $m(\widehat{MDN}) = m(\widehat{D})/2$ verir.

98. Kenar uzunlukları a, b, c br olan bir üçgende $\dfrac{3}{2} \le \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < 2$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Eşitsizliğin sol tarafı aslında bütün a, b, c pozitif reel sayıları için geçerlidir. Bunu kanıtlamak için **yeniden düzenleme eşitsizliği**ni kullanacağız.

Bu eşitsizliğe göre, $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ ve $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ reel sayılar olsunlar. $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ in herhangi bir permütasyonu olmak üzere,

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \ge a_1c_1 + \cdots + a_nc_n \ge a_1b_n + \cdots a_nb_1$$

eşitsizliği geçerlidir ve eşitlik durumları ancak $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ permütasyonu $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ veya $(b_n, b_{n-1}, \cdots, b_1)$ halinde geçerlidir.

Yani, $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerindeki terimlerin karşılıklı çarpımı, bu iki dizinin aynı şekilde (artan veya azalan olarak) sıralanması halinde maksimum ve ters sıralanması halinde minimum değerini alır.

Şimdi $a \le b \le c$ olsun. $\{a, b, c\}$ ve $\{\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\}$ dizileri aynı şekilde (artan olarak) sıralanmıştır. İkinci dizinin $\{\frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}\}$ ve $\{\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}\}$ permütasyonlarını düşünürsek,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

ve

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

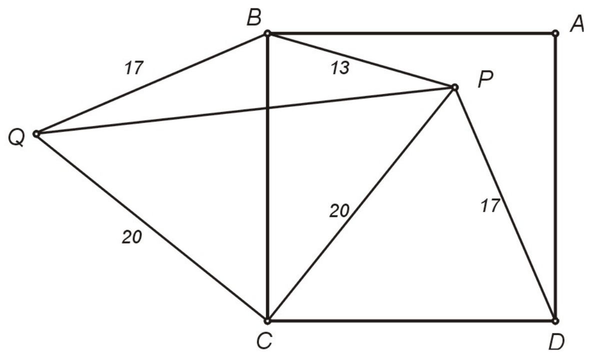
eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplayıp ikiye bölünce istenen eşitsizliğin sol tarafı bulunur. Eşitliğin de mümkün olabileceğini, $a = b = c$ iken açıkça görürüz.

Eşitsizliğin sağ tarafını kanıtlamak için, a, b, c nin bir üçgenin kenar uzunlukları olduklarını dikkate almalıyız.

Her hangi bir üçgende, $s = (a+b+c)/2$ olmak üzere, $a+b > c$ olduğu için $a+b > s$ dir. Dolayısıyla, $\frac{c}{a+b} < \frac{c}{s}$ dir. Benzer şekilde, $\frac{b}{a+c} < \frac{b}{s}$ ve $\frac{a}{b+c} < \frac{a}{s}$ dir. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak, $\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c} < \frac{a+b+c}{s} = 2$ elde edilir.

99. Kare şeklindeki tarlanın içine yerleştirilmiş bir karınca, tarlanın köşelerinin birinden 13 metre, bu köşenin çapraz olarak karşısındaki köşeden 17 metre ve üçüncü bir köşeden de 20 metre uzaklıktadır. Tarlanın alanını bulunuz. Burada, arazinin düzgün olduğu varsayılmaktadır.

Çözüm. Karenin köşelerini A, B, C ve D olarak isimlendirelim. Karınca, $|PB| = 13$, $|PC| = 20$ ve
$|PD| = 17$ olacak şekilde bir P noktasındadır. CDP üçgenini, C noktasının etrafında saat yönünün tersinde $90°$ döndürürsek D noktası B 'ye, P noktası da Q 'ya gider. Tanımdan dolayı, $s(\widehat{QCP}) = 90°$ 'dir. Bu yüzden, pisagor teoreminden $|PQ| = 20\sqrt{2}$ olur. Ayrıca, PQC üçgeni ikizkenar olduğundan $s(\widehat{CPQ}) = 45°$ 'dir.



Kosinüs kuralını BQP üçgenine uygulayarak,

$$17^2 = 13^2 + (20\sqrt{2})^2 - 2\cdot 13\cdot 20\sqrt{2}\cdot \cos QPB$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan, $\cos QPB = 17\sqrt{2}/26$ olur. O halde, $\sin^2 QPB = 1 - \cos^2 QPB = 49/338$ 'dir. Buradan, $\sin QPB = 7\sqrt{2}/26$ olur.

$$s(\widehat{CPB}) = s(\widehat{QPB}) + s(\widehat{CPQ}) = s(\widehat{QPB}) + 45°$$

olduğunu biliyoruz. Bu yüzden,

$$\begin{aligned}
\cos CPB &= \cos(QPB + 45°) \\
&= \cos QPB\cdot \cos 45° - \sin QPB\cdot \sin 45° \quad \Big(\cos(a+b) = \cos a\cdot \cos b - \sin a\cdot \sin b\Big) \\
&= (\cos QPB - \sin QPB)/\sqrt{2} \\
&= (10\sqrt{2}/26)/\sqrt{2} \\
&= 5/13
\end{aligned}$$

bulunur. Kosinüs kuralını, CPB üçgenine uygulayarak

$$|BC|^2 = 20^2 + 13^2 - 2\cdot 20\cdot 13\cdot (5/13) = 369$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla, tarlanın alanı 369 m^2 olur.

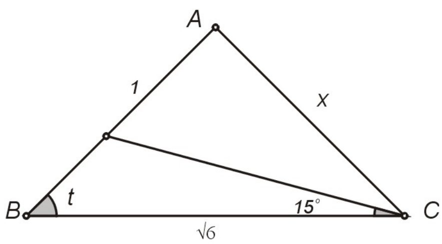
Not Yukarıdaki method, $|PB| = a$, $|PD| = b$ ve $|PC| = c$ olacak şekilde, genel durumları çözmek için kullanılabilir. $|BC| = s$ dersek,

$$s^2 = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 + \sqrt{(4c^2(a^2 + b^2 - c^2) - (a^2 - b^2)^2)}].$$

eşitliğini elde ederiz. Yukarıdaki formülün a ve b 'ye göre simetrik olduğuna dikkat etmeliyiz.
$|PA| = d$ olsun. $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ olduğunu göstermek zor değildir. Bu durum, yukarıdaki çözüme kısa bir yol sağlar. Örneğin, $(a, b, c) = (1, 7, 5)$ ise simetriden dolayı $d = 5$ olur. 1 ve 7 (PB ve PD) uzunluklarının uzaklıkları doğrusaldır. Bu yüzden, karenin köşegeni 8 m 'dir. Dolayısıyla, alanı da 32 m^2 'dir.

100. İkizkenar bir ABC üçgeninin ($|AB| = |AC|$) AB kenarı üzerinde BCD açısı $15°$ olacak şekilde bir D noktası yer almaktadır. $|AD| = 1$ birim ve $|BC| = \sqrt{6}$ birim ise CAB açısının ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm.



ABC açısının ölçüsüne t, AC kenarının uzunluğuna da x diyelim. $m(\widehat{ADC}) = t+15$, $m(\widehat{DCA}) = t - 15$ derece olur. ADC üçgeninde sinüs teoremini uygularsak

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{\sin(t - 15)}{\sin(t + 15)} \tag{21}$$

elde edilir. A köşesinden BC kenarına bir dikme inersek

$$\cos(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\sqrt{6}}{2x}$$

bulunur. Bu eşitliği kullanarak

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{1}{x} = \frac{2\cos(t)}{\sqrt{6}} \tag{22}$$

yazabiliriz. (21) ve (22) numaralı denklemleri birbirine eşitleyerek $t = 45°$ in bir çözüm olduğu görülür.

$$\frac{\sin(45-15)}{\sin(45+15)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\cos(45)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$t = 45$ in tek çözüm olduğunu göstermek için (1) numaralı denklemin sağ tarafını dönüşüm formüllerini kullanarak açalım ve $\sin(t)\sin(15)$ e bölelim;

$$\begin{aligned}\frac{\sin(t-15)}{\sin(t+15)} &= \frac{\sin(t)\cos(15)-\cos(t)\sin(15)}{\sin(t)\cos(15)+\cos(t)\sin(15)} \\ &= \frac{\cot(15)-\cot(t)}{\cot(15)+\cot(t)}\end{aligned}$$

$15 < t < 90$ olduğu açıktır. Bu aralıkta $f(t) = \frac{2\cos(t)}{\sqrt{6}}$ kesin azalan bir fonksiyondur. Verilen aralıkta $\cot(t)$ azalan bir fonksiyon olduğu için $g(t) = \frac{\cot(15)-\cot(t)}{\cot(15)+\cot(t)}$ kesin artan bir fonksiyondur. $f(t)$ ve $g(t)$ sürekli fonksiyonlar olduğu için $t = 45$ tek çözümdür.

$t = 45°$ olduğu için CAB açısı da dik açıdır.

101. $n \geq 4$ olmak kaydıyla, her pozitif n tam sayısı için, herhangi bir üçgenin n ikizkenar üçgene ayrılabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Her üçgen, en uzun kenara olan yükseklik çizilerek (bu yükseklik her zaman üçgenin içinde yer alacağından), iki dik üçgene ayrılabilir. Bu iki dik üçgenin her biri ise, hipotenüse inen kenarortayı çizilerek iki ikizkenar üçgene ayrılabilir.

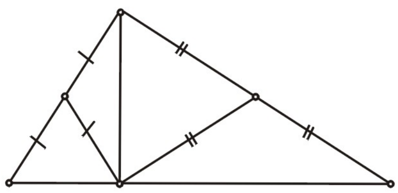
Eğer bu dört ikizkenar üçgenden birini daha yukarıdaki gibi dörde bölersek, böylece bir üçgeni yedi ikizkenar üçgene ayırmış oluruz. Bunu her yeni üçgene uygulayabildiğimize göre, bir üçgeni $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $4+3k$ ikizkenar üçgene bölebildiğimizi göstermiş olduk.

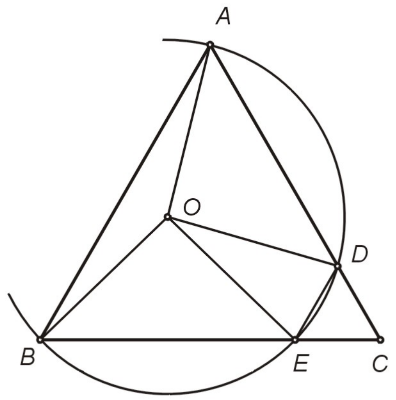
Şimdi bir üçgeni nasıl altı ikizkenar üçgene bölebileceğimize bakalım. Yine en uzun kenara yüksekliği çizerek başlayalım. Bu sefer dik üçgenlerden sadece birinin hipotenüs kenarortayını çizelim ve diğer üçgeni de dörde bölelim. Böylece üçgeni altı ikizkenar üçgene bölmüş olduk.

Burada her bir üçgenin de dört ikizkenar üçgene bölünebildiğini de bildiğimize göre, bir üçgeni $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $6+3k$ ikizkenar üçgene bölebildiğimizi göstermiş olduk.

Şimdi ise bir üçgeni nasıl beş ikizkenar üçgene bölebildiğimizi göstermeliyiz ki ispat tamamlanmış olsun. Üçgenin köşelerine A, B, C diyelim ve $|AB| > |AC|$ olsun. AB üzerindeki bir noktaya ise, $|AC| = |AD|$ olmak üzere D noktası diyelim. Bu durumda ACD üçgeni ikizkenar olur ve BCD üçgenini de bulduğumuz yöntemle dört ikizkenar üçgene bölerek, ABC üçgenini beş ikizkenar üçgene ayırmış oluruz. Buradaki her yeni üçgeni de dört ikizkenar üçgene bölebileceğimizden, bir ABC üçgenini, $|AB| > |AC|$ olmak kaydıyla, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $5+3k$ ikizkenar üçgene bölebildiğimizi göstermiş olduk.

Son olarak $|AB| > |AC|$ olarak kabul edemeyeceğimiz durumu, yani üçgenin eşkenar olması durumunu inceleyelim. Bu durumda, AC kenarı üzerinde, C köşesinden farklı, ve $|AD| > |DC|$ olmak üzere bir D noktası olsun. D'den geçen ve AB'ye paralel olan doğru ise BC ile E noktasında kesişsin. Bu durumda DCE üçgeni ikizkenar olur. Ayrıca $ABED$ yamuğu da ikizkenar olacağından, köşeleri bir çember üzerindedir. Bu çemberin merkezi de $ABED$ yamuğunun içinde olduğuna göre, AOB, BOE, EOD ve DOA ikizkenar üçgenlerdir.





102. ABC üçgeninin yükseklikleri $h_a \geq 3$ cm, $h_b \geq 4$ cm ve $h_c \geq 5$ cm eşitsizliklerini sağladığına göre, bu üçgeninin alanının mümkün olan en küçük değerini bulunuz.

Çözüm. ABC üçgeninin kenarları a, b, c olsun. Bu durumda h_b yüksekliği B köşesinden AC doğrusuna olan en kısa doğru parçası olduğundan

$$c \geq h_b$$

eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla ABC üçgeninin alanı S;

$$S = \frac{ch_c}{2} \geq \frac{h_b h_c}{2} \geq 10 \text{ cm}^2$$

eşitsizliğini sağlar.

Şimdi ABC üçgeninin alanı tam olarak 10 cm^2 ise, $S = \dfrac{ch_c}{2} \geq \dfrac{h_b h_c}{2} \geq 10 \text{ cm}^2$ eşitsizliklerinin her ikisi de eşitlik olmalıdır. Yani $c = h_b = 4$ cm ve aynı zamanda $h_c = 5$ cm olmalıdır. Burada birinci eşitlik ABC üçgeninin, A köşesindeki açısı dik olmak üzere bir dik üçgen olduğunu gösterir. Bu durumda dik kenar AC, $b = h_c = 5$ cm denklemini sağlar. Buradan da hipotenüs BC'nin $\sqrt{41}$ olduğu gürülür. $S = \dfrac{1}{2}ah_a$ alan formülünden ise

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{20}{\sqrt{41}} \text{ cm} > 3 \text{ cm}$$

elde edilir.

Sonuç olarak görülüyor ki, dik kenarları $b = 5$ cm ve $c = 4$ cm olan bir ABC dik üçgeni soruda istenen koşulları sağlar. Dolayısıyla verilen özellikleri taşıyan bir ABC üçgeninin mümkün olan en küçük alanı 10 cm^2 olur.

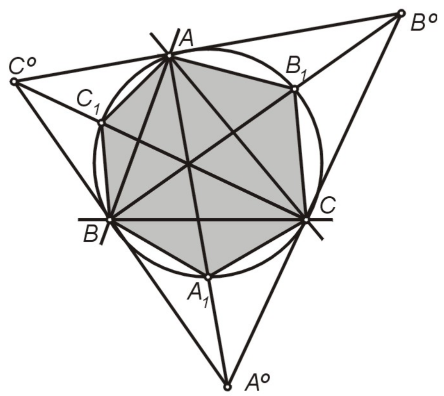
103. ABC üçgeninde A açısının açıortayı, ABC üçgeninin çevrelçemberi ile A_1 noktasında kesişiyor. Aynı şekilde B açısının açıortayı çevrelçemberi B_1 noktasında, C açısının açıortayı da C_1 noktasında kesiyor. AA_1 doğrusu B ve C köşelerindeki dış açıların açıortayları ile A° noktasında kesişiyor. B° ve C° noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor.

$$\begin{aligned} Alan(A^\circ B^\circ C^\circ) &= 2 \cdot Alan(AC_1BA_1CB_1) \\ &\geq 4 \cdot Alan(ABC) \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

I noktası, iç açıortayların kesişim noktası olsun. Öncelikle $|A_1I| = |A_1A^0|$ olduğunu



gösterelim.

$$
\begin{aligned}
m(\widehat{A_1IB}) &= \frac{1}{2}m(\widehat{A}) + \frac{1}{2}m(\widehat{B}) \\
m(\widehat{IBA_1}) &= \frac{1}{2}m(\widehat{B}) + \frac{1}{2}m(\widehat{A}) \\
&\Rightarrow |IA_1| = |A_1B| \\
m(\widehat{A_1A^\circ B}) &= 90^\circ - m(\widehat{A_1IB}) \\
m(\widehat{A_1BA^\circ}) &= 90^\circ - m(\widehat{IBA_1}) \\
&\Rightarrow |A_1B| = |A_1A^\circ| \\
&\Rightarrow |IA_1| = |A_1A^\circ|
\end{aligned}
$$

O halde $Alan(IA_1B) = Alan(A^\circ A_1B)$ olur.
I noktasının bir köşesi olduğu ve altıgeni oluşturan diğer beş üçgende de aynı işlemi tekrarlayarak

$$Alan(A^\circ B^\circ C^\circ) = 2 \cdot Alan(AC_1BA_1CB_1)$$

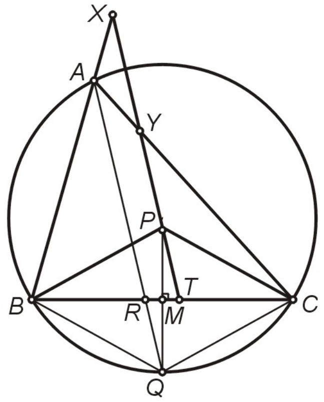
olduğu bulunur.
Eşitsizliği ispatlamak için ABC üçgeninin yüksekliklerini çizelim. Bu yükseklikler H noktasında kesişsin. H noktasının BC kenarına göre simetriği X, AC kenarına göre simetriği Y, AB kenarına göre simetriği de Z olsun. Bu noktalar ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir.
A_1, BC yayının orta noktası olduğundan $Alan(BA_1C) \geq Alan(BXC)$ 'dir. O halde

$$
\begin{aligned}
Alan(A^\circ B^\circ C^\circ) &= 2 \cdot Alan(AC_1BA_1CB_1) \\
&\geq 2 \cdot Alan(AZBXCY) \\
&= 4 \cdot (Alan(BHC) + Alan(CHA) + Alan(AHB)) \\
&= 4 \cdot Alan(ABC)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

104. AC kenarı AB kenarından uzun olan bir ABC üçgeni verilsin. $BX = CA$ olacak şekilde BA kenarını A yönünde uzatalım. $CY = BA$ olacak şekilde CA kenarı üzerinde Y noktasını alalım. BC kenarının orta dikmesinin XY doğrusu ile kesiştiği yere P diyelim. $m(\widehat{BPC}) + m(\widehat{BAC}) = 180°$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm CAB açısının açı ortayının BC kenarını kestiği noktaya R, ABC üçgeninin çevrel çemberini kestiği noktaya Q diyelim. XY doğrusunun BC kenarını kestiği nokta T ve BC kenarının orta noktası M olsun. $BQ = QC$ ve $m(\widehat{BAQ}) = m(\widehat{QAC})$ olduğu için Q noktası PM doğrusu üzerindedir.



$AB = CY$ ve $BX = CA$ olduğundan dolayı $AX = YA$ dır. Dolayısıyla, XAY üçgeni ikizkenardır. Bu durumda, $m(\widehat{XYA}) = m(\widehat{YXA}) = (180° - m(\widehat{XAY}))/2 = m(\widehat{CAR})$ dir. Dolayısıyla XY doğrusu AR doğrusuna paraleldir. Buradan ACR üçgeni ile YCT üçgeni benzerlerdir. $\frac{CT}{CR} = \frac{CY}{YA} = \frac{BA}{CA}$. Açıortay teoreminden, $\frac{BR}{CR} = \frac{BA}{CA}$ dır. Son iki denklemden, $CT = BR$ bulunur. M BC kenarının orta noktası olduğundan dolayı $MR = MT$ dir. $m(\widehat{PMT}) = m(\widehat{QMR})$ ve PT ile RQ paralel olduklarından dolayı PMT üçgeni ile QMR üçgeni denklerdir. Dolayısıyla $PM = QM$ dir. Buradan, BMP üçgeni ile BMQ üçgenlerinin denk oldukları söylenebilir. Dolayısıyla,

$m(\widehat{PBM}) = m(\widehat{QBM})$

$= m(\widehat{CAQ})$ (aynı açıyı gören çevre açı)

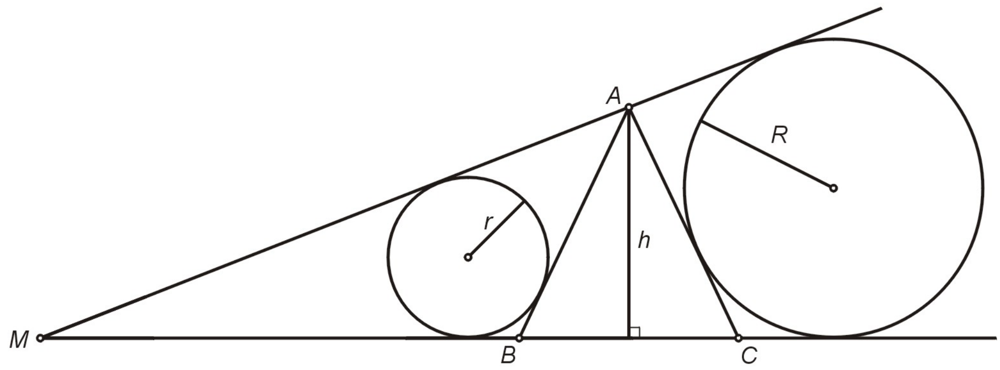
$= m(\widehat{BAC})/2$ (AQ, BAC açısının açı ortayı olduğu için)

PMB açışı dikaçı olduğu için, $m(\widehat{BPC}) = 2m(\widehat{BPM}) = 180° - 2m(\widehat{PBM})$ dir. Buradan istenen sonuç $m(\widehat{BPC}) + m(\widehat{BAC}) = 180°$ elde edilir.

105. ABC ikizkenar ($|AB| = |AC|$) üçgeni veriliyor. $B \in |MC|$ olacak şekilde bir M noktası seçiliyor. AMB üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı ile AMC üçgeninin

M köşesine karşılık gelen dış teğet çemberinin yarıçapı toplamının sabit olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.



MAC üçgenine Stewart Teoremini uygularsak:

$$|MA|^2 \cdot |BC| + |AC|^2 \cdot |MB| = |AB|^2 \cdot |MC| + |MB| \cdot |MC| \cdot |BC|$$

eşitliğini elde ederiz. $|AB| = |AC|$ olduğuna göre eşitliği:

$$|MA|^2 \cdot |BC| = |AB|^2 \cdot |MC - MB| + |MB| \cdot |MC| \cdot |BC|$$

şekline getirebiliriz ve $|MC| - |MB| = |BC|$ olduğuna göre:

$$|MA|^2 = |AB|^2 + |MB| \cdot |MC|$$

eşitliğini elde ederiz.

MAB üçgeninin içteğet çemberinin yarıçapı r, MAC üçgeninin M kenarına karşılık gelen dış teğet çemberinin yarıçapı R, A dan BC kenarına indirilen dikme h olmak üzere,

$$r = \frac{2 \cdot A(\triangle MAB)}{|MA| + |MB| + |AB|} \quad \text{ve} \quad R = \frac{2 \cdot A(\triangle MAC)}{|MA| + |MB| - |AB|} \quad \text{yazılabilir.}$$

Eşitlikleri h ye bölersek:

$$\frac{r}{h} = \frac{|MB|}{|MA| + |MB| + |AB|} \quad \text{ve} \quad \frac{R}{h} = \frac{|MC|}{|MA| + |MB| - |AB|} \quad \text{elde ederiz.}$$

Buradan da

$$\frac{r+R}{h} = \frac{|MB|(|MA| + |MC| - |AB|) + |MC|(|MA| + |MB| + |AB|)}{(|MA| + |MB| + |AB|) \cdot (|MA| + |MC| - |AB|)}$$

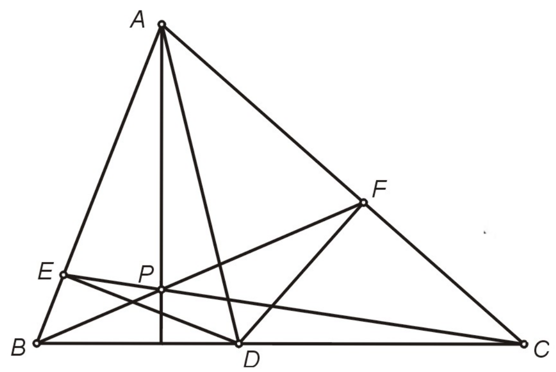
bulunur. Paydayı açıp $|MA|^2$ yerine yukarıda bulduğumuz eşitliği yazarsak

$$\frac{r+R}{h} = \frac{|MB|(|MA|+|MC|-|AB|)+|MC|(|MA|+|MB|+|AB|)}{|MB|\cdot|MC|+|MB|\cdot|MA|-|MB|\cdot|AB|+|MC|\cdot|MA|+|MC|\cdot|MB|+|MC|\cdot|AB|}$$

$\frac{r+R}{h} = 1$ buluruz. Bu eşitlikten de $r+R=h$ elde edilir. Diğer bir deyişle $r+R$ seçilen M noktasından bağımsız olmadan sabit ve h ye eşittir.

106. ABC dar açılı bir üçgendir. BC kenarı üzerinde bir D noktası alalım. E ve F noktaları da sırasıyla, D noktasının AB ve AC kenarlarına dik izdüşümü olsun. BF ve CE doğrularının keşiştiği noktaya da P diyelim. AD doğrusunun BAC üçgeninin açıortayı olmasının ancak ve ancak AP ve BC doğrularının birbirine dik olması durumunda olduğunu gösteriniz.

Çözüm. a, b, c, x, y sırasıyla BC, CA, AB, BD ve DC kenarlarının uzunlukları olsun. A köşesinden BC ye inilen dikme ayağına A' diyelim.



Eğer AP, BC ye dik ise Ceva Teoreminden $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1$ eşitliğini elde ederiz. Ayrıca AD doğrusunun açıortay olması $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$ ile eşdeğerdir.

Elde ettiğimiz bu iki eşitliğin eşdeğer olduğunu göstermek yeterlidir.

$|CF| = y \cdot cos(C)$, $|FA| = b - y \cdot cos(C)$, $|BE| = x \cdot cos(B)$, $|AE| = c - x \cdot cos(B)$, $|BA'| = c \cdot cos(B)$ ve $A'C = b \cdot cos(c)$ olduğuna göre eşitliği

$$cos(B) \cdot ycos(C) \cdot (c - x \cdot cos(B)) = bcos(C) \cdot (b - y \cdot cos(C)) \cdot xcos(B)$$

şekline çevirebilirz. Buradan da

$$cy \cdot (c - x \cdot cos(B)) = bx \cdot (b - y \cdot cos(C))$$

elde edilir. Kosinüs teoreminden yararlanarak $cos(B)$ yerine $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ve $cos(C)$

yerine $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ yazarsak, eşitlik

$$c^2y - cxy\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = b^2x - bxy\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

haline dönüşür. Bu da

$$c^2y(a-x) = b^2x(a-y)$$

ile eşdeğerdir. $a - x = y$ ve $a - y = x$ olduğuna göre $c^2y^2 = b^2x^2$ yani $cy = bx$ eşitliğini elde ederiz ki bu da $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$ ile eşdeğerdir.

107. İki benzer üçgenin tam sayı değerli kenar uzunluklarının ikisi birbirine eşit olsun. Üçüncü kenarlarının farkı 20141 ise, bütün kenarlarını bulunuz.

Çözüm: Küçük üçgenin kenar uzunluklarının $a \le b \le c$ için (a, b, c) olduğunu varsayalım. O halde, büyük üçgenin kenar uzunlukları $ka \le kb \le kc$ için (ka, kb, kc) olur. Burada, $k > 1$ rasyonel sayı olup, benzerlik oranıdır.
$a < ka$ ve $kc > c$ olduğu açıktır. Bu yüzden, ne a ne de kc ortak kenar olamaz.
Dolayısıyla, ortak kenarlar $b = ka$ ve $c = kb = k^2a$ olmak zorundadır.
O halde, küçük üçgenin kenar uzunlukları (a, ka, k^2a), büyük üçgenin kenar uzunlukları ise (ka, k^2a, k^3a) olur.
$k = n/m$, $(n, m) = 1$ olacak şekilde bir kesir olsun.
En uzun kenarı dikkate alalım, $k^3a = an^3/m^3$ olur.
$k = n/m$, $(n, m) = 1$ olacak şekilde bir kesir olduğu için, ya $m = 1$ 'dir, ya da ($m > 1$ ise) m^3, n^3'ü bölemez.
Her iki durumda da m^3, a'yı bölmek zorundadır.
p bir tam sayı olmak üzere, $a = pm^3$ olsun. O halde, kenarlar (pm^3, pm^2n, pmn^2) ve (pm^2n, pmn^2, pn^3) şeklinde yazılırlar.
Ortak olmayan iki kenar arasındaki farkın 20141 olduğunu biliyoruz.
Bu yüzden, $pn^3 - pm^3 = p(n-m)(n^2+nm+m^2) = 20141$ 'dir.
20141 sayısının asal çarpanları 11 ve 1831 'dir.
Aritmetiğin temel teoreminden, yukarıdaki asal çarpanlar tektir ve bu yüzden, p, $(n-m)$ ve (n^2+nm+m^2) değerlerinin her biri, 1, 11, 1831 ya da 20141 sayılarından birini almak zorundadır.
Aşağıda, bu dört durumu dikkate alalım : $n - m = 1$, 11, 1831 ya da 20141.

$\mathbf{n - m = 1831}$ ve $\mathbf{n - m = 20141}$ durumu:

Bu iki durumda da, $n > 1831$ ve bu yüzden $n^2 + nm + m^2 > 11$ olacağından $(n-m)(n^2+nm+m^2) > 20141$ olur. Dolayısıyla, bu iki durumun olması mümkün değildir.

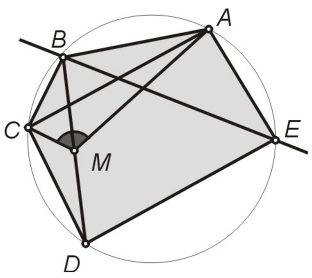
$\mathbf{n - m = 1}$ durumu:

$n - m = 1$ olduğunu varsayalım.
O halde, $n^2 + nm + m^2 = (m+1)^2 + m(m+1) + m^2 = 3m^2 + 3m + 1$ 'dir.
$3m^2+3m+1 = 11$ ve $3m^2+3m+1 = 1$ denklemlerinin pozitif tam sayı çözümlerinin olmadığını kolayca görebiliriz.
Şimdi, $3m^2 + 3m + 1 = 1831$ denklemini dikkate alalım. Sadeleştirme yaparak $m^2 + m - 610 = 0$ denklemini elde ederiz.
İkinci dereceden denklemin diskriminantını, bir tam sayının karesi şeklinde yazamayacağımızdan dolayı, denklemin kökleri irrasyoneldir.
Benzer şekilde, $3m^2+3m+1 = 20141$ denklemini dikkate alırsak, denklemin köklerinin irrasyonel olduğunu görürüz.

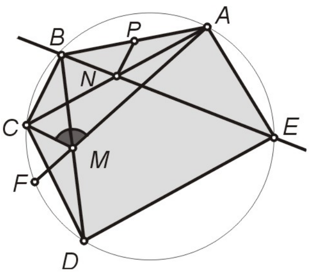
$\mathbf{n - m = 11}$ durumu:

Son olarak, $n - m = 11$ olduğunu varsayalım.
O halde, $n^2 + nm + m^2 = (m+11)^2 + m(m+11) + m^2 = 3m^2 + 33m + 121$ 'dir.
$3m^2 + 33m + 121 = 11$ ve $3m^2 + 33m + 121 = 1$ denklemlerinin pozitif tam sayı çözümlerinin olmadığını kolayca görebiliriz.
Şimdi, $3m^2 + 33m + 121 = 1831$ denklemini dikkate alalım. Sadeleştirme yaparak $m^2 + 11m + 570 = 0$ denklemini elde ederiz.
Diskriminant yardımıyla, denklemin köklerinin $m = (-11 \pm \sqrt{2401})/2$ olduğunu buluruz. Sadece $m = 19$ pozitif köktür. Bu durumda, $n = 30$ bulunur.
Bu yüzden, $(n-m)(n^2 + nm + m^2) = 11 \times 1831 = 20141$ ve $p = 1$ olur.
Dolayısıyla, benzerlik kriterini sağlayan tek aday çifti (6859, 10830, 17100) ve (10830, 17100, 27000) 'dir.
Kenar uzunluklarından oluşan her iki kümede üçgen eşitsizliğini (herhangi iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyüktür) sağlar.
Sonuç olarak, üçgenlerin kenarları (6859, 10830, 17100) ve (10830, 17100, 27000) 'dir.

108. Köşeleri bir çemberin üzerinde bulunan $ABCDE$ beşgeninde , $AC||DE$ ve M, BD doğru parçasının orta noktasıdır. $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BMC})$ olduğunda BE nin AC yi iki eşit parçaya ayırdığını gösteriniz.



Çözüm. BE, AC ile N noktasında kesişsin ve P de AB nin orta noktası olsun. $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC}) = \alpha$, $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CBD}) = \beta$ ve $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ACB}) = \gamma$ olarak belirtelim. Buradan ABN ve DBC nin benzer üçgenler oldukları görülür. Bu üçenlerde AB ve BD kenarlarına bakan açılar eşit ve P, AB nin, M de BD nin orta noktaları oldukları için BPN ve BMC üçgenlerinin benzer oldukları bulunur.



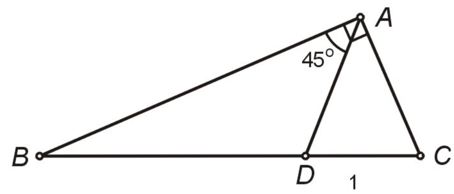
$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BMC}) = \varphi$ olsun. BPN ve BMC üçgenlerinin benzerliğinden $m(\widehat{BPN}) = \varphi$ elde edilir.

AM doğru parçasını uzatalım ve çemberle ikinci kere kesiştiği noktaya F diyelim. $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{DMF})$ den $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{DMF})$ elde edilir. CM ve FM, AB yi iki eşit parçaya ayırdığı ve $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{DMF})$ olduğu için eş üçgenler veya simetri kullanılarak $CM = FM$ olduğu kolayca görülebilr. Buradan DMF ve BMC nin eş üçgenler olduğu ve dolayısı ile $BC = DF$, $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{BDC}) = \alpha$ elde edilir.

$DF = BC$ olduğu için bu doğru parçalarının gördükleri yaylar da eşit olacaktır. Buradan $m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{BDC})$ elde edilir. AMD üçgeninin açıları incelenirse $\varphi = \alpha + \gamma$ olduğu görülür. APN üçgeninden $m(\widehat{ANP}) = \varphi - \alpha = \gamma = m(\widehat{ACB})$ bulunur. Dolayısı ile $NP||BC$ dir ve bu da N nin AC nin orta noktası olduğunu gösterir.

109. ABC üçgeni, A noktasında dik açılı olsun. A köşesinden çizilen açıortay BC kenarını, D noktasında kessin. Dolayısıyla, $s(\widehat{DAB}) = 45°$ olur. $|CD| = 1$ ve $|BD| = |AD| + 1$ ise, AC ve AD uzunluklarını bulunuz.

Çözüm. Çeşitli üçgenlere, sinüs kuralı, kosinüs kuralı ve Pisagor teoremi uygulanabileceğinden, bu problemin bir kaç çözümünün olabileceğine hiç şüphe yoktur. Öncelikle AD uzunluğunu bulalım. $|BD| = d$ olsun. Dolayısıyla, $|AD| = d - 1$ olur. Sinüs kuralını, sırasıyla CAD ve ABD üçgenlerine uygulayarak,



$$\begin{aligned}(\sin C)/(d-1) &= (\sin 45°)/1 = 1/\sqrt{2} \\ (\sin B)/(d-1) &= (\sin 45°)/d = 1/(d\sqrt{2})\end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. $\sin B = |AC|/|BC| = \cos C$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, yukarıdaki iki eşitlikte; her iki tarafın karesini alıp, taraf tarafa toplarsak,

$$1/(d-1)^2 = 1/2 + 1/(2d^2)$$

eşitliğini buluruz. Eşitliğin her iki tarafını $2d^2(d-1)^2$ ile çarpıp, gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$d^4 - 2d^3 - 2d + 1 = 0$$

denklemini elde ederiz. Dördüncü dereceden denklemleri çözmek zor olmasına rağmen, bu özel denklemin derecesini, bir dönüşüm yaparak yarıya indirebiliriz. Denklemin katsayılar dizisinin $(1, -2, 0, -2, 1)$ palindrom (tersinden de aynı şekilde okunabilen sözcük ya da cümle) şeklinde olduğuna dikkat edelim. $d = 0$ bir kök olmadığı için, denklemi d^2 ile bölersek,

$$d^2 - 2d - 2/d + 1/d^2 = 0$$

denklemini elde ederiz. $u = d + 1/d$ dönüşümünü yaparsak, $u^2 = d^2 + 1/d^2 + 2$ olur. Dolayısıyla,

$$u^2 - 2u - 2 = (u-1)^2 - 3 = 0$$

denklemini elde ederiz. Reel olmayan d değerleri elde edeceğimiz için u 'nun negatif değerini almayız. Bu yüzden,

$$u = d + 1/d = 1 + \sqrt{3} \qquad (1)$$

sonucuna ulaşırız. Bu denklemi, d ile çarpıp, yeniden düzenlersek

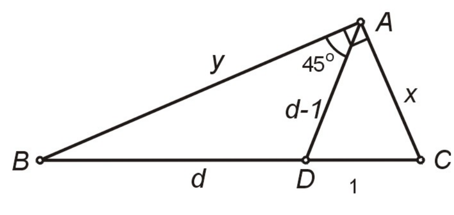
$$d^2 - (1+\sqrt{3})d + 1 = 0$$

eşitliğini elde ederiz. İkinci dereceden bu denklemi çözersek $d = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{2}\sqrt[4]{3})$ buluruz.

$|AD| = d - 1$ uzunluğu pozitif olmak zorundadır. Dolayısıyla, d 'nin küçük olan değeri 1 'den küçük olduğu için, AD uzunluğu $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt[4]{3})$ olur.

Şimdi de AC uzunluğunu bulalım.

$|AC| = x$ ve $|AB| = y$ olsun. Sinüs kuralını, sırasıyla CAD ve ABD üçgenlerine uygulayarak,



$$\begin{aligned} 1/\sin 45^\circ &= x/\sin ADC \\ d/\sin 45^\circ &= y/\sin BDA \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz.

$\sin BDA = \sin(180^\circ - s(\widehat{ADC})) = \sin ADC$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $x =$

$\sin ADC/\sin 45°$ ve $y = d \sin ADC/\sin 45°$ 'dir. Bu yüzden, $y = d \cdot x$ olur.

ABC üçgenine Pisagor teoremini uygularsak,

$$x^2 + y^2 = (d+1)^2$$

denklemine ulaşırız. $y = d \cdot x$ değişikliğini yaparsak $x^2(d^2+1) = (d+1)^2$ denklemini elde ederiz. Bu yüzden $x^2 = (d^2+2d+1)/(d^2+1) = 1 + 2d/(d^2+1)$ olur.

(1) 'den $d + 1/d = (d^2+1)/d = 1+\sqrt{3}$ 'tür. Bu yüzden, $2d/(d^2+1) = 2/(1+\sqrt{3})$ olur. Paydayı kareköklü ifadeden kurtarmak için, paydayı eşleniğiyle çarparak

$$2d/(d^2+1) = 2(\sqrt{3}-1)/[(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)] = \sqrt{3}-1$$

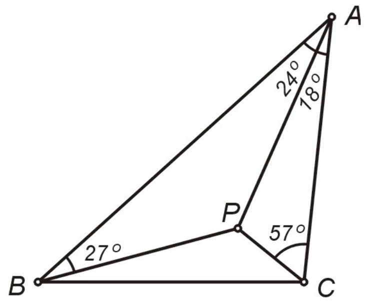
eşitliğini elde ederiz. Bu yüzden, $x^2 = 1 + 2d/(d^2+1) = \sqrt{3}$ 'tür.

Dolayısıyla, AC uzunluğu $\sqrt[4]{3}$ olur.

Not AD uzunluğunu bulmak için, ADC üçgenine kosinüs kuralını uygulayarak AC uzunluğunun nümerik değerini buluruz. Ancak, bu denklemden tam sonucu elde etmek oldukça zordur.

$|AB|/|AC| = |BD|/|CD|$ olduğunu ispatlarken, ABC üçgeninin dik olması gerçeğini kullanmadığımıza dikkat etmeliyiz. Aslında bu, açıortay teoremi olarak bilinen genel bir sonuçtur.

110. ABC üçgeni içerisinde PAC açısı 18°, PCA açısı 57° , PAB açısı 24° ve PBA açısı 27° olacak şekilde bir P noktası olduğuna göre, ABC üçgeninin ikizkenar olduğunu gösteriniz.



Çözüm. $\widehat{PBC}$ açısının ölçüsüne x, $\widehat{PCB}$ açısının ölçüsüne de y diyelim. Üçgenin iç açıları toplamı 180 olacağından;

$$\begin{aligned} 18+24+27+y+x+57 &= 180 \\ 126+x+y &= 180 \\ x+y &= 54 \end{aligned}$$

tür. O halde $y = 54 - x$ dir.

$\widehat{CAB}$ açısıyla $\widehat{ABC}$ açısının eşit olduğunu gösterececeğiz.

PAB, PBC ve PCA üçgenlerine sinüs teoramini uygulayalım;

$$1 = \frac{|PA|}{|PB|} \cdot \frac{|PB|}{|PC|} \cdot \frac{|PC|}{|PA|} = \frac{\sin 27}{\sin 24} \cdot \frac{\sin(54 - x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin 18}{\sin 57}$$

Yani,

$$\sin 27 \cdot \sin(54 - x) \cdot \sin 18 = \sin 24 \cdot \sin x \cdot \sin 57 \tag{23}$$

ABC bir ikiz kenar üçgen ise, $x = 15$ olacağı açıktır. Önce $x = 15$'in bir çözüm olduğunu gösterelim. $x = 15$ i, (23) de yerine koyarsak ;

$$\sin 27 \cdot \sin 39 \cdot \sin 18 = \sin 24 \cdot \sin 15 \cdot \sin 57$$

elde ederiz. Bu eşitliğe

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c &= 2 \sin a[cos(b - c) - cos(b + c)] \\ &= \sin(a - b + c) + \sin(a + b - c) - \sin(a - b - c) - \sin(a + b + c) \end{aligned}$$

dönüşüm formülünü uygularsak

$$\sin 6 + \sin 48 - \sin(-30) - \sin 84 = \sin 66 + \sin(-18) - \sin(-48) - \sin 96$$

bulunur.

$$\sin 96 = \sin(180 - 96) = \sin 84$$

olduğundan bu eşitlik de

$$\frac{1}{2} + \sin 18 = \sin 66 - \sin 6$$

olarak sadeleşir. Sinüs-Kosinüs dönüşüm formüllerini kullanacak olursak

$$\sin 66 - \sin 6 = 2 \cdot \cos 36 \cdot \sin 30 = \cos 36$$

ve

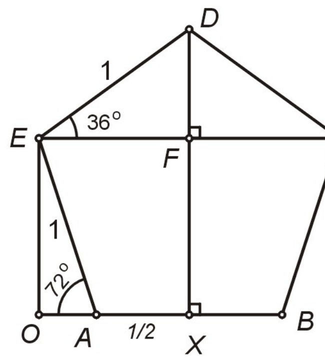
$$\sin 18 = \cos 72$$

olduğu görülür. O halde denklemimiz

$$\cos 36 - \cos 72 = \frac{1}{2}$$

haline gelir.

Şimdi şekildeki gibi bir kenarının uzunluğu 1 olan düzgün bir $ABCDE$ beşgenini ele alalım.



$ABCDE$ düzgün beşgen olduğu için m$(\widehat{OAE}) = 72$ dir. $|EC|$, $|AB|$ ye paralel olduğundan m$(\widehat{CEA}) = 72$ derecedir. $\widehat{AED}$ açısının bütünleyeni de 72 olduğundan m$(\widehat{DEC}) = 180 - 72 - 72 = 36$ dır. Ayrıca $|DX|$, $|AB|$ iki eşit parçaya ayırır.

Buradan $|AX| = |OX| - |OA| = |EF| - |OA| = -\cos 72 + \cos 36 = \frac{1}{2}$ denklemimizi sağlar. Bu da, buraya kadar ki adımları tersden izlersek, $x = 15$ in bir çözüm olduğunu gösterir.

(23) numaralı denklem, $0 < x < 54$ olmak üzere bir k pozitif sayısı için, $\frac{\sin x}{\sin(54-x)} = k$ şeklindedir. $\sin x$ fonksiyonu kesin artan ve sürekli bir fonksiyon olduğu için $\sin(54 - x)$ de kesin azalan ve sürekli bir fonksiyondur. O halde $\frac{\sin x}{\sin(54-x)}$ kesin artan ve sürekli bir fonksiyondur ve her k değerini yalnızca bir defa alır. Dolayısıyla $x = 15$ tek çözümdür.

Dolayısıyla ABC üçgeni ikiz kenar üçgendir.

111. Dar açılı bir üçgenin iç açılarını A, B ve C ile gösterelim.

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &> 2 \\ \cos A + \cos B + \cos C &> 1 \\ \tan(\frac{A}{2}) + \tan(\frac{B}{2}) + \tan(\frac{C}{2}) &< 2 \end{aligned}$$

eşitsizliklerini gösteriniz.

Çözüm.

- $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $y = \sin x$ fonksiyonu ile $y = \frac{2}{\pi}x$ doğrusunun kesişim noktaları

$(0,0)$ ve $(\frac{\pi}{2},1)$ noktalarıdır. $(0,\frac{\pi}{2})$ açık aralığında $y=\sin x$ içbükey olduğundan her $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ için $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ dir. $A+B+C=\pi$ ve $0<A,B,C\leq\frac{\pi}{2}$ olduğundan (eşitlik sadece bir durumda mümkündür) $\sin A+\sin B+\sin C > \frac{2}{\pi}(A+B+C)=2$ bulunur.

- $[0,\frac{\pi}{2}]$ aralığında $y=\cos x$ fonksiyonu ile $y=1-\frac{2}{\pi}x$ doğrusunun kesişim noktaları $(0,1)$ ve $(\frac{\pi}{2},0)$ noktalarıdır.$(0,\frac{\pi}{2})$ açık aralığında $y=\cos x$ içbükey olduğundan her $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ için $\cos x\geq 1-\frac{2}{\pi}x$ dir. Yani, $\cos A+\cos B+\cos C > 3-\frac{2}{\pi}(A+B+C)=1$ dir.
- $[0,\frac{\pi}{4}]$ aralığında $y=\tan x$ fonksiyonu ile $y=\frac{4}{\pi}x$ doğrusunun kesişim noktaları $(0,0)$ ve $(\frac{\pi}{4},1)$ noktalarıdır.$(0,\frac{\pi}{4})$ açık aralığında $y=\tan x$ dışbükey olduğundan ($0<x<\frac{\pi}{4}$ ise $\frac{d}{dx}(\tan x)=2\tan x\sec^2 x>0$ dır) $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ için $\tan x\leq\frac{4}{\pi}x$ dir.Yani, $\tan A+\tan B+\tan C<\frac{4}{\pi}(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2})=2$ dir.

112. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC})=60^\circ$ ve $|AB|\neq|AC|$ olsun. Ayrıca $\widehat{BAC}$ açısının açı ortayı AD doğrusu ve AD doğrusuna A noktasında dik olan ϵ doğrusunun BC ile kesiştiği nokta, $|BE|=|AB|+|AC|$ şartını sağlayan E noktası olsun.

Bu durumda ABC üçgeninin $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{BCA}$ açılarını bulunuz.

Çözüm. $|AB|\neq|AC|$ olduğundan, açı ortay AD, BC doğrusuna dik olamaz yani, $m(\widehat{DAB})\neq 90^\circ$ olur ve dolayısıyla $m(\widehat{xAD})+m(\widehat{BDA})\neq 180^\circ$ olduğu görülür. Bu nedenle $x'Ax$ ve BC doğruları kesişir.

Bu durumda iki ayrı durum olasıdır:

(a) Aşağıdaki şekilde de görülebileceği gibi $m(\widehat{BDA})\neq 90^\circ$, $m(\widehat{xAD})+m(\widehat{BDA})\neq 180^\circ$ ve $x'Ax$ ile BC doğruları BC doğrusunun B noktası tarafında bir E noktasında kesişmektedir.

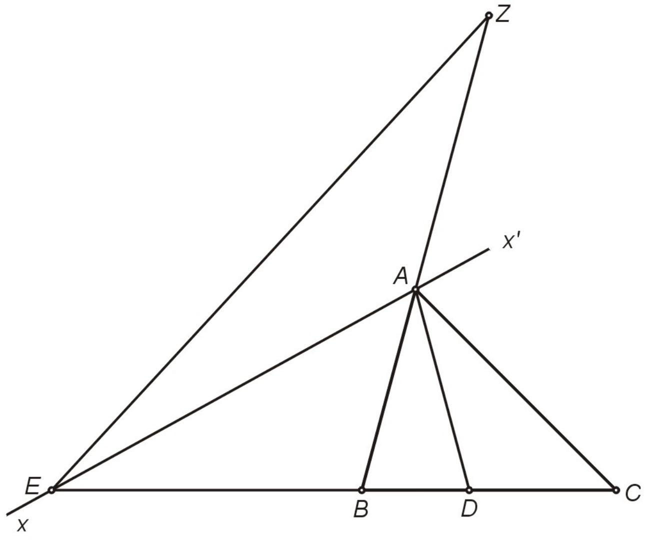
Burada AB kenarının B noktası tarafına olan kısmında $|AZ|=|AC|$ olacak şekilde bir Z noktası olsun. Bu durumda $|BZ|=|AB|+|AC|=|BE|$ olur. Dolayısıyla BEZ üçgeni bir ikizkenar üçgen ve

$$\omega=m(\widehat{BEZ})=m(\widehat{BZE})=\frac{m(\widehat{ABC})}{2}$$

olur.

Ayrıca AE kenarını ortak bulunduran EAC ve EAZ üçgenleri, $|AC|=|AZ|$ ve $m(\widehat{EAC})=m(\widehat{EAZ})$ olduğundan eş üçgenlerdir. Buradaki eşitlik

$$m(\widehat{EAC})=180^\circ-m(\widehat{CAx'})=180^\circ-m(\widehat{ZAx'})=m(\widehat{EAZ})$$

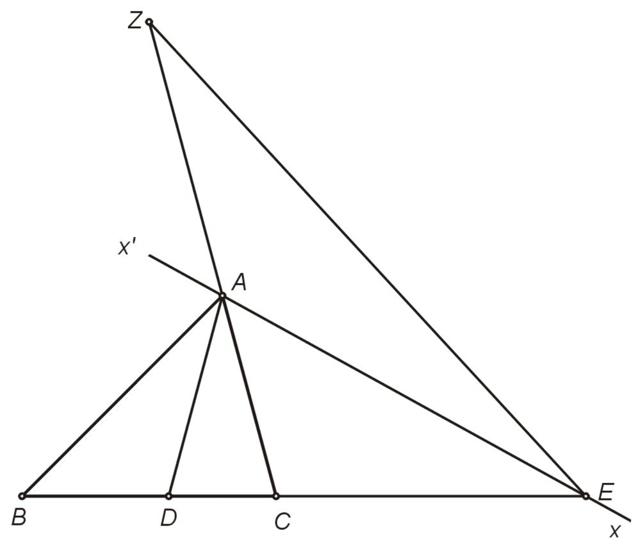


olmasından ve $x'Ax \perp AD$ olduğundan $x'Ax$ doğrusu CAZ açısının ve ZAC dış açısının açı ortayı olmasından kaynaklanmaktadır.

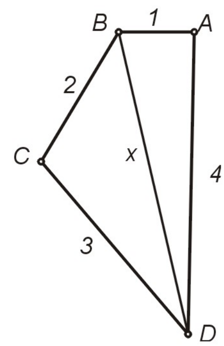
Dolayısıyla $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{AZE}) = \omega \Rightarrow 180^\circ - (m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAC})) = \omega \Rightarrow 180^\circ - (2\omega + 60^\circ) = \omega \Rightarrow \omega = 40^\circ$ olur ve buradan da $m(\widehat{ABC}) = 2\omega = 80^\circ$ ve $m(\widehat{BCA}) = 40^\circ$ değerleri bulunur.

(b) Aşağıdaki şekilde de görülebileceği gibi $m(\widehat{BDA}) > 90^\circ$ olduğunda, $x'Ax$ ile BC doğruları BC doğrusunun C noktası tarafında bir E noktasında kesişmektedir. Burada AB doğrusunu A noktası tarafına doğru, $|AZ| = |AC|$ olacak şekilde, bir Z noktasına kadar uazatalım. Bu durumda, (a) durumundaki gibi, BEZ üçgeni yine ikizkenar üçgen olur ve yukarıdakine benzer bir yöntemle $m(\widehat{ABC}) = 20^\circ$ ve $m(\widehat{BCA}) = 100^\circ$ değerleri bulunur.

113. Kenar uzunlukları $1, 2, 3$ ve 4 birim olan bir dörtgenin alanının en büyük değeri nedir?



Çözüm. Şekilde gösterildiği kenar uzunlukları $1, 2, 3, 4$ birim olan $ABCD$ dışbükey dörtgeninde B ve D köşelerini birleştirelim ve $|BD| = x$ diyelim. Dörtgeni $(|AB|, |BC|, |CD|, |DA|) = (1, 2, 3, 4)$ şeklinde düşünmek yerine değişik kombinasyonlar da düşünebilirdik. Bu kombinasyonlardan, $(1, 2, 3, 4) = (1, 4, 3, 2), (1, 2, 4, 3) = (1, 3, 4, 2)$ ve $(1, 3, 2, 4) = (1, 4, 2, 3)$ olduğu açıktır. Aslında, kapattıkları bölgelerin alanları her üç durumda da eşitir. Çünkü, her hangi bir kombinasyonu, diğer kombinasyonlardan, karşılıklı köşeleri birleştirip oluşan üçgenlerin ortak olmayan kenarlarını yer değiştirmekle elde edebiliriz.



Biz, şekildeki durumu ele alıp, alanın en büyük değerini bulmaya çalışacağız. Heron formulünden, kenarları a, b, c br olan bir üçgenin alanının, $s = (a + b + c)/2$ olmak üzere,

$$Alan = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$Alan(BCD) = \sqrt{(25-x^2)(x^2-1)}/4 \quad \text{ve} \quad Alan(ABD) = \sqrt{(25-x^2)(x^2-9)}/4$$

olarak elde edilir. Buradan, $Alan(ABCD) = (\sqrt{(25-x^2)(x^2-1)} + \sqrt{(25-x^2)(x^2-9)})/4$ olur. $u = x^2$ ve $A = Alan(ABCD)$ diyelim.

$$4A = \sqrt{(25-u)(u-1)} + \sqrt{(25-u)(u-9)}$$

ifadesinin her tarafının u ya göre türevini alırsak,

$$4 \cdot \frac{dA}{du} = \frac{13-u}{\sqrt{(25-u)(u-1)}} + \frac{17-u}{\sqrt{(25-u)(u-9)}}$$

elde edilir. $dA/du = 0$ ise $(u-13)/\sqrt{u-1} = (17-u)/\sqrt{u-9}$ ve bu ifadenin karesi alınırsa $(u-13)^2(u-9) = (17-u)^2(u-1)$ bulunur. Bu denklemdeki ifadeler açılırsa $u^3 - 35u^2 + 403u - 1521 = u^3 - 35u^2 + 323u - 289$, buradan da $u = 15.4$ olur.

Dolayısıyla, $4A = \sqrt{9.6}(\sqrt{14.4} + \sqrt{6.4}) = 8\sqrt{6}$ ve $A = 2\sqrt{6}$ birim^2 olarak elde edilir.

Brahmagupta formulünü kullanarak çözüm: Kenar uzunlukları a, b, c, d br olan bir dış bükey dörtgenin alanı, $s = (a+b+c+d)/2$ ve α karşılıklı iki iç açının toplamının yarısı olmak üzere, $Alan = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos\alpha}$ dır. Alanın en büyük değerinin $\alpha = 90°$ için elde edileceği açıktır. (Bu durumda karşılıklı açıların toplamı $180°$ olacağı için, dörtgenin aslında bir kirişler dörtgeni olduğuna dikkat ediniz.) Dolayısıyla kenar uzunlukları $1, 2, 3, 4$ birim olan dörtgenin alanın en büyük değeri $2\sqrt{6}$ birim^2 olarak elde edilir.

114. AB ve CD kenarları paralel olan bir $ABCD$ yamuğunda $m(\widehat{DAB}) = 6$ ve $m(\widehat{ABC}) = 42$ dir.AB kenarında $m(\widehat{AXD}) = 78$ ve $m(\widehat{CXB}) = 66$ olacak şekilde bir X noktası bulunmaktadır. $|AB|$ ve $|CD|$ doğru parçaları arasındaki uzaklık 1 ise $AD + DX - (BC + CX) = 8$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. D köşesinden AX kenarına bir dikme indirelim. Bu dikmenin uzunluğu 1 olur. Aynı şekilde C köşesinden de BX kenarına bir dikme indirelim. Bu dikmenin uzunluğu da 1 olacaktır. Buradan $|AD| = cosec(6°)$, $|DX| = cosec(78°)$, $|BC| = cosec(42°)$ ve $|CX| = cosec(66°)$ olarak yazılabilir. Yani $AD + DX - (BC + CX) = cosec(6°) + cosec(78°) - cosec(42°) - cosec(66°)$ dır. $x = 6°, x = 78°, x = -42°, x = 30°$ ve $x = -66°$ için $\sin(5x) = \frac{1}{2}$'dir. De Moivre teoremi[3] kullanarak $\sin(5x)$'i, $\sin(x)$ cinsinden yazalım. De Moivre teoreminde n yerine 5 yazıp, eşitliğin sağ tarafını binom açılımını kullanarak açıp, karmaşık terimleri eşitlersek

$$\begin{aligned}
\sin(5x) &= \sin^5(x) - 10\sin^3(x)\cos^2(x) + 5\sin(x)\cos^4(x) \\
&= \sin^5(x) - 10\sin^3(x)(1-\sin^2(x)) + 5\sin(x)(1-\sin^2(x))^2 \\
&= 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

[3]De Moivre teoremi: n bir tamsayı olmak üzere, herhangi bir x gerçel sayısı için

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$$

Cebirin temel teoremi kullanılarak, bu denklemin 5 kökü olduğu bulunur. Denklem de $\sin(x)$ yerine s yazalım.

$$16s^5 - 20s^3 + 5s = \frac{1}{2} = 32s^5 - 40s^3 + 10s - 1 = 0 \tag{24}$$

$s = \frac{1}{2}$ (24) numaralı denklemin bir kökü olduğu için, (24)

$$(2s-1)(16s^4 + 8s^3 - 16s^2 - 8s + 1 = 0) \tag{25}$$

olarak genişletilebilir. (25) numaralı denklemden elde edilen $16s^4+8s^3-16s^2-8s+1=0$ denkleminin kökleri $\sin(6°), \sin(78°), \sin(-42°)$ ve $\sin(-66°)$'dir. Bu denklemi s^4 e bölüp, denklemde $t = \frac{1}{s}$ yazarsak yeni denklemimiz

$$t^4 - 8t^3 - 16t^2 + 8t + 16 = 0$$

ve kökleri de $cosec(6°), cosec(78°), cosec(-42°)$ ve $cosec(-66°)$ olur. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ cinsinden bir denklemde kökler toplamı $\frac{-b}{a}$ olduğu için

$$\begin{aligned} & cosec(6°) + cosec(78°) + cosec(-42°) + cosec(-66°) \\ = \; & cosec(6°) + cosec(78°) - cosec(42°) - cosec(66°) \\ = \; & \frac{-(-8)}{1} = 8 \end{aligned}$$

bulunur.

115. Bir ABC eşkenar üçgeni verilsin. Ağırlık merkezi G olsun. M noktası herhangi bir iç nokta olmak üzere, $|MG|$ nin orta noktası O olsun. M noktasından geçen uç noktaları ABC üçgeninin kenarları üzerinde olan kenarlara paralel doğru parçaları çizilsin.

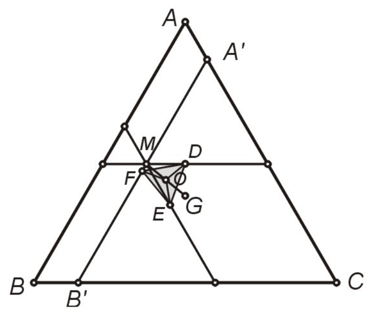
a. O noktasının doğru parçalarının orta noktalarına uzaklılarının eşit olduğunu gösteriniz.

b. Doğru parçalarının orta noktalarının bir eşkenar üçgenin köşeleri olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a. D, E, F noktaları sırasıyla $|BC|, |CA|, |AB|$ doğru parçalarına paralel doğru parçalarının orta noktaları olsun. $|CF|$, $|MF|$ ye paraleldir yani G noktasından geçer. Dolayısıyla GFM üçgeninin F açısı diktir ve $|MG|$ hipotenüstür. Yani, $|OF| = \frac{1}{2}|MG|$ dir. Benzer şekilde $|OD| = |OE| = \frac{1}{2}|MG|$ dir.

b. D, R, F, G, M noktaları O merkezli çember üzerindedirler. Simetriden dolayı, M noktasının $m(\widehat{FGD})$ nin iç noktası olduğu kabul edilsin. $m(\widehat{FOD}) = m(\widehat{FOM}) +$



$m(\widehat{MOD}) = 360° - 2 \cdot m(\widehat{FMG}) - 2 \cdot m(\widehat{GMD}) = 360° - 2 \cdot m(\widehat{FMD}) = 360° - 240° = 120°$ bulunur. Ayrıca, $m(\widehat{FOE}) = m(\widehat{FOG}) + m(\widehat{GOE}) = 2 \cdot m(\widehat{OMF}) + 2 \cdot m(\widehat{OME}) = 2 \cdot m(\widehat{FME}) = 120°$ dir. Yani, $m(\widehat{EOD}) = 120°$ dir. Sonuç olarak D, E, F çemberi üç eşit yaya böler, yani DEF üçgeni eşkenardır.

KAYNAKLAR

Bu kitaptaki problemler http://www.qbyte.org/puzzles/p001s.html adlı web sitesinden Genç Balkan matematik olimpiyatlarından ve Arnavutluk, Avusturya, Beyaz Rusya, Bulgaristan, Çek Cumhuriyeti, Çin, Estonya, Hırvatistan, İngiltere, İran, İrlanda, İtalya, Japonya, Kanada, Kore, Romanya, Rusya, Slovakya, Tayland, Vietnem ile Yunanistan'da düzenlenen ulusal matematik yarışmalarından alınmıştır.

SAYILAR TEORİSİ

1 Bölünebilme

Bölme Algoritması:
Her a ve $b \neq 0$ tam sayıları için

$$a = qb + r \quad \text{ve} \quad 0 \leq r < |b|$$

olacak şekilde q ve r tam sayıları tek türlü belirlenebilir. r sayısı a nın b ile bölümünden elde edilen kalandır. $r = 0$ durumunda b, a yı böler denir ve $b|a$ ile gösterilir.
Sıfırdan farklı a, b, x, y, z tam sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $x|y$ ve $y|z$ ise $x|z$,
2. $x|y$ ve $x|z$ ise $x|(ay + bz)$,
3. $x|y$ ise $xz|yz$,
4. $x|y$, $y|x$ ve $x, y > 0$ ise $x = y$.

Hepsi birden 0 olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılarının tamamını bölen en büyük pozitif tam sayıya bu sayıların ortak bölenlerinin en büyüğü (OBEB) denir ve $d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ile gösterilir. $(a_1, a_2) = 1$ durumunda a_1 ve a_2 sayılarına aralarında asal denir.
Sıfırdan farklı a, b, c tam sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(a, b) = (b, a) = (-a, b)$,
2. $(a, b) \leq min\{|a|, |b|\}$,
3. $(a, b + ca) = (a, b)$,
4. $(a, b) = d$ ise $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Benzer şekilde hepsi birden 0 olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılarının hepsi ile bölünebilen en küçük pozitif tam sayıya, bu sayıların ortak katlarının en küçüğü (OKEK) denir ve $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ile gösterilir.

Teorem 1. Her a, b pozitif tam sayıları için $a \cdot b = (a, b)[a, b]$ eşitliği sağlanır.

Öklid Algoritması: Pozitif a ve b tam sayıları $a > b$ olarak verildiğinde bölme algoritması kullanılarak $a = q_0 b + r_0$ olarak yazılır. Bu durumda

$$(a, b) = (q_0 b + r_0, b) = (r_0, b) = (b, r_0), \quad b < a, \; r_0 < b$$

elde edilir. Benzer şekilde b yi r_0 a bölerek

$$(a, b) = (b, r_0) = (r_0, r_1), \quad r_1 < r_0 < b < a$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse negatif olmayan r_i tam sayıları azalacağından bir k değeri için $r_k = 0$ ve $r_{k-1} \neq 0$ olur. Buraya kadar yapılan işlemler bir algoritma olarak ifade edilebilir.

Öklid Algoritması: $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ve $a > b$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
a &= q_0 b + r_0, \quad 0 < r_0 < b \\
b &= q_1 r_0 + r_1, \quad 0 < r_1 < r_0 \\
r_0 &= q_2 r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1 \\
&\vdots \\
r_{k-3} &= q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}, \quad 0 < r_{k-1} < r_{k-2} \\
r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, \quad r_k = 0
\end{aligned}$$

olacak şekilde q_i ve r_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ tam sayıları bulunur. $r_{k-1} | r_{k-2}$ olduğundan $(r_{k-2}, r_{k-1}) = r_{k-1}$ elde edilir. Buradan da $(a, b) = (b, r_0) = (r_0, r_1) = \cdots = (r_{k-2}, r_{k-1}) = r_{k-1}$ bulunur. Yani a ile b nin OBEB i Öklid algoritmasındaki 0 dan farklı en son elde edilen kalandır.

Algoritmada $r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$ olduğundan $i \geq 2$ için r_i, r_{i-1} ve r_{i-2} ye bağlı olarak yazılabilir. Bu durumda $r_{k-1} = sa + tb$ olacak şekilde s ve t tam sayıları bulunabilir. Yani aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 2. $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = (a, b) = sa + tb$ eşitliğini sağlayan s, t tam sayıları vardır.

Örnek 1. $2 = s \cdot 82 + t \cdot 26$ olacak şekilde s ve t tam sayılarını bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
82 &= 3 \cdot 26 + 4 \\
26 &= 6 \cdot 4 + 2 \\
4 &= 2 \cdot 2 + 0
\end{aligned}$$

olduğundan $2 = 26 - 6 \cdot 4 = 26 - 6(82 - 3 \cdot 26) = 19 \cdot 26 - 6 \cdot 82$ olur. Yani, $s = -6$ ve $t = 19$ olarak bulunur.

2 Asal Sayılar

1 den ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1 den büyük tam sayılara asal sayı, asal olmayan 1 den büyük tam sayılara bileşik sayı denir.

Teorem 3 (Aritmetiğin Temel Teoremi)**.** Her n pozitif tam sayısı için $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ olacak şekilde p_i farklı asal sayıları ve r_i pozitif tam sayıları vardır. Ayrıca n sayısı, çarpanların sırasına bakılmazsa tek şekilde yazılabilir.

Teorem 4. Asal sayılar kümesinin sonsuz tane elemanı vardır.

İspat. Bu teorem olmayan ergi yöntemi ile ispatlanabilir. Asal sayılar kümesinin sonlu sayıda elemanı olduğunu kabul edelim ve kümenin elemanlarına $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ diyelim. $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ sayısına bakalım. N sayısının p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ile bölümünden kalan 1 olacağı için N, p_i ile bölünmez. Bu durumda N nin hiç bir asal böleni olamaz ve çelişki elde edilir. Dolayısıyla asal sayılar kümesinin sonsuz elemanı vardır. □

Teorem 5. Her $n > 1$ tam sayısı için $n < p < 2n$ olacak şekilde bir p asal sayısı vardır.

Teorem 6. a ve b aralarında asal tam sayılar olmak üzere $\{an + b\}$ dizisinin sonsuz tane asal terimi vardır.

3 Denklik Çözümleri

3.1 Modüler Aritmetik

Pozitif bir n tam sayısı için $n \mid (a - b)$ ise a mod n de b ye denktir denir ve tanımlanan bu bağıntı tam sayılar üzerinde bir denklik bağıntısıdır.
Temel Özellikler: $a_1 \equiv b_1 \mod n$ ve $a_2 \equiv b_2 \mod n$ olmak üzere

- $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \mod n$
- $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \mod n$
- $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \mod n$
- $m \in N$ ise $a_1^m \equiv b_1^m \mod n$
- P tam sayı katsayılı bir polinom ise $P(a_1) \equiv P(b_1) \mod n$

denklikleri sağlanır.
Modüler aritmetikde bölme işlemi tanımlı değildir. Bir a tam sayısı için $ab \equiv 1 \mod n$ olacak şekilde bir b tam sayısı varsa, b ye a nın $\mod n$ deki tersi denir ve $a^{-1} \equiv b \mod n$ ile gösterilir. Örneğin $\mod 4$ te 3 ün tersi varken 2 nin tersi yoktur.

Örnek 2. $43x \equiv 10 \mod 50$ denkliğini sağlayan x değerlerini bulunuz.

Çözüm. Soruyu çözmek için önce 43 ün $\mod 50$ deki tersini bulacağız. Öklid algoritmasını 50 ve 43 için uygularsak.

$$\begin{aligned} 50 &= 1 \cdot 43 + 7 \\ 43 &= 6 \cdot 7 + 1 \end{aligned}$$

olduğundan $1 = 43 - 6 \cdot 7 = 43 - 6 \cdot (50 - 1 \cdot 43) = 7 \cdot 43 - 6 \cdot 50$ olur. Buradaki $7 \cdot 43 - 6 \cdot 50 = 1$ eşitliğini mod 50 de incelersek $43 \cdot 7 \equiv 1 \mod 50$, yani $43^{-1} \equiv 7 \mod 50$ buluruz. Buradan

$$\begin{aligned} 43x &\equiv 10 \mod 50 \\ x &\equiv 43^{-1} \cdot 10 \mod 50 \\ x &\equiv 7 \cdot 10 \mod 50 \\ x &\equiv 20 \mod 50 \end{aligned}$$

elde edilir.
Örnekteki fikri genelleştirirsek n ile aralarında asal olan her x tam sayısı için $rx + sn = 1$ olacak şekilde r ve s tam sayıları bulunabileceği için $rx \equiv 1 \mod n$ ve dolayısıyla $x^{-1} \equiv r \mod n$ olur. Yani $(n, x) = 1$ olan tüm x tam sayılarının mod n de tersi vardır.
Şimdi $d = (a, n) > 1$ olmak üzere $ax \equiv d \mod n$ denkliğini çözmeye çalışalım. Öklid algoritmasından $ra + sn = d$ elde edilir. Buradan $r\frac{a}{d} + s\frac{n}{d} = 1$ ve $r\frac{a}{d} \equiv 1 \mod \frac{n}{d}$ denklikleri bulunur. Yani $ax \equiv d \mod n$ denkliğinin çözümleri ile $\frac{a}{d}x \equiv 1 \mod \frac{n}{d}$ sisteminin çözümleri aynıdır.

Örnek 3. Aşağıdaki denklikleri çözünüz.

a. $4x \equiv 9 \mod 14$,

b. $4y \equiv 10 \mod 14$.

Çözüm.

a. $(4, 14) = 2$ ve $2 \nmid 9$ olduğundan $4x \equiv 9 \mod 14$ ün çözümü yoktur.

b. $4x \equiv 10 \mod 14 \Rightarrow 2x \equiv 5 \mod 7 \Rightarrow x \equiv 2^{-1} \cdot 5 \mod 7 \Rightarrow x \equiv 4 \cdot 5 \equiv 6 \mod 7$ elde edilir.

Teorem 7 (Fermat Teoremi)**.** Her a tam sayısı ve p asal sayısı için $a^p \equiv a \mod p$ denkliği sağlanır. $(a, p) = 1$ ise $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ olur.

Örnek 4. 2^{2010} sayısının 23 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

Çözüm. Fermat Teoreminden $2^{22} \equiv 1 \mod 23$ olduğundan, $\left(2^{22}\right)^{91} \equiv 1 \mod 23$ ve buradan $2^{2002} \equiv 1 \mod 23$ elde edilir. Sonuç olarak $2^{2010} \equiv 2^{2002}2^8 \equiv 1 \cdot 256 \equiv 3 \mod 23$ bulunur.

Euler φ Fonksiyonu: Her n pozitif tam sayısı için n den küçük ve n ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısı $\varphi(n)$ ile gösterilir ve bu fonksiyona Euler φ fonksiyonu denir.

Örnek 5. 10 dan küçük olup 10 ile aralarında asal olan tüm pozitif tam sayılar 1,3,7 ve 9 olduğundan $\varphi(10) = 4$ olur.

p bir asal sayı olduğunda, kendisinden küçük tüm pozitif tam sayılarla arasında asal olacağından $\varphi(p) = p - 1$ olduğu hemen görülür. Şimdide $\varphi(p^k)$ yı hesaplayalım. p^k den küçük olup p ye bölünebilen $\dfrac{p^k}{p} = p^{k-1}$ sayı olduğundan $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$ olur.

Bu gözlemler aşağıdaki teoremin sonucu ile birleştirildiğinde her n tam sayısı için $\varphi(n)$ nin hesaplanması kolaylaşmaktadır.

Teorem 8. φ fonksiyonu çarpımsal bir fonksiyondur, yani $(a, b) = 1$ ise $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ dir.

n nin asal çarpanlarına ayrılmış hali, $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2})\cdots\varphi(p_r^{k_r}) \\
&= p_1^{k_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)p_2^{k_2}\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots p_r^{k_r}\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan $\varphi(n) = n\prod_{p_i|n}\left(1 - \dfrac{1}{p_i}\right)$ olur.

Teorem 9 (Euler Teoremi)**.** $(a, n) = 1$ olmak üzere $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ olur.

Örnek 6. 3^{2005} sayısının onluk düzende yazılışının son 3 rakamı nedir?

Çözüm. $1000 = 2^3 5^3$ olduğundan $\varphi(1000) = 1000\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 400$ olur. Euler teoreminden $3^{400} \equiv 1 \mod 1000$ ve $3^{2000} \equiv 1 \mod 1000$ bulunur. $3^{2005} \equiv 3^{2000}3^5 \equiv 1 \cdot 243 \equiv 243 \mod 1000$ olduğundan 3^{2005} in son 3 rakamı 243 olarak bulunur.

Teorem 10 (Wilson Teoremi)**.** Her p asal sayısı için $(p - 1)! \equiv -1 \mod p$ olur.

$n > 1$ olmak üzere $(a, n) = 1$ şartını sağlayan herhangi bir a tam sayısı için $a^d \equiv 1 \mod n$ şartını sağlayan en küçük pozitif d tam sayısına a nın mod n deki derecesi denir.

$(a,n)>1$ olursa $a^d \equiv 1 \mod n$ şartının sağlanmayacağı açıktır. $(a,n)=1$ olduğu zaman Euler teoreminden (Teorem 9) $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ olduğu için a nın derecesinin en fazla $\varphi(n)$ olduğu görülür.
x, $a^x \equiv 1 \mod n$ şartını sağlayan bir tam sayı olsun. Bu durumda bölme algoritmasından $x = sd + r$ ve $0 \le r < d$ yazabiliriz. Yani,

$$a^x = a^{sd+r} = \left(a^d\right)^s a^r \equiv 1 \cdot a^r \mod n$$

olduğundan $a^r \equiv 1 \mod n$ olur. Ancak $r < d$ ve $a^r \equiv 1 \mod n$ olduğundan $r = 0$ olmalıdır. Buradan $x = sd$ elde edilir. Sonuç olarak $a^x \equiv 1 \mod n$ şartının sağlanması için $d \mid x$ olması gerektiği görülür. Bu sonuç kullanılarak $d \mid \varphi(n)$ elde edilir.

Örnek 7. 2 nin mod 17 deki derecesini bulunuz.

Çözüm. Bu sayıya d olsun. $d \mid \varphi(17)$ yani $d \mid 16$ olur.

$$2^1 \equiv 2 \mod 17, \quad 2^2 \equiv 4 \mod 17, \quad 2^4 \equiv 16 \mod 17, \quad 2^8 \equiv 1 \mod 17$$

olduğundan $d = 8$ bulunur.
$a^i \equiv a^j \mod n$ olsun. Buradan $a^{i-j} \equiv 1 \mod n$ ve dolayısıyla $d \mid (i-j)$ elde edilir. Yani $a^i \equiv a^j \mod n$ olması ancak ve ancak $d \mid (i-j)$ olması halinde mümkündür.

Teorem 11. a nın mod n deki derecesi d ve $s > 0$ olmak üzere, a^s nin mod n deki derecesi $\dfrac{d}{(s,d)}$ olur.

İspat. $m = (s,d)$ olsun. Bu durumda $s = s_1 m$, $d = d_1 m$ ve $(s_1, d_1) = 1$ olur. a^s nin mod n deki derecesi r ise

$$(a^s)^{d_1} = (a^{s_1 m})^{d/m} = (a^d)s_1 \equiv 1 \mod n$$

olduğundan $r \mid d_1$ elde edilir. $a^{sr} = (a^s)^r \equiv 1 \mod n$ olduğundan $d|sr$, yani $d_1 m \mid s_1 m r$ ve dolayısıyla $d_1 \mid s_1 r$ elde edilir. $(s_1, d_1) = 1$ olduğundan $d_1 \mid r$ bulunur. $r \mid d_1$ ve $d_1 \mid r$ olduğundan $r = d_1 = \dfrac{d}{m} = \dfrac{d}{(s,d)}$ sonucu elde edilir. □

3.2 Doğrusal Denklik Sistemi Çözümleri:

Aşağıdaki denklik sistemini çözmeye çalışalım:

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \mod n_1 \\ x &\equiv r_2 \mod n_2. \end{aligned}$$

İlk denkliğin çözümleri $x = r_1 + n_1 k$ şeklindeki sayılardır. Bunu ikinci denklikte yerine yazarsak $x = r_1 + n_1 k \equiv r_2 \mod n_2$ ve buradan $n_1 k \equiv r_2 - r_1 \mod n_2$ bulunur. $(n_1, n_2) =$

1 olduğu zaman n_1 in mod n_2 de tersi olduğunu biliyoruz. Bu durumda $k \equiv n_1^{-1}(r_2 - r_1)$ mod n_2 olur ve $x \equiv r_1 + n_1 k \mod n_1 n_2$ her iki denkliği sağlar.
Şimdi $(n_1, n_2) = 1$ olduğu zaman bu çözümün mod $n_1 n_2$ de tek olduğunu gösterelim. x_1 ve x_2 iki çözüm olsun. $x_1 \equiv x_2 \mod n_1$ ve $x_1 \equiv x_2 \mod n_2$ olduğundan $n_1 \mid (x_1 - x_2)$, $n_2 \mid (x_1 - x_2)$ ve $(n_1, n_2) = 1$ olduğundan $n_1 n_2 \mid (x_1 - x_2)$ bulunur. Yani $x_1 \equiv x_2 \mod n_1 n_2$ elde edilir.

Örnek 8. Aşağıdaki denklik sistemini çözünüz.

$$\begin{aligned} x &\equiv 4 \mod 14 \\ x &\equiv 7 \mod 9. \end{aligned}$$

Çözüm. $x = 14k + 4 \equiv 7 \mod 9$ olacağından $14k \equiv 3 \mod 9$ ve $k \equiv 14^{-1} \cdot 3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6$ mod 9 bulunur. Buradan $k = 9t + 6$ ve $x = 14(9t + 6) + 4 = 126t + 88$ bulunur ve $14 \cdot 9 = 126$ olduğundan $x \equiv 88 \mod 126$ elde edilir.
Bu yöntem iki denklik sistemini çözmek için yeterlidir. Fakat denklik sayısı arttıkça bu yöntemi uygulamak zordur. k tane denklik sistemini çözmek için Çinli Kalan Teoremi'nden yararlanılır.

Teorem 12 (Çinli Kalan Teoremi)**.** $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ikişer ikişer aralarında asal sayılar ve $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tam sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \mod n_1 \\ x &\equiv r_2 \mod n_2 \\ &\vdots \\ x &\equiv r_k \mod n_k. \end{aligned}$$

denklik sisteminin $\mod n_1 n_2 \cdots n_k$ da tek çözümü vardır.

İspat. $n = n_1 n_2 \cdots n_k$ olsun.
$1 \leq i \leq k$ için $\left(\frac{n}{n_i}, n_i\right) = 1$ olduğundan $\frac{n}{n_i} s_i \equiv r_i \mod n_i$ denklik sistemini sağlayan s_i vardır.
$x \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{n}{n_i} s_i$ olsun.
$i \neq j$ için $n_i \mid \frac{n}{n_j}$ olduğundan $x \equiv \frac{n}{n_i} s_i \equiv r_i \mod n_i$ olur. Yani x tüm denklikleri sağlar.
Çözümün tek olduğunu göstermek için tümevarımı kullanacağız.

- $x \equiv r_1 \mod n_1$ denkliğinin tek çözümü vardır.

- İlk $k - 1$ denklik sisteminin tek çözümü olduğunu kabul edelim.

- k denklik sisteminin tek çözümü olduğunu göstermek istiyoruz. x_1 ve x_2 iki çözüm olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv x_2 \mod n_1 n_2 \cdots n_{k-1} \\ x_1 &\equiv x_2 \mod n_k \end{aligned}$$

olduğundan $n_1 n_2 \cdots n_{k-1} \mid (x_1 - x_2)$ ve $n_k \mid (x_1 - x_2)$ olur.
Yani $x_1 \equiv x_2 \mod n_1 n_2 \cdots n_k$ dır.

□

Örnek 9. Aşağıdaki denklik sistemini çözünüz.

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 7 \\ x &\equiv 4 \mod 9 \\ x &\equiv 1 \mod 10. \end{aligned}$$

Çözüm. $n = 7 \cdot 9 \cdot 10 = 630$, $\frac{n}{n_1} = 90$, $\frac{n}{n_2} = 70$ ve $\frac{n}{n_3} = 63$ olduğundan

$$\begin{aligned} 90s_1 \equiv 2 \mod 7 &\Rightarrow 6s_1 \equiv 2 \mod 7 \Rightarrow s_1 \equiv 6^{-1} \cdot 2 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 5 \mod 7 \\ 70s_2 \equiv 4 \mod 9 &\Rightarrow 7s_2 \equiv 4 \mod 9 \Rightarrow s_2 \equiv 7^{-1} \cdot 4 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 7 \mod 9 \\ 63s_3 \equiv 1 \mod 10 &\Rightarrow 3s_3 \equiv 1 \mod 10 \Rightarrow s_3 \equiv 3^{-1} \cdot 1 \equiv 7 \mod 10 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $x \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{n}{n_i} s_i = 90 \cdot 5 + 70 \cdot 7 + 63 \cdot 7 = 1381$ olur. Çözüm mod 630 da tek olduğundan $x = 1381 \equiv 121 \mod 630$ elde edilir.

3.3 Yüksek Dereceden Denklik Sistemi Çözümleri:

Önceki bölümlerde doğrusal denklikler ve denklik sistemlerinin çözüm yöntemleri üzerinde durduk. Şimdi yüksek dereceden denklik çözümü, yani $P(x)$ tam sayı katsayılı bir polinom olmak üzere $P(x) \equiv 0 \mod n$ denkliğini çözeceğiz.
$P(x) \equiv 0 \mod n$ denkliğinin bir çözümü a ise $b \equiv a \mod n$ şartını sağlayan tüm b sayıları da bu denkliğin bir çözümüdür. Denkliği çözmek için Çinli Kalan Teoreminden yararlanacağız. n sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hali $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ olsun. Bu

durumda

$$\begin{aligned} P(x) &\equiv 0 \mod p_1^{k_1} \\ P(x) &\equiv 0 \mod p_2^{k_2} \\ &\vdots \\ P(x) &\equiv 0 \mod p_r^{k_r} \end{aligned}$$

denkliklerini ayrı ayrı çözersek Çin Kalan Teoremiyle tüm çözümleri bulabiliriz.

Örnek 10. $2x^2 + 7x + 5 \equiv 0 \mod 60$ denkliğini çözünüz.

Çözüm. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ olduğundan dekliği mod 4, mod 3 ve mod 5 de çözeceğiz.
$2x^2+7x+5 \equiv 0 \mod 4 \Rightarrow 2x^2+3x+1 \equiv 0 \mod 4$ olur. Çözümü bulmak için $x = 0, 1, 2, 3$ değerlerini denememiz yeterlidir. $x \equiv 3 \mod 4$ denkliği sağlar. Benzer şekilde $x \equiv 2 \mod 3$ ve ($x \equiv 0 \mod 5$ veya $x \equiv 4 \mod 5$) elde edilir.
Dolayısıyla denkliğin iki çözümü vardır. Bu çözümleri bulmak için Çin Kalan Teoremini kullanalım.

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \mod 4 \\ x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 0 \mod 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot 5s_1 &\equiv 3 \mod 4 \\ 4 \cdot 5s_2 &\equiv 2 \mod 3 \\ 4 \cdot 3s_3 &\equiv 0 \mod 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} s_1 &\equiv 1 \mod 4 \\ s_2 &\equiv 1 \mod 3 \\ s_3 &\equiv 0 \mod 5 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $x = \sum_{i=1}^{3} \frac{n}{n_i} s_i = 15 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 0 \equiv 35 \mod 60$ olur.
Diğer çözümde benzer yöntemle elde edilir.

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \mod 4 \\ x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 4 \mod 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot 5s_1 &\equiv 3 \mod 4 \\ 4 \cdot 5s_2 &\equiv 2 \mod 3 \\ 4 \cdot 3s_3 &\equiv 4 \mod 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} s_1 &\equiv 1 \mod 4 \\ s_2 &\equiv 1 \mod 3 \\ s_3 &\equiv 2 \mod 5. \end{aligned}$$

Buradan $x = 15 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 2 \equiv 59 \mod 60$ olur.

3.3.1 p^2 Modundaki Denklik Çözümleri:

$P(x) \equiv 0 \mod n$ denkliğini çözmek için öncelikli olarak $P(x) \equiv 0 \mod p^k$ denkliğini çözmemiz gerektiğini biliyoruz. Bunun için ilk olarak $P(x) \equiv 0 \mod p^2$ durumunu inceleyeceğiz. $P(x) \equiv 0 \mod p$ denkliğini çözmenin sistematik bir yolu yoktur. $P(x)$ çarpanlarına ayrılmıyorsa genellikle $0, 1, \ldots, p-1$ değerlerinin hepsini denemek gerekir.
$P(x) \equiv 0 \mod p$ sisteminin çözümlerinden bir tanesi x_0 olsun. $x = py+x_0$ değerini $P(x) \equiv 0 \mod p^2$ denkliğinde yerine koyduğumuzda p^2 ye bölünebilen katsayılar gideceğinden $ay + b \equiv 0 \mod p$ şeklinde bir denklik elde ederiz.

Örnek 11. $x^3 + 3x^2 + 3 \equiv 0 \mod 25$ denkliğini çözünüz.

Çözüm. Önce $x^3 + 3x^2 + 3 \equiv 0 \mod 5$ denkliğini çözelim. $x = 0, 1, \ldots, 4$ için denkliği sağlayan tek değer $x \equiv 4 \mod 5$ olur. Bu durumda $x = 5y + 4$ dersek

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3 &= (5y+4)^3 + 3(5y+4)^2 + 3 \\ &= 125y^3 + 300y^2 + 240y + 64 + 75y^2 + 120y + 48 + 3 \\ &\equiv 360y + 115 \equiv 0 \mod 25 \end{aligned}$$

olur ve buradan $10y \equiv 10 \mod 25 \Rightarrow 2y \equiv 2 \mod 5 \Rightarrow y \equiv 1 \mod 5$ elde edilir. $x = 5y + 4$ kabulumuzden $x \equiv 9 \mod 25$ değerinin denkliğin tek çözümü olduğu bulunur.

3.3.2 p^k Modundaki Denklik Çözümleri:

Bu bölümde $P(x) \equiv 0 \mod p^k$ denkliğinin çözümleri bilindiği zaman $P(x) \equiv 0 \mod p^{k+1}$ denkliğini çözeceğiz.

Teorem 13. p bir asal sayı ve $P(x)$, katsayıları tam sayı olan bir polinom olmak üzere $P(x) \equiv 0 \mod p^k$ denkliğinin bir çözümü x_k olsun.

$$P'(x_k)y + \frac{P(x_k)}{p^k} \equiv 0 \mod p$$

denkliğinin her y çözümü için $P(x) \equiv 0 \mod p^{k+1}$ denkliğinin $x_{k+1} = x_k + p^k y$ olacak şekilde bir çözümü vardır.

Teoremde geçen $P'(x)$ polinomu, P(x) polinomunun türevidir ve $P(x) = a_r x_r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ için $P'(x) = ra_r x_{r-1} + (r-1)a_{r-1}x^{r-2} + \cdots + a_1$ olur.

Örnek 12. $x^3 + 2x^2 + 2 \equiv 0 \mod 27$ denkliğini çözünüz.

Çözüm. İlk olarak $x^3 + 2x^2 + 2 \equiv 0 \mod 3$ denkliğini çözelim. $x = 0$, $x = 1$ ve $x = 2$ değerlerini denersek $x \equiv 2 \mod 3$ ün tek çözüm olduğunu görürüz.
$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ olduğundan $P'(x) = 3x^2 + 4x$ olur. $x_1 = 2$, $P(x) \equiv 0 \mod 3$ denkliğinin bir çözümü olduğundan $P'(2)y + \frac{P(2)}{3} \equiv 0 \mod 3$ denkliğini çözersek $20y + 18/3 \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow 2y \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow y \equiv 0 \mod 3$ olur. Buradan $x_2 = x_1 + 3y = 2 + 0 \equiv 2 \mod 3^2$ elde edilir.
Benzer şekilde $P'(x_2)y + \frac{P(x_2)}{3^2} \equiv 0 \mod 3$ denkliğini çözersek $20y + 18/9 \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow 2y + 2 \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow y \equiv 2 \mod 3$ olur. Buradan $x_3 = x_2 + 3^2 y = 20 \mod 3^3$ denkliğin tek çözümü olarak bulunur.
NOT. Teorem 13 te $P'(x_k)y + \frac{P(x_k)}{p^k} \equiv 0 \mod p$ denkliğinin $0 \leq y \leq p-1$ şartını sağlayan 0, 1 veya p tane çözümü vardır.

4 Diofant Denklemler

4.1 Pisagor Üçlüleri

Bir dik üçgenin kenar uzunlukları olan tam sayılara Pisagor üçlüleri denir.
Hipotenüs uzunluğuna z, diğer kenar uzunluklarına x ve y dersek $x^2+y^2=z^2$ şartını sağlayan pozitif tam sayılar Pisagor üçlüleridir. Şimdi $x^2+y^2=z^2$ denkleminin tüm çözümlerini bulmaya çalışalım.
$(x,y,z)=d$ olsun. Bu durumda $x_1=\frac{x}{d}$, $y_1=\frac{y}{d}$, $z_1=\frac{z}{d}$ yzarsak $x_1^2+y_1^2=z_1^2$ elde ederiz. Ayrıca herhangi iki terimin ortak böleni varsa bu bölen üçüncü terimide bulmak zorundadır. Yani $x^2+y^2=z^2$ denkleminin $(x,y,z)=1$ şeklindeki çözümlerini bulursak, diğer bütün çözümleri bu çözümlerden elde edebiliriz.
x ve y sayıları tek sayı olsun. Bu durumda $x^2+y^2=z^2\equiv 2 \mod 4$ olur. Fakat bir tam kare mod 4 de 2 olamayacağından çelişki elde edilir. Yani x ve y den birisi tek diğeri çifttir. Genelliği bozmadan x tek, y çift olsun. $y=2a$ dersek $y^2=4a^2=z^2-x^2=(z-x)(z+x)$ olur ve buradan $a^2=\dfrac{z-x}{2}\cdot\dfrac{z+x}{2}$ elde edilir. $\left(\dfrac{z-x}{2},\dfrac{z+x}{2}\right)=d$ olsun. $d \mid \left(\dfrac{z-x}{2}+\dfrac{z+x}{2}\right)$ ve $d \mid \left(\dfrac{z-x}{2}-\dfrac{z+x}{2}\right)$ olduğundan $d\mid z$ ve $d \mid x$ bulunur. Yani $d=1$ dir.
Buradan $\dfrac{z-x}{2}=t^2$, $\dfrac{z+x}{2}=s^2$ elde edilir. Bu denklemleri de çözersek

$$\left.\begin{array}{r} z+x=2s^2 \\ z-x=2t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2z=2s^2+2t^2 \Rightarrow z=s^2+t^2 \Rightarrow x=s^2-t^2$$

ve buradan $y=2a=2st$ elde edilir. Sonuç olarak $x^2+y^2=z^2$ şartını sağlayan bütün pozitif tam sayılar

$$(x,y,z)=\big(k(s^2-t^2),2kst,k(s^2+t^2)\big) \quad \text{veya} \quad (x,y,z)=\big(2kst,k(s^2-t^2),k(s^2+t^2)\big)$$

şeklindedir.

4.2 Doğrusal Diofant Denklemler

$ax+by=c$ şeklindeki doğrusal diofant denklemler Öklid algoritması yardımıyla çözülebilir.

Teorem 14. *a ve b en büyük ortak bölenleri d olan iki tam sayı olsun. $ax+by=c$ denkleminin tam sayılarda çözümünün olması için gerek ve yeter şart $d \mid c$ olmasıdır. Ayrıca (x_0,y_0) denklemin bir çözümü ise genel çözüm $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere*

$$x=x_0+\frac{kb}{d}, \quad y=y_0-\frac{ka}{d}$$

olarak elde edilir.

Örnek 13. Ayşe bankadan bir miktar para alıyor, ama veznedar parayı verirken kuruşlarla liraları karıştırıyor. Ayşe daha sonra 50 kuruşa gazete alıyor ve kalan parasının, bankadan alması gereken paranın 3 katı olduğunu görüyor. Ayşe'nin bankadan alması gereken para ne kadardı?

Çözüm. Liraların sayısına x, kuruşların sayısına y diyelim. Burada x ve y nin 100 den küçük olduğunu varsayabiliriz. Aksi halde kuruşların sayısının 100 den büyük olması durumu söz konusu olur. (3 lira 105 kuruş gibi) Veznedarın vermesi gereken para $100x+y$ kuruş, verdiği para ise $100y+x$ kuruştur. Ayşe 50 kuruşa gazete aldıktan sonra kalan parası bankadan alması gereken paranın 3 katı ise $100y+x-50 = 3(100x+y)$ dir. Buradan da $97y-299x = 50$ elde edilir. 299 ve 97 aralarında asal oldukları için $97a+299b = 1$ olacak şekilde a ve b tam sayıları vardır. Öklid algoritmasından $299 = 3\cdot 97+8$ ve $97 = 12\cdot 8+1$ olduğundan,

$$1 = 97-8\cdot 12 = 97-(299-3\cdot 97)\cdot 12 = 37\cdot 97-12\cdot 299$$

elde edilir. Buradan $a = 37$, $b = 12$ bulunur. $97y-299x = 50$ denkleminin çözümü de $y = 50\cdot 37 = 1850$ ve $x = 50\cdot 12 = 600$ dür. k bir tam sayı olmak üzere bu denklemin bütün çözümlerinin $y = 1850+299k$, $x = 600+97k$ şeklinde olduğu gösterilebilir. $0 \le x, y \le 100$ eşitsizliğini sağlayan en küçük x, y değerleri için $k = -6$ dır. Bu durumda $y = 56$ ve $x = 18$ bulunur. Yani Ayşe'nin bankadan alması gereken para 18 lira 56 kuruştur.

4.3 $xy + Ax + By + C = 0$ Şeklindeki Denklemler

Bu tür denklemler çarpanlara ayırma yöntemi yardımıyla çözülebilir. $xy+Ax+By+C = 0$ denklemi $(x+B)(y+A) = AB-C$ denklemine dönüştürülür. Bu durumda $AB-C$ nin tüm çarpanları bir (x, y) çözüm ikilisi belirler.

Örnek 14. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 1$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm. x ve y sıfırdan farklı olmak üzere verilen denklem $2x+y = xy$ veya $(x-1)(y-2) = 2$ olarak yazılır. Bu denklemi çözmek için 2 nin tam sayı bölenlerini incelemek yeterlidir. Dolayısıyla dört durum vardır.

i. $x-1 = 2,\ y-2 = 1 \Rightarrow (x, y) = (3, 3)$ bir çözümdür.

ii. $x-1 = 1,\ y-2 = 2 \Rightarrow (x, y) = (2, 4)$ bir çözümdür.

iii. $x-1 = -2,\ y-2 = -1 \Rightarrow (x, y) = (-1, 1)$ bir çözümdür.

vi. $x-1 = -2,\ y-2 = -2 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ bir çözüm olamaz.

Denklemin çözümleri $x, y \in \{(3, 3), (2, 4), (-1, 1)\}$ olur.

SAYILAR TEORİSİ - PROBLEMLER

1. $(p+1)^q$ sayısının hangi p ve q asal sayıları için bir tam kare olduğunu bulunuz.

2. $n+2n+3n+\ldots+9n$ toplamının bütün basamakları aynı rakamdan oluşan bir sayıya eşit olmasını sağlayan en küçük pozitif n tam sayısını bulunuz.

3. Her $n>1$ tam sayısı için $\sqrt{11\ldots144\ldots4}$ (n tane 1 ve $2n$ tane 4) sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

4. a, m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, m tek sayı, $a>1$ olsun. Bu durumda a^m-1 ve a^n+1 sayılarının en büyük ortak böleni nedir?

5. n pozitif çift bir tam sayı olmak üzere a ve b aralarında asal pozitif tam sayılardır. $(a+b)|(a^n+b^n)$ koşulunu sağlayan tüm a ve b sayılarını bulunuz.

6. $\underbrace{11\ldots11}_{2009}\underbrace{22\ldots22}_{2010}5$ sayısının bir tam kare olduğunu gösteriniz.

7. $T=1+11+111+\cdots+\underbrace{11\ldots1}_{20}$ toplamını hesaplayınız.

8. n, 6 dan büyük bir tam sayı olsun. $n-1$ ve $n+1$ asal sayılar olduğuna göre $n^2(n^2+16)$ nın 720 ile bölünebildiğini gösteriniz. Eğer $n^2(n^2+16)$ 720 ile bölünebiliyorsa $n-1$ ve $n+1$ sayılarından ikisi birden asal olmak zorunda mıdır?

9. $p, 4p^2+1$ ve $6p^2+1$ asal sayılar ise p nin alabileceği değerleri bulunuz.

10. 1978 yılı ilk iki basamağının son iki basamağına eklenince ortadaki iki basamağını vermesi (19+78=97) bakımından ilginç bir yıldı. 1978 den bir önceki ve bir sonraki ilginç yılları bulunuz.

11. Hiç bir pozitif n tam sayı için $n(n+1)(n+2)$ nin bir tam kare olamayacağını ispatlayınız.

12. $ab = obeb(a,b)+okek(a,b)$ denklemini sağlayan tüm (a,b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

13. Ard arda yazılan $1,2,\ldots,10$ sayılarının aralarına $+$ ve $-$ işaretleri nasıl konulursa konulsun toplamın hiçbir zaman 0 olamayacağını ispatlayınız.

14. n^2+23 sayısının sonsuz farklı n tam sayısı için 24 ile tam bölündüğünü ispatlayınız.

15. p nin bir asal sayı olması durumunda $8p-1$ ve $8p+1$ sayılarından en az bir tanesinin bileşik sayı olacağını gösteriniz.

16. Her n doğal sayısı için $n^5 - 5n^3 + 4n$ sayısının 120 nin bir tam katı olacağını ispatlayınız.

17. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99!$ toplamını hesaplayınız.

18. $\{1, 2, \ldots, 28\}$ kümesinden kalan tüm elemanların çarpımı bir tam kare olacak şekilde en az kaç sayı silebiliriz?

19. Birinci ve ikinci terimleri 1 olan ve her terimi kendisinden önceki iki terimin toplamı olarak elde edilen dizinin (Fibonacci dizisi) her beşinci teriminin 5 ile bölünebildiğini gösteriniz.

20. 18 ile 57 arasındaki 40 tam sayı yan yana yazılarak 80 basamaklı bir sayı $(1819\ldots57)$ elde edilmiştir. 3^k nın, bu sayıyı böldüğü en büyük k tam sayısını bulunuz.

21. Herhangi üç tek doğal sayı için, dördünün karelerinin toplamı yine bir tam kare olacak şekilde dördüncü bir tek sayının bulunabileceğini gösteriniz.

22. Verilen $P(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, ve $Q(x) = x^3 - x + 3$ polinomları için $Q(a)$ nın $P(a)$ yı bölmesini sağlayacak bir a tam sayısının olmadığını gösteriniz.

23. İlk terimi 10 olan bir dizide her çift terimden bir sonraki terim o terimin yarısı, her tek terimden bir sonraki terim de bir önceki terimin 2 katının 2 fazlasıdır. Dizinin 2008. terimini bulunuz.

24. Bir okuldaki birinci ve ikinci sınıf öğrencilerinden oluşan bir grubun %55'i erkek öğrencidir. Ayrıca bu gruptaki erkek birinci sınıf öğrencisi sayısının erkek ikinci sınıf öğrencisi sayısına oranı, gruptaki birinci sınıf öğrencisi sayısının ikinci sınıf öğrencisi sayısına oranına eşittir. Bu durumda erkek birinci sınıf öğrencilerin sayısının bayan birinci sınıf öğrencilerinin sayısına oranını bulunuz.

25. Verilen herhangi iki a ve b tam sayıları için $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$ olacak şekilde x ve y tam sayıları bulunabileceğini gösteriniz.

26. Her pozitif n tam sayısı için, $u(n)$ ile n yi aşmayan en büyük asal sayı, $v(n)$ ile de n den büyük en küçük asal sayı gösterilmek üzere,

$$\frac{1}{u(2)v(2)} + \frac{1}{u(3)v(3)} + \frac{1}{u(4)v(4)} + \ldots + \frac{1}{u(2010)v(2010)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011}$$

olduğunu gösteriniz.

27. Her n pozitif tam sayısı için, $\binom{2n}{n}$ sayısının, $n+1$ ve $4n-2$ ile bölünebildiğini gösteriniz.

28. $n = 0, 1, \ldots, 2010$ olmak üzere, $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

29. Birbirinden ve sıfırdan farklı a, b ve c rakamları için ab iki basamaklı sayısını bölen c, bc iki basamaklı sayısını bölen a ve ac iki basamaklı sayısını bölen b sayıları bulunabilir mi?

30. $\frac{3x+9}{8}, \frac{3x+10}{9}, \frac{3x+11}{10}, \cdots \frac{3x+49}{48}$, kesirlerinin her birinin sadeleşmiş olması, yani payları ve paydalarının aralarında asal olmasını sağlayan en küçük x pozitif tam sayısını bulunuz.

31. Issız bir adaya düşen beş adam bir miktar hindistan cevizi toplarlar. Adamlardan her birisi sırayla hindistan cevizlerinin başında nöbet tutacaktır. Her adam nöbeti sırasında şu işlemleri gerçekleştirir:

   - Önce hindistan cevizlerini 5 eşit gruba ayırır.
   - Her defasında 1 hindistan cevizi artar ve artan hindistan cevizini bir maymuna verir.
   - Bir hindistan cevizi grubunu kendisi için saklayıp geri kalan hindistan cevizlerini tekrar tek bir grup haline getirir.

   Bu durumda başlangıçta en az kaç hindistan cevizi vardır?

32. n bir tam sayı olmak üzere, $n+3$ ve n^2+3 ün ikisi birden bir tam küp olabilirler mi?

33. Ardışık 9999 tam sayının karelerinin toplamının bir tam sayının birden büyük bir kuvveti olamayacağını gösteriniz. Yani, $(n+1)^2 + \cdots + (n+9999)^2 = m^r$ ifadesini sağlayan ve $r > 1$ olan n, m, r tam sayılarının olamayacağını gösteriniz.

34. $7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2$ denklemini sağlayan bütün (a, b) tam sayı ikililerini bulunuz.

35. $|3^a - 2^b| = 1$ eşitliğini sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

36. On tabanında $(abcd)_{10}$, yedi tabanında ise $(dcba)_7$ olarak ifade edilen bütün tam sayıları bulunuz.

37.
$$A = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1997\cdot 1998}$$

ve

$$B = \frac{1}{1000 \cdot 1998} + \frac{1}{1001 \cdot 1997} + \dots + \frac{1}{1998 \cdot 1000}$$

olmak üzere, $\frac{A}{B}$ sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

38. 2^a sayısının basamakları uygun şekilde yer değiştirildiğinde 2 nin başka bir kuvveti elde edilmesini sağlayan bir a tam sayısı var mıdır?

39. Hipotenüs uzunluğu $\sqrt{2006}$ ve dik kenarları tam sayı olan dik üçgen var mıdır?

40. Bir bilgisayar, $n = 1, 2, 3, \dots$ için $(n+1)2^n$ ifadesinin değerlerini vermektedir. En fazla kaç tane tam kare değer arka arkaya gelir?

41. Elimizde 1 Kr, 5 Kr, 10 Kr, 25 Kr, 50 Kr ve 1 TL lik madeni paraların her birinden n tane bulunmaktadır. Bu paralardan seçilen n tanesinin toplamının 1 TL olmasının mümkün olamayacağı en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

42. n pozitif bir tam sayı ve p, $n|(p-1)$, $p|n^3 - 1$ şartlarını sağlayan bir asal sayı ise $4p - 3$ ün bir tam kare olduğunu ispatlayınız.

43. Her n doğal sayısı için $3^{3n+3} - 26n - 27$ sayısının 169 un bir tam katı olacağını ispatlayınız.

44. **a)** x bir gerçel sayı olmak üzere $x^2 + x$ ve $x^3 + 2x$ rasyonel ise x in rasyonel sayı olduğunu gösteriniz.
b) $x^2 + x$ ve $x^3 - 2x$ rasyonel sayılarken irrasyonel bir x sayısının bulunabileceğini gösteriniz.

45. a ve b, $\left(\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}\right)$ toplamını tam sayı yapan iki doğal sayıdır. a ve b'nin ortak bölenlerinin en büyüğünün $\sqrt{a+b}$ den büyük olmadığını gösteriniz.

46. $m^n - n^m = 3$ eşitliğini sağlayan bütün (m, n) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

47. a, b pozitif tam sayıları için $a + 77b$ nin 79 ile, $a + 79b$ nin de 77 ile bölünebildiği biliniyor. Buna göre $a + b$ nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

48. Bir grup çocuk bir torbadaki cevizleri paylaşırlar. Birinci çocuk önce bir ceviz ve sonra da geride kalan cevizlerin onda birini; ikinci çocuk iki ceviz ve geriye kalanların onda birini; üçüncü çocuk da üç ceviz ve geriye kalanların onda birini alır. İşlem bu şekilde sürer ve son çocuk geriye kalan cevizlerin tümünü alır. Sonuçta tüm çocukların aldığı ceviz sayısının eşit olduğu görülür. Çocukların ve cevizlerin sayısını bulunuz.

49. 7 den büyük her tam sayının, her biri 1 den büyük ve aralarında asal iki tam sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

50. $x + y - xy = 43$ denklemini sağlayan tüm (x, y) sıralı tam sayı çiftlerinin sayısını bulunuz.

51. $n + k^2$ nin en az n tane pozitif k tam sayısı için tam kare olmasını sağlayan bir n pozitif tam sayısı bulunamayacağını gösteriniz.

52. a, b, c, d tam sayıları için $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = d^2$ denklemini sağlayan c ve d tam sayılarının ancak ve ancak $a \equiv b(\text{mod}2)$ olması durumunda bulunabileceğini gösteriniz.

53. A ve B iki pozitif tam sayı olmak üzere, A tam sayısının birinci ve üçüncü basamakları yer değiştirildiğinde B tam sayısı elde edilmektedir. A'nın B'ye bölümünden kalan, A'nın basamakları toplamının yedi katı, bölüm ise 3 olduğuna göre A ve B sayılarını bulunuz.

54. 100 kağıdın iki yüzü tek ve çift olarak isimlendirilmiştir. Her kağıdın tek yüzüne tek, çift yüzüne çift olmak üzere iki ardışık tam sayı yazılmıştır. Ayrıca bu kağıtlarda 1'den 200'e kadar olan bütün tam sayılar kullanılmıştır. Bir A öğrencisi rastgele 21 kağıt çekiyor ve her iki taraflarındaki sayıları toplayarak 913 buluyor. Bir B öğrencisi ise geri kalan kağıtlardan rastgele 20 kağıt çekiyor ve her iki taraflarındaki sayıları toplayarak 2400 buluyor. Bu durumda
a)A nın toplamının hatalı olduğunu gösteriniz.
a)Eğer A nın doğru toplamı 903 ise, B nin toplamının hatalı olduğunu gösteriniz.

55. $p^2 + 11$ sayısının 11 den daha az pozitif bölenlere sahip olduğu tüm p asal sayılarını bulunuz.

56. İki ardışık sayının küplerinin farkı bir n tam sayısının karesi ise n nin iki ardışık sayının kareleri toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz. (Mesela, $8^3 - 7^3 = 169 = 13^2$ ve $13 = 2^2 + 3^2$ dir.)

57. $n \geq 1$ olmak üzere $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dizisi, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ olan ve $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1} + 1}$ koşulunu sağlasın.
a) Dizinin her teriminin bir pozitif tam sayı olduğunu gösteriniz.
b) $2a_n a_{n+1} + 1$ sayısının her $n \geq 1$ için bir tam kare olduğunu gösteriniz.

58. $x + y$ ve xy birer pozitif tam sayı ve $x + y = xy$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x, y) irrasyonel sayı çifti bulunabileceğini gösteriniz.

59. $(a_n)_{n \in N}$ dizisi şu şekilde verilmiş olsun

- $a_1 = 1$
- $a_n = \frac{4n-2}{n} a_{n-1}$, $n \geq 2$

Bu dizinin bütün terimlerinin pozitif tam sayı olduğunu ispatlayınız.

60. Üç öğrenci tahtaya yan yana, üç tane iki basamaklı tam kare yazıyor. Sonuçta oluşan altı basamaklı sayı da bir tam kare oluyorsa tahtaya yazılan sayı kaç olabilir?

61. n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n$ eşitliğini sağlayan, negatif olmayan bütün a, b, c, d tam sayılarını bulunuz.

62. $xy+yz+zx-xyz = 2$ denklemini sağlayan bütün (x, y, z) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

63. $\frac{2^{58}+1}{5}$ sayısının asal olup olmadığını inceleyiniz.

64. $x + y + z = xyzt$ koşulunu sağlayan bütün pozitif x, y, z, t tam sayılarını bulunuz.

65. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ sayılarının hepsi sadece bir kere kullanılarak bir x sayısı oluşturuluyor. x in basamaklarındaki rakamların yerleri değiştirilerek bir y sayısı elde ediliyor. y nin x i bölmediğini gösteriniz.

66. **a)** Her k tam sayısı için, $(2k + 1)^3 - (2k - 1)^3$ in üç tam karenin toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.
b) n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $(2k + 1)^3 - 2$ sayısının $3n - 1$ tane 1 den büyük tam karenin toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

67. Genel terimi $n^3 - (2n + 1)^2$ olan (a_n) dizisinde 2006'ya bölünebilen bir terim var mıdır?

68. Aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadığını gösteriniz.
a) $n \geq 3$ olacak şekilde bütün n tam sayıları için, herhangi ikisinin çarpımı geri kalan $(n - 2)$ tam sayının toplamıyla kalansız bölünecek şekilde n tane farklı pozitif tam sayı vardır.
b) $n \geq 3$ olacak şekilde, bazı n tam sayıları için, herhangi $(n - 2)$ tanesinin toplamı geriye kalan iki tam sayının çarpımıyla kalansız bölünecek şekilde n tane farklı pozitif tam sayı vardır.

69. $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ olsun. $n > 1$ için, H_n in bir tam sayı olamayacağını gösteriniz.

70. x tam sayı olmayan, pozitif bir rasyonel sayı ise x^x in rasyonel olmadığını gösteriniz.

71. m bileşik bir tam sayı olmak üzere, a, b, c, d pozitif tam sayıları için ab ve cd, m sayısının iki farklı çarpanlarına ayrılmış hali olsun ($m = ab = cd$). Her $n \geq 0$ tam sayısı için $a^n + b^n + c^n + d^n$ sayısının asal olmadığını gösteriniz.

72. a, b ve c tam sayılar olmak üzere, $c^2 + 1 = (a^2 - 1)(b^2 - 1)$ denkleminin bütün çözümlerini bulunuz.

73. A kümesi 1 tam sayısını ve en az bir pozitif tam sayıyı daha içeren bir küme olsun. A kümesinden alınan her m ve n tam sayıları için $\frac{m+1}{(m+1,n+1)}$ tam sayısının da kümenin bir elemanı olduğu biliniyor. Bu durumda A kümesinin bütün pozitif tam sayıları içerdiğini gösteriniz.

74. Herhangi bir pozitif n tam sayısı için $n! + 1$ ve $(n+1)!$ in en büyük ortak bölenlerini bulunuz.

75. $n|(2^n - 1)$ şartını sağlayan bütün pozitif n tam sayılarını bulunuz.

76. $a^4 + 4b^4$ değerini asal sayı yapan bütün a, b pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

77. n bir tam sayı olmak üzere, $2^n + 3^n$ bir rasyonel sayının karesi olabilir mi?

78. $z^2 = (x^2 + 1)(y^2 - 1) + n$ denklemini:
a) $n = 2006$
b) $n = 2007$
durumlarında sağlayan x, y ve z tam sayı değerleri var mıdır?

79. $a_0 = 3$ ve $n \geq 1$ için $a_n = 2 + a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ olarak tanımlanmış (a_n) dizisi için
a) Dizinin herhangi iki elemanının aralarında asal olduklarını ispatlayınız.
a) a_{2007} yi bulunuz.

80. p bir asal sayı olmak üzere $7p+3^p-4$ tam sayısının bir tam kare olmadığını gösteriniz.

81. $p.q$ nun $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ yu böldüğü bütün p, q asal sayılarını bulunuz.

82. A kümesi,

- $a \in A$ ise a nın bütün pozitif bölenleri A kümesinin elemanıdır,
- a,$b \in A$ ve $1 < a < b$ ise $1 + ab \in A$ dır,

özelliklerini sağlayan pozitif tam sayılar kümesi olsun. Eğer A kümesinin en az 3 elemanı varsa A=$\mathbb{N}$ olduğunu ispatlayınız.

83. $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2^{2004}$ denkleminin, tam sayılar kümesinde $0 \leq x \leq y \leq z \leq t$ koşuluna uyan tam olarak iki çözümü olduğunu ispatlayınız.

84. En az iki eleman içeren ve $a, b \in A$, $a > b$ ise $\frac{okek(a,b)}{(a-b)} \in A$ koşulunu sağlayan negatif olmayan sayılar kümesi A yı düşünelim. A nın en fazla iki eleman içerebileceğini gösteriniz.

85. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n nin basamakları toplamını $s(n)$ ile gösterelim. $s(n)$ nin n den farklı, n yi bölen en büyük tam sayıya eşit olduğu bütün n değerlerini bulunuz.

86. P katsayıları tam sayılardan oluşan bir polinom olsun ve $P(5) = 2005$ denklemini sağlasın. Bu durumda $P(2005)$ sayısının bir tam sayının karesi olması mümkün müdür?

87. a bir tam sayı olsun. $x^2 < 3$ koşulunu sağlayan herhangi bir x reel sayısı için, $\sqrt{3 - x^2}$ ve $\sqrt[3]{a - x^3}$ sayılarından en az birinin irrasyonel olduğunu kanıtlayınız.

88. $9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$ denkleminin tam sayı çözümlerini bulunuz.

89. $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ ifadesini rasyonel yapan n tam sayılarını bulunuz.

90. Negatif olmayan hiç bir n tam sayısı için $a_n = 2^n + 3^n + 5^n + 6^n$ ifadesinin bir tam küp olamayacağını kanıtlayınız.

91. n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \binom{2n}{5}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}$$

sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

92. $a_n = \left[n\sqrt{2}\right] + \left[n\sqrt{3}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan dizinin sonsuz tane tek ve sonsuz tane çift sayı içerdiğini gösteriniz.

93. x ve y sayıları 5'ten büyük asal çarpanı olmayan pozitif tam sayılar olmak üzere, $k \geq 0$ olan bir k tam sayısı için $x^2 - y^2 = 2^k$ denklemini sağlayan bütün x, y çiftlerini bulunuz.

94. Binler basamağı aynı olan ve dört tanesi, beşinin toplamını bölen dört basamaklı birbirinden farklı tam sayı beşlilerini bulunuz.

95. $n^2 + 3^n$ sayısını tam kare yapan bütün pozitif tam sayıları bulunuz.

96. $2^m + 3^n = k^2$ denklemini sağlayan pozitif tam sayıları bulunuz.

97. Birler basamağı başa alındığında (örnek: $1234 \to 4123$) elde edilen sayıyı kalansız bölen, en az iki basamaklı ve rakamlarının hepsi birbirinin aynısı olmayan en küçük sayıyı bulunuz. (Bahsi geçen sayılar onluk sisteme göre yazılmış ve başında 0 olmayan sayılardır.)

98. $(x+1)(x+2)(x+3) + x(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + x(x+1)(x+2) = y^{2^x}$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı ikililerini bulunuz.

99. 2^{2004} ün 2004 ile bölümünden kalanı bulunuz.

100. $n|(p-1)$ ve $p|(n^6-1)$ olmak üzere n bir pozitif tam sayı, p ise bir asal sayı olsun. Bu durumda $p-n$ ya da $p+n$ tam sayılarından en az birinin bir tam kare olduğunu gösteriniz.

101. m^2-4n ve n^2-4m sayılarının tam kare olmasını sağlayan tüm (m,n) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

102. a,b,c,d pozitif tam sayılar olmak üzere, her pozitif rasyonel sayının

$$\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

103. a ve b bütün n pozitif tam sayıları için $(a^n+n)|(b^n+n)$ koşulunu sağlayan pozitif tam sayılar olsunlar. Bu durumda $a=b$ olduğunu ispatlayınız.

104. Bir tam kare sayının son n basamağı 0 dan farklı ve birbirinin aynısıysa bu tam kare sayı n uzunluğundadır denir. Bir tam kare için mümkün olan en büyük uzunluğu bulunuz. Bu uzunluğa sahip tüm tam kare sayıları bulunuz.

105. a,b,n ve m, $n>1$ olacak şekilde, pozitif tam sayılardır. $a^n+b^n=2^m$ ise $a=b$ olduğunun gösteriniz.

106. Herhangi iki n ve k pozitif tam sayıları için,

$$n=\pm\binom{a_1}{3}\pm\binom{a_2}{3}\pm\binom{a_3}{3}\pm\binom{a_4}{3}\pm\binom{a_5}{3}$$

olacak şekilde $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>k$ pozitif tam sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

107. $p^mq^n=(p+q)^2+1$ eşitliğini sağlayan tüm m, n, p, q pozitif tam sayılarını bulunuz.

108. a ve b 2'den büyük tam sayılar olsun. $n_1=a$, $n_k=b$ ve $i=1,2,\ldots,k-1$ için $(n_i+n_{i+1})|n_in_{i+1}$ özelliklerini sağlayan bir k tam sayısı ve $n_1,n_2,\ldots,n_k$ tam sayı dizisi olduğunu gösteriniz.

109. Aşağıdaki özellikleri sağlayan N pozitif tam sayılarını bulunuz.

(a) N sayısı tam olarak 16 bölene sahip olacak $(1=d_1<d_2<\ldots<d_{16}=N)$.

(b) d_5. bölen, yani d_{d_5}, $(d_2+d_4)d_6$'ya eşit olacak.

110. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n'in basamaklarının tersten yazılışıyla elde edilen sayıyı $r(n)$ ile gösterelim. (Örneğin $r(2006) = 6002$). Herhangi a ve b pozitif tam sayıları için $4a^2+r(b)$ ve $4b^2+r(a)$ sayılarının ikisinin birden tam kare olamayacağını ispatlayınız.

111. $x^3+y^3+z^2 = t^4$ denklemini sağlayan ve ortak bölenleri 1 den büyük olmayan sonsuz tane pozitif tam sayı dörtlüsü (x, y, z, t) olduğunu gösteriniz.

112. $n > 1$ olmak üzere x, y ve n pozitif tam sayılar olsun. $x^n - y^n = 2^{100}$ denkleminin kaç tane çözümü olduğunu bulunuz?

113. Her biri 0 dan farklı x, y, z ve t gerçel sayıları aşağıdaki eşitlikleri sağlamaktadır:

$$\begin{aligned} x+y+z &= t \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{1}{t} \\ x^3+y^3+z^3 &= 1000^3 \end{aligned}$$

$x+y+z+t$ toplamını bulunuz.

114. $y^2 = x^3 - 432$ denklemini sağlayan tüm x, y tam sayılarını bulunuz.

115. $x^{2006} - 4y^{2006} - 2006 = 4y^{2007} + 2007y$ denkleminin pozitif tam sayı çözümünün olmadığını gösteriniz.

116. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere negatif olmayan x ve y tam sayıları için $ax + by$ şeklindeki negatif olmayan sayılara **"güzel"** diyelim. s tam sayısının t ile bölümünden kalan s_t olmak üzere $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunu $f(n) = n - n_a - n_b$ olarak tanımlayalım. Bu durumda n tam sayısının güzel olabilmesi için gerekli ve yeterli şartın $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ dizisinin negatif olmayan sayılardan meydana gelmesi olduğunu gösteriniz.

117. $n \geq 3$ koşulunu sağlayan her doğal sayı için $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$ denklemini sağlayacak x_n, y_n tek, doğal sayı ikilisi olduğunu gösteriniz.

118. 50! kaç değişik şekilde iki veya daha fazla ardışık pozitif tam sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir?

119. $4^x+4^y+4^z$ ifadesini bir tam kare yapan biribirinden farklı bütün x, y, z tam sayılarını bulunuz.

SAYILAR TEORİSİ - ÇÖZÜMLER

1. $(p+1)^q$ sayısının hangi p ve q asal sayıları için bir tam kare olduğunu bulunuz.

   Çözüm. $q = 2$ ise bütün p değerleri için $(p+1)^2$ bir tam kare olacaktır. $q > 2$ ise, q bir tek sayı olduğundan q'yu k pozitif bir tam sayı olmak üzere, $q = 2k+1$ şeklinde yazabiliriz.
   $$(p+1)^q = (p+1)^{2k+1} = (p+1)(p+1)^{2k}$$
   olduğundan $(p+1)^q$ bir tam kare ise, $(p+1)$ de bir tam kare olmak zorundadır. $(p+1) = n^2$ diyelim. O halde $p = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ olur. Fakat p asal olduğu için $(n-1)$ ya da $(n+1)$ den birinin 1, diğerinin p olması gerekir. Bu durumda $n = 2$, dolayısıyla da $p = 3$ tür. $p = 3$ ise 4^q her q değeri için bir tam karedir.
   Sonuç olarak, $q = 2$ ise her p için, $q > 2$ ise $p = 3$ için $(p+1)^q$ bir tam karedir.

2. $n+2n+3n+\ldots+9n$ toplamının bütün basamakları aynı rakamdan oluşan bir sayıya eşit olmasını sağlayan en küçük pozitif n tam sayısını bulunuz.

   Çözüm. $n+2n+3n+\ldots+9n = 45n$ toplamını S ile gösterelim. S beşin katı olduğuna ve S nin bütün basamakları aynı sayı olduğuna göre hepsi beşe eşit olmak zorundadır. Öbür taraftan S dokuza da bölündüğüne göre, basamakların toplamı da dokuza bölünmelidir. Bir başka deyişle S yi k basamaklı kabul edersek $5k$ dokuza bölünmelidir. Soruda en küçük n pozitif tam sayısı sorulduğuna göre $k = 9$ ve $S = 555555555$ olmalıdır. Buradan da $n = \frac{555555555}{45} = 12345679$ bulunur.

3. Her $n > 1$ tam sayısı için $\sqrt{11\ldots144\ldots4}$ (n tane 1 ve $2n$ tane 4) sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

   Çözüm. $11\ldots144\ldots4$ sayısının tam kare olamayacağını göstermek istiyoruz. n basamaklı $11\ldots1$ sayısını a ile gösterirsek,
   $$\begin{aligned} 11\ldots144\ldots4 &= \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{2n}+\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}+\underbrace{44\ldots4}_{n} \\ &= a\cdot 10^{2n} + 4a\cdot 10^n + 4a = a(10^n+2)^2 \end{aligned}$$
   yazabiliriz. $a = 11\ldots1$ sayısı 4 ile bölündüğünde 3 kalanını vereceğinden $(n > 1)$, a bir tam kare değildir. Bu durumda $a(10^n+2)^2 = 11\ldots144\ldots4$ sayısı da bir tam kare olamaz.

4. a, m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, m tek sayı, $a > 1$ olsun. Bu durumda $a^m - 1$ ve $a^n + 1$ sayılarının en büyük ortak böleni nedir?

Çözüm. d, $a^m - 1$ ve $a^n + 1$ sayılarının bir ortak böleni olsun.

$$\begin{aligned} a^{mn} \equiv (a^m)^n &\equiv 1 \ (mod\ d) \\ a^{mn} \equiv (a^n)^m &\equiv -1 \ (mod\ d) \end{aligned}$$

olduğundan $d|\,[(a^{mn}+1) - ((a^{mn}-1)])$ yani $d|2$ elde edilir. Bu durumda d sadece 1 ya da 2 değerlerini alabilir. a tekse $a^m - 1$ ve $a^n + 1$ çift sayı olacağından $d = 2$, a çift olduğunda ise $a^m - 1$ ve $a^n + 1$ tek olacağından $d = 1$ olur.

5. n pozitif çift bir tam sayı olmak üzere a ve b aralarında asal pozitif tam sayılardır. $(a+b)|(a^n + b^n)$ koşulunu sağlayan tüm a ve b sayılarını bulunuz.

   Çözüm. n çift bir tam sayı olduğu için $a^n - b^n = (a^2 - b^2)(a^{n-2} - a^{n-4}b^2 + \cdots + b^{n-2})$ dir. $a+b$, $a^2 - b^2$ nin bir çarpanı olduğu için, $(a+b)|(a^n - b^n)$ olur. Dolayısıyla $a+b$ hem $(a^n + b^n) + (a^n - b^n) = 2a^n$ hem de $(a^n + b^n) - (a^n - b^n) = 2b^n$ nin bir böleni olmalıdır. a ve b aralarında asal oldukları için $(2a^n, 2b^n) = 2$'dir. Bu nedenle $(a+b)|2$ olur. Yani, $a = b = 1$ dir.

6. $\underbrace{11\ldots11}_{2009}\underbrace{22\ldots22}_{2010}5$ sayısının bir tam kare olduğunu gösteriniz.

   Çözüm. Soruda verilen sayıya N diyelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} N &= \underbrace{11\ldots11}_{2009}\cdot 10^{2011} + \underbrace{22\ldots22}_{2010}\cdot 10 + 5 \\ &= \frac{1}{9}(10^{2009} - 1)\cdot 10^{2011} + \frac{2}{9}(10^{2010} - 1)\cdot 10 + 5 \\ &= \frac{1}{9}(10^{4020} - 10^{2011} + 2\cdot 10^{2011} - 20 + 45) \\ &= \frac{1}{9}(10^{4020} + 2\cdot 5\cdot 10^{2010} + 25) \\ &= (\frac{1}{3}(10^{2010} + 5))^2 = (\frac{1\overbrace{00\ldots00}^{2009}5}{3})^2 = \underbrace{33\ldots33}_{2009}5^2 \end{aligned}$$

   elde edilir. Yani $\underbrace{11\ldots11}_{2009}\underbrace{22\ldots22}_{2010}5$ sayısı bir tam karedir.

7. $T = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{20}$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm. i pozitif tam sayısı için $\underbrace{11\ldots1}_{i} = \frac{10^i-1}{9}$ olduğundan

$$\begin{aligned} T &= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \ldots + \frac{10^{20}-1}{9} = \frac{(10+10^2+\ldots+10^{20})-20}{9} \\ &= \frac{10(\frac{10^{20}-1}{9})-20}{9} = \frac{10^{21}-190}{81} \end{aligned}$$

elde edilir.

8. n, 6 dan büyük bir tam sayı olsun. $n-1$ ve $n+1$ asal sayılar olduğuna göre $n^2(n^2+16)$ nın 720 ile bölünebildiğini gösteriniz. Eğer $n^2(n^2+16)$ 720 ile bölünebiliyorsa $n-1$ ve $n+1$ sayılarından ikisi birden asal olmak zorunda mıdır?

   Çözüm. $n-1$ ve $n+1$ asal sayılar olduğundan, n çifttir. O halde, n^4 ve $16n^2$, 2^4 ile bölünebildiğinden $n^4+16n^2 = n^2(n^2+16)$ da 2^4 ile bölünebilir. $n-1, n, n+1$ ardışık üç sayı olduğu için bu sayılardan birisi 3 ile bölünebilir. Ancak $n > 6$ ve $n-1$ ile $n+1$ asal oldukları için 3 sadece n yi bölebilir. Buradan da n^2, dolayısıyla da $n^2(n^2+16)$ 9 tarafından bölünebilir.
   $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ ardışık beş sayı olduğu için bu sayılardan herhangi biri 5 ile bölünebilir. Ancak $n > 6$ ve $n-1$ ile $n+1$ asal oldukları için 5 diğer üç sayıdan tam olarak birisini böler. Yani $(n-2)n(n+2) = n^3-4n$, 5 tarafından bölünebilir. O halde $n(n^3-4n)$ de 5 ile bölünebilir. $20n^2$ nin 5 ile bölünebileceği de açıktır. Buradan da
   $$n(n^3-4n)+20n^2 = n^4+16n^2 = n^2(n^2+16)$$
   ifadesinin 5 ile bölüneceği sonucu çıkar.
   $n^2(n^2+16)$, $2^4, 3^2$ ve 5 tarafından bölünebildiği ve bu sayılar aralarında asal oldukları için $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ ile de bölünebilir.
   Önermenin tersi ise doğru değildir. $n = 78$ alındığında $78^2(78^2+16)$ 720 tarafından bölünebilmesine rağmen $n-1 = 77$ asal değildir.

9. $p, 4p^2+1$ ve $6p^2+1$ asal sayılar ise p nin alabileceği değerleri bulunuz.

   Çözüm. Sayıları (mod 5) te inceleyelim.
   $p \equiv 0 \pmod 5$ durumunda $p = 5$ olmalıdır. $4p^2+1 = 101$ ve $6p^2+1 = 151$ asal olduklarından $p = 5$ sorudaki şartları sağlar.
   $p \equiv 1, 4 \pmod 5$ durumunda $4p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ elde edilir.
   $p \equiv 2, 3 \pmod 5$ durumunda $6p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ elde edilir.
   $6p^2+1 > 4p^2+1 > 5$ olduğundan $p = 5$ dışında çözüm yoktur.

10. 1978 yılı ilk iki basamağının son iki basamağına eklenince ortadaki iki basamağını vermesi (19+78=97) bakımından ilginç bir yıldı. 1978 den bir önceki ve bir sonraki ilginç yılları bulunuz.

Çözüm. Dört basamaklı $abcd$ sayısının ilginç olması için $1 \leq a \leq 9,\ 0 \leq b, c, d \leq 9$ olmak üzere

$$10a + b + 10c + d = 10b + c \Leftrightarrow 10a + d = 9(b - c) \Leftrightarrow a + d = 9(b - c - a)$$

olmalıdır. Buradan $a + d \equiv 0\ (mod\ 9)$ ve $b - c - a \geq 1$ çıkar. $1 \leq a + d \leq 18$ olduğundan $a + d = 9$ ya da $a + d = 18$ dir. İlk olarak ikinci durumu ele alalım. $a = d = 9$ olursa, $2 = b - c - a = b - c - 9$ ve $11 = b - c$ olur; fakat bu olanaksızdır. Sonuç olarak $a + d = 9$ ve $b - c = a + 1$ olmalıdır. Bu durumda 4 rakamlı ilginç sayıları bulmak için $0, 1, \ldots, 9$ rakamlarından $a + d = 9$ ve $b - c = a + 1$ şartlarını sağlayan a, b, c, d nin seçilmesi gerekir.
1868 ve 2307 aranan yıllardır.

11. Hiç bir pozitif n tam sayı için $n(n + 1)(n + 2)$ nin bir tam kare olamayacağını ispatlayınız.

Çözüm. $n(n + 1)(n + 2)$ yi tam kare yapan pozitif bir n sayısının varlığını kabul edelim. $(n, n + 1) = (n + 1, n + 2) = 1$ olduğundan $(n + 1, n(n + 2)) = 1$ ve sonuç olarak $n(n + 2)$ bir tam kare olur. Fakat $n(n + 2) = (n + 1)^2 - 1$ dir ve iki pozitif tam karenin farkı herzaman 1 den büyük olacağı için bu imkansızdır.

12. $ab = obeb(a, b) + okek(a, b)$ denklemini sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin sol tarafı ve sağ tarafında bulunan $okek(a, b)$ teriminin ikisi de a ile tam bölünebildiği için $obeb(a, b)$ de a ile tam bölünebilmelidir. Öte yandan a pozitif olduğu için $obeb(a, b) \leq a$ dır. Sonuç olarak $obeb(a, b) = a$ bulunur. Benzer şekilde $obeb(a, b) = b$ ve buradan $a = b$ elde edilir. Bu durumda verilen denklem $a^2 = a + a$ yani $a(a - 2) = 0$ denklemine denktir. Bu denklemin pozitif tam sayı olarak tek bir çözümü vardır. Cevap $(a, b) = (2, 2)$ dir.

13. Ard arda yazılan $1, 2, \ldots, 10$ sayılarının aralarına $+$ ve $-$ işaretleri nasıl konulursa konulsun toplamın hiçbir zaman 0 olamayacağını ispatlayınız.

Çözüm. $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$ bir tek sayıdır. İşaret değiştirmeler tek veya çift olma özelliğini etkilemeyeceği için, $1 \pm 2 \pm \cdots \pm 10$ toplamı hiçbir zaman bir çift sayı olamayacaktır. Bu yüzden toplam olarak 0 elde etmek imkansızdır.

14. $n^2 + 23$ sayısının sonsuz farklı n tam sayısı için 24 ile tam bölündüğünü ispatlayınız.

Çözüm. $n^2 + 23 = n^2 - 1 + 24 = (n - 1)(n + 1) + 24$ olduğundan $n = 24m \pm 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ sayılarının 24 ile tam bölünen sonsuz tane $n^2 + 23$ sayısı üreteceği görülür.

15. p nin bir asal sayı olması durumunda $8p-1$ ve $8p+1$ sayılarından en az bir tanesinin bileşik sayı olacağını gösteriniz.

Çözüm. $p = 3$ ise $8p - 1 = 23$ ve $8p + 1 = 25$ olur. Yani $p = 3$ için önerme doğrudur. $p \neq 3$ durumunda $p = 3k + 1$ ya da $p = 3k + 2$ dir. $p = 3k + 1$ durumunda $8p + 1 = 24k + 9 = 3(8k + 3)$ bileşik sayıdır. $p = 3k + 2$ durumunda ise $8p - 1 = 24k - 15 = 3(8k - 5)$ bileşik sayıdır.

16. Her n doğal sayısı için $n^5 - 5n^3 + 4n$ sayısının 120 nin bir tam katı olacağını ispatlayınız.

Çözüm. $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ olarak yazılabilir. $\binom{n+2}{5}$ tam sayı olduğundan ardışık 5 tam sayının çarpımı 120 ile bölünür. Bu durumda $n^5 - 5n^3 + 4n$ de 120 ile bölünür.

17. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99!$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm. $(k+1)! = (k+1)k! = k \cdot k! + k!$ olduğundan $(k+1)! - k! = k \cdot k!$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1! &= 2! - 1! \\
2 \cdot 2! &= 3! - 2! \\
3 \cdot 3! &= 4! - 3! \\
&\vdots \\
98 \cdot 98! &= 99! - 98! \\
99 \cdot 99! &= 100! - 99!
\end{aligned}$$

ifadelerini taraf tarafa toplarsak $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! = 100! - 1$ buluruz.

18. $\{1, 2, \ldots, 28\}$ kümesinden kalan tüm elemanların çarpımı bir tam kare olacak şekilde en az kaç sayı silebiliriz?

Çözüm. $28! = 2^{25} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ tür. Yani 17, 19, 23 mutlaka silinmelidir. Bunlardan başka en az bir sayı daha silinmelidir. 6, 17, 19 ve 23 ü silersek istenen şart sağlanmış olur yani cevap 4'tür.

19. Birinci ve ikinci terimleri 1 olan ve her terimi kendisinden önceki iki terimin toplamı olarak elde edilen dizinin (Fibonacci dizisi) her beşinci teriminin 5 ile bölünebildiğini gösteriniz.

Çözüm. Dizinin n. terimi, önceki terimlere $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ eşitliğiyle bağlıdır. Bu eşitlikten

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = 2a_{n-2} + a_{n-3} = 3a_{n-3} + 2a_{n-4} = 5a_{n-4} + 3a_{n-5}$$

ve sonuç olarak $a_n = 3a_{n-5}$(mod 5) elde edilir. $a_5 = 0$(mod 5) olduğundan, her beşinci terim 5 ile bölünebilir.

20. 18 ile 57 arasındaki 40 tam sayı yan yana yazılarak 80 basamaklı bir sayı $(1819\ldots57)$ elde edilmiştir. 3^k nın, bu sayıyı böldüğü en büyük k tam sayısını bulunuz.

    Çözüm. Elde edilen sayı oluşturulurken 1 rakamı toplam olarak 6 kez; 2,3 ve 4 rakamlarının her birisi 14 kez; 5 rakamı 12 kez; 6,7,8,9 ve 0 rakamlarının her birisi 4 kez kullanılmıştır. Sayıyı oluşturan rakamların sayı değerlerinin toplamı $6 \cdot 1 + 14 \cdot (2 + 3 + 4) + 12 \cdot 5 + 4 \cdot (6 + 7 + 8 + 9) = 312$ dir. 312 sayısı 3 ile bölünüp, 9 ile bölünmediğinden $k = 1$ olur.

21. Herhangi üç tek doğal sayı için, dördünün karelerinin toplamı yine bir tam kare olacak şekilde dördüncü bir tek sayının bulunabileceğini gösteriniz.

    Çözüm. x, y, ve z üç tek sayı olsun. O zaman $x^2 + y^2 + z^2$ de tektir. Bunu kullanarak $x^2 + y^2 + z^2 = 2p + 1 = (p + 1)^2 - p^2$ yani $x^2 + y^2 + z^2 + p^2 = (p + 1)^2$ yazılabilir.

    $$x^2 + y^2 + z^2 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2 = 4k + 3 = 2(2k + 1) + 1 = 2p + 1$$

    olduğundan $p = 2k + 1$ olur. Yani p tektir.

22. Verilen $P(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, ve $Q(x) = x^3 - x + 3$ polinomları için $Q(a)$ nın $P(a)$ yı bölmesini sağlayacak bir a tam sayısının olmadığını gösteriniz.

    Çözüm. $Q(a) = a^3 - a + 3 = (a - 1)a(a + 1) + 3$ olduğundan 3 e bölünür. Ancak $a \equiv 0, 1, 2$ (mod 3) için $P(a) \equiv 0$(mod 3) elde edilemez. Yani $Q(a))|P(a)$ şartını sağlayan bir a tam sayısı yoktur.

23. İlk terimi 10 olan bir dizide her çift terimden bir sonraki terim o terimin yarısı, her tek terimden bir sonraki terim de bir önceki terimin 2 katının 2 fazlasıdır. Dizinin 2010. terimini bulunuz.

    Çözüm. Dizinin ilk terimleri 10, 5, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, … şeklindedir. Dizinin 7. terimden başlayarak üç terim periyoduyla kendisini tekrarladığı görülmektedir. Bu durumda $2010 \equiv 0$(mod 3) olduğundan, 2010. terim, 9. terime eşit olacaktır. Yani 2010. terim 1 dir.

24. Bir okuldaki birinci ve ikinci sınıf öğrencilerinden oluşan bir grubun %55'i erkek öğrencidir. Ayrıca bu gruptaki erkek birinci sınıf öğrencisi sayısının erkek ikinci sınıf öğrencisi sayısına oranı, gruptaki birinci sınıf öğrencisi sayısının ikinci sınıf öğrencisi sayısına oranına eşittir. Bu durumda erkek birinci sınıf öğrencilerin sayısının bayan birinci sınıf öğrencilerinin sayısına oranını bulunuz.

Çözüm. Bu gruptaki bayan ikinci sınıf öğrencisi sayısına x, bayan birinci sınıf öğrencisi sayısına y, erkek ikinci sınıf öğrencisi sayısına z ve erkek birinci sınıf öğrencisi sayısına w diyelim.

Bu durumda $z + w = 0,55(x + y + z + w)$ ve $\frac{w}{z} = \frac{y+w}{x+z}$ olur. Bulmak istediğimiz değer ise $\frac{w}{y}$ olur.

Şimdi $\frac{z}{w} = \frac{x+z}{y+w}$ eşitliğinden $\frac{z+w}{w} = \frac{x+y+z+w}{y+w}$ bulunur.

Dolayısıyla $\frac{w}{y+w} = \frac{z+w}{x+y+z+w} = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$ olduğundan $\frac{y}{w} = \frac{9}{11}$ yani $\frac{w}{y} = \frac{11}{9}$ olarak bulunur.

25. Verilen herhangi iki a ve b tam sayıları için $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$ olacak şekilde x ve y tam sayıları bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. $x = (a + b)$, $y = (a - b)$ alınırsa $x^2 + xy + y^2 = (a + b)^2 + (a + b)(a - b) + (a - b)^2 = 3a^2 + b^2$ olur.

26. Her pozitif n tam sayısı için, $u(n)$ ile n yi aşmayan en büyük asal sayı, $v(n)$ ile de n den büyük en küçük asal sayı gösterilmek üzere,

$$\frac{1}{u(2)v(2)} + \frac{1}{u(3)v(3)} + \frac{1}{u(4)v(4)} + \ldots + \frac{1}{u(2010)v(2010)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. p ve q ardışık asal sayılar ve $p < q$ olsun. $p \leq n < q$ koşulunu sağlayan $q-p$ tane sayıdan her birisi için $u(n) = p$ ve $v(n) = q$ dur. Bu durumda, verilen toplamda $\frac{1}{pq}$ terimi tam olarak $q-p$ kere geçmektedir. İstenilen toplamı T ile gösterirsek 2003 ve 2011 ardışık asal sayılar olduklarından

$$\begin{aligned} T &= \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{5-3}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{2011 - 2003}{2003 \cdot 2011} \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{2003} - \frac{1}{2011}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

27. Her n pozitif tam sayısı için, $\binom{2n}{n}$ sayısının, $n + 1$ ve $4n - 2$ ile bölünebildiğini gösteriniz.

Çözüm. Her $n > 0$ için, $\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n-1}$ ifadesi bir tam sayıdır. n ve $n + 1$ sayıları aralarında asal oldukları için, $\binom{2n}{n}$ sayısı $n + 1$ e bölünür.

Şimdi, her $n > 0$ için, $\frac{n}{2n(2n-1)}\binom{2n}{n} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ dir. Az önceki nedenden dolayı, her $n > 1$ için bu bir tam sayıdır. $n = 1$ durumu ayrıca kontrol edilerek $\binom{2n}{n}$ sayısının $2(2n - 1) = 4n - 2$ ye bölündüğü görülür.

28. $n = 0, 1, \ldots, 2010$ olmak üzere, $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

Çözüm. Öncelikle, $n = 0$ için, $A_0 = 1 + 9 + 25 = 35 = 5 \cdot 7$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla A_n sayılarının en büyük ortak böleni ancak 35, 7, 5 veya 1 olabilir. Bu durumda A_n sayısına önce (mod 5) te bakalım.

$$A_n \equiv 2^{3n} + 3^{6n+2} \equiv 2^{3n} + (-1)^{3n+1} \ (mod\ 5)$$

olur. $n = 1$ için $A_1 \equiv 9 \neq 0$ (mod 5) olduğundan, 5, A_n sayılarının ortak böleni olamaz.

Şimdi A_n sayısına (mod 7) de bakalım.

$$\begin{aligned} A_n &= 8^n + 9 \cdot 9^{3n} + 25 \cdot 25^{3n} \equiv 1 + 2 \cdot 2^{3n} + 4 \cdot 4^{3n} \\ &\equiv 1 + 2 \cdot 8^n + 4 \cdot 64^n \equiv 1 + 2 \cdot 1^n + 4 \cdot 1^n \equiv 7 \equiv 0 \ (mod\ 7) \end{aligned}$$

olur. Yani $n \geq 0$ için 7, her A_n sayısını böler.

Sonuç olarak, 5 bazı A_n sayılarını bölmediği için, A_n sayılarının 7 den büyük ortak böleni olamaz. Yani $A_0, A_1, \ldots, A_{2010}$ sayılarının en büyük ortak böleni 7 dir.

29. Birbirinden ve sıfırdan farklı a, b ve c rakamları için ab iki basamaklı sayısını bölen c, bc iki basamaklı sayısını bölen a ve ac iki basamaklı sayısını bölen b sayıları bulunabilir mi?

Çözüm. Eğer a, b, c rakamları verilen koşulları sağlıyorlarsa ve en az birisi çift sayı ise hepsinin çift sayı olması gerekir. Ve $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ sayıları da aynı koşulları sağlar. Yani genelliği kaybetmeden a, b, c sayılarının tek sayılar oldukları kabul edilebilir. Ayrıca bu sayıların hiç birisi 5 olamaz. Yani a, b, c sayıları 1,3,7,9 sayılarından seçilmelidir. Bu durumda 3 ve 9 sayılarından en az biri seçilmelidir. $a = 3$ olursa bc nin hiç bir değeri 3'e bölünmez. Benzer şekilde $a = 9$ olursa bc nin hiç bir değeri 9'a bölünmez. Sonuç olarak istenen koşullarda a, b, c sayıları seçilemez.

30. $\frac{3x+9}{8}, \frac{3x+10}{9}, \frac{3x+11}{10}, \cdots \frac{3x+49}{48}$, kesirlerinin her birinin sadeleşmiş olması, yani payları ve paydalarının aralarında asal olmasını sağlayan en küçük x pozitif tam sayısını bulunuz.

Çözüm. Verilen kesirlerin her biri $\frac{3x+1+k}{k} = \frac{3x+1}{k} + 1$ şeklinde olduğu için payları ve paydalarının aralarında asal olması için $3x + 1$ in $8, 9, 10, \ldots, 48$ sayılarından hiç biri ile ortak bir çarpanı olmaması gerekir. Bir başka ifadeyle verilen problem, $3x+1$ in 2 den 47 ye kadar olan hiçbir asal sayı ile bölünmemesi için x in en az kaç olması gerektiği sorusuna denktir. Bu durumda $3x + 1$ in 47 den büyük ve (mod 3) te 1 e denk olan en küçük asal sayı yani 61 olması gerekir. Cevap $x = 20$ dir.

31. Issız bir adaya düşen beş adam bir miktar hindistan cevizi toplarlar. Adamlardan her birisi sırayla hindistan cevizlerinin başında nöbet tutacaktır. Her adam nöbeti sırasında şu işlemleri gerçekleştirir:

- Önce hindistan cevizlerini 5 eşit gruba ayırır.
- Her defasında 1 hindistan cevizi artar ve artan hindistan cevizini bir maymuna verir.
- Bir hindistan cevizi grubunu kendisi için saklayıp geri kalan hindistan cevizlerini tekrar tek bir grup haline getirir.

Bu durumda başlangıçta en az kaç hindistan cevizi vardır?

Çözüm. Toplanan hindistan cevizi sayısına n diyelim. İlk adamın hindistan cevizlerini 5 e bölerek elde ettiği grupların her birindeki hindistan cevizi sayısına a, ikinci adamın elde ettiği grupların her birindeki hindistan cevizi sayısına b, $\ldots$, beşinci adamın elde ettiği grupların her birindeki hindistan cevizi sayısına e diyelim. Bu durumda $n = 5a + 1$ olur. İlk adam bir gurbu kendisi için sakladığı ve artan bir hindistan cevizini maymuna verdiği için geriye $4a$ hindistan cevizi kalır. Aynı şekilde $4a = 5b + 1$, $4b = 5c + 1$, $4c = 5d + 1$, $4d = 5e + 1$ olacaktır.

$$\begin{aligned} n &= 5a+1 \Leftrightarrow n+4 = 5(a+1) \\ 4a &= 5b+1 \Leftrightarrow 4(a+1) = 5(b+1) \\ 4b &= 5c+1 \Leftrightarrow 4(b+1) = 5(c+1) \\ 4c &= 5d+1 \Leftrightarrow 4(c+1) = 5(d+1) \\ 4d &= 5e+1 \Leftrightarrow 4(d+1) = 5(e+1) \end{aligned}$$

Buradan $n+4 = 5(a+1) = \frac{5^2}{4}(b+1) = \frac{5^3}{4^2}(c+1) = \frac{5^4}{4^3}(d+1) = \frac{5^5}{4^4}(e+1)$ bulunur ve $n = \frac{5^5}{4^4}(e+1) - 4$ elde edilir ve $(e+1)$, 256 nın bir katı olur. k pozitif bir tam sayı olmak üzere $(e+1) = 256k$ için $n = 5^5k - 4 = 3125k - 4$ olur. Bu durumda en az hindistan cevizi sayısı $k = 1$ olduğunda elde edilir ve $n = 3125 - 4 = 3121$'dir.

32. n bir tam sayı olmak üzere, $n+3$ ve n^2+3 ün ikisi birden bir tam küp olabilirler mi?

Çözüm. $n+3$ ve n^2+3 ün ikisi de bir tam küp ise bunların çarpımları da bir tam küp olmalıdır. Yani, $a^3 = (n+3)(n^2+3) = n^3 + 3n^2 + 3n + 9 = (n+1)^3 + 8$ dir. $(n+1)^3 + 8$ in bir tam küp olması için, $a^3 - (n+1)^3 = 8$ olmalıdır. Farkları 8 olan iki tam küp ifadeleri ancak $(-8, 0)$ ve $(0, 8)$ dir. Dolayısıyla, $(n+1)^3 = -8$ veya $(n+1)^3 = 0$ olmalıdır. Yani, $n = -3$ ve $n = -1$ dir.

Fakat, $n = -3$ ve $n = -1$ için, $n^2 + 3$ bir tam küp olamayacağından dolayı, hiç bir n tam sayısı için $n+3$ ve n^2+3 sayılarının ikisi birden tam küp olamazlar.

33. Ardışık 9999 tam sayının karelerinin toplamının bir tam sayının birden büyük bir kuvveti olamayacağını gösteriniz. Yani, $(n+1)^2 + \cdots + (n+9999)^2 = m^r$ ifadesini sağlayan ve $r > 1$ olan n, m, r tam sayılarının olamayacağını gösteriniz.

Çözüm. Ardışık 9 tam sayının karelenin toplamı

$$0^2 + 1^2 + \ldots + 8^2 \equiv 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \equiv 6 \ (mod\ 9)$$

olduğundan ardışık 9999 tam sayının karelerinin toplamı $1111 \cdot 6 \equiv 6$ (mod 9) olur. Bu durumda, $m^r \equiv 6(\text{mod } 9)$ olmalıdır. Yani, m^r, 3 e tam bölünür fakat $3^2 = 9$ a tam bölünmez, bu nedenle $r > 1$ olamaz.

34. $7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2$ denklemini sağlayan bütün (a, b) tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm. Verilen eşitliği b bilinmeyenine göre ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem olarak düşünelim: $5b^2 + (5a - 14)b + 5a^2 - 7a = 0$. Bu denklemin çözümleri

$$b_{1,2} = \frac{14 - 5a \pm \sqrt{(5a-14)^2 - 20(5a^2 - 7a)}}{10} \quad \text{dir.}$$

Çözümlerin gerçel sayılar olabilmesi için $196 - 75a^2 \geq 0$ olması, başka bir deyişle $a^2 \leq \frac{196}{75}$ olması, gerekir. Buradan $-\frac{14\sqrt{3}}{15} \leq a \leq \frac{14\sqrt{3}}{15}$ elde ederiz. a bir tam sayı olduğundan dolayı, a sayısının alabileceği değerler $-1, 0$ ve 1 dir. Bu değerleri denklemde yerine koyduğumuzda şu üç durumu elde ederiz:
$a = -1$ ise $b_1 = 3$ ve $b_2 \notin \mathbb{Z}$ buluruz,
$a = 0$ ise $b_1 \notin \mathbb{Z}$ ve $b_2 = 0$ buluruz,
$a = 1$ ise $b_1 = 2$ ve $b_2 \notin \mathbb{Z}$ buluruz.
Dolayısıyla çözüm kümesi $\{(-1, 3), (0, 0), (1, 2)\}$ dir.

35. $|3^a - 2^b| = 1$ eşitliğini sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm. $b < 3$ durumunda $(1, 1)$ ve $(1, 2)$ ikilileri verilen eşitliği sağlamaktadır. $b \geq 3$ durumunu incelemek yeterli olacaktır.
$b \geq 3$ olduğundan $2^b \equiv 0(\text{mod}\, 8)$ olacaktır. Ayrıca, negatif olmayan her n tam sayısı için $3^{2n} \equiv 1(\text{mod}\, 8)$ ve $3^{2n+1} \equiv 3(\text{mod}\, 8)$ dir. Yani, $3^a - 2^b \equiv \pm 1(\text{mod}\, 8)$ olması için a nın bir çift sayı ve $3^a - 2^b = 1$ olması gerekir.
$a = 2c$ dersek $2^b = 3^{2c} - 1 = (3^c - 1)(3^c + 1)$ olacağından, $(3^c - 1)$ ve $(3^c + 1)$ sayıları 2 nin kuvvetleridir. Farkları iki olduğu için, $3^c - 1 = 2$ ve $3^c + 1 = 4$ olmalıdır. Buradan $a = 2$ ve $c = 2$ bulunur. Sonuçta, $b \geq 3$ durumda tek çözüm $(2, 3)$ tür.
Sonuç olarak tüm çözümler $(1, 1), (1, 2)$ ve $(2, 3)$ ikilileridir.

36. On tabanında $(abcd)_{10}$, yedi tabanında ise $(dcba)_7$ olarak ifade edilen bütün tam sayıları bulunuz.

Çözüm. Soruda verilen eşitlik kullanılarak

$$(abcd)_{10} = (dcba)_7 \Leftrightarrow 999a + 93b = 39c + 342d \Leftrightarrow 333a + 31b = 13c + 114d$$

$a > 0$, $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ elde edilir. $a \geq 3$ durumunda $13c + 114d < 999$ olduğundan çözüme ulaşılmaz. Yani $a = 1$ ya da $a = 2$ olmalıdır.

$a = 1$ için $333 + 31b = 13c + 114d$ olduğundan $3 \leq d \leq 4$ bulunur.
$d = 3$ için $b \equiv c \pmod 9$ olduğundan $b = c$ ve buradan da $18b = 9$ elde edilir ve çözüm yoktur.
$d = 4$ için $31b - 13c = 123$ olduğundan $5 \leq b \leq 6$ bulunur. Bu değerler denenince çözüm gelmediği görülür.

$a = 2$ için $666 + 31b = 13c + 114d$ olduğundan $d = 6$ bulunur. $b \equiv c \pmod 9$ olduğundan $b = c$ elde edilir. Bu durumda tek çözüm $(abcd)_{10} = 2116$ olur.

37.
$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1997 \cdot 1998}$$

ve

$$B = \frac{1}{1000 \cdot 1998} + \frac{1}{1001 \cdot 1997} + \ldots + \frac{1}{1998 \cdot 1000}$$

olmak üzere, $\frac{A}{B}$ sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ eşitliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}
A &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1998} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1998} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{1998}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1998} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{999} \\
&= (1 - 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{999}\right) + \frac{1}{1000} + \ldots + \frac{1}{1998} \\
&= \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \ldots + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1998}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da;

$$\begin{aligned}
2A &= \left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1998}\right)+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{1997}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1000}\right)\\
&= 2998\cdot\left(\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+\ldots+\frac{1}{1998\cdot 1000}\right)\\
&= 2998\cdot B
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\frac{A}{B}=1499$ bir tam sayıdır.

38. 2^a sayısının basamakları uygun şekilde yer değiştirildiğinde 2 nin başka bir kuvveti elde edilmesini sağlayan bir a tam sayısı var mıdır?

Çözüm. $a<b$ olmak üzere, 2^a nın basamaklarını uygun şekilde yer değiştirerek 2^b sayısının elde edildiğini kabul edelim. Bu durumda 2^b-2^a tam sayısı 9 ile bölünmelidir. $2^3<10<2^4$ olduğundan, basamak sayısı aynı olan en fazla 4 tane 2 nin kuvveti olabilir. Örnek olarak, $1,2,4$ ve 8 i verebiliriz.
Yani, $c=1,3$ veya 7 olmak üzere, $2^b-2^a=c\times 2^a$ dır. Buradan da 9 un 2^b-2^a nın bir çarpanı olmadığı bulunur. Yani, böyle bir a tam sayısı yoktur.

39. Hipotenüs uzunluğu $\sqrt{2006}$ ve dik kenarları tam sayı olan dik üçgen var mıdır?

Çözüm. İstenen şekide bir üçgenin olduğunu kabul edelim. Dik kenarlara x ve y diyelim. Pisagor teoreminden dolayı $x^2+y^2=2006$ dır. 2006 çift sayı olduğu için x^2 ve y^2 ya ikisi birden tek ya da ikisi birden çift sayı olmalıdır. Eğer ikisi de çift sayı olsaydı 2006 nın 4 ile tam bölünmesi gerekirdi. Bundan dolayı tek sayı olmalıdırlar. k ve l pozitif tam sayılar olmak üzere $x=2k+1$ ve $y=2l+1$ dönüşümü yaparsak,

$$\begin{aligned}
(2k+1)^2+(2l+1)^2 &= 2006\\
4k^2+4k+4l^2+4l &= 2004\\
k(k+1)+l(l+1) &= 501
\end{aligned}$$

bulunur. İki ardışık sayının çarpımı çift sayıdır. Bu nedenle, $k(k+1)$ ve $l(l+1)$ çift sayılardır. Toplamları da çift olacağından dolayı k ve l tam sayı olamaz. Yani, istenen şekilde bir dik üçgen yoktur.

40. Bir bilgisayar, $n=1,2,3,\ldots$ için $(n+1)2^n$ ifadesinin değerlerini vermektedir. En fazla kaç tane tam kare değer arka arkaya gelir?

Çözüm. İki ardışık değer tam kare olabilir, mesela, $n=7$ ve $n=8$ için sırasıyla $8.2^7=(2^5)^2$ ve $9.2^8=(3.2^4)^2$ olur.
Şimdi üç ardışık değerin tam kare olamayacağını göstereceğiz. Bir n tam sayısı için $(n+1)2^n$ ve $(n+3)2^{n+2}$ nin tam kare olduğunu varsayalım. Eğer n çift ise

$n+1$ ve $n+3$ sayılarının tam kare olması gerekir, ancak bu, pozitif tam sayılar için imkansızdır. Eğer n tek ise, yani bir $k \geq 0$ için $n = 2k+1$ ise, $(n+1)2^n = (2k+2)2^{2k+1} = (k+1)2^{2k+2}$ ve $(n+3)2^{n+2} = (2k+4)2^{2k+3} = (k+2)2^{2k+4}$ olur ve bu durumda 2^{2k+2} ve 2^{2k+4} tam kare olduğu için $k+1$ ve $k+2$ tam kare olmalıdır, ancak bu, negatif olmayan k tam sayıları için imkansızdır.
Dolayısıyla cevap 2'dir.

41. Elimizde 1 Kr, 5 Kr, 10 Kr, 25 Kr, 50 Kr ve 1 TL lik madeni paraların her birinden n tane bulunmaktadır. Bu paralardan seçilen n tanesinin toplamının 1 TL olmasının mümkün olamayacağı en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

Çözüm. Toplamı 1 TL olacak şekilde seçilebilen n tane madeni paranın a tanesi 1 Kr, b tanesi 5 Kr, c tanesi 10 Kr, d tanesi 25 Kr, e tanesi 50 Kr ve f tanesi 1 TL olsun $(a, b, c, d, e, f \geq 0)$. $a+5b+10c+25d+50e+100f = 100$ ve $a+b+c+d+e+f = n$ denklemleri elde edilir. Buradan $4b+9c+24d+49e+99f = 100-n$ bulunur.
Aradığımız n sayısı, son denklemin çözümünün olamayacağı en küçük n sayısıdır. Başka bir deyişle, biz son denklemin çözümünün olamayacağı en büyük $100-n$ değerini arıyoruz. Ya da, $4b+9c+24d+49e+99f$ ifadesinin alamayacağı, 100 den küçük, en büyük tam sayı değerini arıyoruz. (b, c, d, e, f sayılarının negatif olmayan tam sayılar olduğunu hatırlayalım.) $c = d = e = f = 0$ seçerek (mod 4) te 0 olan sayıları, $c = 1$, $d = e = f = 0$ seçerek 9'dan büyük (mod 4) te 1 olan sayıları, $c = 2$, $d = e = f = 0$ seçerek 18'den büyük (mod 4) te 2 olan sayıları ve $c = 3$, $d = e = f = 0$ seçerek 27'den büyük (mod 4) te 3 olan sayıları elde edebiliriz. Yani bu ifadenin alamayacağı en büyük iki basamaklı tam sayı değeri 23'tür.
Dolayısıyla, n nin en küçük değeri 77'dir.

42. $n > 1$ pozitif bir tam sayı ve p, $n|(p-1)$, $p|n^3-1$ şartlarını sağlayan bir asal sayı ise $4p-3$ ün bir tam kare olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. p bir asal sayı ve $p|n^3-1$ olduğundan ya $p|n-1$ ya da $p|n^2+n+1$ dir. Birinci durum $n|p-1$ olduğundan imkansızdır. $p|n^2+n+1$ durumunda $n^2+n+1 = pt$ denklemini sağlayan bir t tam sayısı bulunur. $p \equiv 1 \pmod{n}$ olduğundan $t \equiv 1 \pmod{n}$ olur. Yani $n^2+n+1 = (nk+1)(nk'+1)$ eşitliği elde edilir. $k' > 0$ ise sağ taraf daha büyük olacağından çelişkiye ulaşılır. Sonuç olarak $k' = 0$ dır. Buradan $n^2+n+1 = p$ bulunur ki bu da $4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$ olduğunu gösterir.

43. Her n doğal sayısı için $3^{3n+3} - 26n - 27$ sayısının 169 un bir tam katı olacağını ispatlayınız.

Çözüm. $P(n)$ ile $3^{3n+3}-26n-27$ sayısı 169'un bir tam katıdır önermesini gösterelim. Soruyu ispatlamak için tümevarım yöntemini kullanacağız.
$3^{3.1+3} - 26 \cdot 1 - 27 = 676 = 4 \cdot 169$ olduğundan $P(1)$ doğru bir önermedir. $P(n-1)$ in

doğru olduğunu kabul edersek, yani $3^{3(n-1)+3} - 26(n-1) - 27 = 169M$ denklemini sağlayan bir M tam sayısının varlığını kabul edersek, buradan $3^{3n} - 26n - 1 = 169M$ çıkar.

$$\begin{aligned} 3^{3n+3} - 26n - 27 &= 27 \cdot 3^{3n} - 26n - 27 = 27(3^{3n} - 26n - 1) + 676n \\ &= 27 \cdot 169M + 169 \cdot 4n = 169(27M + 4n) \end{aligned}$$

olduğundan, $P(n-1)$ in doğruluğu $P(n)$ in doğruluğunu garantilemektedir. Sonuç olarak önerme tüm $n \geq 1$ tam sayıları için doğrudur.

44. **a)** x bir gerçel sayı olmak üzere $x^2 + x$ ve $x^3 + 2x$ rasyonel ise x in rasyonel sayı olduğunu gösteriniz.
b) $x^2 + x$ ve $x^3 - 2x$ rasyonel sayılarken irrasyonel bir x sayısının bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. a) $x^2 + x = a$ ve $x^3 - 2x = b$, $a, b \in Q$ olsun.

$$b = x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 2x = x(x^2 + x) - (x^2 + x) + 3x = ax - a + 3x = x(a+3) - a$$

olur. $a \neq -3$ olduğunu gösterelim. Eğer $x^2 + x = -3$ ise $x^2 + x + 3 = 0$ ve $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} = 0$ dır. Bu x in gerçel sayı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $a \neq -3$ tür ve $x = \frac{a+b}{a+3}$ bulunur yani x bir rasyonel sayıdır.
b) $x^2 + x = a$ ve $x^3 - 2x = b$ ve $a, b \in Q$ olsun. Benzer şekilde,

$$b = x^3 + x^2 - x^2 + x - x - 2x = x(x^2 + x) - (x^2 + x) - x = ax - a - x$$

bulunur. Yani, $x(a-1) = a + b$ dir. Eğer $a = 1$ seçilirse $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ bulunur ve irrasyoneldir. x in her iki değeri için de $b = x^3 - 2x = -a = -1$ dir. Dolayısıyla b rasyonel sayıdır.

45. a ve b, $\left(\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}\right)$ toplamını tam sayı yapan iki doğal sayıdır. a ve b'nin ortak bölenlerinin en büyüğünün $\sqrt{a+b}$ den büyük olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $d = (a, b)$, $a = md$, ve $b = nd$ olsun. Bu durumda

$$\frac{md+1}{nd} + \frac{nd+1}{md} = \frac{m^2d + m + n^2d + n}{mnd}$$

bir tam sayıdır. Bu yüzden $m^2d + m + n^2d + n$, dolayısıyla $m + n$ d'ye bölünür. Bundan da $d \leq m + n$ ve $d \leq \sqrt{d(m+n)} = \sqrt{a+b}$ olduğu çıkar.

46. $m^n - n^m = 3$ eşitliğini sağlayan bütün (m, n) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

Çözüm. Eğer m ve n 'nin her ikisi de tek ya da her ikisi de çift olursa, $m^n - n^m$ işleminin sonucu bir çift sayı olur. O halde m ve n sayılarundan biri tek, diğeri ise çifttir.

m tek, n çift ise $m^n \equiv 1(\text{mod}4)$ olur. Bunu göstermek için $m = 2k+1$ ve $n = 2t$ alalım.

$$m^n \equiv (2k+1)^{2t} \equiv ((2k+1)^2)^t \equiv (4k^2+4k+1)^t \equiv 1^t \equiv 1(\text{mod}4)$$

olduğundan $m^n - n^m \equiv 3(\text{mod}4)$ ve $n^m \equiv 2(\text{mod}4)$ bulunur. Bu durumda $m = 1$ olur. Bu değer eşitliği sağlamaz.

m çift, n tek ise $n^m \equiv 1(\text{mod}8)$ olur. Bu da $m^n \equiv 4(\text{mod}8)$ yani $n \leq 2$ olmasını gerektirir. Bu koşulları ve eşitliği sağlayan tek (m, n) çifti $(4, 1)$ dir.

47. a, b pozitif tam sayıları için $a + 77b$ nin 79 ile, $a + 79b$ nin de 77 ile bölünebildiği biliniyor. Buna göre $a + b$ nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} 79|(a+77b) \Rightarrow 79|(a-2b) \Rightarrow 79|(-78a-2b) &\quad\Rightarrow\quad 79|(39a+b) \\ 77|(a+79b) \Rightarrow 77|(a+2b) \Rightarrow 77|(78a+2b) &\quad\Rightarrow\quad 77|(39a+b) \end{aligned}$$

olduğundan $79 \cdot 77|(39a+b)$ olur. Yani $39a + b = 79 \cdot 77k$ olacak şekilde bir k doğal sayısı vardır. Buradan

$$39a + 39b = 79 \cdot 77k + 38b = (78^2 - 1)k + 38b = (78^2 - 39)k + 38(k + b)$$

bulunur. Yani $39|(b+k)$ olur. Buradan da $k \geq 1$ olduğu da göz önüne alınınca

$$b + k \geq 39 \Rightarrow 39a + 39b \geq (78^2 - 39) + 38 \cdot 39 \Rightarrow a + b \geq 156 - 1 + 38 = 193$$

elde edilir. Örnek olarak $k = 1$, $b = 38$, $a = 155$ alabiliriz.

48. Bir grup çocuk bir torbadaki cevizleri paylaşırlar. Birinci çocuk önce bir ceviz ve sonra da geride kalan cevizlerin onda birini; ikinci çocuk iki ceviz ve geriye kalanların onda birini; üçüncü çocuk da üç ceviz ve geriye kalanların onda birini alır. İşlem bu şekilde sürer ve son çocuk geriye kalan cevizlerin tümünü alır. Sonuçta tüm çocukların aldığı ceviz sayısının eşit olduğu görülür. Çocukların ve cevizlerin sayısını bulunuz.

Çözüm. Çocukların sayısını n, çocuk başına düşen ceviz sayısını da x ile gösterelim. Tüm cevizlerin sayısı $N = nx$ ile gösterirsek, birinci çocuğun aldığı ceviz sayısı $1 + \frac{N-1}{10} = x$ olduğundan $N = 10x - 9$ bağıntısı elde edilir.

Sondan bir önceki çocuk, $(n-1)$ tane ceviz aldıktan sonra geriye kalan y tane cevizin de onda birini alır. Bu durumda son çocuğa $\frac{9y}{10}$ ceviz kalacağından $\frac{9y}{10} = x$ veya $\frac{y}{10} = \frac{x}{9}$ olur ve böylece sondan bir önceki çocuğun aldığı ceviz sayısını $n-1+\frac{x}{9} = \frac{N}{x} - 1 + \frac{x}{9} = x$ şeklinde yazabiliriz. Birinci çocuk için bulduğumuz bağıntıyı kullanarak $\frac{10x-9}{x} - 1 + \frac{x}{9} = x$ yazabiliriz. Bu son denklem düzenlenerek $8x^2 - 81x + 81 = 0$ yani $(x-9)(8x-9) = 0$ elde edilir. Bu denklemin tam sayı çözümü olan $x = 9$ çocuk başına düşen cevizlerin sayısını verir. Buradan tüm cevizlerin sayısı da $N = 81$ olarak bulunur.

49. 7 den büyük her tam sayının, her biri 1 den büyük ve aralarında asal iki tam sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Çözüme şu hatırlatmayla başlayalım. Eğer d tam sayısı a ve b tam sayılarını bölüyorsa, bu sayıların farkını da böler. Buradan, aralarındaki fark 1, 2 veya 4 olan iki tek tam sayının aralarında asal olduğu sonucu çıkar.
7 den büyük bir n tam sayısı verilmiş olsun. Eğer n tek ise, bir $k \geq 3$ tam sayısı için $n = 2k+1 = k + (k+1)$ yazabiliriz. n nin çift olması halinde $k \geq 3$ tam sayısı için $n = 2k$ yazabiliriz. Bu sefer k tek ise $n = (k-2) + (k+2)$; k çift ise $n = (k-1) + (k+1)$ yazarak çözüme ulaşabiliriz.

50. $x + y - xy = 43$ denklemini sağlayan tüm (x, y) sıralı tam sayı çiftlerinin sayısını bulunuz.

Çözüm. Denklemi $xy - x - y + 43 = 0$ ya da $(x-1)(y-1) = -42$ şeklinde yazalım. -42 nin 8 pozitif tam sayı ve 16 tam sayı böleni vardır. Bu bölenlerden her birisi bir çözüm verdiğinden, denklemi sağlayan sıralı tam sayı çiftlerinin sayısı da 16 dır.

51. $n + k^2$ nin en az n tane pozitif k tam sayısı için tam kare olmasını sağlayan bir n pozitif tam sayısı bulunamayacağını gösteriniz.

Çözüm. n ve $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ pozitif tam sayıları için $n + k_i^2$ nin her $i = 1, \cdots, n$ için tam kare olduğunu kabul edelim. $m_i^2 = n + k_i^2$ olarak tanımlanan $m_i > 0$ sayıları için $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ ve $m_1 + k_1 < m_2 + k_2 < \ldots < m_n + k_n$ eşitsizlikleri geçerlidir. Bu durumda $n = (m_i + k_i)(m_i - k_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ olduğu için n'nin en az $2n$ tane farklı pozitif böleni olması gerekir ki bu bir çelişkidir.

52. a, b, c, d tam sayıları için $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = d^2$ denklemini sağlayan c ve d tam sayılarının ancak ve ancak $a \equiv b(\text{mod}2)$ olması durumunda bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Eğer a da b de çift ise,

$$a^2 + b^2 + 1 = 4t + 1 = (2t+1)^2 - (2t)^2$$

ifadesi, önermemizin $c = 2t$, $d = 2t + 1$ şeçilerek doğrulanabileceğini gösterir. Eğer a da b de tek ise,

$$a^2 + b^2 + 1 = 4t + 3 = (2t + 2)^2 - (2t + 1)^2$$

benzer şekilde önermemizi onaylar. Öte taraftan a, ve b'den birinin tek diğerinin de çift olması durumunda aynı ifade

$$a^2 + b^2 + 1 = 2x^2 + (2y + 1)^2 + 1 = 4t + 2 = 2(2t + 1)$$

olur. Oysa $d^2 - c^2$, $c \equiv d(\text{mod}2)$ durumunda 4'e bölünürken, $c \equiv d + 1(\text{mod}2)$ durumunda tektir. Bu yüzden $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = d^2$ sağlanamaz.

53. A ve B üç basamaklı iki pozitif tam sayı olmak üzere, A tam sayısının birinci ve üçüncü basamakları yer değiştirildiğinde B tam sayısı elde edilmektedir. A nın B ye bölümünden kalan, A nın basamakları toplamının yedi katı, bölüm ise 3 olduğuna göre A ve B sayılarını bulunuz.

Çözüm. Burada A ve B sayıları üç basamaklı olduğundan, $ac \neq 0$ olmak üzere $A = (abc)_{10} = 100a + 10b + c$ ve $B = (cba)_{10} = 100c + 10b + a$ olsun. Dolayısıyla

$$100a + 10b + c = 3(100c + 10b + a) + 7(a + b + c)$$
$$\Leftrightarrow 90a - 27b - 306c = 0 \Leftrightarrow 10a - 3b - 34c = 0$$

olduğu görülür. Burada $10a = 3b + 34c$ olduğundan ve $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $1 \leq c \leq 9$ eşitsizliklerinden $30 \leq 10a \leq 90$ ve $30 \leq 3b + 34c \leq 90$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $c \in \{1, 2\}$ olur.
$c = 1$ durumunda $10a = 3b + 34$ olacağından ve $0 \leq b \leq 9$ olduğundan $34 \leq 3b + 34 = 10a \leq 61$ yani $a \in \{4, 5, 6\}$ bulunur. $a = 4$ için $b = \frac{10a-34}{3} = 2$ ve dolayısıyla $A = (abc)_{10} = 421$ ve $B = (cba)_{10} = 124$ bulunur. $a = 5$ ve $a = 6$ içinse b tam sayı değildir.
c=2 durumunda ise $10a = 3b+68$ olacağından $68 \leq 3b+68 \leq 95$ yani $68 \leq 10a \leq 95$ olacağından $a \in \{7, 8, 9\}$ olur. Ancak burada $a = 7$ ve $a = 9$ değerleri için b tam sayı değildir. $a = 8$ içinse $b = \frac{10a-68}{3} = 4$ olduğundan çözümler $A = (abc)_{10} = 842$ ve $B = (cba)_{10} = 248$ olarak bulunur.

54. 100 kağıdın iki yüzü tek ve çift olarak isimlendirilmiştir. Her kağıdın tek yüzüne tek, çift yüzüne çift olmak üzere iki ardışık tam sayı yazılmıştır. Ayrıca bu kağıtlarda 1'den 200'e kadar olan bütün tam sayılar kullanılmıştır. Bir A öğrencisi rastgele 21 kağıt çekiyor ve her iki taraflarındaki sayıları toplayarak 913 buluyor. Bir B öğrencisi ise geri kalan kağıtlardan rastgele 20 kağıt çekiyor ve her iki taraflarındaki

sayıları toplayarak 2400 buluyor. Bu durumda
a) A nın toplamının hatalı olduğunu gösteriniz.
a) Eğer A nın doğru toplamı 903 ise, B nin toplamının hatalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $i = 1, 2, \ldots, 100$ olmak üzere üzerinde $2i-1$ ve $2i$ yazan kağıda K_i diyelim. Bu durumda K_i kağıdındaki sayıların toplamı $T(K_i) = 4i - 1$ olur.
a) A öğrencisinin seçtiği kağıtlar $K_{j_1}, K_{j_2}, \ldots, K_{j_{21}}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_A &= (4j_1 - 1) + (4j_2 - 1) + \ldots + (4j_{21} - 1) \\ &= 4(j_1 + j_2 + \ldots + j_{21}) - 21 \\ &= 4(j_1 + j_2 + \ldots + j_{21} - 6) + 3 \\ &\equiv 3 \pmod 4 \end{aligned}$$

olur. Ancak $913 \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan A öğrencisinin toplamı hatalıdır.
b) 21 kağıt için olası en düşük toplam

$$(T_A)_{min} = 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 21) - 21 = 4\frac{21.22}{2} - 21 = 903$$

olur ve bu A öğrencisinin doğru toplamıdır. Dolayısıyla A öğrencisi $K_1, K_2, \ldots, K_{21}$ kağıtlarını seçmiştir. Bu durumda B öğrencisi geriye kalan $K_{22}, K_{23}, \ldots, K_{100}$ den 20 tanesini seçecektir. Ancak bu durumda B öğrencisinin toplamının olası en düşük değeri

$$\begin{aligned} (T_B)_{min} &= 4(22 + 23 + \ldots + 41) - 20 \\ &= 4(21 + 1 + 21 + 2 + \ldots + 21 + 20) - 20 \\ &= 4.21.20 + 4(1 + 2 + \ldots + 20) - 20 \\ &= 1680 + 4.\frac{20.21}{2} - 20 \\ &= 1680 + 840 - 20 \\ &= 2500 \end{aligned}$$

olur. Yani B öğrencisinin toplamı hatalıdır.

55. $p^2 + 11$ sayısının 11 den daha az pozitif bölenlere sahip olduğu tüm p asal sayılarını bulunuz.

Çözüm. $p = 2$ ise, $p^2 + 11 = 15 = 3 \cdot 5$ tir ve 4 tane pozitif böleni vardır. $p = 3$ ise, $p^2 + 11 = 20 = 2^2 \cdot 5$ dir ve 6 tane pozitif böleni vardır. 3 ten büyük tüm p asal sayıları için $p^2 \pmod 3$ ve $\pmod 4$ te 1 e denk olduğu için $p^2 + 11$ sayısı 3 ve 4 ile tam bölünür. Bu bilgiler ışığında $p^2 + 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot a$ yazabiliriz.
$p \geq 11$ ise, $p^2 + 11 \geq 132$ dir. $a \geq 11$ için $p^2 + 11$ sayısının bölenlerinden 1, 2, 3, 4, 6,

12, $2a$, $3a$, $4a$, $6a$, $12a$ sayılarının birbirinden farklı olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla, $p \geq 11$ değerleri istenilen koşula uymamaktadır.
Şimdi p nin 5 ve 7 olduğu durumları inceleyeceğiz. $p = 5$ ise, $p^2 + 11 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$ dir ve 9 tane pozitif böleni vardır. $p = 7$ ise, $p^2 + 11 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ dir ve 12 tane pozitif böleni vardır.
Sonuç olarak, sadece 2, 3 ve 5 asal sayıları için $p^2 + 11$ sayısı 11 den daha az pozitif bölenlere sahip olur.

56. İki ardışık sayının küplerinin farkı bir n tam sayısının karesi ise n nin iki ardışık sayının kareleri toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz. (Mesela, $8^3 - 7^3 = 169 = 13^2$ ve $13 = 2^2 + 3^2$ dir.)

Çözüm. Soruda verilen n sayısının karesini $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(m+1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1 = n^2$ şeklinde yazabiliriz. Son eşitliğin her iki tarafını 4 ile çarparsak, $3(2m+1)^2 = (2n-1)(2n+1)$ eşitliğini elde ederiz. a ve b aralarında asal iki sayı ise, $(2n-1)$ ve $(2n+1)$ sayıları aralarında asal olduklarından

- $2n - 1 = 3a^2$, $2n + 1 = b^2$
- $2n - 1 = a^2$, $2n + 1 = 3b^2$

durumları vardır. İlk durumda, $b^2 = 3a^2 + 2$ olacağından $b^2 \equiv 2 \pmod 3$ olur ama bu durum mümkün değildir.
İkinci durumda, a sayısı tek sayı olmalıdır. Eğer $a = 2k+1$ dersek $2n - 1 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ olacaktır. Yani, $2n = 4k^2 + 4k + 2 = 2(k^2 + (k+1)^2)$ dir. Böylece, $n = k^2 + (k+1)^2$ bulunur.

57. $n \geq 1$ olmak üzere $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dizisi, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ olan ve $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1} + 1}$ koşulunu sağlasın.
a) Dizinin her teriminin bir pozitif tam sayı olduğunu gösteriniz.
b) $2a_n a_{n+1} + 1$ sayısının her $n \geq 1$ için bir tam kare olduğunu gösteriniz.

Çözüm. a) Soruda verilen indirgemeli formül $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}}$ dir. Tümevarım kullanarak $k \leq n$ iken $a_k \in \mathbb{N}$ olmasının $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ yi gerektirdiğini göstereceğiz. $\forall k \leq n$ için $a_k \in \mathbb{N}$ ve ek olarak bu tür her k için $(a_k, a_{k-1}) = 1$ olduğunu tümevarım hipotezi olarak kabul edelim. $n = 2$ ve $n = 3$ durumları kolaylıkla hesaplanabileceğinden, $n \geq 4$ olsun.
$a_n = \frac{a_{n-1}^2 - 1}{a_{n-2}}$ bize $a_{n+1} = \frac{a_{n-1}^4 - 2a_{n-1}^2 + 1 - a_{n-2}^2}{a_{n-2}^2 a_{n-1}}$ eşitliğini verecektir. $a_{n-1}a_{n-3} + 1 = a_{n-2}^2$ ifadesinden, $a_{n-1} | a_{n-2}^2 - 1$ ve $a_{n-1} | a_{n-1}^4 - 2a_{n-1}^2 + 1 - a_{n-2}^2$ bulunur. Diğer taraftan, $a_{n-2}^2 | (a_{n-1}^2 - 1)^2 = a_{n-2}^2 a_n^2$ ve $(a_{n-2}, a_{n-1}) = 1$ olduğundan, $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ dir. $a_{n+1}a_{n-1} - 1 = a_n^2$ ifadesinden de $(a_n, a_{n+1}) = 1$ bulunacaktır. Bu da tümevarımı bitirir.

b) n sayısına küçük değerler verilerek $2a_n a_{n+1} + 1 = (a_{n+1} - a_n)^2$ eşitliği kolaylıkla bulunabilir. Bu eşitliği tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ durumu açıktır. $n \geq 2$ kabul edelim. Bu durumda

$$2a_n a_{n+1} = a_{n+1}^2 - 2a_n a_{n+1} + a_n^2 - 1 = a_{n+1}(a_{n+1} - 2a_n) + a_{n+1}a_{n-1}$$

olacaktır. Her iki tarafı $a_{n+1} > 0$ a bölerek, $4a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ ve $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ elde edilir. $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ ilişkisini göstermek soruyu çözecektir. $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n}$ olduğundan

$$4a_{n+1}a_n - a_n^2 = a_{n+1}^2 - 1 \Leftrightarrow 2a_n a_{n+1} + 1 = (a_{n+1} - a_n)^2$$

bulunur. Fakat bu bizim tümevarım hipotezimizdir.

58. $x + y$ ve xy birer pozitif tam sayı ve $x + y = xy$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x, y) irrasyonel sayı çifti bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. $n = x + y = xy$ olsun. Buradan $y = n - x$ elde edilir. Bulduğumuz y değerini bir önceki denklemde yerine yazarsak, $n = x(n - x)$ denklemini elde ederiz ki bu da bize, $x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4n}}{2}$ eşitliğini verir.
$n \geq 5$ için,

$$n^2 - 6n + 9 < n^2 - 4n < n^2 - 4n + 4 \quad \text{, yani} \quad (n-3)^2 < n^2 - 4n < (n-2)^2$$

olduğundan $n^2 - 4n$, tam kare olmayan bir pozitif tam sayıdır. Bu durumda her $n \geq 5$ tam sayısı için $x = \frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}$ ve $y = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2}$ irrasyonel sayıları istenen özelliği sağlar.

59. $(a_n)_{n \in N}$ dizisi şu şekilde verilmiş olsun

- $a_1 = 1$
- $a_n = \frac{4n-2}{n} a_{n-1}$, $n \geq 2$

Bu dizinin bütün terimlerinin pozitif tam sayı olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Her $n \geq 2$ için

$$a_n = \frac{2(2n-1)}{n} a_{n-1} = \frac{2^2(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} a_{n-2} = \ldots = \frac{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2} a_1$$

Pay ve paydayı $(n-1)!$ ile çarpıp $2^{n-1}(n-1)! = (2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2$ eşitliğini kullanarak $a_n = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \binom{2n-1}{n} \in Z$ elde edilir.

60. Üç öğrenci tahtaya yan yana, üç tane iki basamaklı tam kare yazıyor. Sonuçta oluşan altı basamaklı sayı da bir tam kare oluyorsa tahtaya yazılan sayı kaç olabilir?

Çözüm. x, y ve z tahtaya yazılan iki basamaklı sayılar, u^2 de oluşan altı basamaklı sayı olsun. x, y ve z sayıları iki basamaklı ve tam kare oldukları için 16, 25, 36, 49, 64 ya da 81 sayılarına eşit olabilirler. O halde $161616 \leq u^2 < 818181$'dir. Buradan da $402 \leq u \leq 904$ bulunur. $u = (abc)_{10}$ olsun. $b > 1$ olursa x tam kare olamaz. $b = 1$ durumunda ise sadece $410^2 < 170000$ şartı sağlandığından $a = 4$ olabilir. Yani iki durum vardır:

- $a = 4$ ve $b \in \{0, 1\}$
- $a > 4$ ve $b = 0$

$a = 4$ ve $b = 0$ ise $x = 16$ ve $8c \cdot 100 = 100y + z$ olur. Buradan $y = 16$, $c = 2$ ve $z = 4$ ya da $y = 64$, $c = 8$ ve $z = 64$ olur. Fakat z iki basamaklı olduğu için 4 olamaz. O halde $y = 64$, $c = 8$ ve $z = 64$'tür. $u = 408$, u^2 de 166464 olur.
Eğer $a = 4$, $b = 1$ ise $x = 16$, $y = 81$ ve $z = c \cdot (82c)$ olur. Fakat buradan elde edilecek z iki basamaklı bir tam kare olamayacağı için bir çözüm elde edilemez.
Eğer $a > 4$ ve $b = 0$ ise, $(200a + c)c = 100y + z$'dir. O halde $y = 2ac$ ve $z = c^2$ olur. $a > 4$ ve $c \geq 4$ olduğu için $y = 64$, $a = 8$, $c = 4$ ve $u = 804$, $u^2 = 646416$ elde edilir. Dolayısıyla tahtaya yazılan sayı 166464 veya 646416 olabilir.

61. n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n$ eşitliğini sağlayan, negatif olmayan bütün a, b, c, d tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $n = 0$ için çözümler $(2, 1, 1, 1)$ ve permütasyonlarıdır.

$n \geq 1$ iken $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod 4$ olur ve buradan da a, b, c, d nin hepsinin tek ya da hepsinin çift olduklarını görürüz. İki durum inceleyeceğiz.

a, b, c, d çift ise $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$, $d = 2t$ olsun. Bu durumda denklem

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 7 \cdot 4^{n-1}$$

şeklinde yazılır. Yani a, b, c, d sayılarını sürekli ikiye bölersek yeni çözümler elde ederiz. Sonuç olarak a, b, c, d sayılarının tek olduğu çözümleri aramamız gerekmektedir.

a, b, c, d tek ise $a = 2x + 1, b = 2y + 1, c = 2z + 1, d = 2t + 1$ olsun. Bu durumda denklem

$$4x(x + 1) + 4y(y + 1) + 4z(z + 1) + 4t(t + 1) = 4(7 \cdot 4^{n-1} - 1)$$

şeklinde yazılır. $n(n+1)$ çift olduğu için denklemin sol tarafı 8 in katıdır. Dolayısıyla $7 \cdot 4^{n-1} - 1$ çift olmalıdır ki bu sadece $n = 1$ durumunda mümkündür. Şimdi denklem $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 28$ olur ve çözümler $(5, 1, 1, 1)$, $(3, 3, 3, 1)$ ve bunların permütasyonları şeklindedir.

Sonuç olarak, bütün çözümler $(2^{n+1}, 2^n, 2^n, 2^n)$, $(3\cdot 2^n, 3\cdot 2^n, 3\cdot 2^n, 2^n)$, $(2^n, 2^n, 2^n, 5\cdot 2^n)$ ve bunların permütasyonları şeklindedir.

62. $xy+yz+zx-xyz = 2$ denklemini sağlayan bütün (x, y, z) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm. Genelliği bozmadan $x \leq y \leq z$ olduğunu kabul edelim. $x = 1$ için, $y+z = 2$ denklemi elde edilir. Bu durumda tek çözüm, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ olur. $x = 2$ için, $2y + 2z - yz = 2$, yani $(y-2)(z-2) = 2$ denklemi elde edilir. Buradan $z = 4$, $y = 3$ olduğundan, $x = 2$ için çözümler $(x, y, z) = (2, 3, 4)$ ve permütasyonlarıdır. $x \geq 3$ için, $y \geq 3$ ve $z \geq 3$ olacağından, $xyz \geq 3yz$, $xyz \geq 3xz$ ve $xyz \geq 3xy$ olur. Ancak buradan $xy + yz + xz - xyz \leq 0$ elde edildiğinden, bu durum için sonuç yoktur.

63. $\frac{2^{58}+1}{5}$ sayısının asal olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm. Öncelikle $\frac{2^{58}+1}{5}$ in tam sayı olduğunu gösterelim. $2^{58} = 2^2(2^4)^{14}$ ve $2^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan, $2^{58} \equiv 4 \pmod 5$ tir. Her iki tarafa da 1 eklesek, $2^{58} + 1 \equiv 0 \pmod 5$ elde ederiz. Bu da 5 in $2^{58} + 1$ i tam böldüğünü gösterir.
Şimdi $2^{58}+1$ i çarpanlarına ayıralım. $(2^{29}+1)^2 = (2^{58}+1)+2^{30}$ olduğundan $2^{58}+1$ iki kare farkı olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}(2^{58}+1) &= (2^{29}+1)^2 - 2^{30}\\ &= (2^{29}+1)^2 - (2^{15})^2\\ &= (2^{29}+2^{15}+1)(2^{29}-2^{15}+1)\end{aligned}$$

Her iki çarpan da 5 ten büyük olduğu için, a ve b 1 den büyük pozitif tam sayılar olmak üzere, $2^{58} + 1 = 5ab$ dir. Dolayısıyla $\frac{2^{58}+1}{5}$ asal değildir.

64. $x + y + z = xyzt$ koşulunu sağlayan bütün pozitif x, y, z, t tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. Genellemeyi bozmadan $x \leq y \leq z$ olduğunu kabul edelim. $x+y+z = xyzt$ eşitliğinde her iki tarafı da xyz ye bölersek

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = t$$

elde ederiz. Buradan $t \leq 3$ olması gerektiğini görürüz. Çözümü şu üç durumda inceleyelim:
$t = 3$ olursa $x = y = z = 1$ olmalıdır.
$t \leq 2$ olursa $x = 1$ olmalıdır. Bunu görmek için, $2 \leq x$ olduğunu kabul edelim. $2 \leq x \leq y \leq z$ eşitsizliğinden

$$t = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \leq \frac{3}{4}$$

elde ederiz. Bu bir çelişkidir. $x = 1$ olmalıdır. Benzer şekilde $y = 1$ olduğunu gösterelim. $2 \leq y$ olduğunu kabul edelim. $2 \leq y \leq z$ eşitsizliğinden

$$t = \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

olmak üzere bir çelişki elde ederiz. $x = 1$, $y = 1$ ise $2 = 1 + \frac{2}{z}$ olmalıdır ve buradan da $z = 2$ buluruz.
$t = 1$ olursa $x = 1$ olduğunu göstermiştik. $y \geq 3$ olduğunu kabul edelim. O zaman $z \geq 3$ olması gerektiği açıktır. Buradan

$$t \leq \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 1} = \frac{7}{9}$$

olmak üzere bir çelişki elde ederiz. $y \leq 2$ dir ve $y = 1$ olamayacağı açıktır. Yani $y = 2$ olmalıdır. $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{z}$ olduğundan $z = 3$ bulunur.
İstenilen şartı sağlayan (x, y, z, t) lerin kümesi: $\{(1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,2,3,1)\}$ ve permütasyonlarıdır.

65. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ sayılarının hepsi sadece bir kere kullanılarak bir x sayısı oluşturuluyor. x in basamaklarındaki rakamların yerleri değiştirilerek bir y sayısı elde ediliyor. y nin x i bölmediğini gösteriniz.

Çözüm. x ve y nin basamaklarının toplamı 28 dir. Buradan x ve y nin 9 a bölümlerinden kalanın 1 olduğunu buluruz. Başka bir deyişle, k_1 ve k_2 tam sayılar olmak üzere $x = 9k_1 + 1$, $y = 9k_2 + 1$ dir. y nin x i böldüğünü kabul edelim. Buradan, $m > 1$ olmak üzere $9k_1 + 1 = x = m(9k_2 + 1) = 9mk_2 + m$ elde ederiz. Basamakların yerleri değiştirildiği için $m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ olmalıdır. $9k_1 + 1 = x = 9mk_2 + m$ eşitliğinden dolayı bunun bir çelişki olduğu açıktır.

66. **a)** Her k tam sayısı için, $(2k+1)^3 - (2k-1)^3$ in üç tam karenin toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.
b) n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $(2k+1)^3 - 2$ sayısının $3n - 1$ tane 1 den büyük tam karenin toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm. a) $(2k+1)^3-(2k-1)^3$

$$\begin{aligned}
&= [2k+1-(2k-1)]\left[(2k+1)^2+(2k+1)(2k-1)+(2k-1)^2\right] \\
&= 2\left[(2k+1)^2+(2k+1)(2k-1)+(2k-1)^2\right] \\
&= 2(2k+1)^2+2(2k+1)(2k-1)+2(2k-1)^2 \\
&= \left[(2k+1)^2+2(2k+1)(2k-1)+(2k-1)^2\right]+(2k+1)^2+(2k-1)^2 \\
&= [(2k+1)+(2k-1)]^2+(2k+1)^2+(2k-1)^2 \\
&= (4k)^2+(2k+1)^2+(2k-1)^2
\end{aligned}$$

b)$(2n+1)^3-2$ ifadesini $[(2n+1)^3-1]-1$ şeklinde yazalım. Parantez içindeki ifadeye 1 ile $(2n+1)$ arasındaki bütün tek sayıların küplerini ekleyip çıkaralım ve aşağıdaki gibi sıralayıp gerekli düzenlemeleri yapalım.

$$\begin{aligned}
&= \left[(2n+1)^3-(2n-1)^3+\ldots+3^3-1\right]-1 \\
&= [(2n+1)^3-(2n-1)^3]+\ldots+[5^3-3^3]+[3^3-1]-1 \\
&= [(2n+1)^3-(2n-1)^3]+\ldots+[5^3-3^3]+4^2+3^2+1^2-1 \\
&= [(2n+1)^3-(2n-1)^3]+\ldots+[5^3-3^3]+4^2+3^2
\end{aligned}$$

Son bulunan ifadedeki köşeli parantezle gözterilen $n-1$ terimi 3 tam karenin toplamı olarak yazarsak sayıyı $3n-1$ tam karenin toplamı olarak ifade etmiş oluruz.

67. Genel terimi $n^3-(2n+1)^2$ olan (a_n) dizisinde 2006'ya bölünebilen bir terim var mıdır?

Çözüm. Evet vardır. Öncelikle $a_4=4^3-9^2=-17$ ve $a_7=7^3-15^2=118$ olduğunu gözlemleyelim. $n^3-(2n+1)^2$ bir polinom olduğu için $a_{17k+4}\equiv a_4 \pmod{17}$ ve $a_{118l+7}\equiv a_7 \pmod{118}$ olur. 119 sayısı 17 ye tam bölündüğü için 118 sayısının 17'ye bölümünden kalan 16 olur. Dolayısıyla $361=7+118.3$ sayısının 17 ye bölümünden kalan 4 tür. Bu demek oluyor ki a_{361} sayısı hem 17 ye hem de 118 e tam bölünür, yani 2006 ya tam olarak bölünmektedir.
Not 1: 17 ve 118 sayıları aralarında asal olduğu için Çinli Kalan Teoremi bize $n\equiv 4 \pmod{17}$ ve $n\equiv 7 \pmod{118}$ olacak şekilde bir n sayısının olduğunu garanti eder.
Not 2: Verilen koşulları sağlayan en küçük sayı $n=87$ için elde edilir, bu durumda $a_{87}=627878=313.2006$ olur.

68. Aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadığını gösteriniz.
a) $n\geq 3$ olacak şekilde bütün n tam sayıları için, herhangi ikisinin çarpımı geri kalan $(n-2)$ tam sayının toplamıyla kalansız bölünecek şekilde n tane farklı pozitif tam sayı vardır.

b) $n \geq 3$ olacak şekilde, bazı n tam sayıları için, herhangi $(n-2)$ tanesinin toplamı geriye kalan iki tam sayının çarpımıyla kalansız bölünecek şekilde n tane farklı pozitif tam sayı vardır.

Çözüm. **a)** Doğru. n tane sayıyı $(n^2)!$, $2(n^2)!$, $\ldots$, $n(n^2)!$ olarak alalım. Bu sayılardan herhangi iki tanesinin çarpımının $(n^2)!(n^2)!$ ile kalansız bölündüğü açıktır. Şimdi geriye kalan sayıların toplamına $k(n^2)!$ diyelim. Burada $k < 1+2+\ldots+n < n^2$ olduğundan, k tam sayısı $(n^2)!$'i böler. Dolayısıyla $k(n^2)!$ herhangi iki sayının çarpımını böler.

b)Yanlış. Herhangi bir n için, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ olan n adet tam sayıyı alalım. Bu durumda,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} < a_{n-2} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-2} = (n-2)a_{n-2}$$

elde edilir. Ancak öte yandan,

$$a_{n-1}a_n \geq (n-1)a_n > (n-2)a_{n-2}$$

olduğundan, $a_1+a_2+\ldots+a_{n-2} < a_{n-1}a_n$ olur ki bu durumda da $a_{n-1}a_n$ çarpımının $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}$ değerini bölemeyeceği açıkça görülür.

69. $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ olsun. $n > 1$ için, H_n in bir tam sayı olamayacağını gösteriniz.

Çözüm. r, $2^r \leq n$ şartını sağlayan en büyük tam sayı olsun. $b = [2, 3, \ldots, n]$ dersek $b = 2^r \cdot s$ ve s tek sayı olur.

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^r} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{\frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \cdots + \frac{b}{2^r} + \cdots + \frac{b}{n}}{b} = \frac{a}{b}$$

olur. Paydaki tam sayılardan $\frac{b}{2^r}$ tek, diğerleri çifttir. Bu durumda a tek, b çift olur ve $\frac{a}{b}$ tam sayı olamaz.

70. x tam sayı olmayan, pozitif bir rasyonel sayı ise x^x in rasyonel olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $(a, b) = 1$ ve $b > 1$ olacak şekilde $x = \frac{a}{b}$ olsun. x^x in rasyonel olduğunu kabul edelim. Yani $c, d \in \mathbb{Z}$ ve $d \neq 0$ olmak koşulu ile, $x^x = \frac{c}{d}$ şeklinde yazılabilir. $x = \frac{a}{b}$ olduğundan,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^a = \left(\frac{c}{d}\right)^b \Rightarrow a^a \cdot d^b = c^b \cdot b^a$$

elde edilir. $b > 1$ olduğundan, b nin en az bir p asal çarpanı vardır. O halde p ve u aralarında asal olmak koşulu ile, $r > 0$ için $b = p^r \cdot u$ şeklinde yazılabilir. Şimdi p

nin a, b, c ve d sayılarında bulunan kuvvetlerini inceleyelim:

$b^a : ra$ $\quad b = p^r \cdot u$ olduğu için $b^a = p^{ra} \cdot u^a$ olacaktır.

$a^a : 0$ $\quad a$ ve b aralarında asal sayılar olduğu için p, a^a nın bir böleni değildir.

$d^b : sb$ $\quad p|d$ olduğundan $d = p^s \cdot v$ ve $(v, p) = 1$ olacaktır.

$cb : 0$ $\quad$ Çünkü c ve d aralarında asal sayılardır.

Her sayı tek türlü asal çarpanlarına ayrılabileceğinden bulduğumuz eşitliğin her iki tarafındaki p nin kuvvetlerinin birbirlerine eşit olması gerekir, yani $ra = sb$ dir. Bu da b nin ra yı bölmesi demektir. a ve b aralarında asal oldukları için, b, r yi bölmek zorundadır. Bu ise, $r \geq b = p^r \cdot u \geq p^r$ olmasını gerektirir. Ancak $p > 1$ için $r \geq p^r$ olamaz. O halde baştaki kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla x^x, tam sayı olmayan bir x rasyonel sayısı için, rasyonel değildir.

71. m bileşik bir tam sayı olmak üzere, a, b, c, d pozitif tam sayıları için ab ve cd, m sayısının iki farklı çarpanlarına ayrılmış hali olsun ($m = ab = cd$). Her $n \geq 0$ tam sayısı için $a^n + b^n + c^n + d^n$ sayısının asal olmadığını gösteriniz.

    Çözüm. $a = ru$, $b = sv$, $c = rs$, $d = uv$ olacak şekilde r, s, u, v pozitif tam sayıları vardır. Buradan $a^n + b^n + c^n + d^n = r^n u^n + s^n v^n + r^n s^n + u^n v^n = (r^n + v^n)(s^n + u^n)$ eşitliğini yazabiliriz. Her $n \geq 0$ tam sayısı için $a^n + v^n$ ve $s^n + u^n$ sayıları 1 den büyüktür. Dolayısıyla $a^n + b^n + c^n + d^n$ sayısı asal değildir.

72. a, b ve c tam sayılar olmak üzere, $c^2 + 1 = (a^2 - 1)(b^2 - 1)$ denkleminin bütün çözümlerini bulunuz.

    Çözüm. $c = 0$ ise, $a^2 - 1 = \mp 1$ ve $b^2 - 1 = \mp 1$ olmalıdır. Bunun için de $a = 0$ ve $b = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $c > 0$ durumu için bir çözüm arıyoruz dersek genelliği kaybetmemiş oluruz.

    Şimdi $c > 0$ için denklemin bir çözümünün olduğunu kabul edelim. Eşitliği (mod 4)te düşünürsek, (mod 4)te bir sayının karesi ancak ve ancak 0 veya 1 olabileceğinden, $(a^2 - 1) \equiv -1, 0 (\bmod 4)$ ve $(b^2 - 1) \equiv -1, 0 (\bmod 4)$ elde edilir ve buradan da $(c^2 + 1) \equiv 1 (\bmod 4)$ bulunur. Yani, $(a^2 - 1) \equiv (b^2 - 1) \equiv -1 \pmod 4$ ve, $(c^2 + 1) \equiv 1 \pmod 4$ olur. Buradan da a, b ve c tam sayılarının çift tam sayılar olduklarını anlarız.

    a, b ve c çift tam sayılar olduklarına göre, $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$ olacak şekilde a_1, b_1, c_1 tam sayıları tanımlayabiliriz. Bu durumda, $4c_1^2 + 1 = (4a_1^2 - 1)(4b_1^2 - 1)$ elde ederiz. Bunu da sadeleştirirsek; $c_1^2 = 4a_1^2 b_1^2 - a_1^2 - b_1^2$ buluruz. Bu denklemi (mod4)te düşünürsek, a veya b den en az birisi tek sayı olursa $c_1^2 \equiv 2 \pmod 4$ ya da $c_1^2 \equiv 3 (\bmod 4)$ olur. Bu da mümkün olmadığı için a_1, b_1, c_1 tam sayıları da çift tam sayılardır.

    Şimdi de $a_1 = 2a_2$, $b_1 = 2b_2$, $c_1 = 2c_2$ olacak şekilde a_2, b_2, c_2 tam sayıları tanımlayalım. Bu durumda, $c_2^2 = 16a_2^2 - a_2^2 - b_2^2$ elde ederiz ki bu denkleme de (mod 4)te bakarsak, a_2, b_2, c_2 tam sayılarının çift tam sayılar olduklarını görürüz.

Bu şekilde sonsuza kadar devam edebileceğimiz aşikardır. Dolayısıyla sonsuz bir azalan pozitif tam sayı dizisi elde ederiz: $c > c_1 > c_2 > c_3 > \ldots > 0$. Ancak bu imkansızdır. Bu da demek oluyor ki baştaki $c > 0$ için denklemin bir çözümünün olduğu kabulümüz yanlıştır.

Sonuç olarak, $c^2 + 1 = (a^2 - 1)(b^2 - 1)$ denklemini sağlayan tek tam sayı değerleri $a = b = c = 0$ olur.

73. A kümesi 1 tam sayısını ve en az bir pozitif tam sayıyı daha içeren bir küme olsun. A kümesinden alınan her m ve n tam sayıları için $\frac{m+1}{(m+1,n+1)}$ tam sayısının da kümenin bir elemanı olduğu biliniyor. Bu durumda A kümesinin bütün pozitif tam sayıları içerdiğini gösteriniz.

Çözüm. a tam sayısı A kümesinin 1 den büyük en küçük elemanı olsun. Burada $m = a$ ve $n = 1$ için $y = \frac{a+1}{(2,a+1)} \in A$ olur. Burada $(2, a+1)$ değeri 1 ya da 2 olabileceğinden, $y = a + 1$ ya da $\frac{a+1}{2}$ olabilir.

Ancak $1 < \frac{a+1}{2} < a$ olduğundan, $y = a + 1$ olmalıdır. Şimdi $m = a + 1$ ve $n = a$ aldığımızda ise $\frac{a+2}{(a+2,a+1)} = a + 2 \in A$ buluruz. Dolayısıyla her $t \geq a$ için $t \in A$ olduğu açıkça görülür.

Bu durumda $m = 2a - 1$ ve $n = 3a - 1$ alalım. Burada $(m+1, n+1) = (2a, 3a) = a$ olduğundan $\frac{2a}{a} = 2 \in A$ olduğu görülür, dolayısıyla tanımından dolayı a=2 olmalıdır. Sonuç olarak A kümesinin bütün pozitif tam sayıları bulundurduğu açıkça görülür.

74. Herhangi bir pozitif n tam sayısı için $n! + 1$ ve $(n+1)!$ in en büyük ortak bölenlerini bulunuz.

Çözüm. Eğer $n + 1$ asal bir sayı değilse o zaman $(n + 1)!$ i bölen bütün asal sayılar n den büyük olamaz yani $n!$ i de bölerler ve $n! + 1$ i bölemezler. Bu durumda $(n! + 1, (n + 1)!) = 1$ olur. Eğer $n + 1$ asal sayı ise o zaman yukarıdaki fikirden $(n! + 1, (n + 1)!) = (n + 1)^k$ olmalıdır. Wilson teoreminden $(n + 1)|(n! + 1)$ dir. $(n + 1)^2$, $(n + 1)!$ i bölemediğinden $(n! + 1, (n + 1)!) = n + 1$ olur.

75. $n|(2^n - 1)$ şartını sağlayan bütün pozitif n tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $n = 1$ sorudaki şartı sağladığından çözümler arasındadır. Şimdi $n > 1$ durumunu ele alalım ve bu durumda aslında çözüm olamayacağını gösterelim.

$n|(2^n - 1)$ olsun. $n > 1$ olduğu için, en az bir adet asal çarpanı vardır. Bunlardan en küçüğüne p diyelim. Ancak n tek sayı olduğundan $p > 2$ olur. $n|(2^n - 1)$ olduğundan $p|(2^n - 1)$ yani $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ elde edilir. Ayrıca Fermat Teoreminden $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ olur.

2 nin (mod p) deki derecesine d diyelim. $d|n$ ve $d|(p-1)$ olduğu açıktır. n nin en küçük asal böleni p olduğu için $(n, p-1) = 1$ dir. Buradan $d = 1$ olduğu görülür. $2^1 \equiv 1 \pmod{p}$ olduğundan çelişki elde edilir.

Sonuç olarak $n|(2^n - 1)$ şartını sağlayan tek pozitif tam sayı 1 dir.

76. $a^4 + 4b^4$ değerini asal sayı yapan bütün a, b pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

Çözüm. Öncelikle

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) = \left[(a+b)^2 + b^2\right]\left[(a-b)^2 + b^2\right] \end{aligned}$$

olduğunu görelim. Burada $(a+b)^2 + b^2 > 1$ olduğu için bu sayının bir asal sayı olabilmesi için $(a-b)^2 + b^2 = 1$ olmalıdır. Bu ancak $a = b$ ve $b = 1$ durumunda sağlanacağından($a^4 + 4b^4 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow$ asal) , verilen özelliği sağlayan değerlerin yalnızca $a = b = 1$ olduğu görülür.

77. n bir tam sayı olmak üzere, $2^n + 3^n$ bir rasyonel sayının karesi olabilir mi?

Çözüm. Öncelikle n nin pozitif olduğu durumu inceleyelim. $2^n + 3^n = (-1)^n + 0 = (-1)^n (\text{mod}3)$ ve (mod 3) te bütün sayıların kareleri 0 ya da 1'e eşit olduğundan n nin çift olduğu sonucuna ulaşılır.
Pozitif bir m sayısı için $n = 2m$ olsun. $2^n + 3^n = 4^m + 9^m = (-1)^m + (-1)^m = \pm 2 (\text{mod}5)$ our. (mod 5) te bütün tam kareler 0,1 ya da 4' e eşit olabilirler. Yani bir tam kare (mod 5) te 2 ya da -2 ye eşit olamaz. Bu durumda $2^n + 3^n$, pozitif bir n tam sayısı için, bir tam kare değildir.
Negatif n değerleri için, pozitif bir m sayısı için $m = -n$ olsun.

$$2^n + 3^n = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{3^m} = \frac{2^m + 3^m}{6^m}$$

Pozitif bir d tam sayısı için, eğer $d|2^m + 3^m$ ve $d|6^m$ ise $d|2^m(2^m + 3^m) - 6^m = 2^{2m}$ olur. Aynı şekilde $d|3^{2m}$. Fakat 2^{2m} ve 3^{2m} aralarında asal sayılar olduğu için $d = 1$ olmak zorundadır. O halde $2^m + 3^m$ ve 6^m de aralarında asal sayılardır. Bu durumda $\frac{2^m+3^m}{6^m}$ nin tam kare olması için hem $2^m + 3^m$ hem de 6^m nin tam kare olması gerekir. Fakat pozitif bir n sayısı için $2^n + 3^n$'nin bir tam kare olmadığını göstermiştik. Bu yüzden $\frac{2^m+3^m}{6^m}$ bir tam kare olamaz.
$n = 0$ için de $2^n + 3^n$ bir tam kare değildir.
Dolayısıyla hiç bir n tam sayısı için $2^n + 3^n$ bir tam kare değildir.

78. $z^2 = (x^2 + 1)(y^2 - 1) + n$ denklemini:
a) $n = 2006$

b) $n = 2007$
durumlarında sağlayan x, y ve z tam sayı değerleri var mıdır?

Çözüm. a) $n = 2006$ durumunda, verilen denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$x^2 - y^2 + z^2 - x^2y^2 = 2005$$

Şimdi $x^2 - y^2 = 2005$ durumunu ele alalım. Bu durumda eşitliğin iki tarafını da çarpanlarına ayırırsak, $(x+y)(x-y) = 5 \cdot 401$ elde ederiz. Dolayısıyla çözümlerden biri olan $x+y = 401$, $x-y = 5$ değerlerini alalım. Bu iki denklemi beraber çözersek, $x = 203$, $y = 198$ değerlerini, ve $z = xy$ olarak alırsak $z = 203 \cdot 198 = 40194$ buluruz ve bu değerlerin verilen denklemi sağladığı açıktır.
b)

$$z^2 = (x^2+1)(y^2-1) + 2007$$

denklemini sağlayan x, y ve z tam sayı değerleri olduğunu kabul edelim. Bu durumda $z^2 \equiv 0,\ 1$ ya da $4 \pmod 8$ olmasına rağmen denklemin diğer tarafı sadece 2, 5, 6 ya da 7 (mod 8) değerleri alabilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla bu denklemi sağlayan x, y, z tam sayı üçlüleri yoktur.

79. $a_0 = 3$ ve $n \geq 1$ için $a_n = 2 + a_0a_1 \ldots a_{n-1}$ olarak tanımlanmış (a_n) dizisi için
a) Dizinin herhangi iki elemanının aralarında asal olduklarını ispatlayınız.
b) a_{2007} yi bulunuz.

Çözüm. a) a_0 tek sayı olduğu için dizinin bütün elemanları tek sayıdır. Dizinin herhangi iki elemanı a_k ve a_n alınsın ve $k < n$ olsun. m, a_k ile a_n nin bir ortak böleni olsun. Sorunun çözümü için $m = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a_n - 2 = a_0a_1 \ldots a_{n-1}$ dir. $m|a_k$ olduğu için $m|a_0a_1 \ldots a_{n-1}$ dir. $m|a_n$, dolayısıyla $m|2$ olmalıdır.
$m = 2$ ise a_k ve a_m çift sayılardır. Fakat dizinin elemanları tek sayılardı. Dolayısıyla $m = 1$ dir.
b) Denklemde $a_0a_1 \ldots a_{n-2} = a_{n-1} - 2$ yazarsak,

$$2 + (a_{n-1} - 2)a_{n-1} = a_n,$$

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} + 1 = a_n - 1,$$

$$(a_{n-1} - 1)^2 = a_n - 1$$

bulunur. Bilinen eşitlikler düzenlenirse,

$$a_n - 1 = (a_{n-1} - 1)^2 = (a_{n-2} - 1)^4 = \ldots$$

$$= (a_{n-k} - 1)^{2^k} = \ldots = (a_0 - 1)^{2^n} = 2^{2^n}.$$

Yani, $a_n = 2^{2^n} + 1$ olur . Dolayısıyla, $a_{2007} = 2^{2^{2007}} + 1$ bulunur.

80. p bir asal sayı olmak üzere $7p+3^p-4$ tam sayısının bir tam kare olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $p > 3$ asal sayısı için $m = 7p + 3^p - 4$ tam sayısının bir tam kare olduğunu kabul edelim. Yani bir $n \in \mathbb{Z}$ için $m = n^2$ olsun. Bu durumda Fermat Teoreminden $m = 7p + 3^p - 4 \equiv 3 - 4 \equiv -1 \pmod p$ olduğu görülür. Ayrıca tekrar, Fermat Teoreminden dolayı, bir $k \in \mathbb{Z}$ için $p = 4k + 3$ ise $-1 \equiv m^{2k+1} \equiv m^{4k+2} \equiv n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ olur ancak $p > 3$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $p \equiv 1 \pmod 4$ olmalıdır.

Bu durumda $m = 7p + 3^p - 4 \equiv 3 - 1 \equiv 2 \pmod 4$ olur. Ancak $2 \pmod 4$ bir tam kare olmadığından bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak $p = 2$ için $m = 19$ ve $p = 3$ için $m = 44$ olur ancak bu sayıların tam kare olmadıkları açıktır.

81. $p.q$ nun $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ yu böldüğü bütün p, q asal sayılarını bulunuz.

Çözüm. p asal olduğundan $p|(5^p - 2^p)$ veya $p|(5^q - 2^q)$ olmalıdır. $p|(5^p - 2^p)$ durumunda $5^p - 2^p \equiv 0 \pmod p$ ve Fermat Teoreminden $p|(5 - 2)$ yani $p = 3$ olur. Aynı durum q için de geçerlidir. Genelliği bozmadan $p \geq q$ kabul edelim. $q = 3$ olursa $p|(5^3 - 2^3)$ yani $p|117$ bulunur. Buradan $p = 3$ ve $p = 13$ çözümleri elde edilir.

Şimdi $p|(5^q - 2^q)$, $q|(5^p - 2^p)$ ve $p \geq q > 3$ olsun. $5^p \equiv 2^p \pmod q$ olduğundan $a = 5 \cdot 2^{-1} \pmod q$ için $a^p \equiv 1 \pmod q$ elde edilir. Aynı zamanda Fermat Teoreminden $a^{q-1} \equiv 1 \pmod q$ olur. a nın $\pmod q$ daki derecesine d diyelim. $d|p$ ve $d|(q-1)$ olduğu açıktır. $(p, q-1) = 1$ olduğundan $d = 1$ olur. Buradan $a \equiv 1 \pmod q$ yani $5 \equiv 2 \pmod q$ ve $q = 3$ elde edilir.

Çözüm kümesi $(p, q) \in \{(3, 3), (3, 13), (13, 3)\}$ tür.

82. A kümesi,

- $a \in A$ ise a nın bütün pozitif bölenleri A kümesinin elemanıdır,
- a,$b \in A$ ve $1 < a < b$ ise $1 + ab \in A$ dır,

özelliklerini sağlayan pozitif tam sayılar kümesi olsun. Eğer A kümesinin en az 3 elemanı varsa A=$\mathbb{N}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. 1 bütün tam sayıların böleni olduğu için A kümesinin elemanıdır. A kümesinden $1 < a < b$ koşulunu sağlayan a ve b elemanlarını alalım. a,b ve $1 + ab$ den en az bir tanesi çift olacağından 2 de A kümesinin elemanıdır.

$n \geq 6$ için tümevarım yapalım. $k = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ için $k \in A$ olsun. n tek ise, n'yi

$1 < 2 < p \in A$ olacak şekilde $n = 2k+1$ olarak yazabiliriz. İkinci koşulu sağladığı için $n \in A$ olur. Eğer n çift ise $n = 2p$ olarak yazabiliriz. Yukarıda ispatladığımız gibi $2p+1 \in A$ dır. p yerine $p-1$ yazarak $2p-1$ in A nın elemanı olduğunu gösterebiliriz. $1+(2p-1)(2p+1) = 4p^2 \in A$. İlk koşuldan $n = 2p \in A$ olur.

3, 4 ve 5 in A nın elemanı olduğunu göstermek için A kümesinden $a \neq 2$ koşulunu sağlayan bir a elemanı alalım. İkinci koşuldan $1+2a \in A$ olur. $1+2(1+2a) = 3+4a \in A$ ve $1+(1+2a)(3+4a) = 4+10a+8a^2 \in A$ dır. Eğer a çift ise $4|4+10a+8a^2$. O halde $4 \in A$ dır. a tek ise $a = 4+10a+8a^2$ seçersek tekrar $4 \in A$ elde ederiz. $1 < 2 < 4 \in A$ olduğundan $1+2\cdot 4 = 9 \in A$ olur. Bu da birinci koşuldan $3 \in A$ yı gerektirir. Son olarak $7 = 1+2\cdot 3 \in A$, $1+2\cdot 7 = 15 \in A$ olur. Birinci koşuldan dolayı 5, A kümesinin elemanıdır.

83. $x^2+y^2+z^2+t^2 = 2^{2004}$ denkleminin, tam sayılar kümesinde $0 \le x \le y \le z \le t$ koşuluna uyan tam olarak iki çözümü olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. (x,y,z,t) nin bir çözüm olduğunu kabul edelim. a tekse $a^2 \equiv 1 \pmod 8$, çiftse $a^2 \equiv 0,4 \pmod 8$ olur. Bu yüzden x, y, z ve t den bir tanesi tek olduğu zaman hiç bir x, y, z ve t için $x^2+y^2+z^2+t^2$, 8 e bölünemez. Fakat, 2^{2004}, 8 ile bölündüğü için denklemin tek sayılarda çözümü yoktur.

Dolayısıyla, x, y, z ve t çift sayılar olmalıdır. Bu yüzden, $0 \le x_1 \le y_1 \le z_1 \le t_1$ tam sayılar olmak üzere $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $t = 2t_1$ ve $x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2 = 2^{2002}$ 'dir. Benzer işlemler yapılarak, $0 \le x_2 \le y_2 \le z_2 \le t_2$ tam sayılar olmak üzere $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$, $t_1 = 2t_2$ ve $x_2^2+y_2^2+z_2^2+t_2^2 = 2^{2002}$ olur.

Bu işlemler tekrarlanarak, $0 \le a \le b \le c \le d$ tam sayılar ve $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$ olmak üzere, $x = 2^{2001}a$, $y = 2^{2001}b$, $z = 2^{2001}c$, $t = 2^{2001}d$ elde edilir. Bu bağıntılar, $a = b = c = d = 1$ veya $a = b = c = 0$, $d = 2$ olduğunu gösterir.

Çözümler $(0,0,0,2^{1002})$ ve $(2^{1001},2^{1001},2^{1001},2^{1001})$ dir.

84. En az iki eleman içeren ve $a,b \in A$, $a > b$ ise $\frac{okek(a,b)}{(a-b)} \in A$ koşulunu sağlayan negatif olmayan sayılar kümesi A yı düşünelim. A nın en fazla iki eleman içerebileceğini gösteriniz.

Çözüm. İlk olarak A nın sonlu olduğunu göstereceğiz. A kümesinin en küçük elemanı $\min A$ ve en büyük elemanı $\max A$ ile gösterilmek üzere, eğer $b = \min A$ ve $a \in A - \{b\}$ ise $(a-b)|[a,b]$ olacağından $(a-b)|ab$ dir. $(a-b)|(a-b)$ her zaman doğru olduğundan, $(a-b)|ab-b(a-b)$ olacaktır. Bu da bize $(a-b)|b^2$ ve $a \le b+b^2$ ifadelerini verir. $a \in A$ rastgele seçildiğinden A sonlu bir kümedir.

$a = \max A$ ve $b = \min A$ olsun. Eğer $d = (a,b)$ ise $b = dx$ ve $a = dy$ koşullarını sağlayan ve $(x,y) = 1$ olan $x,y \in \mathbb{Z}^+$ elemanları vardır. Bu durumda $\frac{okek(a,b)}{(a-b)} = \frac{xy}{y-x} \in \mathbb{Z}^+$ olacaktır. x,y ve $x-y$ aralarında asal olduklarından, $y-x = 1$ veya $y =$

$x+1$ bulunur. Bu durumda $a = d(x+1)$ ve $b = dx$ olacağından, $\frac{[a,b]}{a-b} = x(x+1) \in A$ bulunur. Başka bir deyişle, $b \leq x(x+1) \leq a$ veya $d \in \{x, x+1\}$dir.
$d = x$ olsun. Bu durumda $a = x(x+1)$ ve $b = x^2$ dir. A nın başka bir elemanı olmadığını göstereceğiz. Tersini varsayarsak, eğer $c = \min(A - \{b\})$ ise $a = \widehat{d}(z+1)$ ve $c = \widehat{d}z$ olacak şekilde $\widehat{d}, z \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $\frac{[a,c]}{a-c} = z(z+1) \in A$ dır. $z(z+1) \neq x^2 = b$, veya $c \leq z(z+1) \leq a$ olduğundan $\widehat{d} \in \{z, z+1\}$ bulunur. Eğer $\widehat{d} = z$ ise $a = z(z+1)$ dir. $a = x(x+1)$ olduğundan $x = z$ bulunur, bu bir çelişkidir (son ifade $b = c$ yi verir). Eğer $\widehat{d} = z+1$ ise $a = (z+1)^2$ ve $a = x(x+1)$ olacaktır, bu da bir çelişkidir. Böylece, A nın sadece iki elemanı olduğu bulunur.
Şimdi $d = x+1$ olsun. $a = (x+1)^2$ ve $b = x(x+1)$ dir. Önceki durumda olduğu gibi A nın bunların dışında başka bir elemanı olmadığı gösterilebilir.

85. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n nin basamakları toplamını $s(n)$ ile gösterelim. $s(n)$ nin n den farklı, n yi bölen en büyük tam sayıya eşit olduğu bütün n değerlerini bulunuz.

Çözüm. Cevap 18 ve 27 sayılarıdır. n nin basamak sayısını k ile gösterelim. Problemin çözümünde şu gözlemlerden faydalanılacaktır:

- $n = p \cdot s(n)$, p bir asal sayıdır. Bu yüzden $s(n)$ sayısının herhangi bir asal böleni p'den büyük ya da p'ye eşittir.
- p asal sayısı $s(n)$'den küçük olduğu için $s(n)^2 \geq n$'dir. n sayısının k tane basamağı olduğu için $10^{k-1} \leq n$'dir. Dolayısıyla $10^{k-1} \leq s(n)$'dir. Ayrıca $s(n)$ sayısı k tane rakamın toplamından oluştuğu için $s(n)$ en fazla $9k$ olabilir. Bütün bunları birleştirdiğimizde $10^{k-1} \leq s(n)^2 \leq (9k)^2$ elde edilir. $k = 5$ için bu eşitsizlik yanlıştır çünkü $10^4 > 45^2$'dir ve k'nın değerinin 5'ten büyük seçmek bu durumu değiştirmeyecektir. Dolayısıyla $k \leq 4$ olmalıdır.

Şu iki durumu inceleyeceğiz:
Eğer $k = 4$ ise $n = abcd$'dir. Bu durumda $n \leq s(n)^2 \leq 36^2 = 1296$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Buradan $a = 1$ elde edilir. $s(n) \leq 9k$ eşitsizliğinden dolayı $s(n) \leq 28$'dir. İkinci gözlemimizdeki $s(n)^2 \geq n$ essşitsizliğinden dolayı $n \leq 28^2$ elde edilir fakat $28^2 < 1000$ olduğu için n 4 basamaklı bir sayı olamaz. Bu çelişki yüzünden $k = 4$ iken bir çözüm yoktur.
Eğer $k \leq 4$ ise $n = abc$'dir. İlk gözlemdekii eşitlik kullanılarak $100a + 10b + c = p(a+b+c)$ eşitliği bulunur. Buradan $9(11a+b) = (p-1)(a+b+c)$ eşitliği elde edilir. Eşitliğin sol tarafı 9'un katı olduğu için eşitliğin sağ tarafı 9 tarafından bölünebilmelidir. $s(n)^2 \geq n$ olduğu için $p \leq s(n)$'dir. $s(n)$'in alabileceği en büyük değer 27 olduğu için $p \leq 27$'dir. Dolayısıyla $p-1$ sayısı 9'un bir katıysa eğer, p asal sayısı 19dur. Bu durumda üsteki eşitlikte p yerine 19 koyarsak $9a = b + 2c$ eşitliğini elde ederiz. Buradan $a \leq 3$ olduğu bulunur. Yaptığımız $s(n)$ sayısının herhangi bir

asal böleni p'den büyük ya da p'ye eşittir gözleminden dolayı, $a+b+c$ toplamı en az 19 olmalıdır. a yerine sırasıyla $1,2,3$ değerleri konduğunda $a+b+c=19$ ve $9a=b+2c$ eşitliklerinin ikisini birden sağlayan bir a,b,c üçlüsünün bulunamayacağı görülebilir. Dolayısıyla $a+b+c\geq 23$ olmalıdır çünkü 19'dan büyük olan en küçük asal sayı 23'tür. Fakat $a\leq 3$ olduğu için bu mümkün değildir. Dolayısıyla 9'un $p-1$'i böldüğü durumlarda çözüm yoktur.
Eğer $p-1$ sayısı 9'a bölünmüyorsa, $a+b+c$ sayısı 3'e bölünmek zorundadır. İlk gözlemimiz nedeniyle p asal sayısı ya 2 ya da 3 olabilir.
Eğer $p=3$ ise $n=3(a+b+c)$. Buradan $n\leq 100$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $a=0$ ve $10b+c=3(b+c)$ eşitlikleri bulunur. Buradan $7b=2c$ eşitliği elde edilir. Bu yüzden $n=27$ çözümü bulunur.
Eğer $p=2$ ise $n=2(a+b+c)$. Bu durumda da $a=0$ olduğu için $8b=c$. Buradan $n=18$ çözümü elde edilir.

86. P katsayıları tam sayılardan oluşan bir polinom olsun ve $P(5)=2005$ denklemini sağlasın. Bu durumda $P(2005)$ sayısının bir tam sayının karesi olması mümkün müdür?

Çözüm. $P(x)$ katsayıları tam sayılardan oluşan bir polinom olsun. Bu durumda $(x-y)|(P(x)-P(y))$ olduğundan $2000|(P(2005)-P(5))$ yani $P(2005)=2000A+2005$ elde edilir. Buradan $P(2005)$ in son iki basamağının 05 olduğu bulunur. Yani $P(2005)$ 5 ile bölünür fakat 25 ile bölünmez. Bu da bize $P(2005)$ in bir tam sayının karesi olmadığını gösterir.

87. a bir tam sayı olsun. $x^2<3$ koşulunu sağlayan herhangi bir x reel sayısı için, $\sqrt{3-x^2}$ ve $\sqrt[3]{a-x^3}$ sayılarından en az birinin irrasyonel olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $A=\sqrt{3-x^2}$ ve $B=\sqrt[3]{a-x^3}$ sayılarının ikisi de rasyonel sayılar olsunlar. Yani, $x^2=3-A^2$ ve $x^3=a-B^3$ olur. Buradan da

$$a-B^3=\pm(3-A^2)\sqrt{3-A^2}$$

elde edilir. Denklemin sol tarafı bir rasyonel sayı olduğu için, $\sqrt{3-A^2}=k$ bir rasyonel sayı olmalıdır. A ve k birer rasyonel sayı oldukları için, $A=\frac{y}{t},k=\frac{z}{t}$ ve $(y,z,t)=1$ olacak şekilde y,z,t tam sayıları bulunabilir. $A^2+k^2=3$ olduğu için, $y^2+z^2=3t^2$ dir. Bu eşitliğin sağ tarafı 3 ün katı olduğu için, y^2+z^2, 3 ün katı olmalıdır. Aslında 3 hem y yi hem de z yi bölmelidir. (Her hangi bir tam sayının karesinin 3 ile bölümünden kalanın 0 veya 1 olduğuna dikkat ediniz.) Bu durumda $y^2+z^2=3t^2$ eşitliğinin sol tarafı 9 ile bölünür, yani t, 3 ile bölünür. Fakat, $(y,z,t)=1$ olduğu için bir çelişki elde ederiz. Dolayısıyla, A ve B nin ikisi birden rasyonel sayı olamazlar.

88. $9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$ denkleminin tam sayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm. $9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$ denkleminin her iki tarafını 4 ile çarpıp 1 ekleyelim ve $9^x = (3^x)^2$ yazarsak

$$4((3^x)^2 - 3^x) + 1 = 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1$$

elde edilir. Bu denklem $t = 3^x$ olmak üzere

$$(2t-1)^2 = 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1$$

şeklinde yazılabilir.

$$4y^4 + 8y^3 + 4y^2 < 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1 \leq 4y^4 + 8y^3 + 8y^2 + 4y + 1$$

olduğu açıktır. O halde

$$(2y^2 + 2y)^2 < 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1 \leq (2y^2 + 2y + 1)^2$$

olur. Buradan $(2t-1)^2 = (2y^2 + 2y + 1)^2$ ve $4y^2 - 4y = 0$ bulunur. $y = 0$ veya $y = 1$ olabilir. $y = 0$ için $t = 3^x = 1$ ve $x = 0$ bulunur. $y = 1$ için de $t = 3^x = 3$ ve $x = 1$ elde edilir. Bu durumda çözüm kümesi $(x, y) = \{(0, 0), (1, 1)\}$ olarak bulunur.

89. $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ ifadesini rasyonel yapan n tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $a \geq 0$ ve $b > 0$ aralarında asal tam sayılar olmak üzere, $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}} = \frac{a}{b}$ olsun. Her iki tarafın da karesini alırsak $\frac{4n-2}{n+5} = \frac{a^2}{b^2}$ olur. Buradan

$$n = \frac{2b^2 + 5a^2}{4b^2 - a^2} = -5 + \frac{22b^2}{4b^2 - a^2}, \quad 4b^2 - a^2 \neq 0$$

elde edilir. a ve b aralarında asal sayılar olduğu için $4b^2 - a^2$ ile b^2 de aralarında asaldır. Bunu görmek için bir $d \neq 1$ tam sayısının $4b^2 - a^2$ ve b^2 yi böldüğünü varsayalım. d, $4b^2 - a^2$ ve b^2 yi böldüği için $4(b^2) - (4b^2 - a^2) = a^2$ yi de böler. d, a^2 ve b^2 yi böldüğü için a^2 ile b^2 aralarında asal değildir. Fakat a ve b aralarında asal olduğu için a^2 ve b^2 aralarında asal olmak zorundadır. Dolayısıyla böyle bir d sayısı yoktur. $4b^2 - a^2$ ile b^2 aralarında asaldır.
$-5 + \frac{22b^2}{4b^2 - a^2}$ bir tam sayıya eşit olduğu için ve b^2 ile $4b^2 - a^2$ aralarında asal oldukları için, $4b^2 - a^2$, 22'yi bölmek zorundadır. Yani $4b^2 - a^2 \in \{-22, -11, -1, 1, 11, 22\}$ olur. Bir tam sayının karesi (mod 4) te 0 yada 1'e eşit olabilceği için $4b^2 - a^2$ (mod 4) te ya 0 ya da 3'e eşittir. O halde $4b^2 - a^2$ ya -1 ya da 11'e eşit olabilir.
Eğer $4b^2 - a^2 = -1$ ise $(2b - a)(2b + a) = -1$ olur. a ve b pozitif tam sayılar olduğu

için $2b-a=-1$, $2b+a=1$ olmak zorundadır. Bu iki denklemden $b=0$, $a=1$ elde edilir. Fakat $b>0$ olduğu için $4b^2-a^2\neq -1$ olur.
$4b^2-a^2=11$ ise $(2b-a)(2b+a)=11$ olur. Buradan $2b-a=1$, $2b+a=11$ elde edilir. Bu iki denklemden de $b=3$ ve $a=5$ bulunur. a ve b yi yerine yazarsak

$$n=-5+\frac{22b^2}{4b^2-a^2}=\frac{22\cdot 9}{4\cdot 9-25}=13$$

elde edilir.

90. Negatif olmayan hiç bir n tam sayısı için $a_n=2^n+3^n+5^n+6^n$ ifadesinin bir tam küp olamayacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Sorunun çözümü için modüler aritmetik kullanacağız.

$$(7x+1)^3\equiv(7x+2)^3\equiv(7x+4)^3\equiv 1 \pmod 7$$

ve

$$(7x+3)^3\equiv(7x+5)^3\equiv(7x+6)^3\equiv -1 \pmod 7$$

olduğu için, bir tam küp ifadesi $7m, 7m-1$ veya $7m+1$ şeklindedir. Fermat teoreminden, $2^{6k}\equiv 3^{6k}\equiv 5^{6k}\equiv 6^{6k}\equiv 1 (\text{mod } 7)$ olur. Her $n\geq 0$ için $a_n=2^n+3^n+5^n+6^n$ olsun. Şimdi $n=6k+r, r\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ şeklinde yazılır. $2^n\equiv 2^r \pmod 7, 3^n\equiv 3^r \pmod 7, 5^n\equiv 5^r \pmod 7, 6^n\equiv 6^r \pmod 7$ olduğu için $a_n\equiv a_r \pmod 7$ dir.

$a_0\equiv a_2\equiv a_5\equiv a_6\equiv 4 \pmod 7, a_1\equiv a_4\equiv 2 \pmod 7$ ve $a_3\equiv 5 \pmod 7$ olduğu için, a_n bir tam küp olamaz.

91. n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \binom{2n}{5}, \dots, \binom{2n}{2n-1}$$

sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

Çözüm. İstenen değere d diyelim. Ayrıca

$$\begin{aligned} 2^{2n} &= (1+1)^{2n}-(1-1)^{2n} \\ &= 2\left(\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\dots+\binom{2n}{2n-1}\right) \end{aligned}$$

yani,

$$\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\dots+\binom{2n}{2n-1}=2^{2n-1}$$

olduğu için, $d|2^{2n-1}$ ve d ikinin bir kuvvetidir.

Şimdi bir m tek tam sayısı için, $n = 2^k m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d|2^{k+1}$ çünkü d tam sayısı $2n$'i böler. Ancak, her $j = 1, \ldots, n$ için,

$$\binom{2n}{2j-1} = \frac{2n}{2j-1}\binom{2n-1}{2j-2}$$

olduğu ve $2j - 1$ tek sayı olduğundan $2^{k+1}|\binom{2n}{2j-1}$. Dolayısıyla $2^{k+1}|d$ yani $d = 2^{k+1}$ bulunur.

92. $a_n = [n\sqrt{2}] + [n\sqrt{3}]$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan dizinin sonsuz tane tek ve sonsuz tane çift sayı içerdiğini gösteriniz.

Çözüm. $x_n = [n\sqrt{2}]$, $y_n = [n\sqrt{3}]$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} - y_n \in \{1, 2\}$ olur.
Çelişki metodunu uygulamak için, $n \geq k$ özelliğindeki tüm a_n elemanlarının aynı paritede olmasını sağlayacak bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı olduğunu varsayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $2 \leq a_{n+1} - a_n \leq 4$ olduğundan her $n \geq k$ için $a_{n+1} - a_n \in \{2, 4\}$ olduğunu görürüz. Eğer $a_{n+1} - a_n = 2$ ise $x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - y_n = 1$ ve eğer $a_{n+1} - a_n = 4$ ise $x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - y_n = 2$ olur.
Bu nedenle her $n \geq k$ için $x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - y_n$ olur ve buradan her $n \geq k$ için $y_n - x_n = y_k - x_k$ olur.
Fakat her n için $y_n - x_n > n\sqrt{3} - 1 - n\sqrt{2}$ ve dolayısıyla her $n \geq k$ için

$$n < \frac{y_k - x_k + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

olur ve bu bir çelişkidir.

93. x ve y sayıları 5'ten büyük asal çarpanı olmayan pozitif tam sayılar olmak üzere, $k \geq 0$ olan bir k tam sayısı için $x^2 - y^2 = 2^k$ denklemini sağlayan bütün x, y çiftlerini bulunuz.

Çözüm. Pozitif karelerin farkı en az 3 olabileceğinden, $k = 0$ ve $k = 1$ için çözümün olmadığı açıkça görülmektedir. Burada x ve y tam sayılarının beraber çift sayı olmadıkları durumu incelemek yeterlidir çünkü bu durumda sayıları ikiye böler, k'dan da 2 çıkarır ve yine x ve y'nin beraber çift sayı olmadığı durumu elde edebiliriz.
Şimdi $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ olduğundan, $m > n$ olmak üzere $x+y = 2^m$, $x-y = 2^n$ diyebiliriz. Buradan $x = 2^{m-1} + 2^{n-1}$, ve $y = 2^{m-1} - 2^{n-1}$ elde ederiz ki burada x ve y beraber çift sayı olmadığından $n = 1$ olur. Yani x ve y tek tam sayılar olur.
Dolayısıyla artık $x = 3^{x_1}5^{x_2}$ ve $y = 3^{y_1}5^{y_2}$ olduğunu biliyoruz. Ancak $x - y = 2$ olduğundan, x ve y beraber 3 veya 5'in katı olamaz. Yani uygun a ve b tam sayıları için ya $x = 3^a$, $y = 5^b$, ya da $x = 5^a$, $y = 3^b$ olur.
Eğer $x = 3^a$, $y = 5^b$ ise, $5^b = 2^{m-1} - 1$ denklemi elde edilir ki bu denklemin çözümü

$2^{m-1} - 1 \equiv 1 \pmod 4$ modüler denkleminin çözümüne eşittir. Buradan da çözüm $m - 1 = 1$, yani $y = 1$ olarak bulunur. Buradan $x = 3$ olarak bulunacağından bu durum bize, $x = 3 \cdot 2^t$, $y = 2^t$ çözüm kümesini verir.
Öte yandan eğer $x = 5^a$, $y = 3^b$ ise, $3^b = 2^{m-1} - 1$ denklemi elde edilir ki bu denklemin çözümü $2^{m-1} - 1 \equiv 1$ ya da $3 \pmod 8$ modüler denkleminin çözümüne eşittir. Buradan da çözüm $m - 1 = 1$ ya da 2, yani $y = 1$ ya da 3 olarak bulunur.
Burada $y = 1$ ise, $x = 3$ olur ki bu 5^a şeklinde değildir.
$y = 3$ durumunda ise, $x = 5$ olur yani bu durum bize, $x = 5 \cdot 2^t$, $y = 3 \cdot 2^t$ çözüm kümesini verir.
Bunlardan başka çözüm yoktur. Dolayısıyla tüm çözümler, $(x, y) = (3 \cdot 2^t, 2^t)$ ve $(x, y) = (5 \cdot 2^t, 3 \cdot 2^t)$ olarak bulunur.

94. Binler basamağı aynı olan ve dört tanesi, beşinin toplamını bölen dört basamaklı birbirinden farklı tam sayı beşlilerini bulunuz.

Çözüm. Sayılara x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; binler basamağına a, sayıların toplamlarına ise S diyelim. Bu durumda $1000a \leq x_i < 1000(a+1)$ olduğu için

$$x_i + 4000a \leq S < x_i + 4000(a+1)$$

ve buradan da,

$$1 + \frac{4000a}{x_i} \leq \frac{S}{x_i} < 1 + \frac{4000(a+1)}{x_i}$$

elde edilir. Yukarıda x_i için bulduğumuz değerleri kullanarak

$$1 + \frac{4a}{a+1} < \frac{S}{x_i} < 5 + \frac{4}{a}$$

elde edilir. Burada $a \geq 2$ ise $\frac{11}{3} < \frac{S}{x_i} < 7$ elde edilir ancak $\frac{S}{x_i}$ için dört farklı tam sayı değeri gerektiğinden bu durumun olamayacağı açıktır.
Dolayısıyla $a = 1$ ve $3 < \frac{S}{x_i} < 9$ olmalıdır. Bu durumda $\frac{S}{x_i}$ ancak 4, 5, 6, 7 ve 8 değerlerini alabilir. Ancak sayıların binler basamağı eşit olduğu için herhangi ikisinin oranı her zaman ikiden küçük olacağından, $\frac{S}{x_i}$ bir beşli grup için 4 ve 8 değerlerini birlikte alamaz. Dolayısıyla $\frac{S}{x_i}$ için olasılıklar 5, 6, 7, 8 ya da 4, 5, 6, 7 olur.
Birinci durumda $S = 840k$ olur. Fakat burada x_i değerleri $168k$, $140k$, $120k$, $105k$ ve $307k$ olacağından ve $\frac{307k}{105k} > 2$ olduğundan bu durum bize istenilen sayıları vermez.
Diğer durumda ise $S = 420k$ olur. Yani x_i değerleri $105k$, $84k$, $70k$, $60k$ ve $101k$ olur. Burada $105k < 2000$ ve $60k \geq 1000$ eşitsizliklerinden, $17 \leq k \leq 19$ eşitsizliğini elde ederiz ki bu durumlarda da istenen tam sayı beşlileri

$$\{1020, 1080, 1140, 1190, 1260, 1330, 1428, 1512, 1596, 1717, 1818, 1919, 1785, 1890, 1995\}$$

olur.

95. $n^2 + 3^n$ sayısını tam kare yapan bütün pozitif tam sayıları bulunuz.

Çözüm. m sayısı, $m^2 = n^2 + 3^n$ eşitliğini sağlayan bir pozitif tam sayı olsun. $(m-n)(m+n) = 3^n$ olduğu için $m - n = 3^k$ ve $m + n = 3^{n-k}$ eşitliklerini sağlayan bir $k \geq 0$ sayısı vardır. $m-n < m+n$ olduğu için $3^k < 3^{n-k}$ olur. Buradan $k < n-k$ yani $n - 2k \geq 1$ elde edilir.
Eğer $n - 2k = 1$ ise

$$2n = (m + N) - (m - n) = 3^{n-k} - 3^k = 3^k(3^{n-2k} - 1) = 3^k(3^1 - 1) = 2 \cdot 3^k$$

olur. Buradan $n = 3^k = 2k + 1$ elde edilir. $m \geq 2$ için tümevarım ile $3^m > 2m + 1$ elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlik sadece $k = 0$ ve $k = 1$ için geçerlidir. $k = 0$ iken $n = 1$, $k = 1$ iken $n = 3$ olur.
Eğer $n - 2k > 1$ ise $n - 2k \geq 2$ yani $k \leq n - k - 2$ olur. Yine $m - n < M + n$ eşitsizliği kullanılarak $3^k \leq 3^{n-k-2}$ elde edilir. Buradan

$$2n = 3^{n-k} - 3^k \geq 3^{n-k} - 3^{n-k-2} = 3^{n-k-2}(3^2 - 1) = 8 \cdot 3^{n-k-2}$$

elde edilir. Tümevarım kullanarak da

$$8 \cdot 3^{n-k-2} \geq 8[1 + 2(n - k - 2)] = 16n - 16k - 24$$

bulunur. Bu iki eşitsizlik kullanılarak $2n \geq 16n - 16k - 24$, yani $8k + 12 \geq 7n$ elde edilir. $n \geq 2k + 2$ olduğu için $7n \geq 14k + 14$ olur fakat bu $8k + 12 \geq 7n$ eşitsizliği ile çelişir.
Dolayısıyla n sadece 1 ve 3 değerlerini alabilir.

96. $2^m + 3^n = k^2$ denklemini sağlayan pozitif tam sayıları bulunuz.

Çözüm. $m = 0$ için $n = 1$; $n = 0$ için ise $m = 3$ olmalıdır. Bu yüzden $m, n > 0$ şeklindeki çözümleri arıyoruz. $2^m + 3^n = k^2$ olduğundan, $(2, k) = (3, k) = 1$ sağlanır. Bu yüzden $k = 6s \pm 1$, dolayısıyla da $2^m + 3^n = 36s^2 \pm 12s + 1$'dir. Buradan $2^m \equiv 1(\text{mod}3)$ ve m'nin çift olduğu çıkar. Oradan da $3^n \equiv 1(\text{mod}4)$ ve n'nin çift olduğu anlaşılır. $m = 2M$, ve $n = 2N$ yazarsak denklemimiz $(2^M)^2 + (3^N)^2 = k^2$ ifadesine dönüşür. Pisagor eşitliğinin genel çözümüne göre, aralarında asal, 2 modunda farklı ve $2^M = 2xy$, $3^N = x^2 - y^2$, $k = x^2 + y^2$ eşitliklerini sağlayan x, y sayıları bulunabilir. $xy = 2^{M-1}$, $M > 1$ olduğundan $x = 2^u$, $y = 2^v$, $u + v > 0$, ve $u > v$ elde edilir. $2^u - 2^v = 3^r$ ifadesinden de $v = 0$ olduğu anlaşılır. $2^u + 2^v = 2^u + 1 = 3^s$ ve $2^u - 1 = 3^r$ sayesinde $2^{u+1} = 3^r(3^{s-r} + 1)$, dolayısıyla da $r = 0$ ve $x = 2^u = 2$ doğrulanır. Böylece $M = 2$, $N = 1$, $m = 4$, $n = 2$, ve $k = 5$ olduğu açığa çıkar.

97. Birler basamağı başa alındığında (örnek: $1234 \to 4123$) elde edilen sayıyı kalansız bölen, en az iki basamaklı ve rakamlarının hepsi birbirinin aynısı olmayan en küçük sayıyı bulunuz. (Bahsi geçen sayılar onluk sisteme göre yazılmış ve başında 0 olmayan sayılardır.)

Çözüm. Söz konusu sayıya s diyelim ve n basamaklı olduğunu kabul edelim. Buna göre $s = a_1a_2a_3\ldots a_n$ olsun. Birler basamağı başa alındığındaki haline ise t diyelim. Şimdi, s, t sayısının bir böleni olduğuna göre bir k tam sayısı için $t = a_na_1a_2\ldots a_{n-1} = ks$ olsun. Burada dikkat edilmesi gereken hususlar, sayının başında 0 olamayacağından $a_1 > 0$ olması gerektiği ve birler basamağı başa alındığında elde edilen sayının daha büyük olması için de $a_n > 1$ olması gerektiğidir.
Tekrar eden s lerin oluşturduğu devirli ondalıklı sayıya x, t'lerin oluşturduğu devirli ondalıklı sayıya ise y diyelim. Yani $x = 0.a_1a_2a_3\ldots a_na_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ ve $y = 0.a_na_1a_2\ldots a_{n-1}a_na_1a_2\ldots a_{n-1}\ldots$ olsun.
Şimdi $0.a_1a_2a_3\ldots a_n = \frac{s}{10^n}$ olduğundan, x sayısının kesirli ifadesi $x = \frac{s}{10^n-1}$ olur. Ayrıca aynı şekilde $0.a_na_1a_2\ldots a_{n-1} = \frac{t}{10^n} = \frac{ks}{10^n}$ olduğundan, y sayısının kesirli ifadesi de $y = \frac{ks}{10^n-1}$ olur. Buradan da $y = kx$ denklemini elde ederiz.
Bunların dışında $y = \frac{a_n}{10} + \frac{x}{10}$ ya da başka bir deyişle, $10y = a_n + x$ olduğu açıktır ve buradan da $10kx = a_n + x$ yani, $x = \frac{a_n}{10k-1}$ denklemi bulunur.
Dolayısıyla problemi, a_n ve k için (ikisi de 9'dan büyük değerler alamayacağı için), deneme yanılma ile çözülebilecek düzeye indirgemiş olduk. Burada dikkat edeceğimiz bir diğer husus ise $a_n \geq k$ olması gerektiğidir. Dolayısıyla burada her bir k değeri için en küçük x değerini ancak $a_n = k$ durumunda elde ederiz.
Bu durumda her bir $\frac{k}{10k-1}$ değerini, her $2 \leq k \leq 9$ için deneyerek, en küçük s değerinin $k = 4$ olduğunda, $\frac{4}{39} = 0.102564 \Rightarrow s = 102564$ olarak bulunduğunu görürüz.
Sonuç olarak, birler basamağı başa alındığında elde edilen sayıyı kalansız bölen en küçük sayı 102564 olarak bulunur.

98. $(x+1)(x+2)(x+3) + x(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + x(x+1)(x+2) = y^{2^x}$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm. $x \geq 1$ ise y^{2^x} bir tam kare olur. $x, x+1, x+2$ ve $x+3$ sayıları, $4k, 4k+1, 4k+2$ ve $4k+3$ şeklinde olacaktır. Bu durumda eşitliğin sol tarafındaki üç terim 4'e bölünebilirken dördüncü terim $4k+2$ şeklinde olacağı için eşitliğin sol tarafı (mod 4) te 2'ye denk olacaktır. Fakat (mod 4) te hiç bir tam kare 2'ye denk olamayacağı için eşitliğin sol tarafı bir tam kare olamaz. O halde eşitliğin sağ tarafı da bir tam kare olamaz. Bu durumda $x \geq 1$ ise çözüm yoktur.

$x \leq -4$ ise eşitliğin sağ tarafı pozitif, sol tarafı ise negatif olduğu için bu durumda da çözüm yoktur. Geriye $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$ durumu kalır. Bu değerler de eşitikte yerine konulduğunda $x = -2$ için $y = 16$ ve $x = 0$ için $y = 6$ değerleri bulunur. Eşitliği sağlayan (x, y) çiftleri $(-2, 16)$ ve $(0, 6)$ olur.

99. 2^{2004} ün 2004 ile bölümünden kalanı bulunuz.

Çözüm. 2004 sayısını $2004 = 2^2 \times 501$ şeklinde yazabiliriz. 2 ile 501 aralarında asal olduğundan, Fermat Teoreminin Euler Genellemesi bize $2^{\phi(501)} \equiv 1 \,(\text{mod}501)$ verecektir. Burada $\phi(n)$ sayısı n den küçük ve n ile aralarında asal olan sayıların sayısını göstermektedir. 501 asal çarpanlarına 3×167 şeklinde ayrıldığından, $\phi(501) = (3-1)(167-1) = 332$ dir. Yani, $2^{1992} \equiv (2^{332})^6 \equiv 1 \,(\text{mod}501)$ dir. $2^{1992} \equiv 0 \,(\text{mod}4)$ eşitliğini de kullanarak 2^{1992} (mod2004) ü hesaplayacağız.
Eğer $x \equiv 1$ (mod501) ise bir t tam sayısı için $x = 1 + 501t$ dir. Buradan da $1+501t \equiv 1+t \equiv 0 \,(\text{mod}4)$, yani $t \equiv 3 \,(\text{mod}4)$ bulunacaktır. Böylece bir s tam sayısı için $1+501t = 1+501(3+4s) = 1504+2004s$ bulunur. Yani, $2^{1992} \equiv 1504 \,(\text{mod}2004)$ tür (Çin Kalan Teoremi bu çözümün (mod2004) te tek olduğunu verir). Buradan

$$2^{2004} = 2^{1992} \cdot 2^{12} = 1504 \cdot 2^{12} = (1504 \cdot 2^2) \cdot 2^{10} = 4 \cdot 1024 = 88 (\text{mod}2004)$$

bulunur.

100. $n|(p-1)$ ve $p|(n^6-1)$ olmak üzere n bir pozitif tam sayı, p ise bir asal sayı olsun. Bu durumda $p-n$ ya da $p+n$ tam sayılarından en az birinin bir tam kare olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $n|p-1$ olduğu için $a \geq 1$ olmak üzere $p = 1 + na$ olur. Burada ayrıca $p|n^6-1$ olduğu için $p|n-1$, $p|n+1$, $p|n^2+n+1$ ya da $p|n^2-n+1$ durumları muhtemeldir.
$p|n-1$ olsun. Bu durumda $n \geq p+1 > n$ olur fakat bu olanaksızdır.
$p|n+1$ olsun. Bu durumda $n+1 \geq p = 1+na$ olur ki bu ancak $a = 1$ ve $p = n+1$ durumunda olabilir ($p-n = 1 = 1^2$).
$p|n^2+n+1$ yani $b \geq 1$ olmak üzere $n^2+n+1 = pb$ olsun. Burada $p = 1+na$ olduğundan $n|b-1$ olur ve dolayısıyla $c \geq 1$ olmak üzere $b = 1+nc$ olur. Burada

$$n^2+n+1 = pb = (1+na)(1+nc) = 1+(a+c)n+acn^2 \text{ ya da } n+1 = acn+a+c$$

olduğu görülür. Bu durumda $ac \geq 1$ ise $a+c \geq 2$ olur ancak bu olanaksızdır. $ac = 0$ ise $c = 0$ ve $a = n+1$ olur. Dolayısıyla $p = n^2+n+1$ eşitliği ve buradan da $p+n = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ eşitliği elde edilir.
$p|n^2-n+1$ yani bir öncekine benzer şekilde $n^2-n+1 = pb$ ve $b = 1+nc$ olsun. Bu durumda

$$n^2-n+1 = pb = (1+na)(1+nc) = 1+(a+c)n+acn^2 \text{ ya da } n-1 = acn+a+c$$

olur. Dolayısıyla $c = 0$, $a = n - 1$ ve $p = n^2 - n + 1$ olur ve buradan da $p - n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$ eşitliği elde edilir.

101. $m^2 - 4n$ ve $n^2 - 4m$ sayılarının tam kare olmasını sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

Çözüm. $m^2 - 4n \geq 0$ ve $n^2 - 4m \geq 0$ olmasından dolayı $4m \leq n^2 \leq \frac{m^4}{16}$ 'dır ve bu yüzden $m \geq 4$ olur. Benzer bir şekilde $n \geq 4$ olduğu elde edilebilir. $m = 4$ ise, $n = 4$'tür.
$m = n$ olsun. $m^2 - 4m = x^2$ denkleminden $(m-2)^2 - x^2 = 4$ denklemini elde ederiz ve bu denklem $(m - 2 - x)(m - 2 + x) = 4$ şeklinde yazılabilir. Denklemin sol tarafındaki $m - 2 + x$ ve $m - 2 - x$ sayılarının ikisi de tek ya da ikisi de çifttir. Bu yüzden, $m - 2 - x = m - 2 + x = 2$ ve dolayısıyla $m = 4$'tür.
Problemdeki simetriden dolayı, $m > n \geq 5$ olduğunu farzedebiliriz. O halde, $x^2 = m^2 - 4n > m^2 - 4m = (m-3)^2 + 2m - 9 > (m-3)^2 + 2.5 - 9 > (m-3)^2$ 'dir ve bu yüzden $m^2 > x^2 > (m-3)^2$ olur. $x^2 = (m-2)^2$ ise, $m^2 - 4n = (m-2)^2$ ve bu yüzden $n = m - 1$' dir. Bunu $y^2 = n^2 - 4m = (m-1)^2 - 4m = m^2 - 6m + 1 = (m-3)^2 - 8$ takip eder ve bu yüzden $(m - 3 - y)(m - 3 + y) = 8$'dir. Denklemin sol tarafındaki $(m - 3 - y)$ ve $(m - 3 + y)$ sayılarının ikisi de tek ya da ikisi de çifttir, bu yüzden bir tanesi 4'e, diğeri de 2'ye eşittir. Her iki durumda da $m = 6$ ve $n = 5$ elde ederiz.
Şimdi, $x^2 = (m-1)^2$ durumunu dikkate alalım; $m^2 - 4n = (m-1)^2$ olduğunu biliyoruz. Buradan $4n = 2m - 1$ olur. $4n$ çift, $2m - 1$ tek sayı olduğundan dolayı, bu durum mümkün olamaz. Sonuç olarak, problemin bütün çözümleri $(m, n) \in \{(4,4), (5,6), (6,5)\}$'tir.

102. a, b, c, d pozitif tam sayılar olmak üzere, her pozitif rasyonel sayının

$$\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm. İlk önce, m ve n pozitif tam sayılar iken, $r = \frac{m}{n}$ rasyonel sayısı $(1, 2)$ aralığında ise r nin $\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$ şeklinde yazılabileceğini göstereceğiz. Bunun için $a = m+n$, $b = 2m - n$ ve $d = 2n - m$ seçip $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ad + d^2$ almak yeterlidir. Yani $b + d = a, a + b = 3m, a + d = 2a - b = 3n$ olacaktır.
Eğer $s > 0$ bir rasyonel sayıysa p ve q tam sayılarını uygun şekilde seçerek $1 < \frac{p^3}{q^3}s < 2$ elde edebiliriz. Bu durumda, $\frac{p^3}{q^3}s = \frac{a^3+b^3}{a^3+d^3}$ olmasını sağlayan a, b ve d tam sayıları vardır. Yani, $s = \frac{(aq)^3+(bq)^3}{(ap)^3+(bp)^3}$ olacaktır.

103. a ve b bütün n pozitif tam sayıları için $(a^n + n)|(b^n + n)$ koşulunu sağlayan pozitif tam sayılar olsunlar. Bu durumda $a = b$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. $a \neq b$ olduğunu varsayalım. n değerini 1 almak, $a+1$ sayısının $b+1$ sayısını böldüğünü gösterir, bu yüzden $b \geq a$ olmalıdır. $p > b$ bir asal sayı ve n de $n \equiv 1(\text{mod}(p-1))$ ve $n \equiv -a(\text{mod} p)$ denkliklerini sağlayan bir pozitif tam sayı olsun. Böyle bir n'in bulunabileceği Çin kalan teoremi kullanılarak gösterilebilir. (Çin kalan teoremi kullanılmadan da $n = (a+1)(p-1)+1$ sayısının bu koşulları sağladığı görülebilir.)
$n = (p-1)k+1$ olsun. Fermat teoremi kullanılarak $a^n = a(a^{p-1} \cdots a^{p-1}) \equiv a(\text{mod} p)$ elde edilir. $n \equiv -a(\text{mod} p)$ olduğundan $a^n + n \equiv 0(\text{mod} p)$ bulunur. Bu yüzden p, $a^n + n$ sayısını böler, dolayısıyla p sayısı $b^n + n$ sayısını da böler. Halbuki yine Fermat teoremi ile benzer şekilde $b^n + n \equiv b - a(\text{mod} p)$ elde edilir. Böylece $p | b - a$ sonucuna ulaşırız. Fakat $p > b$ olduğu için bu bir çelişkidir.

104. Bir tam kare sayının son n basamağı 0 dan farklı ve birbirinin aynısıysa bu tam kare sayı n uzunluğundadır denir. Bir tam kare için mümkün olan en büyük uzunluğu bulunuz. Bu uzunluğa sahip tüm tam kare sayıları bulunuz.

Çözüm. İlk önce mümkün olan en büyük uzunluğu bulacağız.
Bir tam karenin son basamağı $0, 1, 4, 9, 6$ veya 5 ile bitmelidir. Son iki basamağı $11, 44, 99, 66, 55$ olan bir tam sayı 4 ile bölündüğünde sırasıyla $3, 0, 3, 2$ ve 3 kalanını vermelidir. Bir tam karenin 4 ile bölümünden kalan ya 0 ya da 1 olabileceğinden, bu sayının son iki basamağı 44 olmalıdır.
Uzunluğu 4 olan bir tam kare 10000 ile bölündüğünde 4444 kalanını vermelidir. Yani, 16 ile bölündüğünde 12 kalanını vermelidir. Fakat bu imkansızdır. Çünkü, bir tam kare 16 ile bölündüğünde $0, 1, 4$ veya 9 kalanlarından birini verir. Buradan da bir tam karenin uzunluğunun 3 ten büyük olamayacağı ve 3 durumunda ise son 3 basamağının 444 olacağı bulunur.
Uzunluğu 3 olan tüm tam kareleri bulmak için, $x^2 \equiv 444 \pmod{1000}$ denklemini çözeceğiz. Çin Kalan Teoremi sayesinde $\text{mod}(2^3)$ ve $\text{mod}(5^3)$ durumlarını incelemek yeterlidir.
$x^2 \equiv 4 \pmod 8$ bize $x \equiv 2 \pmod 4$ ü verir.
$x^2 \equiv 69 \pmod{125}$ durumunda ise $x^2 \equiv 4 \pmod 5$, yani $x^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$, ve $x^2 \equiv 19 \pmod{25}$ bulunur. Bir t tam sayısı için $x = 5t \pm 2$ ise $(5t \pm 2)^2 = 25t^2 \pm 20t + 4 \equiv 19 \pmod{25}$ olacaktır. Buradan da $\pm 20t \equiv 15 \pmod{25}$ ve $4t \equiv \pm 3 \pmod 5$ bulunur. Yani, $t \equiv \pm 2 \pmod 5$ ve $x \equiv \pm 12 \pmod{25}$ tir.
Bir t tam sayısı için $x = 25t \pm 12$ durumunda ise $(25t \pm 12)^2 = 625t^2 \pm 600t + 144 \equiv 69 \pmod{125}$ tir. Buradan da $\pm 100t \equiv 50 \pmod{125}$ ve $2t \equiv \pm 1 \pmod 5$ bulunur. Yani, $t \equiv \pm 3 \pmod 5$ ve $x \equiv \pm 87 \pmod{125}$ tir.
4 ile 125 aralarında asal olduklarından Çin Kalan Teoremini kullanarak, 4 ve 125 modundaki her çözüm çifti için $4 \cdot 125$ modunda bir çözüm olduğunu söyleyebiliriz. Yani, 500 modunda iki tane çözüm vardır.

Bir t tam sayısı için $x = 125t \pm 38$ ise, $125t \pm 38 \equiv 2 \pmod 4$ denkliği $t \equiv 0 \pmod 4$ ü gerektirir. Bir s tam sayısı için $t = 4s$ ise $x = 500s \pm 38$ dir. Buradan da $x^2 = 250000s^2 \pm 38000s + 1444 \equiv 444 \pmod{1000}$ bulunur.
Sonuçta, mümkün olan en büyük uzunluk 3 tür ve bu durumda tam karenin son 3 basamağı 444 ile bitmelidir. Bu da ancak ve ancak $x \equiv \pm 38 \pmod{500}$ durumunda mümkündür.

105. a, b, n ve m, $n > 1$ olacak şekilde, pozitif tam sayılardır. $a^n + b^n = 2^m$ ise $a = b$ olduğunun gösteriniz.

Çözüm. a ve b sayılarını, p ve q tek sayı, $r, s \geq 0$ olmak üzere $a = p2^r$ ve $b = q2^s$ olacak şekilde yazalım.

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= 2^m \\ (p2^r)^n + (q2^s)^n &= 2^m \\ p^n 2^{rn} + q^n 2^{sn} &= 2^m \end{aligned}$$

olur. Genelliği bozmadan $r \leq s$ diyebiliriz. Denklemimin son halini 2^{rn} ye bölersek

$$p^n + (2^{s-r}q)^n = 2^{m-nr}$$

elde ederiz. Bu eşitliğin sol tarafındaki terimlerin her ikisi de pozitif olduğu için, eşitliğin sağ tarafı 1 den büyük olacaktır. Dolayısıyla, eşitliğin sağ tarafı çift sayıdır. O halde eşitliğin sol tarafının da çift olması gerekir. p tek sayı olduğu için, p^n de tek sayıdır. Eşitliğin sol tarafının tek sayı olabilmesi için $(2^{s-r}q)^n$ nin de tek sayı olması gerekir. Bu da 2^{s-r} nin tek olması demektir. O halde $2^{s-r} = 1$ olmalıdır ve $s = r$ dir.
a ve b'nin eşit olduğunu göstermek için, $s = r$ olduğundan, $p = q$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eşitliğin her iki tarafını da 2^s ye bölersek, pozitif bir t tam sayısı için, $p^n + q^n = 2^t$ elde ederiz. $p = q = 1$ olduğunu n'nin tek ve çift olduğu durumları inceleyerek gösterelim.
n tek olsun. $(p, q) \neq (1, 1)$ olduğunu kabul edelim. n tek olduğu için $p + q$, $p^n + q^n$ nin bir çarpanıdır. $C = p^n + q^n = 2^t$ ve pozitif bir u tam sayısı için, $A = p + q = 2^u$ dersek, $B = p^{n-1} - p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 - \cdots + q^{n-1} = 2^{t-u}$ olur. q ve p, pozitif tam sayılar olduğu için, $C > A$ dır. O halde $B > 1$ dir. Dolayısıyla B çift sayıdır. Fakat B, tek sayıdaki tek sayının toplamı olduğu için tek sayı olmak zorundadır. Bu da baştaki kabulümüzün yanlış olduğunu gösterir. Dolayısıyla $p = q = 1$ olur.
n çift olsun. n yerine pozitif bir w tam sayısı için, $2w$ yazalım. $(p^w)^2 + (q^w)^2 = 2^t$ ve p ve q tek sayı olduğu için, p^w ve q^w da tek sayıdır. (mod 4) te, tek sayıların kareleri 1 e denk olduğundan $1 + 1 = 2^t \pmod 4$ elde edilir. Bu eşitliği de sadece $t = 1$

sağlar. Bu durumda $p^w + q^w = 2^t = 2$ olur. p ve q pozitif tam sayılar olduğundan $p^w = q^w = 1$ olmak zorundadır. Bu da $p = q = 1$ olmasını gerektirir.
Sonuç olarak, $a = p2^r$ ve $b = q2^s$ iken, $s = r$ ve $p = q = 1$ olduğu için $a = b$ dir.

106. Herhangi iki n ve k pozitif tam sayıları için.

$$n = \pm\binom{a_1}{3} \pm \binom{a_2}{3} \pm \binom{a_3}{3} \pm \binom{a_4}{3} \pm \binom{a_5}{3}$$

olacak şekilde $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > k$ pozitif tam sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Sabit bir k için, $n+\binom{m}{3}$ ifadesini tek tam sayı yapacak bir $m > k$ seçelim. n tek sayı ise $m \equiv 0 \pmod 4$ ve n çift sayı ise $m \equiv 3 \pmod 4$ olarak alalım. $n+\binom{m}{3}$ sayısı tek olduğu için $n + \binom{m}{3} = 2a+1$ olacak şekilde a sayısı vardır. Bu durumda

$$2a + 1 = \binom{a}{3} - \binom{a+1}{3} - \binom{a+2}{3} + \binom{a+3}{3}$$

olduğundan

$$n = -\binom{m}{3} + \binom{a}{3} - \binom{a+1}{3} - \binom{a+2}{3} + \binom{a+3}{3}$$

elde edilir.
$m \geq 6$ için $a = \dfrac{n-1+\binom{m}{3}}{2} > m$ bulunur.

107. $p^m q^n = (p+q)^2 + 1$ eşitliğini sağlayan tüm m, n, p, q pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $p^m q^n = (p+q)^2+1 = p^2+2pq+q^2+1$ olduğu için $p \mid (q^2+1)$ ve $q \mid (p^2+1)$ olduğu açıkça görülmektedir. Eğer $p = q$ olduğunu düşünürsek, $p \mid p^2 + 1$ olur ve dolayısıyla $p = q = 1$ olur ancak bu verilen denklemin bir çözümü değildir.
Bu nedenle genelliği bozmadan $p < q$ olduğunu varsayabiliriz. Ancak $p = 1$ durumu $q = 2$ durumunu gerektirir ve $p = 1$, $q = 2$ çözüm değildir, bu nedenle $p \geq 2$ olur.

$$p^m q^n = (p+q)^2 + 1 < 4q^2 \leq p^2q^2 < pq^3 \leq p^m q^3$$

Yukarıdaki işlemlerden $n < 3$ sonucunu elde ediyoruz. $n = 2$ durumu $p^m < 4$, dolayısıyla $m = 1$, $p = 2$ veya $p = 3$ olmasını gerektirir. $p = 3$ için $3q^2 = (3+q)^2+1$ olur ki bu imkansızdır. $p = 2$ durumunda ise $2q^2 = (2+q)^2 + 1$ olur ve bu $q = 5$ durumunda bir çözümdür.
$n = 1$ durumu $p^m < 4q$ eşitsizliğini oluşturur. $q \mid p^2 + 1$ olduğunu biliyoruz, eğer

$q = p^2+1$ ise $p \mid q^2+1 = p^4+2p^2+2$ olur ve bu $p=2$ olmasını gerektirir, bu nedenle $q=5$ olur. Ancak $2^m 5^1 = (2+5)^2+1 = 50$ imkansızdır, dolayısıyla $q \leq \frac{p^2+1}{2}$ olur, bundan dolayı $p^m < 2(p^2+1)$ olur. Bu nedenle $p=2$ ve $m \leq 3$, veya $m \leq 2$ olur. Ancak $p=2$ durumu $q \leq \frac{5}{2}$ olmasını ve dolayısıyla $q \leq 2$ oluşunu gerektirir ki bu imkansızdır. O zaman $m \leq 2$ olması gerekir.
$m=1$ için eşitlik $pq = (p+q)^2+1$ haline dönüşür ancak bu durum imkansızdır.
$m=2$ için, $p^2 < 4q$ olur. Bu $q \mid p^2+1$ özelliğiyle birlikte $p^2+1 = q, 2q, 3q, 4q$ olasılıklarını ortaya çıkarır. Zaten yukarıda $p^2+1=q$ durumunu incelemiştik. p^2+1 (mod 3) veya (mod 4) te 0'a denk olamayacağı için geriye sadece $p^2+1=2q$ durumu kalır. Bu durumda $p \mid q^2+1$ özelliğinden $4p \mid p^4+2p^2+5$ elde edilir ve dolayısıyla $p \mid 5$ yani $p=5$, $q=13$ sonucuna oluşur ve bu verilen eşitliğin bir çözümüdür.
Sonuç olarak verilen eşitliğin çözümleri;

$$(m,n,p,q) \in \{(2,1,5,2),(2,1,5,13),(1,2,2,5),(1,2,13,5)\}$$

olur.

108. a ve b 2'den büyük tam sayılar olsun. $n_1 = a$, $n_k = b$ ve $i = 1,2,\ldots,k-1$ için $(n_i + n_{i+1}) | n_i n_{i+1}$ özelliklerini sağlayan bir k tam sayısı ve $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tam sayı dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. İstenen özelliği sağlayan bir dizinin bulunduğu duruma $a \Leftrightarrow b$ diyelim. Burada $\Leftrightarrow$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. Dolayısıyla her $a \geq 3$ için (a bir tam sayı olmak üzere) $a \Leftrightarrow 3$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.
Şimdi eğer a tam sayısı $t > 1$ ve bir tek sayı olmak üzere $a = 2^s t$ şeklindeyse, diziyi

$$2^s t, 2^s\left(t^2-t\right), 2^s\left(t^2+t\right), 2^s(t+1) = 2^{s+1}\frac{t+1}{2}$$

olarak alabiliriz. Burada $\frac{t+1}{2} < t$ olduğundan, sonlu sayıda basamak sonunda 2'nin bir kuvvetine ulaşılır. Diğer yandan eğer $s > 1$ ise diziyi

$$2^s, 3.2^s, 3.2^{s-1}, 3.2^{s-2}, \ldots, 3$$

olarak da alabiliriz.

109. Aşağıdaki özellikleri sağlayan N pozitif tam sayılarını bulunuz.

(a) N sayısı tam olarak 16 bölene sahip olacak ($1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{16} = N$).

(b) d_5. bölen, yani d_{d_5}, $(d_2+d_4)d_6$'ya eşit olacak.

Çözüm. n sayısı en fazla 4 tane farklı asal bölene sahip olabilir çünkü aksi durumda, bu asal sayıların birbirleriyle çarpımı da N sayısını böleceğinden 1. koşul sağlanamaz.

Ayrıca $d_2 = 2$ olmalı yoksa bütün bölenler tek sayı olur ama bu durum 2. koşul ile çelişmektedir.

Hipotez gereği $2+d_4 \geq d_5 \geq 7$ olmalı, dolayısıyla $d_4 \geq 5$ olmalıdır. $d_4 < d_5 \leq 2+d_4$ olduğu için ya $d_5 = d_4+1$ ya da $d_5 = d_4+2$ olmalıdır.

İlk durumda yani $d_5 = d_4+1$ ise, $d_6 = 2+d_4$ olur. Dolayısıyle N üç tane ardışık bölene sahiptir, yani $3|N$ ve $d_3 = 3$ olur. $d_2 = 2$ olduğu için $6|N$ ve $d_4 = 6$ elde edilir. Buradan $d_5 = 7$, $d_6 = 8$ bulunur ama bu $4|N$ anlamına gelir. Bu durumda $d_4 = 4$ olmalıdır ama bu $d_4 = 6$ ile çelişir.

İkinci durumda, yani $d_5 = 2+4$ olduğu zaman şu iki durumu inceleyeceğiz: N sayısının 4 ile bölünebildiğini varsayalım. $d_4 \geq 5$ olduğu için $d_3 = 4$ olmalıdır, dolayısıyla N sayısı 8'in bir katıdır. $d_6 \geq 8$ olduğu için $8 \in d_4, d_5, d_6$ olmalıdır. Her üç durum için aşağıdaki gibi birer çelişki elde edilir:

Eğer $d_4 = 8$ ise $d_5 = 10$ olmalıdır. Bu durumda $5|N$ yani $d_4 = 5$ çelişkisi elde edilir.

Eğer $d_5 = 8$ ise $d_4 = 6$ olmalıdır. Dolayısıyla $3|N$ yani $d_3 = 3$ çelişkisi elde edilir.

Eğer $d_6 = 8$ ise $d_5 = 7$, $d_4 = 5$ olmalıdır. Dolayısıyla $10|N$ elde edilir. 2. koşul nedeniyle $d_7 = (2+5)8 = 56$ olur fakat $56 > 10$ olduğu için bir çelişki elde edilir. N sayısı 4'e bölünmediği için d_3 sayısı bir asal sayı olmalıdır.

N sayısının 3 ile bölünebildiğini varsayalım. Bu durumda $d_3 = 3$ olur. Dolayısıla $6|N$ olur ve $d_4 \geq 6$ olduğu için $d_4 = 6$ olmalıdır. Bu yüzden $d_5 = 8$ olur ve bu N sayısının 4 ile bölünebildiği anlamına gelir fakat bu bir çelişkidir.

N sayısı 3'e tam bölünmediği için $d_3 \geq 5$ ve $d_4 \geq 7$ olmalıdır. N ve $2+d_4$ sayılar 4'e bölünmedikleri için, d_4 bir tek sayı olmalıdır. $2+d_4$ ve d_4 sayılar 3'ün katı olmadıkları için d_4 sayısını bir k tam sayı olmak üzere $d_4 = 3k+2$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca d_4 tek olduğu için, l bir tam sayı olmak üzere $d_4 = 6l+5$ olmalıdır. $d_5 \leq 16$ olması gerektiği için $7 \leq d_4 \leq 14$ olmalıdır. Dolayısıyla $d_4 = 11$ ve $d_5 = 13$ olur.

$2d_3$ sayısı N sayısını böldüğü ve $d_4 = 11$'den büyük olduğu için $d_3 \geq 6$ elde edilir. Ayrıca d_3 sayısı asal olduğu ve $d_3 \leq 11$ olduğu için $d_3 = 7$ olmalıdır. Sonuç olarak $N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$ bulunur.

110. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n'in basamaklarının tersten yazılışıyla elde edilen sayıyı $r(n)$ ile gösterelim. (Örneğin $r(2006) = 6002$). Herhangi a ve b pozitif tam sayıları için $4a^2+r(b)$ ve $4b^2+r(a)$ sayılarının ikisinin birden tam kare olamayacağını ispatlayınız.

Çözüm. Genelliği bozmadan $4a^2+r(b)$ ve $4b^2+r(a)$ sayılarının ikisinin birden tam kare olduklarını varsayalım ve $b \leq a$ olsun. $r(b)$ sayısının basamak sayısı en fazla b sayısının basamak sayısı kadar olabilir, dolayısıyla $r(b) < 10b \leq 10a$ olur. $a > 0$ olduğu için $4a^2 < 4a^2+10a$ ve $4a^2+10 < 4a^2+6a+9$ elde edilir. Buradan $(2a)^2 < 4a^2+10a < (2a+3)^2$ eşitsizlikleri elde edilir ve $4a^2+r(b)$ tam kare olduğu için $4a^2+r(b)$ ya $(2a+1)^2$ ya da $(2a+2)^2$ olmalıdır. Dolayısıyla $r(b) = 4a+1$ ya da $r(b) = 8a + 4$ olur. $r(b) > a \geq b$ olduğu için a ve b sayıları aynı sayıda basamağa sahiptirler. a sayısı için yaptıklarımızı b için de tekrarlarsak, $(2b) < 4b^2 + 10b < (2b + 3)^2$ eşitsizliğini elde ederiz. $4b^2 + r(a)$ tam kare olduğu için $4b^2 + r(a)$ ya $(2b+1)^2$ ya da $(2b+2)^2$ olmalıdır. Şu üç durum gerçekleşebilir:

$r(a) = 4b + 1$ ve $r(b)4a + 1$. İlk eşitlikten a, ikincisinde b çıkartıp bu eşitlikleri toplarsak $(r(a) - a) + (r(b) - b) = 3(b - a) + 2$ eşitliğini elde ederiz ki bu eşitlik yanlıştır çünkü herhangi bir n pozitif tam sayısı için 9, $r(n) - n$ sayısını böler.

$r(a) = 8b + 4$ ve $r(b) = 4a + 1$ (aynı çözüm $r(b) = 8b + 4$ ve $r(a) = 4a + 1$ için de geçerlidir). Çıkartma ve toplama işlemleri sonucunda $(r(a) - a) + (r(b) - b) = 7b + 3a + 3$ eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı 3'e bölünebildiği için, b sayısı 3'e bölünebilmelidir. Öyleyse $r(b) = 4a + 1$ sayısı da 3'e bölünür. Dolayısıyla a ve $r(a)$ sayılarının 3'e bölümünde kalan 2'dir. Bu bir çelişkidir. Çünkü $r(a) = (8b + 3) + 1$ olduğu için 3'e bölündüğünde kalan 1 olmalıdır.

$r(a) = 8b+4$ ve $r(b) = 8a+4$. Bu durumda $r(a)$ ve $r(b)$ sayılarının son basamakları çifttir, bu yüzden en az 2 olabilirler. Dolayısıyla a ve b sayılarının ilk basamakları 2'den büyük ya da 2'ye eşittir. Bu nedenle $8a + 4$ ve $8b + 4$ sayıları a ve b'den daha fazla basamağa sahiptirler. Buradan $r(a) < 8b+4$ ve $r(b) < 8a+4$ eşitsizlikleri elde edilir fakat bu eşitsizlikler birer çelişkidir.

111. $x^3+y^3+z^2 = t^4$ denklemini sağlayan ve ortak bölenleri 1 den büyük olmayan sonsuz tane pozitif tam sayı dörtlüsü (x, y, z, t) olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$[1^3 + 2^3 + ... + (n-2)^3] + (n-1)^3 + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$

eşitliğini

$$(n-1)^3 + n^3 + (\frac{(n-1)(n-2)}{2})^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$

şeklinde yazabiliriz. Soruyu çözebilmek için $\frac{n(n+1)}{2}$ nin tam kare olduğu n pozitif doğal sayılarını bulmak yeterli olacaktır.

$(2n+1)^2-2(2x)^2 = 1$ denkleminin çözümleri, $u^2-2v^2 = 1$ Pell denkleminin çözümleri kullanılarak bulunabilir. Burada, $u_0 = 3$, $v_0 = 2$ ve u_k ile v_k da aşağıdaki eşitlikten elde edilebilir:

$$(u + \sqrt{2}v)^k(u - \sqrt{2}v)^k = (u_k + \sqrt{2}v_k)(u_k - \sqrt{2}v_k) = 1$$

Alternatif Çözüm. a bir pozitif doğal sayı olmak üzere, $(a+1)^4-(a-1)^4 = 8a^3+8a$ eşitliğini düşünelim. Eğer b bir çift sayıysa ve $a = b^3$ ise,

$$(b^3 + 1)^4 = (2b^3)^3 + (2b)^3 + [(b^3 - 1)^2]^2$$

elde edilir. b bir çift sayı olduğundan b^3+1 ve b^3-1 tek sayılardır. Bu da bize, $x=2b^3, y=2b, z=(b^3-1)^2$ ve $t=b^3+1$ sayılarının 1 den büyük ortak bölenleri olmadığını verir.

112. $n>1$ olmak üzere x, y ve n pozitif tam sayılar olsun. $x^n-y^n=2^{100}$ denkleminin kaç tane çözümü olduğunu bulunuz?

Çözüm. $n=2$, $n=4$, n'nin 4'ten büyük çift tam sayı olması ve n'nin tek tam sayı olması durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.
$n=2$ olduğunda $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=2^{100}$ dür. $(x-y)$ ve $(x+y)$, 2 'nin kuvvetleri olmak zorundadır. Ek olarak, $x-y$ ve $x+y$ 'nin her ikisi de çift ya da her ikisi de tek olmak zorundadır. Çarpımları 2^{100} olduğu için, her ikisi de çift olmalıdır. Bu yüzden, $(x-y)>1$ 'dir. Dolayısıyla, $y>0$ olduğundan, $0<a<b$ ve $a+b=100$ olacak şekilde a ve b tam sayıları için $x-y=2^a$ ve $x+y=2^b$ denklemlerini elde ederiz.
Yukarıdaki denklem kümesini çözerek, $x=2^{b-1}+2^{a-1}$ ve $y=2^{b-1}-2^{a-1}$ eşitliklerini elde ederiz.
Bu yüzden, aradığımız çözümler : $(a,b)=(1,99),(2,98),...,(49,51)$ 'dir.
Dolayısıyla, $x^2-y^2=2^{100}$ denkleminin 49 tane çözümü vardır.
$n=4$ durumunda Fermat'ın son teoreminden ($x^n+y^n=z^n$ denkleminin $n>2$ için sıfırdan farklı tam sayı çözümü yoktur.), $x^4-y^4=2^{100} \Rightarrow y^4+(2^{25})^4=x^4$ denkleminin çözümü yoktur. (Üs 4 için teoremin ispatını ilk olarak Fermat kendisi yapmıştır.)
Şimdi n 4'ten büyük çift bir tam sayı olsun. Negatif olmayan k tam sayıları için, daha genel bir denklem $x^n-y^n=2^k$ 'yı ele alarak, 4 'ten büyük n çift tam sayıları için çözümün olmadığını göstereceğiz.
Bir çözümün olduğunu varsayalım. $x^n-y^n=2^k$ olacak şekilde x, y ve $n>2$ pozitif tam sayılarını ve negatif olmayan k tam sayısını seçelim. Ayrıca, n minimum olsun.
$n=2m$ dersek, $(x^m-y^m)(x^m+y^m)=2^k$ olur.
Fakat, $m>2$ ve bazı $a\geq 0$ tam sayıları için $x^m-y^m=2^a$ olması, n 'nin minimum olma durumuyla çelişir.
Bu yüzden, $n>4$ çift tam sayıları için çözüm yoktur.
Son olarak n tek olsun. Pozitif k tam sayıları için, daha genel bir denklem $x^n-y^n=2^k$ 'yı ele alarak, n tek tam sayıları için çözümün olmadığını göstereceğiz.
Bir çözümün olduğunu varsayalım. $x^n-y^n=2^k$ olacak şekilde x, y, n ve k pozitif tam sayılarını seçelim. Ayrıca, k minimum olsun.
x ve y 'nin her ikisinin de çift ya da her ikisinin de tek olduğu açıkca görülür.

$$(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+y^{n-1})=2^k$$

olduğu için; x ve y tek ise, ikinci terim tek terimlerin bir tek sayısını içerir ve bu yüzden tektir. Ancak, bu durum mümkün değildir.
Dolayısıyla, x ve y çifttir. $x = 2u$ ve $y = 2v$ dersek, $u^n - v^n = 2^{k-n}$ olur.
$k - n > 0$ ise, bu durum k 'nın minimumluğu ile çelişir.
$k - n = 0$ ise, $u^n - v^n = 1$ denkleminin pozitif tam sayı çözümü yoktur.
Bu yüzden, n tek tam sayıları için çözüm yoktur.
Bütün sonuçları bir araya toplarsak; x, y ve $n > 1$ pozitif tam sayıları için $x^n - y^n = 2^{100}$ denklemi 49 tane çözüme sahiptir.

113. Her biri 0 dan farklı x, y, z ve t gerçel sayıları aşağıdaki eşitlikleri sağlamaktadır:

$$\begin{aligned} x+y+z &= t \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{1}{t} \\ x^3+y^3+z^3 &= 1000^3 \end{aligned}$$

$x + y + z + t$ toplamını bulunuz.

Çözüm. İlk iki denklemden $(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = 1$ elde edilir ve gerekli işlemler yapıldığında, $(x + y)(x + z)(y + z) = 0$ bulunacaktır. Yani x, y, z sayılarından en az ikisinin toplamı sıfırdır. Eğer $x + y = 0$ ise $z = t$ ve $x^3 + y^3 + z^3 = z^3 = 1000^3$ olmalıdır. Buradan da $z = t = 1000$ ve $x+y+z+t = z+t = 2000$ bulunur. $x+z = 0$ ve $y + z = 0$ durumları da aynı sonucu verir.

114. $y^2 = x^3 - 432$ denklemini sağlayan tüm x, y tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $x^3 = y^2 + 432$ ifadesi bir tam küptür ancak ve ancak $6^3(y^2 + 432) = 216(y^2 + 432)$ ifadesi bir tam küptür. Fakat $216(y^2 + 432) = (y + 36)^3 - (y - 36)^3$ tür. Dolayısıyla, $(6x)^3 + (y - 36)^3 = (y + 36)^3$ olur.
Fermat'ın son teoremine göre, $n > 2$ için, $a^n + b^n = c^n$ ifadesini gerçekleyen sıfırdan farklı a, b, c tam sayıları yoktur.
Bizim durumda $n = 3$ ve $x > 0$ dır. Dolayısıyla $(6x)^3 + (y - 36)^3 = (y + 36)^3$ ifadesi $y - 36 = 0$ veya $y + 36 = 0$ durumunda tam sayı çözümlerine sahip olabilir ki bu da bize $y = \pm 36$ ve $6x = 72$ verir.
Yani, verilen denklemin tüm tam sayı çözümleri $x = 12$ ve $y = \pm 36$ dır.

115. $x^{2006} - 4y^{2006} - 2006 = 4y^{2007} + 2007y$ denkleminin pozitif tam sayı çözümünün olmadığını gösteriniz.

Çözüm. Denklemin pozitif tam sayı çözümünün olduğunu kabul edelim ve bu değerlere x ve y diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} x^{2006} &= 4y^{2007} + 4y^{2006} + 2007y + 2006 \\ x^{2006} + 1 &= 4y^{2006}(y+1) + 2007(y+1) \\ x^{2006} + 1 &= (4y^{2006} + 2007)(y+1) \end{aligned}$$

olur. Burada $4y^{2006} + 2007 \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan son ifadenin $4k+3$ şeklinde bir asal çarpanı olmalıdır. Ancak Fermat Teoremine göre bu olanaksızdır.

116. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere negatif olmayan x ve y tam sayıları için $ax + by$ şeklindeki negatif olmayan sayılara **"güzel"** diyelim. s tam sayısının t ile bölümünden kalan s_t olmak üzere $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunu $f(n) = n - n_a - n_b$ olarak tanımlayalım. Bu durumda n tam sayısının güzel olabilmesi için gerekli ve yeterli şartın $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ dizisinin negatif olmayan sayılardan meydana gelmesi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. n güzel ise $n = ax + by$ ve bu nedenle $n_a = (by)_a$ ve $n_b = (ax)_b$ olur. Dolayısıyla

$$f(n) = ax - (ax)_b + by - (by)_a = by' + ax'$$

tam sayısı da güzel olur ve bu nedenle dizi negatif olmayan sayılardan meydana gelir.

Şimdi dizi negatif olmayan sayılardan meydana geldiğinde n tam sayısının güzel olduğunu gösterelim. Dizi artmayan bir dizi olduğu için belli bir noktadan sonraki terimlerin hepsi birbirine eşit olacaktır. Ancak $f(k) = k$ durumu k tam sayısının ab tam sayısının bir katı olmasını gerektirdiğinden bu terimler güzel olur. Böylece geriye sadece aşağıdaki yardımcı teoremi göstermek kalıyor.
Yardımcı Teorem: $f(n)$ güzel ise n de güzel olur.
Yardımcı Teoremin İspatı: $n = 2n - n_a - n_b - f(n) = ax' + by' - ax - by = a(x - x') + b(y - y')$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $n \geq f(n) \Rightarrow n - n_a \geq f(n) - f(n)_a \Rightarrow ax' \geq ax + by - (by)_a \geq ax$ olduğundan $x' \geq x$ olduğu görülür. Benzer şekilde $y' \geq y$ durumu da gösterilebilir.

117. $n \geq 3$ koşulunu sağlayan her doğal sayı için $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$ denklemini sağlayacak x_n, y_n tek, doğal sayı ikilisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $n = 3$ için $x_3 = y_3 = 1$ ikilisi çözümdür. Şimdi verilen bir n doğal sayısı için x_n, y_n ikilisinin $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$ denklemini sağladığını kabul edelim; öyle bir (X, Y) ikilisi bulalım ki $7X_n^2 + Y_n^2 = 2^{n+1}$ sağlansın. Aslında,

$$7\left(\frac{x_n \pm y_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x_n \mp y_n}{2}\right)^2 = 2(7x_n^2 + y_n^2) = 2^{n+1}$$

olur. $(x_n + y_n)/2$ veya $|x_n - y_n|/2$ tek olmalıdır (toplamları x_n, y_n ikilisinin büyük olanına eşit olacaktır, yani toplamları tek sayı olacaktır). Bu da bize aradığımız ikiliyi sağlar.

118. 50! kaç değişik şekilde iki veya daha fazla ardışık pozitif tam sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir?

Çözüm. n bir pozitif tam sayı olsun. İlk önce n sayısının kaç değişik şekilde bir veya daha fazla ardışık tam sayının toplamı şeklinde ifade edilebileceğini bulacağız. Bu gösterimlerin sayısının n nin pozitif tek tam sayı bölenlerinin sayısına eşit olduğunu göstereceğiz.
Bu ardışık tam sayıların sayısının bir tek sayı olması durumunda, n sayısı için $n = (a-b) + \ldots + a + \ldots (a+b)$ koşulunu sağlayan a ve $b \geq 0$ tam sayıları vardır. Yani, $n = a(2b+1)$ dir.
Ardışık tam sayıların sayısı bir çift sayıysa, n sayısı için $n = (a-b+1) + \ldots + a + (a+1) + \ldots + (a+b)$ koşulunu sağlayan a ve $b > 0$ tam sayıları vardır. Yani, $n = (2a+1)b$ dir. $b > 0$ olduğundan $2a+1 > 0$ olmalıdır.
Böylece, n nin tüm gösterimlerinin sayısının n nin pozitif tek tam sayı bölenlerinin sayısının iki karı olduğu bulunur.
n nin $c + \ldots + d$ şeklindeki gösteriminde d sayısı en büyük terim olsun. Eğer $c > 0$ ise $(1-c) + \ldots + (c-1) = 0$ eşitliğini kullanarak $n = (1-c) + \ldots + d$ yazabiliriz. Yani, n nin gösterimindeki ilk terim, $(1-c)$, negatif yapılabilir. Açık bir şekilde, bu metod toplamı ve en büyük terimi değiştirmeden toplama ardışık sayı eklemenin veya toplamdan ardışık sayı silmenin tek yoludur.
Benzer şekilde, $(1-c) \leq 0$ durumunda, $(1-c)+\ldots+(c-1) = 0$ eşitliğini kullanarak, ardışık terimleri toplamdan silebiliriz.
Yani, n nin pozitif tam sayıların toplamı şeklindeki her gösterimi için, her terimi pozitif olmayan sadece bir tane gösterim mevcuttur.
Yani, n nin gösterimlerinin yarısında sadece pozitif tam sayılar kullanılır.
Buradan da, n nin pozitif ardışık tam sayıların toplamı şeklindeki gösterimlerinin sayısının n nin pozitif tek tam sayı bölenlerinin sayısı olduğu bulunur.
$p_1, \ldots, p_r$ asal sayılar ve $a_1, \ldots, a_r$ pozitif tam sayılar olmak üzere, $n = p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}$ olsun. n nin her böleni bu asal sayıların ve onların belirli kuvvetlerinin çarpımlarından oluştuğundan, n nin pozitif bölenlerinin sayısı $(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_r+1)$ dir.
$50! = 2^{47} \cdot 3^{22} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$ dir. Bu eşitlik, 50! i bölen her asal sayının $1 \ldots 50$ çarpımında kaç kere geçtiği sayılarak bulunabilir.
50! in tek tam sayı bölenlerinin sayısı $1 \cdot 23 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3^3 \cdot 2^6 = 93000960$ dır. 50! i sadece kendisini kullanarak bir ardışık sayının toplamı şeklinde yazabiliriz. Yani, 50! sayısı 93000959 değişik şekilde iki veya daha fazla sayıda ardışık pozitif tam sayının toplamı şeklinde yazılabilir.

119. $4^x + 4^y + 4^z$ ifadesini bir tam kare yapan biribirinden farklı bütün x, y, z tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $x < y < z$ ve $4^x + 4^y + 4^z = u^2$ olsun. $2^{2x}(1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}) = u^2$ eşitliğin tam sayılarda doğru olabilmesi için, parantez içindeki ifadenin bir tek sayının karesi olmalıdır. Yani, $1 + 4^{y-x} + 4^{z-x} = (2a+1)^2$ olmalıdır. Buradan, $4^{y-x-1} + 4^{z-x-1} = a(a+1)$ ya da

$$4^{y-x-1}(1 + 4^{z-y}) = a(a+1)$$

yazılır. İki durum inceleyeceğiz:
a çift ise $a+1$ tektir. Dolayısıyla $4^{y-x-1} = a$ ve $1 + 4^{z-y} = a+1$ dir. Buradan, $4^{y-x-1} = 4^{z-y}$ ya da $y - x - 1 = z - y$ elde edilir. Dolayısıyla, $z = 2y - x - 1$ ve

$$4^x + 4^y + 4^z = 4^x + 4^y + 4^{2y-x-1} = \left(2^x + 2^{2y-x-1}\right)^2$$

dir.
a tek ise $a+1$ çifttir. Dolayısıyla $a = 4^{z-y} + 1$ ve $a + 1 = 4^{y-x-1}$ dir. Buradan, $4^{z-y} + 2 = 4^{y-x-1}$ ya da $2^{2z-2y-1} + 1 = 2^{2y-2x-3}$ elde edilir ki bu mümkün değildir, çünkü $2z - 2y - 1 \neq 0$ dır.

SONLU MATEMATİK

SAYMA

SAYMANIN İKİ TEMEL PRENSİBİ

TOPLAMA PRENSİBİ

Ayrık iki kümenin bileşimindeki eleman sayısı, bu kümelerin eleman sayıları toplamına eşittir.

Örnek. Bir sınıftaki her öğrencinin, iki haftalık tatil boyunca okuduğu kitap sayısı 1 ile 3 arasında değişmektedir. A_1, A_2 ve A_3, sırası ile, tam olarak 1, 2 ve 3 kitap okuyan öğrencilerin kümesini göstermek üzere, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ sınıftaki tüm öğrencilerin kümesidir. Bu kümeler ayrık olduğundan sınıftaki öğrencilerin sayısı

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3)$$

olur.

ÇARPMA PRENSİBİ

Bir A işi, $A_1, A_2, \ldots, A_t$ adımlarının sıra ile uygulanmasından ibaret olsun. Bu adımların gerçekleştirilebileceği yolların sayılarını da sırasıyla $n_1, n_2, \ldots, n_t$ ile gösterelim. Her bir adımın gerçekleştirilebileceği yolların sayısı, önceki adımların gerçekleştirilmesi için seçilen yoldan bağımsız ise, A işi $n_1 n_2 \cdots n_t$ farklı şekilde gerçekleştirilebilir.

Örnek 1. A, B, C ve D kişilerinden oluşan bir grubun elemanları başkanlık, sekreterlik ve muhasebecilik görevlerini kaç farklı şekilde paylaşabilirler?

Seçimi üç adımda gerçekleştirebiliriz:

1. Adım: Başkanın seçilmesi.
2. Adım: Sekreterin seçilmesi.

3. Adım: Muhasebecinin seçilmesi.

İlk adımın 4 farklı yoldan gerçekleştirilebileceği açıktır. İlk adımda kim başkan seçilirse seçilsin sekreterin seçilmesi yani ikinci adım 3 farklı yoldan gerçekleştirilebilir. Üçüncü adım da, ilk iki adımın sonuçlandırılma şeklinden bağımsız olarak, 2 farklı yoldan gerçekleştirilebileceğinden, tüm görevler için atama yapılması $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ farklı yoldan yapılabilir.

Örnek 2. A sekreter seçilmemek üzere, A, B C ve D kişilerinden oluşan bir grubun elemanları başkanlık, sekreterlik ve muhasebecilik görevlerini kaç farklı şekilde paylaşabilirler?

Seçimi bir önceki örnekte tanımlanan adımlarla yapmaya çalıştığımızda, ikinci adım için mümkün olan yolların sayısı ilk adımın sonucuna bağlı olur. İlk adımda A nın başkan seçilip seçilmemesine göre ikinci adım için üç veya iki mümkün yol kalır. Bağımsızlık koşulu sağlanmadığı için çarpma prensibini kullanamayız. Öte yandan adımları

1. Adım: Sekreterin seçilmesi.
2. Adım: Başkanın seçilmesi.
3. Adım: Muhasebecinin seçilmesi.

olarak tanımlarsak, çarpma prensibini kullanarak seçimlerin 18 farklı şekilde sonuçlandırılabileceğini görürüz.

Örnek 3. n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısını hesaplayalım.
$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ile gösterebileceğimiz kümenin bir alt kümesini oluşturmak için her x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$elemanının alt kümede yer alıp almayacağına karar vermemiz gerekir. Bu gözlemle, bir alt küme oluşturma işlemini n adımlı bir süreç olarak görebiliriz:

1. Adım: x_1 in alt kümede olup olmayacağına karar verilmesi.
2. Adım: x_2 nin alt kümede olup olmayacağına karar verilmesi.

$\vdots$

n. Adım: x_n in alt kümede olup olmayacağına karar verilmesi.

Her adım için, önceki adımların sonucundan bağımsız olarak 2 seçenek bulunduğundan, bir alt kümenin oluşturulması 2^n farklı şekilde sonuçlanabilir. O halde, n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı 2^n dir.

DİZİLİŞLER VE SEÇİLİŞLER

PERMÜTASYONLAR

Farklı Nesnelerin Dizilişleri / Permütasyonların Sayısı.

Birbirinden farklı n nesnesin yan yana sıralanış biçimlerinden her birisine bu nesnelerin bir dizilişi (permütasyonu) adı verilir. Örneğin BCAD, A, B, C, D harflerinin bir permütasyonudur. n farklı nesneden r tanesinin yan yana sıralanmasına da bu nesnelerin $r-$li bir dizilişi ($r-$li permütasyonu) adı verilir. Örneğin A, B, C, D harflerinin 3- lü permütasyonlarından bazıları ABC, DAC, CBA, BAD dır. n nesnenin r-li permütasyonlarının sayısı $P(n,r)$ ile gösterilir.

n nesnenin $r-$li bir permütasyonunu oluşturmak, bu nesnelerin $r-$tanesini sıralı r konuma yerleştirmekle eşdeğerdir. Birinci konuma n nesneden herhangi birisi yerleştirilebilir; ikinci konum için $n-1$ seçeneğimiz vardır, bu şekilde devam ettiğimizde r inci konum için $n-r+1$ farklı seçenek kalır. Çarpma prensibi kullanılarak

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$$

bulunur. Özel olarak $r=n$ durumunda $P(n,n)$, permütasyonların sayısını ifade eder ve

$$P(n,n) = 1 \cdot 2 \cdots n$$

olur. n nesnenin permütasyonlarının sayısına eşit olan 1 den n ye kadar pozitif sayıların çarpımına n nin faktoriyeli denir ve bu sayı $n!$ ile gösterilir (n faktoriyel şeklinde okunur). Pozitif tam sayılar için tanımlı olan faktoriyel, işlem ve ifadelerde kolaylık sağlaması bakımından 0 sayısı için ayrıca 0!=1 olarak tanımlanmıştır. Faktoriyel gösterimini kullanarak $(0 \leq r \leq n)$ tam sayıları için

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

yazabiliriz.

Örnek 4. BALIKESİR kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek 9!=362.880 farklı kelime (anlamlı veya anlamsız) yazılabilir.

Örnek 5. (1-1 Fonksiyonların Sayısı) n elemanlı X ve m elemanlı Y kümeleri $(n \leq m)$ verildiğinde, 1-1 bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun tanımlanması, her adımında sırayla

$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ değerlerinden birisinin tayin edildiği bir işlem olarak düşünülebilir. İlk adım için m; ikinci adım için $m-1, \ldots$ son adım için $m-n+1$ farklı yol bulunmaktadır. Çarpım kuralı kullanılarak, 1-1 fonksiyonların sayısının $P(m, n)$ olduğu görülür.

(Sınırlı) Tekrarlı Nesnelerin Dizilişleri.

En az iki tanesi özdeş olan nesnelerin tüm farklı dizilişlerinin sayısına, tekrarlı permütasyonların sayısı denir. Örneğin MATEMATİK kelimesini oluşturan harflerin yerleri değiştirilerek oluşturulan ATKİTMEAM veya KİTAMETAM gibi kelimelerin sayısı gibi. Elimizde, t çeşit nesne olsun. Birinci çeşitten n_1; ikinci çeşitten $n_2, \ldots$ ve t inci çeşitten n_t tane bulunduğunu ve $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$ olduğunu kabul edelim. Bu nesnelerin (tekrarlı) permütasyonlarının sayısı

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_t!}$$

ifadesi ile verilir.

Böylece, MATEMATİK kelimesindeki harfleri kullanarak yazılabilecek kelimelerin sayısı $\frac{9!}{2!2!2!}$ olur. Paydada yer alan 2! ler, M, A ve T harflerinin ikişer kez tekrarlamasına karşı gelmektedir. Tekrarlanma sayısı 1 olan E, İ ve K harfleri için yazılması gereken 1! ler ise, gereksiz karmaşıklıktan kaçınmak için yazılmamıştır.

Örnek 6. p tane 1 ve q tane 0, bir sıraya $\frac{(p+q)!}{p!q!}$ farklı şekilde dizilebilir.

Örnek 7. ÇANAKKALE kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek 9!/(3!2!)=30240 farklı kelime (anlamlı veya anlamsız) yazılabilir.

Tekrarlı elemanların tümü kullanılarak oluşturulan dizilişlerin sayısını yukarıda verilen ifade yardımı ile hesaplayabilmemize karşın, bunların bir kısmını kullanarak kaç farklı diziliş oluşturabileceğimizi hesaplamamızı sağlayacak basit bir ifade bulunmamaktadır. Bu durumda aranılan sayı, çeşitli durumları göz önünde bulundurarak tanımlanan alt problemler çözülerek hesaplanabilir.

Örnek 8. GAZİANTEP kelimesindeki harflerin 7 tanesi kullanılarak yazılabilecek kelimelerin sayısını bulalım.

G,Z,İ,N,T,E,P harflerinden ikisi dışarıda bırakıldığında, geriye kalan 7 harf 7!/2 farklı şekilde dizilebilir. Dışarıda bırakılan harfler için de $\binom{7}{2} = 21$ farklı seçimimiz olduğundan, bu tür dizilişlerin sayısı $21 \cdot \frac{7!}{2}$ olur.

Dışarıda kalan harflerden birisi veya her ikisi de A olduğunda, geriye kalan harfler 7! farklı biçimde dizilebilir. En az bir tanesi A olmak üzere, dışarıda kalan iki harfi seçebileceğimiz yolların sayısı da 8 olduğu için, bu tür dizilişler $8 \cdot 7!$ tanedir.

Sonuç olarak aradığımız sayıyı $\frac{37}{2}7!$ olarak buluruz.

(Sınırsız) Tekrarlı Nesnelerin Dizilişleri.

Her birisinden istediğimiz sayıda kullanabildiğimiz n çeşit nesne ile, $r-$ li bir diziliş oluşturmak istediğimizde, her konum için n seçeneğimiz olduğundan, toplam olarak n^r farklı yol bulunur.

Örnek 9. A, B, C, D harflerinin her birisini dilediğimiz kadar kullanarak yazabileceğimiz 6 harfli kelimelerin sayısı 4^6 dır.

Örnek 10. Bir otomobil galerisinde, renkleri dışında farklılık taşımayan 5 tane sarı, 6 tane mavi ve 7 tane kırmızı otomobil bulunmaktadır. Bu arabalardan 4 tanesini yan yana koyarak sergilemek isteyen galeri sahibinin 3^4 seçeneği vardır. Her bir renkten otomobil sayısının, konum sayısından büyük olması sayesinde her renkten dilediğimiz kadar kullanabileceğimizi düşünebiliyoruz. 4 yerine 8 arabanın yan yana sergilenme imkanı olsaydı sınırlı tekrarlı nesnelerin dizilişleri sözkonusu olacağından problemin çözümü daha karmaşık olurdu.

Örnek 11. n elemanlı X kümesinden, m elemanlı Y kümesine tanımlı herhangi bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun tanımlanması, her adımında $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ değerlerinin sırayla tayin edildiği bir işlem olarak düşünülebilir. Her adım için m farklı yol bulunduğundan, tüm fonksiyonların sayısı m^n olarak elde edilir.

Çembersel Permütasyonların Sayısı.

Elimizdeki nesnelerin bir çember etrafına dizilişine, dikkate alınan tek husus yerleştirilen nesnelerin birbirlerine göre konumları ise, çembersel permütasyon adı verilir. Aksi belirtilmedikçe, yansımayla elde edilenler hesaba katılmaz. Örneğin A, B, C ve D harflerinin bir çember etrafına ABCD, BCDA, CDAB ve DABC şeklinde dizilişleri aynı kabul edilir. Öte yandan, CBAD farklı bir diziliştir. n farklı nesneden herhangi birisi çember üzerinde sabitlenip referans noktası olarak kabul edilirse, geri kalan $n-1$ nesnenin mümkün her dizilişi ile bu n nesnenin bir çembersel dizilişini elde ederiz. Böylece, n nesnenin çembersel permütasyonlarının sayısı $(n-1)!$ olarak elde edilir.

Örnek 12. 7 kişilik bir halkoyunları grubu, 2 sene boyunca her gün halka şeklinde halay oyunu sergilemişlerdir. Her gün bir başka biçimde dizilmiş olmaları mümkün müdür?

Grubun çembersel diziliş sayısı 6!=720 dir. İki senede en az 730 gün bulunduğundan, her gün bir başka biçimde dizilmiş olamazlar. Öte yandan, halka şeklinde değil de sıra halinde halay çekselerdi 7!=5040 farklı şekilde sıralanacaklarından, 13 sene (en fazla 4749 gün) boyunca her gün farklı bir diziliş deneyebileceklerdi.

KOMBİNASYONLAR

Kombinasyonların Sayısı.

Birbirinden farklı n şeyden herhangi r tanesinin oluşturduğu topluluğa bu şeylerin $r-$li bir seçilişi ($r-$li kombinasyonu) adı verilir. Bir başka deyişle, n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı her alt kümesine, A daki elemanların bir $r-$li kombinasyonu adı verilir. Kombinasyonların, $C(n,r)$ ile gösterilen sayısını iki adımlı bir işlem tanımlayarak hesaplayabiliriz:
1. Adım: Kümeden r elemanın seçilmesi.
2. Adım: Seçilen r elemanın dizilmesi.

Bu iki adım sonunda n elemanın bir permütasyonu elde edileceğinden işlemin sonuçlanabileceği durumların sayısı $P(n,r)$ dir. Öte yandan, birinci adım $C(n,r)$ farklı yoldan; ikinci adım da $r!$ farklı yoldan gerçekleştirilebileceğinden, çarpma prensibi gereğince, $P(n,r) = r! \cdot C(n,r)$ olur ve kombinasyoların sayısı şu şekilde elde edilir:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r!)}.$$

Örnek 13. p tane 1 ve q tane 0 ı bir sıraya dizebilmek için, bu sayıların dizileceği toplam $p+q$ konumdan p tane 1 in yerleştirileceği konumları seçmek yeterlidir. Böylece bu tür dizilişlerin sayısını $C(p+q,p)$ olarak elde ederiz. Bu yolla elde ettiğimiz sonuç Örnek 6 da elde edilen sonucun eşdeğer ifadesidir.

Örnek 14. 7 erkek ve 4 kız öğrencinin, herhangi iki kız öğrenci yanyana oturmamak şartı ile bir sıraya kaç farklı şekilde oturabileceğini hesaplamak için üç adımlı bir işlem tanımlayalım:

1. Adım: Erkek öğrencilerin sıralanması (7! farklı yol).
2. Adım: Yan yana oturan erkek öğrencilerin aralarındaki 6 boşluk ile iki uçta oturanların yanlarındaki 2 boşluktan ibaret toplam 8 mümkün konum arasından kızların oturacağı 4 yerin seçilmesi ($C(8,4)$ yol).
3. Adım: Seçilen 4 konuma kız öğrencilerin yerleştirilmesi (4! farklı yol).
Çarpma kuralını kullanarak sonuç $C(8,4)7!4! = \frac{8!7!}{4!}$ olur.

(Sınırlı) Tekrarlı Nesnelerin Seçilişleri.

En az iki tanesi eş olan şeylerin bir kısmının oluşturduğu toplulukların sayısına tekrarlı kombinasyonların sayısı denir. Bu sayı, içerme-dışarma prensibi kullanılarak elde edilecektir.

Sınırsız Tekrarlı Nesnelerin Seçilişleri.

Her birisinden istediğimiz sayıda kullanabildiğimiz n çeşit nesne ile, $r-$ tane nesneden oluşan bir topluluk

$$C(n+r-1, n-1)$$

farklı şekilde tanımlanabilir.

BİNOM KATSAYILARI

Herhangi bir n gerçel sayısı ve pozitif r tam sayısı için

$$\binom{n}{r} = \frac{(n-r+1)(n-r+2)\cdots(n-1)(n)}{r!}$$

ifadesiyle tanımlanan $\binom{n}{r}$ sayısına binom katsayısı denir. Bu tanım herhangi n gerçel sayısı için, $\binom{n}{0} = 1$ kabulü ile tamamlanır.

Örnek 15.

$\binom{3,5}{2} = \dfrac{3,5 \cdot 2,5}{2!} = \dfrac{35}{8}.$

$\binom{3,5}{4} = \dfrac{3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5 \cdot 0,5}{4!} = \dfrac{35}{128}.$

$\binom{3,5}{5} = \dfrac{3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5 \cdot 0,5 \cdot (-0,5)}{5!} = -\dfrac{7}{256}.$

$\binom{-3,5}{2} = \dfrac{(-3,5) \cdot (-4,5)}{2!} = \dfrac{63}{8}.$

$\binom{-1}{r} = (-1)^r \qquad (r \geq 0 \text{ tam sayı}).$

$\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r} \qquad (r \geq 0 \text{ tam sayı, } n\text{- gerçel sayı}).$

Gerçel sayıları söz konusu edinen $\binom{3,5}{2}$, $\binom{-2,7}{2}$ gibi ifadeleri, alt kümelerin sayısı olarak görmek mümkün değildir. Öte yandan bu genelleştirilmiş ifade, ileri düzey yöntemlerde sıklıkla kullanılır. Bu ifadeyi burada söz konusu etmemizin sebebi, bir çok yerde kombinasyonların sayısı için $C(n,r)$ yerine $\binom{n}{r}$ gösteriminin tercih edilmesidir. Bu tercihi geçerli kılan gerekçe, $0 \leq r < n$ tam sayıları için, tanım gereği

$$\binom{n}{r} = C(n, r)$$

olmasıdır. Kitabın geri kalan kısmında $\binom{n}{r}$, n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısını göstermek için kullanılacaktır.

Binom katsayılarının özellikleri.

Boş küme, her kümenin bir alt kümesi olduğundan ve herhangi bir kümenin eleman içermeyen tek alt kümesi boş küme olduğundan, her pozitif n tam sayısı için $C(n, 0) = 1$ elde edilir. n elemanlı bir kümenin n elemanlı tek alt kümesi kendisi olduğundan $C(n, n) = 1$ olur:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Bir kümenin bir elemanlı alt kümelerinden her birisi, kümenin bir tek elemanından oluştuğu için $C(n, 1) = n$ olur. Öte yandan, bir eleman ayrıldığında, geriye $n - 1$ eleman kalacağından, $n - 1$ elemanlı alt kümelerin sayısı da n olur:

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

n elemanlı bir kümenin r elemanı, bir alt küme oluşturmak için seçildiğinde, geriye kalan $n - r$ eleman da bir alt küme oluşturur. Böylece, r elemanlı her alt kümeye karşılık $n - r$ elemanlı bir alt küme bulunacağından

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

elde edilir.

Aşağıdaki bağıntılar, indirgeme bağıntıları olarak bilinirler:

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} = \frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}.$$

Pascal Özdeşliği

25 futbolcusu bulunan bir takımda sahaya çıkarılacak 11 futbolcu $\binom{25}{11}$ farklı şekilde belirlenebilir. Salih isimli futbolcunun yer aldığı bir takım kendisi ve geri kalan 24 fut-

bolcu arasından seçilmiş olan 10 kişiden oluşur. O halde, Salih'li takımların sayısı $\binom{24}{10}$ dur. Salih'siz takımlar ise 24 futbolcu arasından 11'i seçilerek oluşturulduğundan, böyle takımların sayısı da $\binom{24}{11}$ olur. Böylece, oluşturulabilecek tüm takımlar ayrık iki kümeye ayrılmış olduğu için, tüm takımların sayısı Salih'li ve Salih'siz takımların toplamına eşit olur. Yani, $\binom{25}{11} = \binom{24}{11} + \binom{24}{10}$ elde edilir. Genelleştirme ile her $0 < r \leq n$ tam sayıları için *Pascal Özdeşliği* adı verilen aşağıdaki özellik elde edilir:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}.$$

Paralel Toplama / Üst Toplama

Pascal özdeşliğini üst üste kulanarak ilginç sonuçlar elde edebiliriz. Örneğin, $\binom{11}{5} = \binom{10}{4} + \binom{10}{5}$ eşitliği ile başlayıp $\binom{10}{5} = \binom{9}{4} + \binom{9}{5}$ olduğunu kullanarak $\binom{11}{5} = \binom{10}{4} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5}$ yazabiliriz. Bu kez $\binom{9}{5} = \binom{8}{4} + \binom{8}{5}$ eşitliğini kullanıp $\binom{11}{5} = \binom{10}{4} + \binom{9}{4} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5}$ elde ederiz. Bu şekilde devam ettiğimizde $\binom{11}{5} = \binom{10}{4} + \binom{9}{4} + \binom{8}{4} + \binom{7}{4} + \binom{6}{4} + \binom{5}{4} + \binom{4}{4}$ eşitliğine ulaşırız. Bu gözlem genelleştirilerek elde edilen aşağıdaki eşitliğe üst toplama özelliği adı verilir.

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{k+i}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+r}{k} = \binom{k+r+1}{k+1}$$

Yukarıdaki eşitlikte $\binom{k+i}{k} = \binom{k+i}{i}$ yazılarak elde edilen

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{k+i}{i} = \binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \cdots + \binom{k+r}{k} = \binom{k+r+1}{r}$$

eşitliği paralel toplama özelliği olarak bilinir.

$\binom{n}{r}$ nin, üst indisini artırarak elde edilen terimlerin toplamını üst toplama özelliği; her iki indisin paralel olarak artmasıyla elde edilen terimlerin toplamını paralel toplama özelliği ile verebilmemize karşın, alt indis üzerinden yapılan toplamalarla ilgili bir eşitlik yoktur. Sözgelimi, $\binom{50}{0} + \binom{50}{1} + \cdots + \binom{50}{27}$ toplamını derhal hesaplama imkanımız bulunmamaktadır. Ancak, $r = n$ olması durumunda, n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı 2^n ve bunların $\binom{n}{r}$ tanesi r elemanlı olduğundan

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$$

eşitliği bulunur.

Pascal Üçgeni

Tüm $0 \leq r \leq n$ tam sayıları için hesaplanan $\binom{n}{r}$ değerlerinin aşağıdaki gibi üçgensel dizilişine Pascal Üçgeni adı verilir.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Bir çok özelliğe sahip olan bu üçgenin n. satırındaki sayılar $\binom{n-1}{0}, \binom{n-1}{1}, \ldots, \binom{n-1}{n}$ değerleridir. Böylece, üçgenin iki kenarı boyunca dizilen 1'ler tüm n ler için hesaplanan $\binom{n}{0}$ ve $\binom{n}{n}$ lerdir. Üçgenin 1 den büyük her elemanının, bir üst satırda, kendisine göre sağ ve solda bulunan en yakın iki terimin toplamına eşit olması da Pascal özdeşliğinin bir yansımasıdır.

Binom açılımı Herhangi a, b gerçel sayıları ve pozitif n tam sayısı için $(a+b)^n$ nin, a ve b nin kuvvetleri çarpımlarının toplamı cinsinden ifadesi

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

eşitliği ile verilir.

İÇERME DIŞARMA PRENSİBİ

Sonlu sayıda elemana sahip A ve B kümelerinin birleşimindeki ve arakesitindeki eleman sayılarının

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ilişkisini sağladığı bilinmektedir. Üç küme söz konusu olduğunda bu ilişki

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

şeklini alır.

Kümelerin sayısı arttıkça ifadenin daha da karmaşık bir hal alacağı ve ifade edilmesinin zorlaşacağı anlaşılmaktadır. $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ kümeleri için geçerli olan ilişkiyi yazabilmek için yeni bir gösterim tanımlayacağız. Kümelerin eleman sayılarının toplamını N_1 ile göstereceğiz yani,

$$N_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_n).$$

Tüm küme çiftlerinin kesişiminindeki eleman sayılarının toplamını N_2 ile göstereceğiz:

$$\begin{aligned} N_2 &= \textstyle\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1}^{n} A_{i_1} \cap A_{i_2} \\ &= n(A_1 \cap A_2) + \cdots + n(A_1 \cap A_n) \\ &\quad + n(A_2 \cap A_3) + \cdots + n(A_2 \cap A_n) \\ &\quad + n(A_3 \cap A_4) + \cdots + n(A_3 \cap A_n) + \cdots \\ &\quad + n(A_{n-1} \cap A_n) \end{aligned}$$

Bu gösterimi kullanarak, iki küme için $N_1 = n(A_1) + n(A_2)$, ve $N_2 = n(A_1 \cap A_2)$ olduğundan $N(A_1 \cup A_2) = N_1 - N_2$ yazabiliriz.

Benzer şekilde tüm küme üçlülerinin kesişimindeki eleman sayılarının toplamını N_3 ile ve bu şekilde devam ederek tüm küme t-lilerinin $(t = 1, 2, \ldots, n)$ kesişimini de N_t ile göstereceğiz.

TEOREM. $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ sonlu kümeler olmak üzere bu kümelerin birleşimindeki eleman sayısı

$$N_0 = n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = N_1 - N_2 + N_3 - \cdots + (-1)^{n+1} N_n$$

ile verilir.

Örnek 1. A, B, C, D sonlu kümeleri için

$N_1 = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$

$N_2 = n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(A \cap D) + n(B \cap C) + n(B \cap D) + n(C \cap D)$

$N_3 = n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap C)$

$N_4 = n(A \cap B \cap C \cap D)$

olmak üzere A, B, C, D kümelerinin birleşimindeki eleman sayısı şu şekilde verilir:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = N_1 - N_2 + N_3 - N_4.$$

Örnek 2. 100 kişilik bir topluluğa, 5 farklı günlük gazeteyi düzenli okuma eğilimleri konusunda bir anket düzenlenmiştir. Anket sonucunda her gazetenin 25 düzenli okuyucusu olduğu anlaşılmıştır. Bunun yanı sıra, herhangi iki gazete için ortak okuyucu sayısının 12; herhangi üç gazete için ortak okuyucu sayısının 9; herhangi dört gazete için ortak okuyucu sayısının 7 olduğu belirlenmiştir. Tüm gazeteleri okuyanların sayısı 5 olduğuna göre, toplulukta hiç gazete okumayanların sayısı nedir?

Verilenlerden, N_1=125, $N_2 = \binom{5}{2}12 = 120$, $N_3 = \binom{5}{3}9 = 90$, $N_4 = \binom{5}{4}7 = 35$ ve $N_5 = 5$ elde edilir. Böylece, gazete okuyanların toplamı $N_1 - N_2 + N_3 - N_4 + N_5 = 65$ olarak elde edilir. Sonuç olarak, herhangi bir gazeteyi okuma eğilimi taşımayanların sayısı 35 tir.

Örnek 3. $\{1, 2, \ldots, 100\}$ kümesindeki asal sayıların sayısını bulunuz.

Verilen kümede asal olmayan sayılar 2, 3, 5 veya 7 ile bölünebilen sayılardır. Şimdi, verilen kümede 2, 3, 5 ve 7 ile bölünebilen sayıların kümelerini sırasıyla A, B, C, D ile gösterelim. $n(A) = [100/2] = 50$, $n(B) = [100/3] = 33$, $n(C) = [100/5] = 20$ ve $n(D) = [100/7] = 14$ olduğundan $N_1 = 117$ olur.

N_2 nin hesaplanması için kümelerin ikişerli kesişimlerini göz önüne alacağız. Sözgelimi, $A \cap B$, 2 ve 3 ile bölünebilen yani 6 ile bölünebilen sayıların kümesi olduğundan $n(A \cap B) = [100/6] = 16$ bulunur. Benzer şekilde, $n(A \cap C) = [100/10] = 10$, $n(A \cap D) = [100/14] = 7$, $n(B \cap C) = [100/15] = 6$, $n(B \cap D) = [100/21] = 4$, $n(C \cap D) = [100/35] = 2$, elde edilir ve $N_2 = 45$ bulunur.

Küme üçlülerin kesişimlerindeki eleman sayıları da benzer şekilde bulunur: $n(A \cap B \cap C) = [100/30] = 3$, $n(A \cap B \cap D) = [100/42] = 2$, $n(A \cap C \cap D) = [100/70] = 1$, $n(B \cap C \cap D) = [100/105] = 0$ ve $N_3 = 6$.

2, 3, 5 ve 7 sayılarının tümü ile bölünebilen en küçük sayı 210 olduğundan $A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$

ve $N_4 = n(A \cap B \cap C \cap D) = 0$ dır.

Böylece, 2, 3, 5 ve 7 sayılarından en az birisi ile bölünebilen elemanların sayısı

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = N_1 - N_2 + N_3 - N_4 = 78$$

olur. Bu küme, bileşik sayılar ile birlikte 2, 3, 5 ve 7 yi de içerdiğinden, kümedeki bileşik sayıların sayısı 74 olur. 1 sayısını da kümeye dahil ettiğimizde asal olmayan sayıların sayısının 75 olduğu anlaşılır. O halde $\{1, 2, \ldots, 100\}$ kümesinde 25 tane asal sayı bulunur (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97).

$A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ birleşimi, bu kümelerin herhangi birisinde bulunan tüm elemanların kümesidir. Bir E evrensel kümesi belirlendiğinde bu birleşimin tümleyeni, birleşimde yer almayan elemanlardan oluşur. Bir başka deyişle, kümelerin herhangi birisinde yer almayan elemanların kümesi

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$$

dir. Evrensel küme sonlu bir küme, diyelim ki $n(E) = N_0$, olduğunda $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ ve $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}$ de sonlu kümelerdir. Öte yandan, bu kümeler ayrık olduğundan, $n(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) = N_0 - n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ olur. $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ kümelerinin herhangi birisinde yer almayan elemanların sayısını $\overline{N}$ ile göstererek

$$\overline{N} = N_0 - n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

yazabiliriz.

Not. Bir kelime dizisine günlük konuşmalarımızda yüklediğimiz anlam, mantık ve matematik dili ile yüklenenden farklı olabilmektedir. Söz gelimi, A ve B kümelerinin herhangi birisinde bulunmayan elemanların kümesi $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ olup, bu küme günlük konuşmalarımızda genellikle sözkonusu kümelerin hiçbirisinde yer almayan elemanların kümesi olarak isimlendirilir. Bu kümelerin en az birisinde bulunmayan elemanların kümesi de $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ dir. Örneğin A, 2 ile bölünebilen pozitif tam sayıların kümesi; B de 3 ile bölünebilen pozitif tam sayıların kümesi olduğunda $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \{1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 25,\ 27, \cdots\}$ ve $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, \cdots\}$ olur. Aynı şekilde $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin herhangi birisinde yer almayan elemanların sayısı olarak tanımladığımız $\overline{N}$, günlük konuşma diliyle, söz konusu kümelerin hiçbirisinde yer almayan elemanların sayısı olmaktadır.

TEOREM. ***(İçerme-Dışarma Prensibi)*** Evrensel kümenin eleman sayısı N_0 olmak üzere, $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$ kümelerinin herhangi birisinde yer almayan elemanların sayısı

$$\overline{N} = N_0 - n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^n N_n$$

ile verilir.
Örnek 4. a, b, c, d, e kümesindeki harflerin her birisini en az bir kez kullanarak kaç tane 10 harfli kelime yazabiliriz?

a, b, c, d ve e harfini kullanılmaksızın yazılan 10 harfli kelimelerin kümesini, sırasıyla, A_1, A_2, A_3, A_4 ve A_5 ile gösterelim. Hesaplamak istediğimiz, bu kümelerin herhangi birisine düşmeyen kelimelerin sayısı, yani $\overline{N}$ dir.

Göz önünde bulunduracağımız evrensel küme, verilen harfleri kullanarak yazılabilecek tüm 10 harfli kelimeler olup $N_0 = 5^{10}$ dur. Harflerin kullanılışındaki simetriden yararlanarak $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için $n(A_i) = 4^{10}$ olur ve $N_1 = 5 \cdot 4^{10}$ elde edilir. $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ve $i \neq j$ olmak üzere seçilen her i, j çifti için $A_i \cap A_j = 3^{10}$ dur. i, j çifti $\binom{5}{2}$ farklı şekilde seçilebileceğinden, $N_2 = \binom{5}{2} \cdot 3^{10}$ olur. Benzer şekilde $N_3 = \binom{5}{3} \cdot 2^{10}$, $N_4 = \binom{5}{4} \cdot 1^{10}$ ve $N_5 = 0$ elde edilir. Sonuç olarak aranan sayı

$$\overline{N} = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 5^{10} - 5 \cdot 4^{10} + 10 \cdot 3^{10} - 10 \cdot 2^{10} + 5 = 5.103.000$$

olarak bulunur

Örnek 5. 8×8 satranç tahtasının her birim karesi beyaz veya kırmızıya boyanacaktır. Her satırda ve her sütunda en az bir kırmızı kare bulunması koşulu ile boyama işinin kaç farklı şekilde yapılabileceğini bulunuz.
Evrensel küme olarak, her satırında en az bir kırmızı kare bulunan tahtaların kümesi alınacaktır. Böyle bir tahtanın her satırı $2^8 - 1$ farklı şekilde boyanabileceğinden, her satırında en az bir kırmızı kare bulunmak üzere tahta, $N_0 = (2^8 - 1)^8$ farklı şekilde boyanabilir. Bu şekilde boyanmış tahtalar arasında i. sütunu $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ tamamı ile beyaz olanların kümesini B_i ile gösterelim. B_i kümesindeki her tahtanın i. karesi beyaz olacağından geri kalan 7 kareyi $2^7 - 1$ farklı şekilde; tahtanın tümünü de $8(2^7 - 1)^8$ farklı şekilde boyayabiliriz. B_i kümelerinin $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ herhangi k tanesinin kesişiminde yer alan bir tahtanın her satırı için $2^{8-k} - 1$ boyama şekli olur. Dolayısı ile bu tür bir tahtanın tamamı $(2^{8-k} - 1)^8$ farklı şekilde boyanabilir ve $N_k = \binom{8}{k}(2^{8-k} - 1)^8$ elde edilir. Sonuç olarak, koşulan şartları sağlayan tahtaların sayısı

$$\sum_{k=0}^{8} (-1)k \binom{8}{k} (2^{8-k} - 1)^8 = 1,734 \times 10^{19}$$

olarak bulunur.

ÖRTEN FONKSİYONLARIN SAYISI

Eleman sayısı n olan X kümesinden, eleman sayısı m olan Y kümesine tanımlı $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonları arasında örten olanların sayısını hesaplayacağız.

Evrensel küme, tüm fonksiyonların kümesi olduğundan, $N_0 = m^n$ dir. $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ kabul ederek $i = 1, 2, \ldots, m$ için A_i ile, $y_i \in Y$ nin görüntü kümesinde yer almadığı fonksiyonların kümesini gösterelim. A_1 kümesindeki bir fonksiyon $m-1$ farklı değer alabildiği için $n(A_1) = (m-1)^n$ olur. Simetriden yararlanarak, her $i = 1, 2, \ldots, m$ için aynı sonuç bulunacağından, $N_1 = m(m-1)^n$ dir.

$i, j = 1, 2 \ldots, m$ ve $i \neq j$ olmak üzere seçilen her i, j çifti için $A_i \cap A_j$ kümesindeki bir fonksiyon da $m-2$ farklı değer alabildiğinden, $n(A_i \cap A_j) = (m-2)^n$ olur. Öte yandan, i, j çifti $\binom{m}{2}$ farklı şekilde seçilebilir ve $N_2 = \binom{m}{2}(m-2)^n$ olur. Benzer şekilde, $k = 1, 2, \ldots, m$ için $N_k = \binom{m}{k}(m-k)^n$ bulunur. İçerme dışarma prensibi kullanılarak

$$\overline{N} = N_0 - N_1 + N_2 - \cdots + -1^m N_m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

elde edilir.Bu ifadenin bir başka yazılış biçimi de şöyledir:

$$\overline{N} = \left| \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} i^n \right|.$$

ŞAŞKIN DİZİLİŞLERİN SAYISI

$\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin bir $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ permütasyonunda her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\sigma_i \neq i$ ise, permütasyona bir şaşkın diziliş (İng. derangement) adı verilir ve bu dizilişlerin sayısı D_n ile gösterilir.

D_n i hesaplamak için A_i kümesini, i tam sayısının $(i = 1, 2, \ldots, n)$ orijinal konumunda olduğu permütasyonların kümesi şeklinde tanımlarsak $n(A_i) = (n-1)!$ ve $N_1 = n(n-1)!$ olur. Benzer şekilde $k = 1, 2, \ldots, n$ için $N_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$ dir. $N_0 = n!$ olduğu göz önüne alınarak

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

elde edilir.

Not. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^t}{t!}$ olduğunu hatırlayarak $D_n \approx \frac{n!}{e}$ yazabiliriz. Gerçekten de, $D_n = \left[\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right]$ dir.

Örnek 6. Bir işyerine başvuruda bulunan 8 kişiyle iki ayrı konuda mülakat yapılacaktır. Konuların ikisi için de mülakat süresi her bir aday için bir saattir. Saat 9:00 da başlamak üzere her adayın hangi saat başında hangi konuda mülakata gireceğine ait tablo kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

Birinci sütunda saat başları; diğer iki sütunda da adayların ismi yazılı olan bir tablo hazırlamamız gerekiyor. İkinci sütunu herhangi bir şekilde, sözgelimi ABCÇDEFG şeklinde düzenleyebiliriz. Burada, 9:00 da A, 10:00 da B,...,16:00 da G isimli adayın birinci konuda mülakata alınacağını anlıyoruz. İkinci konudaki mülakat sırasını belirleyen üçüncü sütun, ikinci sütun ile çakışma olmayacak şekilde düzenlenmelidir. Örneğin, CADÇCGEF gibi bir düzenleme, saat 12:00 da Ç isimli adayın iki konuda da mülakata alınmasını öngördüğü için geçersizdir. Kısacası, üçüncü sütun, ikinciye nisbetle bir şaşkın diziliş olmalıdır. Birinci sütun için 8! ve ikinci sütun için de $D_8 = 8! \sum_{k=0}^{8}(-1)^k \frac{1}{k!}$ farklı düzenleme yolu bulunduğu için aradığımız sayı $D_8 = 8!^2 \sum_{k=0}^{8}(-1)^k \frac{1}{k!}$ olur.

TEOREM. ***(Genelleştirilmiş İçerme-Dışarma Prensibi)*** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin tam olarak r tanesinde yer alan elemanların sayısı

$$\begin{aligned} S_r &= \binom{r}{r} N_r - \binom{r+1}{r} N_{r+1} + \binom{r+2}{r} N_{r+2} - \cdots + (-1)^{n-r}\binom{n}{r} N_n \\ &= \sum_{i=0}^{n-r}(-1)\binom{r+i}{r} N_{r+i} \end{aligned}$$

ile verilir.

Örnek 7. Örnek 2 yi göz önünde bulundurarak hesapladığımız $S_2 = \binom{2}{2}N_2 - \binom{3}{2}N_3 + \binom{4}{2}N_4 - \binom{5}{2}N_5 = N_2 - 3N_3 + 6N_4 - 10N_5 = 10$, tam olarak iki gazete okuyanların sayısıdır. Benzer şekilde, tam olarak bir gazete okuyanların sayısı $S_1 = 40$; tam olarak dört gazete okuyanların sayısı da $S_4 = 10$ olarak bulunabilir. Tam olarak üç gazete okuyan herhangi bir kişinin bulunmadığı ($S_3 = 0$) da aynı yolla gösterilebilir.

ÇEKMECE PRENSİBİ

İfadesi oldukça yalın ve açık olan çekmece prensibi, geniş bir uygulama sahasına sahiptir. Bu prensibe, Dirichlet prensibi veya güvercin yuvası prensibi adları da verilir.

Çekmece Cinsinden Tanım.

Elimizde bulunan nesnelerin sayısı, bunları yerleştirmeyi düşündüğümüz çekmecelerin sayısından daha fazla ise, çekmecelerden en az birisine iki veya daha fazla nesne yerleştirmek zorunda kalırız.

Güvercin Yuvası Cinsinden Tanım.

n güvercin m yuvaya dağıldığında $n > m$ ise, en az bir yuvada birden daha fazla sayıda güvercin bulunur.

Fonksiyonlar Cinsinden Tanım.

X ve Y sonlu kümeler ve $|X| > |Y|$ ise, bu kümeler arasında tanımlı herhangi bir $f : X \to Y$ fonksiyonu 1-1 olamaz yani, $f(x_1) = f(x_2)$ olacak şekilde en az iki farklı $x_1, x_2 \in X$ bulunur.

Genelleştirilmiş Çekmece Prensibi.

n nesne m kutuya yerleştirildiğinde, $n > km > 0$ ise, kutuların en az bir tanesinde $k + 1$ veya daha fazla nesne bulunur.

Örnek 1. Batman'da yaşayan ve aynı sayıda saç teline sahip en az iki kişi vardır.

Bir insanın başındaki saç tellerinin sayısının en fazla 150.000 olacağı varsayılmaktadır. Batman'ın nüfusu bu sayıdan fazla olduğu için çekmece prensibini kullanarak istenilen sonuç elde edilir. Hatta, Batman'ın nüfusunun 472.000 olduğu hesaba katıldığında (DİE, 2009), $472.000 > 3 \cdot 150.000$ olduğundan, genelleştirilmiş çekmece prensibini kullanarak aynı sayıda saç teline sahip en az 4 Batman'lı olduğunu söyleyebiriz.

Örnek 2. 6 kişilik bir toplulukta her çift birbirinden karşılıklı olarak ya nefret etmekte ya da hoşlanmaktadır. Bu toplulukta, hepsi diğerlerinden nefret eden ya da hepsi diğerlerinden hoşlanan 3 kişilik bir grup bulunduğunu gösteriniz.

Topluluktan rasgele bir kişi seçelim ve buna A diyelim. Geri kalan 5 kişi içinden en az 3 tanesi A hakkında aynı duyguya sahip olacaktır. Bunlara B, C ve D diyelim ve genellik bozulmadan hepsinin A dan hoşlandığını varsayalım. B, C ve D'nin hepsi birbirinden nefret ediyorsa, istenileni göstermiş oluruz. Aksi halde, bu üçü arasından, birbirinden hoşlanan bir çift bulabiliriz ve bu çift, A ile birlikte, birbirinden hoşlanan bir 3-lü grup oluşturur.

Örnek 3. Bir toplantıya katılan herkes, daha önce gelmiş olanların bir kısmı ile el sıkışıyor. Toplantı sonunda herkes el sıkışmış olduğu kişilerin sayısını bir kağıda yazıyor. Kağıtta yazılı olan sayılardan en az ikisinin eşit olduğunu gösteriniz.

Toplantıya n kişinin katıldığını varsayalım. Kağıda yazılmış olan sayılar 0 ile $n-1$ arasındaki tam sayılardır. Kağıtta yazılı n tane sayıdan her birisi n farklı değere sahip olabileceğinden, çekmece prensibini doğrudan doğruya uygulayamayız.

Şimdi şu gözlemi yapalım: herhangi bir kağıtta $n-1$ sayısı yazılı ise, herkesle el sıkışmış en az bir kişi vardır ve bu durumda kimseyle el sıkışmamış birisi olamayacağından hiçbir kağıtta 0 yazılı değildir. O halde hiçbir kağıtta $n-1$ yazılı değilse sayılar 0 ile $n-2$ arasındaki $n-1$ değere; aksi takdirde 1 ile $n-1$ arasındaki $n-1$ değere sahip olabilir. Her iki durumda da çekmece prensibini kullanarak sonuca ulaşırız.

Örnek 4. Kenar uzunluğu 2 olan bir karenin içinde beş nokta nasıl seçilirse seçilsin, bunların arasında, aralarındaki uzaklık 1,5 tan küçük olan iki nokta bulunur.

Karşılıklı kenarların orta noktalarını birleştiren iki doğru parçası ile kare dört küçük kareye ayrılır. Bu dört kareden en az birisi beş noktadan en az ikisini bulundurmak zorundadır. Öte yandan, küçük karelerin köşegen uzunluğu $\sqrt{2} < 1,5$ olduğundan aynı küçük kareye düşmüş olan iki noktanın arasındaki uzaklık da 1,5 tan küçük olacaktır.

Örnek 5. $\{1, 2, \dots, 100\}$ kümesinin bir alt kümesinde, toplamları 82 olan iki elemanın varlığını garanti edebilmek için bu alt kümede en az kaç eleman olmalıdır?

60 elemanlı $A\{1, 2, \dots, 40, 41, 82, 83, 84, \dots, 100\}$ kümesinin herhangi iki elemanın toplamı 82 olmadığından, $\{1, 2, \dots, 100\}$ kümesinin 60 veya daha az eleman içeren bir alt kümesinde istenilen özelliğin sağlanacağını garanti edemeyiz.

Şimdi, bu kümenin elemanlarını aşağıdaki şekilde 60 alt kümeye ayıralım:

$$\{1,81\},\{2,80\},\{3,79\},\dots,\{40,42\},\{41\},\{82\},\{83\},\dots,\{100\}.$$

Kümeden 61 eleman seçildiğinde, yukarıdaki 60 alt kümenin en az bir tanesinden iki eleman alınmış olması gerekir. İki eleman barındıran tüm alt kümelerin elemanlarının toplamı 82 olduğundan, 61 eleman nasıl seçilmiş olursa olsun aynı kümeden seçilmiş olan ikisinin toplamı 82 olacaktır.

Örnek 6. $\{1, 2, \ldots, 200\}$ kümesinden 101 eleman nasıl seçilmiş olursa olsun, seçilen sayılar arasında birisi, diğerinin bir tam sayı katı olan bir çift bulunabileceğini gösteriniz.

Verilen kümeyi 100 alt kümeye parçalayalım. Şöyle ki, her alt küme, bir tek tam sayı ile bu sayıyı 2 nin kuvvetleri ile çarparak elde ettiğimiz sayılardan oluşsun.

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}, \ \{3, 6, 12, 24, 48, 96, 192\},$$
$$\{5, 10, 20, 40, 80, 160\}, \ \{7, 14, 28, 56, 112\}, \ \cdots, \ \{197\}, \{199\},$$

Seçilen 101 elemandan en az ikisinin aynı alt kümeden seçilmiş olması kaçınılmazdır. Öte yandan, aynı alt kümeden gelen iki tam sayıdan küçük olanı, diğerini bölecektir.

Örnek 7. Düzlemin her noktası 7 renkten birisiyle boyanmıştır. Boyama işlemi nasıl yapılmış olursa olsun, dört köşesi de aynı renkle boyanmış bir dikdörtgen bulunabileceğini gösteriniz.

Düzlemde birbirine paralel çizdiğimiz gelişi güzel 8 farklı doğrunun oluşturduğu kümeyi A ile; bu doğrulara dik olacak biçimde keyfi olarak çizdiğimiz $7^8 + 1$ farklı doğrunun oluşturduğu kümeyi de B ile gösterelim. B kümesine ait bir doğruyu, A kümesine ait doğrular 8 noktada keser. Bu 8 nokta 7^8 farklı biçimde boyanabilir. O halde, B kümesinde, A kümesinin doğruları ile kesişme noktaları tıpatıp aynı şekilde boyanmış olan l_1 ve l_2 doğruları vardır. Öte yandan l_1 üzerindeki 8 kesişme noktasından en az ikisi aynı renkle boyanmıştır. Böylece, tüm köşeleri aynı renkte olan bir dikdörtgen elde edilmiş olur.

Örnek 8. Bir hastaya her gün en az bir kez olmak üzere 30 gün boyunca toplam 45 kez iğne yapılıyor. Toplam olarak tam 14 kez iğne yapılmış olan bir ardışık günler grubu bulunabileceğini gösteriniz.v Hastaya i inci gün ($i = 1, \ldots, 30$) yapılan iğne sayısını a_i ile ve ilk i gün içinde yapılan toplam iğne sayısını b_i ile gösterelim ($b_1 = a_1 + \ldots, a_i$). $b_1, b_2, \ldots, b_{30}$ ve $b_1{+}14, b_2{+}14, \ldots, b_{30}{+}14$ dizilerinde bulunan toplam 60 terim, değerlerini $\{1, 2, \ldots, 59\}$ kümesinden alır ($1 \leq b_1$ ve $b_{30} + 14 \leq 45 + 14 = 59$). O halde bu dizilerde yer alan terimlerden en az ikisi eşittir.

Öte yandan, $b_1, b_2, \ldots, b_{30}$ dizisi mutlak artan bir dizi olduğundan tüm terimleri birbirinden farklıdır. Aynı şekilde, $b_1 + 14, b_2 + 14, \ldots, b_{30} + 14$ dizisi de mutlak artan ve terimleri birbirinden farklı bir dizidir. O halde, bu dizilerde yer alan ve eşit olan iki terimden birisi ilk dizide diğeri ikinci dizide yer alır. Yani, $b_i = b_j + 14$ olacak şekilde ($0 \leq j < i \leq 30$) iki terim bulabiliriz. Bu durumda $b_i - b_j = a_{j+1} + \cdots + a_i = 14$ olur.

Örnek 9. Her n tam sayısı için, n terimden oluşan herhangi bir tam sayılar dizisinde, ardışık terimlerden oluşan ve toplamları n ile bölünebilen bir alt dizi bulunabileceğini gösteriniz.

Dizinin terimlerini $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve ilk k terimin toplamını da b_k ile gösterelim. Herhangi bir $k \in \{1, \ldots, n\}$ için $b_k \equiv 0 \pmod{n}$ ise, tanım gereği $a_1 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod{n}$ olur ve istenilen özellik gösterilmiş olur. Her $k \in \{1, \ldots n\}$ için $b_k \not\equiv 0 \pmod{n}$ olması durumunda, b_k sayıları n moduna göre $n-1$ eşdeğerlik sınıfına dağılacağından en az iki tanesi denk olacaktır. $i > j$ olmak üzere $b_i \equiv b_j \pmod{n}$ olduğunu kabul edersek $b_i - b_j = a_i + a_{i-1} + \cdots + a_{j+1} \equiv 0 \pmod{n}$ olur.

Örnek 10. 8×8 satranç tahtasına 17 kalenin her türlü yerleştirilişinde birbirini tehdit etmeyen en az 3 kale bulunur.

Toplam 8 sütun ve 17 kale bulunduğundan, kalelerin en az üçünü barındıran bir sütun bulabiliriz. Bu özelliğe sahip bir sütunu seçip buna A sütunu diyelim. Ayırdığımız sütunda en fazla 8 kale bulunacağından, geriye kalan 7 sütunda en az 9 kale yer almalıdır. O halde bu sütunların en az bir tanesinde iki veya daha fazla kale bulunur. Böyle bir sütun seçip bunu B sütunu olarak adlandıralım. A ve B sütunlarını ayırdığımızda geriye 6 sütun ve en az bir kale kalır. Bu altı sütun arasından, üzerinde kale olan bir sütunu alıp bunun üzerindeki kalelerden birisini K_1 diye işaretleyelim. B sütunundaki iki kaleden en az birisi işaretli kareyi tehdit etmez, bu kaleye K_2 diyelim. A sütunundaki üç kaleden de en az birisi K_1 ve K_2 yi tehdit etmez.

Örnek 11. Katsayıları birer tam sayı olan bir $f(x)$ polinomu veriliyor. Üç farklı x_1, x_2, x_3 tam sayısı için $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 2$ ise, $f(a) = 3$ olacak şekilde bir a tam sayısı bulunamaz.

Verilen polinom $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ olsun. $f(p) - f(q) = c_n(p^n - q^n) + \cdots + c_1(p-q)$ ve her k pozitif tam sayısı için $p - q | p^k - q^k$ olduğundan $(p-q) | f(p) - f(q)$ elde edilir. Bir a tam sayısı için $f(a) = 3$ ise,

$$a - x_1 | f(a) - f(x_1) = 1$$

$$a - x_2 | f(a) - f(x_2) = 1$$

$$a - x_3 | f(a) - f(x_3) = 1$$

yazabiliriz. 1 in sadece iki tane böleni olduğundan (1 ve -1), $a - x_1$, $a - x_2$ ve $a - x_3$ tam sayılarının hepsi birbirinden farklı olamaz. Bu durumda x_1, x_2 ve x_3 tam sayılarından en az ikisinin eşit olduğu çelişkisi doğar.

Örnek 12. Bir çemberin üzerindeki her nokta kırmızı veya maviye boyanmıştır. Boyama işleminin nasıl yapıldığından bağımsız olarak, iki renkli bu çemberi çevrel çember kabul eden ve tüm köşeleri aynı renkte olan ikizkenar bir üçgen bulunabilir.

Köşeleri çember üzerinde olacak şekilde bir düzgün beşgen çizelim. Bu beşgenin aynı renkte olan en az üç köşesi bulunur ve bu köşeleri birleştiren doğrular çizildiğinde, ikizkenar bir üçgenin elde edilir.

Örnek 13. 2009 tam sayısının, son üç basamağı 001 olan bir kuvveti bulunur.

Herhangi bir tam sayı 1000 ile bölündüğünde kalan, 999 dan büyük olmayacağından, 1001 elemanı bulunan $\{2009^1,\ 2009^2, \ldots, 2009^{1001}\}$ kümesinde bulunan sayılardan en az ikisi 1000 ile bölündüğünde aynı kalanı verir. Bu sayıları 2009^a ve 2009^b ile gösterirsek, $a > b$ kabul ederek, $2009^a - 2009^b = 2009^b(2009^{a-b} - 1) \equiv 0(\mod 1000)$ yazabiliriz. Buradan, $1000|2009^b(2009^{a-b} - 1)$ elde edilir. 2009 ve 1000 tamsayılarının ortak böleni bulunmadığından $10000|(2009^{a-b} - 1)$ olmalıdır. O halde $2009^{a-b} \equiv 1(\mod 1000)$ olur ki, bu da 2009^{a-b} nin son üç basamağının 001 olmasını ifade eder. (Not. 2009^{50} nin son üç basamağı 001 dir.)

Örnek 14. Sadece 1 sayısını kullanarak yazılan tam sayıların en az bir tanesi 1453 ile bölünür.

1453 ile bölündüğünde $A = \{1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\cdots1}_{1454 \text{ tane}}\}$ kümesindeki tam sayılardan en az ikisi aynı kalanı verir ve bu sayıların farkı olan tamsayı 1453 ile bölünür. Öte yandan, A kümesindeki elemanların farkı $\underbrace{11\cdots1}_{k}\underbrace{0\cdots0}_{t}$ şeklindedir. O halde, $1453|\underbrace{11\cdots1}_{k}\cdot10^t$ yazar ve 10 tam sayısının hiçbir kuvvetinin 1453 ile bölünmediğini göz önüne alırsak, $1453|\underbrace{11\cdots1}_{k}$ elde ederiz. (Not. Tüm basamakları 1 olan ve 1453 ile bölünebilen en küçük sayı 726 basamaklıdır.)

SAYMA MODELLERİ

FONKSİYONLARIN SAYISI

Önceki bölümlerde, sonlu iki küme arasında tanımlı tüm fonksiyonların, 1-1 fonksiyonların ve örten fonksiyonların sayıları hesaplanmıştı. n elemanlı X ve m elemanlı Y kümeleri verildiğinde, belirli şartları sağlayan $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonlarının sayılarını aşağıda listeliyoruz:

Tüm fonksiyonların sayısı	m^n
$n \leq m$ için 1-1 fonksiyonların sayısı	$P(m,n)$
$n \geq m$ için örten fonksiyonların sayısı	$\displaystyle\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$
$n = m$ için 1-1 ve örten fonksiyoların sayısı	$n!$

Örnek 1. Bir öğretmen 25 kişilik bir sınıfta her öğrenciye 5 proje konusundan birisini ödev olarak verecektir. Soruların tüm öğrencilere dağıtımını, öğrenciler kümesinden proje konuları kümesine bir fonksiyon olarak düşünerek, soruların 5^{25} farklı şekilde dağıtılabileceği görülür.

0/1 DİZİLERİ

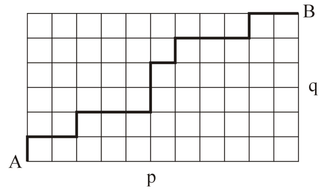
Belirli koşulları sağlayan ve her terimi 0 veya 1 olan diziler bir çok problemde model olarak kulanılabilir. Bu bölümde p tane 1 ve q tane 0 sembolü ile oluşturulan dizileri ele alacağız.

0/1 dizilerinin sayısı.

Tekrarlı permütasyonlara bir örnek olarak 0/1 dizilerinin sayısı $\binom{p+q}{p}$ olarak daha önce hesaplanmıştı.

Örnek 2. Aşağıdaki şekilde $q \times p$ boyutlarında bir ızgara yer almaktadır. Sol alt (A) köşesinden, sağ üst (B) köşesine, her kesişim noktasından sonra ya sağa ya da yukarıya yönelerek ulaşan yolların sayısını bulalım.

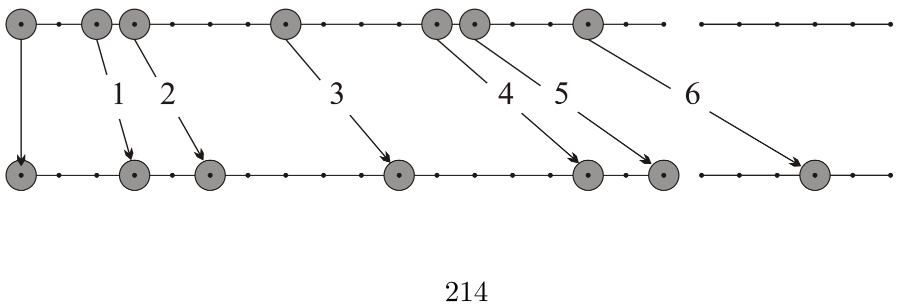
Tarif edilen şekildeki bir yolu, kesişim noktasından sağa doğru atılan her adımı 1, yukarı doğru atılan her adımı da 0 ile temsil ederek bir 0/1 dizisi ile gösterebiliriz. Örneğin, şekilde yer alan yolu 01101110010111011 dizisi ile temsil edebiliriz. Sonuç olarak, her yol, p tane 1 ve q tane sıfırdan oluşan bir 0/1 dizisine karşı geldiğinden, yolların sayısı $\binom{p+q}{p}$ olur.



Herhangi iki 1 arasında en az bir 0 olan diziler.

$q \geq p-1$ olduğunu kabul ederek, herhangi iki 1 sembolü arasında en az bir tane 0 bulunması şartını garanti etmek için iki adımlı bir işlem tanımlayabiliriz. İlk adımda q tane 0 bir sıraya dizilerek 1 lerin yerleştirilebileceği $q+1$ konum tanımlanır: ardışık 0 lar arasındaki konumlar (toplam $q-1$ konum) ve uçlardaki 0 ların yanlarındaki boşluklar (2 konum). Bu konumlardan her biriine en fazla bir tane 1 yerleştirilebileceğinden, bu $q+1$ konum arasından 1 ler için p konum belirlenmesi yeterli olacaktır. Bu durumda, koşulan şartı sağlayan dizilerin sayısı $\binom{q+1}{p}$ olur.

Şimdi, aynı sonuca bir başka yoldan ulaşacağız. Sembollerin yerleştirileceği $p+q$ konumun soldan sağa doğru dizilmiş olduğunu düşünelim. Soldan başlayarak ilk $q+1$ konum arasından 1 lerin yerleştirileceği p konum seçilir. 1 ler seçilen konumlara yerleştirildikten sonra en sağdaki 1, $p-1$ konum sağa taşınır; sola doğru ilerleyerek, bir sonraki 1, $p-2$ konum sağa taşınır ve tüm 1 ler için taşıma uzunluğu her seferinde 1 azaltılarak devam edilir. Son durumda, herhangi iki 1 arasında en az bir boşluk olması garanti edilmiş olur. $p+q$ konuma, herhangi ikisi arasında en az bir boşluk olacak şekilde yayılmış olan 1 ler, yukarıda tanımlanan işlemlerin tersi uygulanarak $q+1$ konuma sığacak şekilde toplanırlar. Böylece, 1 lerin $q+1$ konumdan p tanesine herhangi bir şekilde yerleştirilmesinin, $p+q$ konuma aralarında en az bir boşluk olacak şekilde yerleştirilmesine denk olduğunu göstermiş olduğumuzdan, bu tür dizilişlerin sayısını $\binom{q+1}{p}$ olarak elde ederiz.



Örnek 4. 4 kız, 7 erkek öğrencinin bir sıraya, herhangi iki kız öğrenci yanyana oturmamak koşulu ile kaç farklı şekilde yerleştirilebileceğini bulunuz.

Kızlar ve erkekler için yerlerin belirlenmesi $\binom{8}{4}$ farklı şekilde yapılabilir. Kızların 4! ve erkeklerin de 7! farklı şekilde dizilebileceğini hesaba katarak, mümkün yerleştirme yollarının sayısını $\binom{8}{4}7!4!$ olarak elde ederiz.

Örnek 5. **(Ardışık tamsayılar içermeyen seçimler)** $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden p tane tam sayı, herhangi ikisi ardışık olmamak şartı ile kaç farklı şekilde seçilebilir?

Problem, sıralı n konumdan, herhangi ikisi arasında en az bir boşluk bulunması koşulu ile p konum belirlenmesi problemi ile eşdeğerdir. Toplam konum sayısı $p + q = n$ olduğu için $q = n - p$ yazarak, mümkün seçimlerin sayısı $\binom{n-p+1}{p}$ olarak elde edilir.

Herhangi iki 1 arasında en az k tane 0 olan diziler.

Şimdi $q \geq k(p - 1)$ olduğunu kabul ederek, herhangi iki 1 sembolü arasında en az k tane 0 bulunması şartını sağlayan dizilerin sayısını bulabilmek için bir önceki durumu incelerken izlediğimiz ikinci yolu takip edeceğiz.

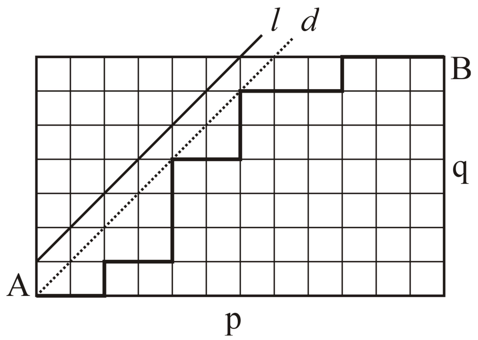
Sembollerin yerleştirileceği $p+q$ konumun soldan sağa doğru dizilmiş olduğunu düşünelim. Soldan başlayarak ilk $q+p-k(p-1)$ konum arasından 1 lerin yerleştirileceği p konum seçilir. 1 ler seçilen konumlara yerleştirildikten sonra en sağdaki 1, $k(p - 1)$ konum sağa taşınır; sola doğru ilerleyerek, bir sonraki 1, $k(p - 2)$ konum sağa taşınır ve tüm 1 ler için taşıma uzunluğu her seferinde k azaltılarak devam edilir. Son durumda, herhangi iki 1 arasında en az k boşluk olması garanti edilmiş olur. $p + q$ konuma, herhangi ikisi arasında en az k boşluk olacak şekilde yayılmış olan 1 ler, yukarıda tanımlanan işlemlerin tersi uygulanarak $q+p-k(p-1)$ konuma sığacak şekilde toplanırlar. Böylece, 1 lerin $q+p-k(p-1)$ konumdan p tanesine herhangi bir şekilde yerleştirilmesinin, $p + q$ konuma aralarında en az k boşluk olacak şekilde yerleştirilmesine denk olduğunu göstermiş olduğumuzdan, bu tür dizilişlerin sayısını $\binom{q+p-k(p-1)}{p}$ olarak elde ederiz.

Örnek 6. $\{1, 2, \ldots, 100\}$ kümesinden 12 tane tam sayı, herhangi ikisi arasında mutlak değerce en az 5 fark olması koşulu ile kaç ayrı yoldan seçilebilir?

Problem, sıralı 100 konumdan, herhangi ikisi arasında en az $k = 4$ boşluk bulunması koşulu ile 12 konum belirlenmesi problemi ile eşdeğerdir. Toplam konum sayısı $p + q = 100$ ve $p = 12$ olduğu için $q = 88$ alarak, mümkün seçimlerin sayısı $\binom{100-4(11)}{12} = \binom{56}{12}$) olarak elde edilir.

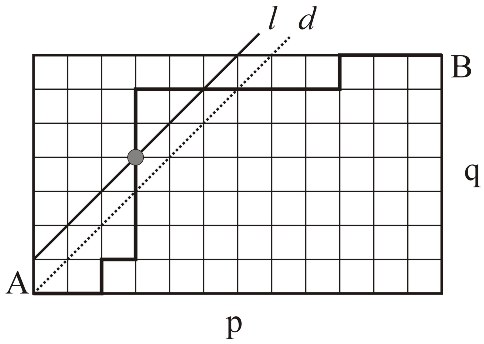
Dyck Dizileri.

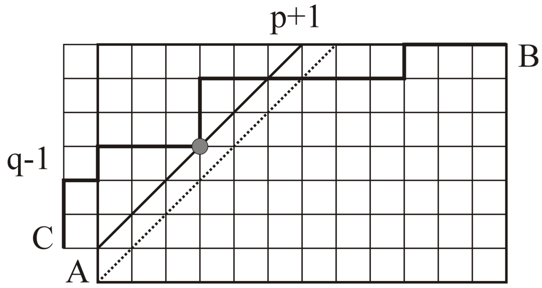
Bir 0/1 dizisinin ilk teriminden herhangi bir terimine kadar, 0 ların sayısı asla 1 lerin sayısını aşmıyorsa, diziye bir Dyck dizisi adı verilir. Örneğin 101010101010, 1110010010, 111000 dizileri birer Dyck dizisidir. Dizinin bu özelliğe sahip olabilmesi için $q \leq p$ şartının sağlanması gerekir. Bu kabul ile, Dyck dizilerinin sayısını hesaplamak için Örnek 2. de tanımlanan ızgara kullanılacaktır. p tane 1 ve q tane 0 dan oluşan bir dizinin, bu ızgara üzerinde A köşesinden B köşesine giden bir yol temsil ettiğini görmüştük. Bir Dyck dizisine karşı gelen yola 'iyi yol' diğer yollara da 'kötü yol' diyelim. İstediğimiz, iyi yolların sayısını bulmaktır. A köşesinden başlayan ve eğimi 1 olan d doğrusu, 0 ve 1 lerin denge doğrusudur. Şöyle ki, bu doğruyla ortak noktası olan bir yol için, kesişme noktasında 0 ve 1 lerin sayısı eşitlenmiş olur. Bu doğrunun altındaki noktalar 1 lerin daha çok; üzerindeki noktalar ise 0 ların daha çok olduğu terimlere karşı gelir. Aşağıdaki şekilde gösterilen yol için, dizinin iki kez dengeye ulaştığını ve bu noktalar dışında daima 1 lerin sayısının 0 ların sayısından büyük olduğunu gözleyebiliyoruz. Şimdi d ye paralel ve sol alt karenin sol üst köşesinden



geçen l doğrusunu göz önüne alalım. Bir dizi bir kez denge noktasına ulaştıktan sonra gelen ilk terim 0 ise, yol yukarı doğru ilerleyecek ve l doğrusu ile buluşacaktır. Bu durumda l doğrusu, iyi ve kötü yolların tanımlanması açısından önemli bir rol oynar. Bir yolun kötü yol olması için gerek ve yeter şart, l ile ortak noktasının bulunmasıdır. Aşağıda l doğrusu ile iki kez buluşan bir kötü yol örneğine yer verilmiştir.
Kötü bir yolun l ile buluştuğu ilk noktadan önceki kısmının l doğrusuna göre yansıması, şekilde gösterildiği gibi, A nın l ye göre simetriği olan C noktasından başlayıp B ye ulaşan bir yoldur.

Öte yandan, C den başlayıp B ye ulaşan her yol l doğrusu ile en az bir kez kesişmek zorundadır. Böyle bir yolun, l ile ilk ortak noktasından önceki kısmını l doğrusuna göre yansıtırsak, A dan başlayıp B ye ulaşan bir kötü yol elde ederiz. O halde A dan B ye giden kötü yolların sayısı, C den B ye giden tüm yolların sayısına eşittir. C ve B, boyutları





$(q-1)\times(p+1)$ olan bir ızgaranın köşe noktaları olduğu için C den B ye giden yolların sayısı $\binom{p+q}{p+1}$ olarak bulunur. A dan B ye giden tüm yolların sayısı da $\binom{p+q}{p}$ olduğundan, iyi yolların sayısı $\binom{p+q}{p}-\binom{p+q}{p-1}$ olarak elde edilir. Bu ifade sadeleştirildiğinde, Dyck dizilerinin sayısı şu şekilde verilir:

$$\frac{p-q+1}{p+1}\binom{p+q}{p}.$$

Örnek 7. Sadece bir adet 10 liralık banknotu olan k kişi ile sadece bir adet 20 liralık banknotu olan m kişi, tanesi 10 liraya satılan biletlerden almak için kuyruğa girmiştir. Başlangıçta hiç para bulunmayan gişe, üstünü veremeyeceği ilk 20 liralık ile karşılaştığı anda kapanacaktır. Herkesin bilet alabildiği kuyruklar *iyi*; diğerleri de *kötü* olarak nitelendiriliyor. $k \geq m$ olduğunu kabul ederek iyi ve kötü kuyrukların sayısını bulunuz.

Bir kuyruğun iyi olabilmesi için, başlangıçtan itibaren herhangi bir kişiye kadar olan kısmında 20 liraların sayısı 10 liraların sayısını aşmamalıdır. Bu gözlem ışığında, 10 ve 20 liraların bir iyi kuyruk oluşturmak üzere her diziliş biçimi, k tane 1 ile m tane 0 sembolünden oluşturulan bir Dyck dizisine karşı gelir. O halde, iyi kuyruk tanımlayan dizilişlerin sayısı $\frac{k-m+1}{k+1}\binom{k+m}{k}$ dir. Diziliş bir kez belirlendikten sonra 10 liraya sahip olanlar $k!$; 20 liraya sahip olanlar da $m!$ farklı biçimde kendilerine tahsis edilen konumlara yerleştirilebileceğinden, iyi kuyrukların sayısı $\frac{k-m+1}{k+1}\binom{k+m}{k}k!m!$ yani

$$\frac{k-m+1}{k+1}(k+m)!$$

olarak elde edilir.

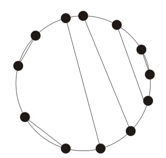
Catalan Sayıları.

Eşit sayıda 0 ve 1 içeren Dyck dizilerinin sayısını, yukarıdaki ifadede $p = q = n$ alarak $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ olarak buluruz. Sayma problemlerinde sıklıkla karşılaşılan ve önemli rol oynayan bu sayıya Catalan sayısı denir ve C_n ile gösterilir:

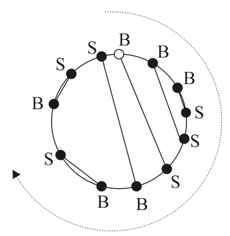
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Küçük n değerleri için bu sayılar şöyledir: $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$, $C_6 = 132$.

Örnek 8. Bir çember üzerinde $2n$ nokta bulunmaktadır. Herbirinin uçları bu noktalardan ikisi olan n tane kirişi, herhangi iki tanesi çemberin üzerinde ve iç bölgesinde kesişmemek şartıyla kaç farklı şekilde çizebiliriz?



Noktalardan herhangi bir tanesini referans noktası olarak belirleyip, kirişlerin çizlidiğini düşünelim. Referans noktasından başlayıp saat yönünde ilerleyerek, karşılaştığımız her nokta için iki olasılık bulunur. Nokta ya ilk defa karşılaştığımız bir kirişe ait başlangıç noktasıdır (B) ya da daha önce karşılaştığımız bir kirişin son noktasıdır (S).



Noktaları B ve S sembolleri ile gösterdiğimizde, başlangıçtan herhangi bir noktaya kadar olan kısımda S lerin sayısı B lerin sayısını aşamayacağından, geçerli her diziliş bir Dyck dizilişi olup B ve S lerin sayısı eşit olduğundan, farklı çizim yollarının sayısı C_n Catalan sayısıdır.

Örnek 9. Elimizde n tane top ve 1 den n ye kadar numaralanmış kutular bulunmaktadır. Kutulardan 1 numaralısı açık; diğerleri kapalıdır. İlk kutuya bir top koyduğumuzda 2. kutu açılmaktadır. Şimdi, açık bulunan iki kutudan istediğimiz birine bir top daha koyunca 3. kutu açılacaktır. Böylece devam ederek, herhangi bir anda açık bulunan k kutudan birine top koyulunca $k+1$. kutu açılacaktır. Topları kutulara kaç farklı şekilde dağıtabiliriz?

Her dağıtım için bir 0/1 dizisi tanımlayacağız. Şöyle ki, ilk kutudaki topların sayısı kadar 1 sembolünü takip eden bir 0; ikinci kutudaki top sayısınca 1 ve bir tane 0 ve bu şekilde devam edip son kutudaki topların sayısı kadar 1 sembolü yazalım. İlk kutuda en az bir top; ilk iki kutuda toplam en az iki top; ilk üç kutuda toplam en az üç top v.s. bulunacağından, oluşturulan dizi bir Dyck dizisi olacaktır. 0 ve 1 lerin sayısı eşit olduğundan mümkün dağıtım yollarının sayısı C_n olarak elde edilir.

DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SAYISI

Bu bölümde $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ denkleminin negatif olmayan tam sayılar kümesindeki çözümlerinin sayısını inceleyeceğiz. Bölüm boyunca, denklemin çözümü ifadesinden, aksi belirtilmedikçe, negatif olmayan tam sayılar kümesindeki çözümü anlaşılacaktır.

Negatif olmayan tam sayı çözümlerin sayısı.

r tane 0 ve $n-1$ tane 1 sembolünün herhangi bir şekilde soldan sağa doğru sıralanmış bir dizisi verilmiş olsun. En soldaki 1 den önceki 0 ların sayısına x_1, birinci ve ikinci 1 ler arasındaki 0 ların sayısına x_2 ve bu şekilde devam ederek en sağdaki 1 den sonraki 0 ların sayısına x_n dersek, verilen diziliş, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ denkleminin bir çözümünü temsil eder. Ters yoldan hareket ettiğimizde ise, $x_1+x_2+\cdots+x_n = r$ denkleminin her çözümü, r tane 0 ve $n-1$ tane 1 sembolünün bir dizilişini verir. Örneğin, $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 13$ denkleminin bazı çözümleri ve bunlara karşı gelen dizilişler şöyledir:

dizi	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
00010001001000100	3	3	2	3	2
00010000001100001	3	6	0	4	0
10000100100100000	0	4	2	2	5
01001000000000011	1	2	10	0	0
00000000000001111	13	0	0	0	0
00000000010101010	9	1	1	1	1

Sonuç olarak, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ denkleminin çözümlerinin sayısının $\binom{n+r-1}{r}$ veya eşdeğer olarak $\binom{n+r-1}{n-1}$ olduğu görülür.

Örnek 7. 7 çocuğa 18 şekerin kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini bulalım. Her çocuğa düşen şeker sayısını $x_1, x_2, \ldots, x_7$ ile gösterdiğimizde, $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 18$ denkleminin sahip olduğu $\binom{24}{18}$ çözümden her birisi bir dağıtım şekli ifade eder.

Örnek 8. 7 çocuğa 18 şekerin, her çocuk en az bir şeker almak koşulu ile kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini bulalım. Dağıtımdan önce, koşulan şartı garantilemek için her çocuğa birer şeker verelim. Geri kalan 11 şekerin farklı dağıtım yollarının sayısı, $x_1+x_2+\cdots+x_7 = 11$ denkleminin çözümlerinin sayısı yani $\binom{17}{11}$ olur.

Pozitif tam sayı olan çözümlerin sayısı.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ denkleminin $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 1$ koşulları ile çözümlerinin sayısını bulmak için Örnek 8 dekine benzer bir yol izleyebiliriz. Her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $x_i = x'_i + 1$ dönüşümünü yaparsak (bu dönüşüm, çocuklara birer şeker dağıtmaya karşı gelmektedir) çözümlerinin sayısı bulunması gereken denklem $x'_i + 1 \geq 1$ koşulları altında $(x'_1 + 1) + (x'_2 + 1) + \cdots + (x'_n + 1) = r$ veya eşdeğer olarak, $x'_i \geq 0$ koşulları altında $x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n = r - n$ olur ki, bunun da çözümlerinin sayısı $\binom{r-n+n-1}{r-n}$ dir. Sonuç olarak, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ denkleminin pozitif tam sayılar kümesindeki çözümlerinin sayısı $\binom{r-1}{r-n}$ veya $\binom{r-1}{n-1}$ dir.

Alttan sınırlı çözümlerin sayısı.

Verilen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayıları için $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ denkleminin $x_1 \geq a_1, x_2 \geq a_2, \ldots, x_n \geq a_n$ koşulları ile çözümlerinin sayısını bulmak için bir önceki çözümü genelleştirerek her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $x_i = x'_i + a_i$ dönüşümünü yaparsak, çözümlerinin sayısı bulunması gereken denklem $x'_i + a_i \geq a_i$ koşulları altında $(x'_1 + a_1) + (x'_2 + a_2) + \cdots + (x'_n + a_n) = r$ veya eşdeğer olarak, $x'_i \geq 0$ koşulları altında $x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n = r - a$ $(a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ olur ki, bunun da çözümlerinin sayısı $\binom{r-a+n-1}{r-a}$ dır.

Üstten sınırlı çözümlerin sayısı.

Verilen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayıları için $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ denkleminin $x_1 \leq a_1, x_2 \leq a_2, \ldots, x_n \leq a_n$ koşulları ile çözümlerinin sayısı için açık ve basit bir ifade yazma imkanımız bulunmamaktadır. Bu durumda çözüm sayısını bulmak için içerme dışarma prensibi kullanılabilir. Evrensel kümeyi, şartlar göz önünde bulundurmaksızın elde edilen çözümlerin kümesi olarak kabul edebiliriz. Aranan şartları sağlamayanların sayısını bulabilmek için A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kümelerini, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ denkleminin $x_i > a_i$ şartlarını sağlayan tam sayı çözümlerinin kümesi olarak tanımlayıp içerme dışarma prensibinden yararlanarak sonuca ulaşabiliriz.

Örnek 9. 18 şekerin 4 çocuğa, her çocuk en fazla 6 şeker almak koşuluyla, kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini hesaplayalım.
Verilen koşulu göz ardı edersek, dağıtım $N_0 = \binom{21}{3} = 1330$ farklı şekilde yapılabilir.
$i = 1, 2, 3, 4$ için, i.nci çocuğun 7 veya daha fazla şeker alarak kuralı ihlal ettiği dağıtımların kümesini A_i ile gösterelim. A_1 kümesinde yer alan bir çözüm elde edebilmek için ilk çocuğa 7 şeker verip geri kalan 11 şekeri 4 çocuğa dağıtırız. Bu dağıtım $\binom{14}{3} = 364$ farklı şekilde yapılabilir ve diğer çocuklar için de aynı sonuç geçerli olduğundan, $N_1 = 4\binom{14}{3} = 1456$ olur.
A_1 ve A_2 kümelerindeki ortak çözümleri belirlemek için ilk iki çocuğa 7 şer şeker verip geri kalan 4 şekeri 4 çocuğa dağıtırız. Bu dağıtım da $\binom{7}{3} = 35$ farklı yoldan yapılabilir. Herhangi iki çocuk için de aynı durum geçerli olduğu için ve çocukların ikişer ikişer bir araya getirilmesi $\binom{4}{2} = 6$ farklı biçimde olduğundan, $N_2 = 6 \cdot 35 = 210$ elde edilir. İçerme dışarma prensibini kullanarak, istenen türde çözümlerin sayısını 1330-1456+210=84 olarak buluruz.

Tekrarlı Nesnelerin Kombinasyonlarının Sayısı

Her birinden istediğimiz sayıda kullanabildiğimiz n çeşit nesne arasından r tanesini saçerek bir topluluk oluşturmak için her çeşit nesneden kaç tane alacağımıza karar vermek yeterlidir. i.inci çeşit nesneden x_i tane ($i = 1, 2, \ldots, n$) kullandığımızı kabul edersek, aradığımız sayının, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ denkleminin çözümlerinin sayısı olduğu görülür. Böylece, sınırsız tekrarlı nesnelerin seçilişlerinin sayısı

$$\binom{n+r-1}{n-1}$$

olarak elde edilir.

Nesnelerin sınırlı sayıda tekrar etmesi durumunda, problem yukarıdaki denklemin üstten sınırlı çözümlerinin sayısını bulmaya indirgenir ve içerme-dışarma prensibi yardımı ile çözümlerin sayısı hesaplanabilir.

$\mathbf{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq r}$ eşitsizliğinin çözümlerinin sayısı

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = t$ denkleminin $t = 0, 1, 2, \ldots, r$ için ayrı ayrı hesaplanan çözüm sayılarının toplamı, verilen eşitsizliğin çözümlerinin sayısını verir. O halde, $\binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n+r-1}{n-1}$ toplamını hesaplamak yeterlidir. Öte yandan, binom katsayıları için ver-

ilen üst toplama ifadesi bu toplamın $\binom{n+r}{n}$ olduğunu ifade eder. Sonuç olarak, verilen eşitsizliğin çözümlerinin sayısı $\binom{n+r}{n}$ olur.
Aynı sonucu farklı bir yoldan elde edelim. Verilen eşitsizliği, r veya daha az sayıda şekerin n çocuğa dağıtımı olarak yorumlayalım. r den daha az sayıda şeker dağıtıldığında, artan şekerleri alan hayali bir çocuk ilave edersek problem, r şekerin $n+1$ çocuğa dağıtılması problemine dönüşür ve mümkün yolların sayısı derhal $\binom{n+r}{n}$ olarak elde edilir.

NESNELERİN DİZİLMESİ VE SEÇİLMESİ

Verilen n tane nesneden r tanesinin seçilmesi veya bir sıraya dizilmesi için mümkün yolların sayıları önceki bölümlerde hesaplanmıştı. Burada sonuçları toplu olarak bir tablo ile veriyoruz. Tablo, nesnelerin hepsinin farklı olması; her bir türden belirli sayıda bulunması ve her bir türden istenildiği kadar bulunması durumlarını içermektedir:

	Farklı Nesneler $a_1, a_2, \cdots, a_n$	Sınırlı Tekrarlı Nesneler $\underbrace{(a_1,\ldots,a_1)}_{n_1},\ldots,\underbrace{(a_t,\ldots,a_t)}_{n_t}$ $(n_1+\cdots+n_t=n)$	Sınırsız Tekrarlı Nesneler $\underbrace{(a_1,\ldots)}_{\infty},\ldots,\underbrace{(a_n,\ldots)}_{\infty}$
r tane nesnenin dizilişi	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$	$(r=n)$ için: $\dfrac{n!}{n_1!\cdots n_t!}$ ($r<n$ için genel ifade yok.)	n^r
r tane nesnenin seçilişi	$\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$	$x_1 \le n_1, \ldots, x_t \le n_t$ koşulları ile $x_1+\ldots+x_t=r$ denkleminin çözümlerinin sayısı	$\binom{n+r-1}{r}$

TOPLARIN KUTULARA DAĞITILMASI

Bir çok sayma problemi, elimizdeki topların verilen kutulara kaç farklı şekilde dağıtılabileceğinin hesaplanmasına indirgenebilir. Toplar ve kutuların özdeş ve/veya farklı olması göz önünde bulundurularak 4 farklı durum ortaya çıkar. Ayrıca her kutunun en az bir top içermesi şartı da hesaba katıldığında incelenmesi gereken durumların sayısı 8 olur.

Ayırt edilebilir topların ayırt edilebilir kutulara dağıtılması

Verilen n özdeş toptan her birinin k kutudan hangisine gideceğini belirten bir liste oluşturduğumuzu düşünelim. Bu liste, toplar kümesinden, kutular kümesine tanımlanmış bir fonksiyondan başka bir şey olmayacaktır. O halde, n farklı topun, k farklı kutuya dağıtılabileceği yolların sayısı k^n olur.

Her kutuda en az bir top olması koşulu, tanımlanan fonksiyonun örten olması anlamına geldiğinden, bu durumdaki farklı yolların sayısı $\left|\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}i^n\right|$ olur.

Özdeş topların ayırt edilebilir kutulara dağıtılması

Topların özdeş olması durumunda dağıtımı belirleyen tek şey, her kutuya kaç top koyulmuş olduğudur. Bir başka ifadeyle n özdeş topun k farklı kutuya dağıtılması, n şekerin k çocuğa dağıtılması ile eşdeğerdir. Böylece, dağıtım yollarının sayısı $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ denkleminin negatif olmayan tam sayılar kümesindeki çözümlerinin sayısı yani, $\binom{n+k-1}{k-1}$ dir.

Çocuklara şeker dağıtma problemi olarak düşünüldüğünde, her kutuda en az bir top olması, her çocuğun en az bir şeker alması koşulu ile denktir. Sonuç olarak, dağıtım yollarının sayısı $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ denkleminin pozitif tam sayılar kümesindeki çözümlerinin sayısı yani, $\binom{n-1}{k-1}$ dir.

Ayırt edilebilir topların özdeş kutulara dağıtılması

Birbirinden farklı n topun k özdeş kutuya paylaştırılması, n elemanlı bir kümenin tüm elemanlarının k alt kümeye parçalanışına denktir. (Bir A kümesinin alt kümelere parçalanışı, verilen kümenin elemanlarını, birleşimleri A kümesi olan ve herhangi ikisinin ortak elemanı bulunmayan alt kümelere dağıtmak anlamını taşır.) n elemanlı bir X kümesinden, k elemanlı bir Y kümesine örten bir f fonksiyonu tanımlandığını düşünelim. Bu fonksiyon altında her $y \in Y$ için, görüntüsü y olan tüm elemanlar X in boş olmayan bir alt kümesini tanımlayacağından, X kümesi boş olmayan k alt kümeye parçalanmış olur. Bu parçalanışta her alt küme, Y deki görüntüsü aynı olan elemanlardan oluşmaktadır. Y kümesinin elemanları kendi aralarında $k!$ şekilde sıralanabildikleri için, her $X \to Y$ örten fonksiyonu, X kümesinin $k!$ tane parçalanışını tanımlar. O halde, n elemanlı bir kümenin boş olmayan k tane alt kümeye parçalanışlarından her birisi, n elemanlı bir kümeden, k elemanlı bir kümeye $k!$ tane örten fonksiyonunu tanımlar. Sonuç olarak aradığımız sayı $\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}i^n\right|$ olur.

n elemanlı bir kümenin k tane boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısı $S(n,k)$ ile gösterilir ve ikinci tür Stirling sayısı olarak adlandırılır. n ve k nin küçük değerleri için bu sayılar aşağıdaki tablodaki değerleri alırlar

n k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

$S(n,k)$, her kutuda en az bir tane top bulunması koşulu ile n farklı topun kutulara kaç farklı şekilde dağıtılacağını ifade eder. Her kutuya en az bir top koyulması şartı kaldırılırsa, aranan sayı, kutuların toplardan daha çok olmaması koşulu ile $(k \leq n)$ $\sum_{i=0}^{k} S(n,i)$ olur. Kutu sayısının topların sayısına eşit olması halinde bu toplama Bell sayısı adı verilir ve B_n ile gösterilir: $B_n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i)$. Kutuların toplardan daha fazla olması halinde de dağıtım sayısı B_n olacaktır. $B_0 = B_1 = 1$ ile başlayan Bell sayıları dizisinin ilk terimleri de şöyledir: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975,... .

Özdeş topların özdeş kutulara dağıtılması

Kutu sayısını önemsemeden, elimizdeki 5 topun kutulara her dağıtılış yolu, 5 tam sayısının pozitif sayıların toplamı olarak bir yazılış biçimine karşı gelir. Örneğin, bir kutuya 2; diğerine 3 top koyulması $3+2$ ile gösterilebilir. Bir tam sayının, pozitif tam sayıların toplamı olarak her yazılış biçimine bir parçalanış adı verilir. Örneğin 5 sayısının 7 adet parçalanışı bulunmaktadır:

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

Tam sayıların parçalanışlarının sayısını veren açık ve yalın bir ifade bulunmamaktadır. Bu problem için, bu notların amacını aşmadan verebileceğimiz bir ifadeden mahrumuz.

İNDİRGEME DİZİLERİ

Bir dizinin tanımlanması, dizininin her bir terimini derhal hesaplayabileceğimiz bir ifade vasıtası ile olabileceği gibi, dizinin her terimini daha önceki terimlerle ifade eden bir bağıntı yardımı ile de olabilir. Birinci türde tanımlanan bir dizinin, genel terimi ile verildiği; ikinci türde ise dizinin bir indirgeme bağıntısı ile verildiği söylenir.

Örnek 1. Her $n = 0, 1, \ldots$ için $a_n = n^3 - 2^n$ eşitliği ile tanımlanan $\{a_n\}$ dizisinin istediğimiz terimini diğer terimlere ihtiyaç duymadan hesaplayabiliriz. Bu dizinin genel terimi $a_n = n^3 - 2^n$ dir.

Örnek 2. Bir $\{a_n\}$ dizisinin terimlerinin her $n = 0, 1, \ldots$ için $a_{n+2} = na_{n+1} - a_n$ eşitliğini sağladığının söylenmesi bu dizi için bir indirgeme bağıntısı tanımlar. Ancak, bu bağıntı dizinin belirlenmesi için yeterli değildir. Dizinin ilk iki terimi verildiğinde, (örneğin $a_0 = 1,\ a_1 = 3$) dizi tek türlü belirlenmiş olur.

Bir diziyi tanımlamak için verilen indirgeme bağıntısında yer alan en büyük ve en küçük indise sahip terimlerin indislerinin farkı, indirgeme bağıntısının derecesi adını alır. Bir dizinin t. dereceden bir indirgeme bağıntısı ile tek türlü tanımlanabilmesi için ilk t teriminin verilmesi yeterlidir. İlk terimlerin farklı seçimleri farklı diziler tanımlayacağından, aynı indirgeme bağıntısını sağlayan sonsuz sayıda dizi bulunabilir. Bu dizilerden her birisine, indirgeme bağıntısının bir özel çözümü (veya, sadece çözümü); çözüm kümesinin elemanlarını belirleyen açık ifadeye indirgeme bağıntısının genel çözümü adı verilir.

Örnek 3. Birinci dereceden $a_n = na_{n-1}$ bağıntı verilmiş olsun. $a_0 = k$ kabul edip dizinin ilk bir kaç terimini hesaplayalım. $a_1 = k,\ a_2 = 2k,\ a_3 = 6k,\ a_4 = 24k,\ a_5 = 120k, \ldots$. Terimlerin gidişatından, $a_n = kn!$ olduğu tahmin edilebilir. Bu tahminin doğru olduğu tümevarım metodu ile kolaylıkla gösterilebilir.

Başlangıç teriminden a_0 sonra gelen tüm terimleri $n \geq 1$ için $a_n = na_{n-1}$ bağıntısını sağlayan her dizinin genel terimi $a_n = a_0 n!$ formunda olacaktır. Bağıntının çözümü olan tüm dizilerin genel terimlerini, başlangıç terimine bağlı olarak tanımlaması itibarı ile, $a_n = a_0 n!$, bağıntının genel çözümüdür. Söz gelimi, $a_0 = 3$ alırsak genel terimi $a_n = 3n!$ olan $\{a_n\} =\ 3, 3, 6, 18, 72, 360, 2160, \ldots$ dizisi, verilen bağıntının bir özel çözümü olur.

Bir dizinin genel terimi ile verilmiş olması, her teriminin derhal hesaplanmasını mümkün kıldığı için tercih nedenidir. Öte yandan bir çok sayma probleminin çözümü için ihtiyaç duyulan dizi, doğal bir indirgeme bağıntısına sahip olarak ortaya çıkar. Böyle bir durumda indirgeme bağıntısının çözülüp, dizinin genel teriminin bulunması gerekir. Ancak bu oldukça çetin hatta çoğu kez çözümü imkansız bir problemdir. Burada, genel çözümünün bulunması mümkün olan özel bir indirgeme bağıntısı sınıfı ile ilgileneceğiz.

SABİT KATSAYILI, DOĞRUSAL, HOMOJEN BAĞINTILAR.

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ ler gerçel sayılar olmak üzere

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_t a_{n-t} \qquad (*)$$

şeklindeki t. dereceden ($c_t \neq 0$) bir indirgeme bağıntısına, sabit katsayılı doğrusal homojen indirgeme bağıntısı denir. Bu bağıntının genel çözümünü bulmamıza yardımcı olacak olan

$$x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \cdots - c_{t-1} x - c_t = 0$$

denklemine (*) bağıntısının karakteristik denklemi adı verilir.

TEOREM 1. Bir sabit katsayılı doğrusal homojen indirgeme bağıntısı $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_t a_{n-t}$ verilmiş olsun.

a) $\{r^n\}$ geometrik dizisinin bir çözüm olabilmesi için gerek ve yeter şart r- nin, karakteristik denklemin bir çözümü olmasıdır.

b) Bir k tam sayısı için $\{n^k r^n\}$ dizisinin bir çözüm olabilmesi için gerek ve yeter şart r nin, karakteristik denklemin en az $k+1$ katlı bir çözümü olmasıdır.

Örnek 4. Sabit katsayılı doğrusal homojen bir indirgeme dizisinin karakteristik denklemi $(x-2)(x+3)^3 = 0$ olarak elde edilmiş ise, $\{2^n\}$, $\{(-3)^n\}$, $\{n(-3)^n\}$, $\{n^2(-3)^n\}$ dizileri birer çözümdür.

Örnek 5. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - 5x + 6 = 0$ olup kökleri $x_1 = 2$ ve $x_2 = 3$ olarak bulunur. $\{2^n\}$ dizisinin terimlerinin bu bağıntıyı sağladığını görebiliriz: $5 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-2} = 10 \cdot 2^{n-2} - 6 \cdot 2^{n-2} = 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n$. Benzer şekilde $5 \cdot 3^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-2} = 15 \cdot 3^{n-2} - 6 \cdot 3^{n-2} = 9 \cdot 3^{n-2} = 3^n$ ifadesi de $\{3^n\}$ dizisinin bir çözüm olduğunu göstermektedir.

Herhangi iki $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri ile herhangi λ ve μ gerçel sayıları için $\{\lambda u_n + \mu v_n\}$ şeklinde tanımlanan diziye $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ nin bir doğrusal kombinasyonu denir. Benzer şekilde, istediğimiz sayıda dizinin doğrusal kombinasyonlarını tanımlayabiliriz. Sabit katsayılı, doğrusal, homojen bir indirgeme bağıntısının çözümlerinin her doğrusal kombinasyonu da aynı bağıntının bir çözümü olur.

Derecesi t olan bir indirgeme dizisinin karakeristik denkleminin derecesi de t dir. Öte yandan, t. dereceden her polinomun, katları da hesaba katılarak, tam t tane kökü olduğu bilinmektedir. O halde karakteristik denklem tam olarak t tane çözüm tanımlar. Bu t çözümün önemini aşağıdaki teorem göstermektedir:

TEOREM 2. Sabit katsayılı, doğrusal, homojen bir indirgeme bağıntısının her çözümü, karakteristik denkleminin köklerinden elde edilen çözümlerin bir doğrusal kombinasyonudur.

Bu teoremin ışığında, bir sabit katsayılı doğrusal homojen indirgeme bağıntısı ve yeterli sayıda başlangıç terimi ile tanımlanan bir $\{a_n\}$ dizisinin genel terimini bulabiliriz.

Örnek 6. $\{a_n\}$ dizisi $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ ve $n \geq 2$ için $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ bağıntısı ile tanımlanmıştır. Örnek 5 de bu bağıntının karakteristik denkleminin köklerinden $\{2^n\}$ ve $\{3^n\}$ çözümleri elde edilmişti. Bu durumda, bağıntının çözümü olan her dizinin genel teriminin $A2^n + B3^n$ biçiminde olduğu anlaşılır. Bu ifadedeki A ve B, diziden diziye farklı değerler alan katsayılardır. $\{a_n\}$ dizisi de verilen bağıntının bir özel çözümü olduğundan her $n \geq 0$ tam sayısı için $a_n = A2^n + B3^n$ yazıp, başlangıç terimlerini kullanarak A ve B yi hesaplayabiliriz. $n = 0$ için $a_0 = 2 = A + B$ ve $a_1 = 3 = 2A + 3B$ olduğundan iki bilinmeyenli iki denklem elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ 2A + 3B &= 3 \end{aligned} .$$

Bu sistem çözülerek $A = 3$ ve $B = -1$ bulunur. Sonuç olarak, $\{a_n\}$ dizisininin genel terimi şöyledir:

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 3^n.$$

Örnek 7. $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 3$ ve $n \geq 3$ için $b_n = 5b_{n-1} - 8b_{n-2} + 4b_{n-3}$ bağıntısı ile tanımlanan $\{b_n\}$ dizisinin genel terimini bulalım. Karakteristik denklem $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2 = 0$ olup, kökleri $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ dir. $x_1 = 1$ den $\{1^n\}$ dizisi elde edilir. İki katlı kök olan $x_2 = 2$ ise $\{2^n\}$ ve $\{n2^n\}$ dizilerini verir. O halde genel çözüm $a_n = A + B2^n + Cn2^n$ olur. A, B ve C nin hesaplanması için başlangıç şartları göz önüne alınarak şu denklemler elde edilir:

$$\begin{array}{lll} n = 0 \text{ için} & b_0 = 1 & \Rightarrow \quad A + B = 1 \\ n = 1 \text{ için} & b_1 = 2 & \Rightarrow \quad A + 2B + 2C = 1 \\ n = 2 \text{ için} & b_2 = 3 & \Rightarrow \quad A + 4B + 8C = 3 \end{array} .$$

Bu sistem çözülerek $A = 3,\ B = -2,\ C = 1$ bulunur ve $\{b_n\}$ dizisinin genel terimi şu şekilde elde edilir

$$b_n = 3 - 2^{n+1} + n2^n.$$

Karakteristik denklemin köklerinin karmaşık sayılar olması, genel terimin bulunmasına engel değildir. Ancak bu durumda işlemler karmaşık sayılar kümesinde yürütüleceğinden, başlangıç şartlarını kullanarak yazdığımız denklemin çözümleri de bu kümede olacaktır.

Örnek 8. $c_0 = 2$, $c_1 = 8$ ve $n \geq 2$ için $c_n = 2c_{n-1} - 2c_{n-2}$ bağıntısıyla tanımlanan dizinin genel terimini bulmak için önce karakteristik denklemi yazalım: $x^2 - 2x + 2 = 0$. Bu denklemin kökleri $x_1 = 1 - i$ ve $x_2 = 1 + i$ olup genel çözüm $c_n = A(1-i)^n + B(1+i)^n$ dir. Başlangıç şartlarından elde edilen

$$\begin{array}{lll} n = 0 \text{ için} \quad c_0 = 2 & \Rightarrow & A + B = 2 \\ n = 1 \text{ için} \quad c_1 = 8 & \Rightarrow & A(1-i) + B(1+i) = 8 \end{array}$$

denklem sisteminin çözümü $A = 1 + 3i$ ve $B = 1 - 3i$ olduğundan $\{c_n\}$ dizisinin genel terimi

$$c_n = (1+3i)(1-i)^n + (1-3i)(1+i)^n$$

olarak elde edilir.

HOMOJEN OLMAYAN BAĞINTILARIN HOMOJEN HALE GETİRİLMESİ.

Sabit katsayılı ve doğrusal bir indirgeme bağıntısı $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ler gerçel sayılar olmak üzere

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_t a_{n-t} + f(n) \qquad (*)$$

şeklinde olup, burada f negatif olmayan tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyondur. $f = 0$ olması halinde bağıntının homojen olduğu söylenir ki, bu durumda genel çözümün nasıl elde edilebileceğini bir önceki bölümde incelemiştik. Çözüm yolunu, f fonksiyonunun bir polinom olması veya herhangi bir k gerçel sayısı için $f(n) = k^n$ formunda olması durumunda, homojen olmayan bağıntılara da teşmil edebiliriz. Bu genelleştirmenin temel noktası, verilen indirgeme bağıntısından daha yüksek dereceli ve homojen bir bağıntı elde edip bilinen yöntemi uygulamaktır. Bu yöntemi aşağıdaki örneklerle açıklayacağız.

Örnek 9. Önceki bölümde gördüğümüz yöntemi, $d_0 = 1,\ d_1 = 2$ ve $n \geq 2$ için

$$d_n = d_{n-1} + 2d_{n-2} + n^2 - 3$$

bağıntısıyla tanımlanan dizinin genel terimini bulmak için kullanamayız. Ancak, bağıntının derecesini yükseltmeye katlanarak, homojenliği bozan $n^2 - 3$ teriminden kurtulmamız mümkündür. Dizi, verilen bağıntıyı her $n \geq 2$ tam sayısı için sağladığından, n yerine $n+1$ yazabiliriz:

$$d_{n+1} = d_n + 2d_{n-1} + (n+1)^2 - 3.$$

Bağıntıyı tanımlayan iki ifadenin taraf tarafa farkı alınırsa $d_{n+1} - d_n = d_n + d_{n-1} - 2d_{n-2} + 2n + 1$ veya

$$d_{n+1} = 2d_n + d_{n-1} - 2d_{n-2} + 2n + 1$$

elde edilir. Bağıntının derecesi 2 den 3 e yükselmiş oldu ancak henüz homojen bir bağıntı elde edemedik. Aynı işlemleri bir kez daha uygulayabiliriz. Bulunan son bağıntı ile, bu bağıntıda n yerine $n+1$ yazarak elde ettiğimiz

$$d_{n+2} = 2d_{n+1} + d_n - 2d_{n-1} + 2(n+1) + 1$$

bağıntısının taraf taraf farkı

$$d_{n+2} = 3d_{n+1} - d_n - 3d_{n-1} + 2d_{n-2} + 2$$

bağıntısını verir. Bulduğumuz bu son bağıntı da homojen olmadığından aynı işlemleri bir kez daha tekrarlamamız gerekmektedir. Elde edilen son bağıntı ile, n yerine $n+1$ yazarak elde ettiğimiz

$$d_{n+3} = 3d_{n+2} - d_{n+1} - 3d_n + 2d_{n-1} + 2$$

bağıntısının taraf tarafa farkından

$$d_{n+3} = 4d_{n+2} - 4d_{n+1} - 2d_n + 5d_{n-1} - 2d_{n-2}$$

bağıntısına ulaşırız. Bu bağıntı homojen olduğu için karakteristik denklemi tanımlıdır ve köklerini bularak genel çözüme, en azından teorik olarak, ulaşabiliriz. Ancak elimizdeki denklem artık 5. dereceden olup dizinin genel terimine ulaşmak için verilenlerin dışında üç yeni başlangıç değerine daha ihtiyacımız vardır. Bu değerleri, verilen ilk indirgeme bağıntısını kullanıp $d_0 = 1,\ d_1 = 2$ değerlerinden yola çıkarak bulabiliriz: $d_2 = 5,\ d_3 = 15$ ve $d_4 = 38$.

Örnek 10. Homojen olmayan

$$u_n = u_{n-1} - 3u_{n-2} + 4u_{n-3} + 7^n$$

bağıntısını homojen hale getirmek için önce n yerine $n+1$ yazarak

$$u_{n+1} = u_n - 3u_{n-1} + 4u_{n-2} + 7^{n+1}$$

elde ederiz. İki bağıntının farkını almak homojen bir bağıntı vermeyecektir. Kurtulmak istediğimiz terim 7^{n+1} olup, 7^n teriminden 7^{n+1} i elde etmenin bir yolu n yerine $n+1$ yazmak ise bir diğer yolu da 7^n yi 7 ile çarpmaktır. Verilen bağıntının her terimi 7 ile çarpılırsa

$$7u_n = 7u_{n-1} - 21u_{n-2} + 28u_{n-3} + 7^{n+1}$$

bağıntısı elde edilir. Şimdi, içinde 7^{n+1} terimi bulunan iki bağıntının taraf tarafa farkı alınarak

$$u_{n+1} = 8u_n - 10u_{n-1} + 25u_{n-2} - 28u_{n-3}$$

homojen bağıntısına ulaşılmış olur.

İNDİRGEME DİZİLERİNİN OLUŞTURULMASI.

Birçok sayma probleminde, tanımdan yola çıkarak bir indirgeme dizisine ulaşılır. Bu bölümde bunun örneklerine yer verilmektedir.

Örnek 11. Fibonacci dizisi Bir yavru tavşan bir ayda erişkin hale gelmekte ve bir çift erişkin tavşan da her ay bir çift yavru tavşan sahibi olmaktadır. Bir çift yavru tavşanla başlandığında, 4 sene sonra kaç çift tavşana ulaşılır?

n. aydaki tavşan çifti sayısını F_n ile gösterelim. Başlangıçta sahip olduğumuz bir çift yavru tavşan bir ay sonra erişkin hale gelecek ve tavşanların sayısı bundan sonra artmaya başlayacaktır. O halde başlangıç değerlerimiz $F_0 = F_1 = 1$ dir.

n. ay sahip olduğumuz erişkin tavşan çiftlerinin sayısını e_n; yavru tavşan çiftlerinin sayısını da y_n ile gösterelim. Yavru tavşanlar bir ayda erişkin hale geldiği için, bu ay sahip olduğumuz erişkin tavşanların sayısı, bir ay önce sahip olduğumuz tüm tavşanların sayısına eşittir ($e_n = F_{n-1}$). Bu ay sahip olduğumuz yavru tavşanların sayısı ise bir ay önceki erişkin tavşan çiftlerinin sayısına eşittir ($y_n = e_{n-1}$). Bir ay önceki erişkin tavşanların sayısı da iki ay önceki tüm tavşanların sayısına eşit olduğundan ($e_{n-1} = F_{n-2}$), bu ay sahip olduğumuz yavru tavşanların sayısı iki ay önceki tüm tavşanların sayısına eşittir ($y_n = F_{n-2}$). O halde, bu ay sahip olduğumuz tüm tavşanların sayısı, bir ay önceki ile iki ay önce sahip olduğumuz tavşanların sayısına eşittir($F_n = e_n + y_n = F_{n-1} + F_{n-2}$).

Tanımlanan problemden tavşanların sayısı için hem bir indirgeme bağıntısı hem de gerekli başlangıç koşullarını elde ettik. İndirgeme bağıntısı gereği, her terimi kendisinden önce gelen son iki terimin toplamına eşit olan bu dizinin ilk bir kaç terimi şöyledir: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,... . $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ bağıntısını sağlayan ve ilk iki terimi 1 olan bu diziye (standart) Fibonacci dizisi adı verilir ve terimleri F_n ile gösterilir.

Şimdi Fibonacci dizisinin genel terimini bulalım. Bağıntının karakteristik denlemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup kökleri $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olduğundan, genel çözüm $F_n = A\phi^n + B\psi^n$ dir. Başlangıç değerlerini kullanarak elde ettiğimiz

$$\begin{aligned} n = 0 \text{ için} \quad F_0 = 1 \quad &\Rightarrow \quad A + B = 1 \\ n = 1 \text{ için} \quad F_1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad A\phi + B\psi = 1 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözerek $A = \phi/\sqrt{5}$ ve $b = -\psi/\sqrt{5}$ elde edilir. O halde Fibonacci dizisinin n. terimi, yani n. Fibonacci sayısı şöyledir:

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Problemde sorulan 4 sene sonraki tavşan nüfusu 7.778.742.049 çift olarak bulunur.

Çözümde tanımladığımız $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033...$ sayısı altın oran olarak bilinen sayıdır. Matematiğin yanı sıra bir çok sahada ilgi çekici bulunan bu sayının yüzlerce özelliğini yazmak mümkündür. Kitabın amacından uzaklaşmamak için bunlardan sadece bir kaçına yer veriyoruz:
- ϕ sayısına 1 ilave edilirse karesi bulunur,
- ϕ sayısından 1 çıkarılırsa çarpımsal tersi bulunur,
- Kenar uzunluğu 1 olan düzgün dışbükey beşgenin her bir köşegeninin uzunluğu ϕ dir.
- ϕ sayısını kullanarak n. Fibonacci sayısını şu şekilde yazabiliriz:

$$F_n = \frac{\phi^{n+1} - (1-\phi)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Örnek 12. Bir çocuk her adımda bir veya iki basamak birden tırmanarak, 50 basamaklı bir merdivenin tepesine kaç farklı biçimde ulaşır?

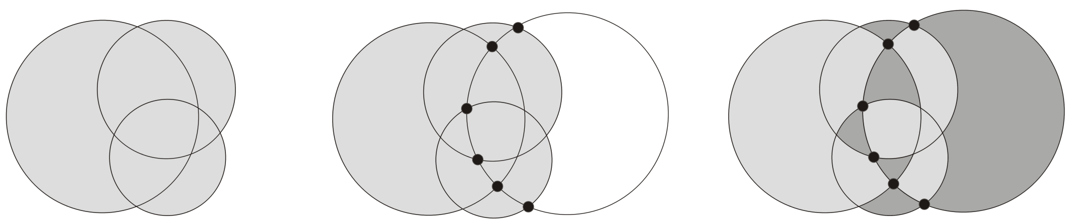
Çocuğun n basamaklı merdiveni çıkma biçimlerinin sayısını v_n ile gösterelim. n. basmağa ulaşan çocuk için iki ayrı durum söz konusudur:
-$(n-1)$. basamağa (v_{n-1} çıkma biçiminden birisiyle) ulaşıp son hamlede tek bir basamak çıkmıştır,
-$(n-2)$. basamağa (v_{n-2} çıkma biçiminden birisiyle) ulaşıp son hamlede iki basamak birden çıkmıştır.
Başka bir durum söz konusu olmadığından $v_n = v_{n-1}+v_{n-2}$ bağıntısı elde edilir. Başlangıç koşulları $v_1 = 1$ ve $v_2 = 2$ olduğundan $v_n = F_n$ olur. Sorunun cevabı F_{50} dir.

Örnek 13. $1, 2, \ldots, n$ sayılarını, her sayı orijinal konumundan en fazla bir konum uzağa gitmiş olmak şartı ile kaç farklı biçimde dizebiliriz? Örneğin 2143576 bu koşulu sağlayan; 312547698 ise sağlamayan bir dizilіştir (3, orijinal konumundan iki konum uzaktadır).

Koşulu sağlayan dizilişlerin sayısını w_n ile gösterelim. $w_1 = 1$ ve $w_2 = 2$ olduğu hemen görülür. Koşulu sağlayan bir dizilişte son terim ya $n-1$ ya da n olmak zorundadır. Son terim n ise, daha önceki terimleri w_{n-1} farklı şekilde dizebiliriz. Son terim $n-1$ ise bir önceki terim n olmalıdır ve bu durumda da daha önceki terimler w_{n-2} farklı biçimde dizilir. Tüm durumlar bu ikisinden ibaret olduğuna göre $w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$ bağıntısı elde edilir. Başlangıç koşulları da dikkate alındığında $w_n = F_n$ elde edilir.

Örnek 14. Çemberlerin tanımladığı bölge sayısı. Bir çemberin, çizildiği düzlemi iki bölgeye ayırdığını, iki çember için 4; üç çember için de 8 bölge tanımlandığını biliyoruz. Şimdi, aynı düzlemde çizilen ve genel konumdaki (herhangi ikisi iki noktada kesişen; herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen) n tane çemberin tanımladığı bölge sayısını hesaplayalım.

İşlemlerde kolaylık sağlaması açısından, aranan sayıyı R_n ile göstereceğiz. n çember çizip R_n bölge oluşturduktan sonra çizeceğimiz $(n+1)$. çember daha önce çizilmiş olan n çemberden her birini iki kez keseceğinden, üzerinde $2n$ tane kesişim noktası oluşur ve bu noktalar çemberi $2n$ yaya ayırır. Bu yaylardan her biri daha önce varolan R_n bölgeden birisini iki parçaya ayırıp yeni bir bölge tanımlar. Böylece, yeni bölgelerin sayısı $2n$ olarak bulunmuş olur ve $R_{n+1} = R_n + 2n$ bağıntısı elde edilir.



Homojen olmayan bu bağıntıyı homojen hale getirmek için n yerine $n+1$ yazarak $R_{n+2} = R_{n+1} + 2(n+1)$ bağıntısı elde edilir. Taraf tarafa fark alınarak $R_{n+2} = 2R_{n+1} - R_n + 2$ bulunur. Tekrar n yerine $n+1$ yazıp bulduğumuz $R_{n+3} = 2R_{n+2} - R_{n+1} + 2$ bağıntısının bir önceki bağıntı ile taraf tarafa farkını alırsak $R_{n+3} = 3R_{n+2} - 3R_{n+1} + R_n$ homojen bağıntısına ulaşırız. Bu bağıntının karakteristik denklemi $(x-1)^3 = 0$ olup üç katlı tek bir kökü vardır: $x_1 = 1$. Böylece genel çözüm $R_n = A + Bn + Cn^2$ olarak bulunur. Başlangıç şartlarını hesaba katarak istenen sayı elde edilir:

$$R_n = n^2 - n + 2.$$

Örnek 15. Bir lokantada her gün üç çeşit tatlıdan birisi hazırlanmaktadır. Aynı tür tatlının ard arda en fazla iki gün servis edilmesi koşulu ile bir aylık tatlı servisi kaç farklı şekilde planlanabilir?

n gün için mümkün planlama sayısını t_n ile gösterelim. n. gün için iki durum söz konusudur:

- Son iki gün aynı tür tatlı servis edilmiştir. Bu durumu şöyle gerçekleştirebiliriz: ilk $n-2$ gün, mümkün t_{n-2} planlamadan biri seçilir ve bu planlamanın son günü yani $(n-2)$. gün servis edilen tatlının dışındaki iki tatlıdan birisi seçilerek, $(n-1)$. ve n. günlerde bu tatlı servis edilir. Kısaca, son iki gün aynı tatlının servis edildiği durumların sayısı $2t_{n-2}$ dir.

- Son iki gün farklı türde tatlılar servis edilmiştir. Bu durumu da şöyle gerçekleştirebiliriz: ilk $n-1$ gün, mümkün t_{n-1} planlamadan biri seçilir ve bu planlamanın son günü yani $(n-1)$. gün servis edilen tatlının dışındaki iki tatlıdan birisi seçilerek, n. gün bu tatlı servis edilir. Kısaca, son iki gün farklı türde tatlıların servis edildiği durumların sayısı $2t_{n-1}$ dir.

Olabilecek bütün durumlar yukarıda incelenenlerden ibaret olduğu için $t_n = 2t_{n-1} + 2t_{n-2}$ bağıntısı elde edilir. Başlangıç değerleri $t_1 = 3$ ve $t_2 = 9$ olduğu, problemin tanımından elde edilebilir. Gerekli işlemler yapılarak t_n şu şekilde bulunur:

$$t_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{3}\right)^{n+1}\right].$$

30 günlük bir ay için tatlı servisi yaklaşık 14 trilyon farklı şekilde planlanabilir.

OLASILIK

ÖRNEK UZAY

Bir süreç veya deneyin sonucunda kavranabilen her görünüşe bir örnek noktası; kavranabilen bu görünüşlerin bütününden oluşan kümeye de örnek uzayı denir. Örnek uzayın her alt kümesine bir olay adı verilir.

Örnek 1. Bir paranın atılmasından ibaret bir deneyin sonucunda kavranabilen iki görünüş olabilir, yazı (Y) veya tura (T). Böylece, bu deneyin örnek uzayı $\{Y, T\}$ kümesidir.

Örnek 2. Bir toplumdaki kişilerin cinsiyetlerini konu edinen bir deneyin kavranabilen iki görünüşü (E veya K) olduğundan, örnek uzay $\{E, K\}$ olur.

Örnek 3. Bir bitki türünün dayanıklılığını ölçmek amacıyla yapılan bir deneyde 50 tohum dikiliyor ve bunlardan kaç tanesinin filizleneceği gözleniyor. Tohumların hepsi kuruyup kalabileceği gibi, bir kısmı veya tamamı da filizlenebilir. Kavranabilir tüm görünüşleri ifade eden $\{0, 1, \ldots, 50\}$ kümesi örnek uzayımız olur.

Örnek 4. İlk kez yazı gözükünceye kadar bir parayı atmaktan ibaret bir deneyin örnek uzayı $\{1, 2, 3, \ldots\}$ kümesidir.

Örnek 5. Mardin'de yaşayan kişilerin kilolarını gözlemleyen bir deneyi göz önüne alalım. Herhangi bir kimsenin ağırlığının 600 kilogramdan az olacağını kabul ederek, örnek uzay olarak örneğin (0,600) aralığındaki reel sayılar kümesi alınabilir.

Son iki örnek, örnek uzayın sonsuz bir küme olabileceğini göstermektedir. Ayrıca, son örnekten de anlaşılacağı üzere, gözlenmesi imkansız olan görünüşler de örnek uzaya dahil edilebilir.

OLASILIĞIN AKSİYOMLARI VE TEMEL TEOREMLERİ

Bir S örnek uzayının kuvvet kümesi üzerinde tanımlı bir P fonksiyonuna, aşağıdaki üç aksiyomu sağlaması durumunda S örnek uzayı üzerinde bir olasılık dağılım fonksiyonu (veya sadece olasılık fonksiyonu) adı verilir.

A1. Her $A \subset S$ olayı için $P(A)$ negatif olmayan bir reel sayıdır.
A2. $P(S) = 1$ dir.
A3. İkişer ikişer ayrık $A_1, \ldots, A_t$ kümeleri için $P(A_1 \cup \cdots \cup A_t) = P(A_1) + \cdots + P(A_t)$ dir

TEOREM. Bir S örnek uzayı üzerinde tanımlı bir P olasılık fonksiyonu ve herhangi bir $A \subset S$ olayı verilmiş olsun. Aşağıdaki önermeler daima geçerlidir.
a. $0 \leq P(A) \leq 1$,
b. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ dır (A olayının olmama olasılığı $1 - P(A)$ dır),
c. $P(\emptyset) = 0$.

İmkansız ve kesin olaylar. Bir deney gerçekleştirildiğinde bir A olayı için $P(A) = 0$ olması, A olayının imkansızlığı; $P(A) = 1$ olması da A olayının kesinliği anlamını taşır.

Olayların birleşimleri ve kesişimleri. Herhangi iki A ve B olayları için

$$P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B),$$

$$P(A \text{ ve } B) = P(A \cap B)$$

ve

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

dir.
Boole Eşitsizliği. Birleşimler için verilen ifadeden aşağıdaki eşitsizlik derhal elde edilir:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Monotonluk kuralı. $A \subseteq B$ olması durumunda $P(A) \leq P(B)$ dir.

Ayrık olaylar. Birisi gerçekleştiğinde diğeri gerçekleşemeyen A ve B gibi iki olaya ayrık olaylar adı verilir ve böyle olaylar için $P(A \cap B) = 0$ olduğundan, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir.

Bir $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ örnek uzayında $P(s_1) = P(s_2) = \cdots = P(s_n) = 1/n$ ise, P ye düzgün dağılım fonksiyonu adı verilir

Örnek 6. Bir deneyin tanımına bağlı olarak, sonuç için beklentimiz örnek uzaydaki her nokta için eşit ise, olasılık fonksiyonu olarak düzgün dağılım fonksiyonu seçilir. Örneğin, her yüzüne 1,2,3,4,5 ve 6 sayılarından birisi yazılmış olan bir küpe sayı küpü adını verelim. Böyle bir küp rastgele atıldığında üst yüzündeki sayının gözlenmesi şeklinde tanımlı olan deneyin örnek uzayı $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dır. Deney sonucunun 3 veya 5 olmasını ummak arasında bir fark gözetemeyeceğimiz için bu örnek uzay üzerindeki olasılık fonksiyonunun düzgün dağılım fonksiyonu olduğunu kabul edebiliriz.

Örnek 7. Alelade bir kibrit kutusunun en geniş alana sahip olan iki yüzüne 3, en küçük alana sahip olan yüzlerine 1; diğer iki yüze de 2 yazalım. Bu kutu rastgele atıldığında 3 gelmesi konusundaki beklentimiz 2 veya 1 gelmesine göre daha kuvvetlidir. Deney sonuçları arasında fark gözettiğimiz için $\{1, 2, 3\}$ örnek uzayı üzerinde olasılık fonksiyonu olarak düzgün dağılım fonksiyonunu kullanmak yerinde bir seçim olmayacaktır. Öte yandan, deneyin tanımından yola çıkarak $P(3) > P(2) > P(1)$ olduğunu söylemekten daha fazlasını yapamayız.

Örnek 8. Bir tanesi 1 TL, diğeri 50 kr değerinde iki madeni parayı aynı anda attığımızda görünen yüzleri önce 1 TL sonra 50 kr için yazarsak, örnek uzay $\{YY, YT, TY, TT\}$ olur. Burada, sözgelimi YT, 1 TL nin yazı; 50 kr nin tura geldiğini göstermektedir. Bu örnek uzayın olasılık dağılımının düzgün olduğu kabul edilebilir.

Örnek 9. Özdeş iki madeni parayı aynı anda attığımızda görünen yüzlerin tanımladığı örnek uzay $\{YY, YT, TT\}$ olur. Burada, YT paralardan birisinin yazı, diğerinin tura geldiğini göstermektedir. Bu örnek uzay için bir olasılık dağılımı belirlemek için şu gözlemleri yapabiliriz:
- Paraların ikisinin de yazı veya ikisinin de tura olması eşdeğer olaylar olduğundan $P(TT) = P(YY)$ kabul edilebilir.
- Paraların ikisinin de yazı gelmesi için tek bir yol varken, birisinin yazı, diğerinin tura gelmesi iki farklı yoldan olabilir. Bu durumda, $P(YT) = 2P(YY)$ olduğunu kabul edebiliriz.

Yaptığımız bu makul kabuller altında $P(YY) + P(TT) + P(YT) = 1$ eşitliğinden $P(YY) + P(YY) + 2P(YY) = 1$ ve sonuç olarak $P(YY) = 1/4$ elde ederiz. Böylece, olasılık dağılım fonksiyonu $P(YY) = 1/4$, $P(YT) = 1/2$, $P(TT) = 1/4$ olarak belirlenmiş olur.

Örnek 10. Ateş ile Güneş 1 ile 5 arasında rastgele birer tam sayı seçerler. Seçtikleri sayıların toplamının bir tek tam sayı olması olasılığını hesaplayalım. Örnek uzayımızı $\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (5, 5)\}$ kümesi ve bunun üzerindeki olasılık dağılımını düzgün kabul edebiliriz. Kümede yer alan 25 sayı çiftinden 12 tanesinin bir bileşeni tek, diğer bileşeni çift tam sayıdır. Böylece, aradığımız olasılık 12/25 olarak elde edilir.

BERNOULLI DENEYİ VE BİNOM DAĞILIMI

Örnek uzayı S olan bir deney gerçekleştirildiğinde olasılığı p olan bir A olayının gözlenmesine Bernoulli deneyi adı verilir. Bir Bernoulli olayı n kez tekrarlandığında A olayının gözlenme sayısı olarak tanımlanan olayın örnek uzayı $\{0, 1, \ldots, n\}$ olur. Bu örnek uzayı üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı olan olasılık dağılım fonksiyonuna binom dağılım fonksiyonu adı verilir. A olayının gözlenme sayısı x olmak üzere herhangi bir $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ için

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

dir.

Örnek 11. Bir sayı küüpü 5 kez atıldığında tam üç kez 4 gelmesi olasılığını hesaplayalım. Küp bir kez atıldığında 4 gelme olasılığı $p = 1/6$ deney sayısı $n = 5$ ve $k = 3$ olduğundan $P(x = 3) = \binom{5}{3}(1/6)^3(5/6)^2 = \dfrac{250}{6^6} = 0,0053\ldots$ olur.

Örnek 12. Bir oyuncu her atışında 2/3 olasılıkla isabet kaydetmektedir. Bu oyuncu 10 atış yaptığında, atışlarının yarısından fazlasında isabet kaydetme olasılığını hesaplayınız.

Oyuncunun 10 atışta kaydettiği isabet sayısını k ile gösterirsek, hesaplamak istediğimiz olasılık

$$P(k > 5) = P(k = 6) + P(k = 7) + P(k = 8) + P(k = 9) + P(k = 10)$$

olur.

$$\begin{array}{c} P(k=6) = \binom{10}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 210\frac{2^6}{3^{10}} \\ P(k=7) = \binom{10}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 120\frac{2^7}{3^{10}} \\ P(k=8) = \binom{10}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 45\frac{2^8}{3^{10}} \\ P(k=9) = \binom{10}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^9\left(\frac{1}{3}\right)^1 = 10\frac{2^9}{3^{10}} \\ P(k=10) = \binom{10}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{2^{10}}{3^{10}} \end{array}.$$

Sonuç olarak $P(k > 5) = 0,787\ldots$ elde edilir.

Örnek 13. Bir fabrikada üretilen ampüllerin bozuk olma olasılığı 0,001 dir. Dörtlük paketler halinde piyasaya sürülen ampüllerin bir kutusunda en fazla bir tane bozuk ampul bulunma olasılığını hesaplayınız.

Dört ampulün de sağlam olma olasılığı $\binom{4}{0}(0,001)^0 \cdot (0,999)^4 = 0,996006$ ve tam bir tane ampulün bozuk olması olasılığı $\binom{4}{1}0,001^1 \cdot 0,999^3 = 0,000998$ olduğundan, en fazla bir ampulün bozuk olma olasılığı 0,996994 olur.

Örnek 14. Emirali, Defne ve Salih, 5 kitabı paylaşmak için kura çekmeye karar verirler. Bir torbaya isimlerinin yazılı olduğu üç kağıt atılır ve torbadan rastgele bir çekimle ilk kitabın sahibi belirlenir. İlk çekimdeki kağıt torbaya tekrar koyularak işlem ikinci ve sonraki tüm kitaplar için aynı şekilde tekrarlanır.
Tüm kitapların sadece bir kişiye gitmesi olasılığını hesaplayalım. Herhangi bir kitabın

Salih'e gitmesi olasılığı 1/3 olduğundan, tüm kitapların Salih'te toplanmış olması olasılığı $(\frac{1}{3})^5$ olur. Emirali ve Defne için de aynı olasılık değeri geçerli olduğundan, tüm kitapların ortaklardan birisinde toplanma olasılığı $(\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81} \approx 0,012$ olur.
Herhangi bir kitabın Salih'e gitmeme olasılığı 2/3 ve tümünün Salih'e gitmeme olasılığı $(\frac{2}{3})^5 = \frac{32}{243}$ dir. Diğer ortaklar için de aynı olasılık değeri bulunacağından, $\frac{32}{81} \approx 0,395$ olasılık değeri ile ortaklardan en az birisi kitap alamamış olur.
Hesaplanan bu değerlerden yola çıkarak aşağıdaki sonuçlar da elde edilebilir:
Tüm kitapların tek ortağa gitme olasılığı: $\frac{1}{81}$.
Tüm kitapların, ikisi de en az birer kitap almak üzere iki ortağa gitme olasılığı: $\frac{31}{81}$.
Her ortağa en az bir kitap gitme olasılığı: $1 - \frac{32}{81} = \frac{49}{81}$.

KOŞULLU OLASILIK, BAYES TEOREMİ

Bir sayı küpü atıldığında D olayı, gelen yüzün 4 olması; C olayı da gelen yüzün bir çift sayı olması olsun. $P(D) = 1/6$ ve $P(C) = 1/2$ dir. Sayı küpü atıldığında C olayının gerçekleştiği biliniyorsa, D olayının olasılığı 1/3; D olayının gerçekleştiği bilindiğinde C de gerçekleşmiş olacağından C nin olasılığı 1 olur.

Örnek uzayı S olan bir deneyde, B olayının gerçekleştiği biliniyorsa A olayının sahip olduğu olasılık değeri $P(A|B)$ ile gösterilir ve koşullu olasılık değeri adını alır. Yukarıdaki örnek için $P(D|C) = 1/3$ ve $P(C|D) = 1$ dir. Koşullu olasılık değeri aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Örnek 15. Dış görünüşleri aynı olan üç kutudan birisinin içinde iki tane sarı, birisinde iki tane yeşil ve diğerinde de bir sarı bir yeşil top vardır. Kutulardan birisi rastgele seçilip içindekilere bakmadan toplardan birisi alınıyor. Alınan top sarı ise, kutudaki diğer topun da sarı olma olasılığı ne olur?
İki sarı top içeren kutunun seçilmesi olayını A; iki yeşil top içeren kutunun seçilmiş olması olayını B ve diğer kutunun seçilmiş olması olayını C ile gösterelim. Alınan topun sarı olması ve yeşil olması olaylarını da sırasıyla, S ve Y ile gösterelim. Aradığımız olasılık, $P(A|S)$ dir.
A olayı gerçekleştiğinde çekilen topun sarı olması kaçınılmaz olduğundan $P(S|A) = 1$ olur. $P(A) = 1/3$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$P(S|A) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)}$$

eşitliğinden $P(A\cap S) = 1/3$ bulunur. $P(S) = 1/2$ olduğundan,

$$P(A|S) = \frac{P(A\cap S)}{P(S)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

elde edilir.

Bayes Teoremi Bir deneyin örnek uzayı, ikişer ikişer ayrık $B_1, B_2, \ldots, B_n$ olaylarının birleşimi ise, herhangi bir A olayının olasılığı şu şekilde verilir:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n).$$

Örnek 16. İlk evresinde gözle görülür bir belirtiye sahip olmayan bir hastalığın herhangi bir kişide bulunması olasılığı 0,001 olarak verilmiştir. Hastalığın teşhis edilebilmesi için uygulanan bir test, hastalığı taşıyan bir kişiye uygulandığında 0,98 olasılık değeri ile (+); hastalığa sahip olmayan kişiye uygulandığında ise 0,04 olasılık değeri ile (+) sonuç vermektedir. Uygulanan testte (+) sonuç alan bir kişinin hastalığa yakalanmış olma olasılğı nedir?
Herhangi bir kişinin hastalığa yakalanmış olması olayını H ile; herhangi bir kimseye uygulandığında testin (+) sonuç vermesi olayını da + ile gösterelim. Hesaplamamız gereken olasılık $P(H|+)$ dır.
Problemde verilen $P(H) = 0,001$ ve $P(+|H) = 0,98$ değerleri $P(+|H) = \frac{P(+\cap H)}{P(H)}$ eşitliğinde yerlerine yazıldığında $P(+\cap H) = \frac{98}{10^5}$ elde edilir. Bayes teoremini kullanarak $P(+) = P(+|H)P(H) + P(+|\overline{H})P(\overline{H}) = (0,98)(0,001) + (0,04)(0,999) = \frac{4094}{10^5}$ bulunur. Sonuç olarak $P(H|+) = \frac{P(+\cap H)}{P(+)} = \frac{98}{4094} \approx 0,024$ olur.

BAĞIMSIZ OLAYLAR

Bir S örnek uzayı verilmiş olsun. A olayının olasılığı, B olayının gerçekleştiği bilindiğinde değişmiyorsa bu olaylara bağımsız olaylar denir. Bir başka ifadeyle,

$$P(A) = P(A|B)$$

ise, A ve B olayları bağımsızdır. Öte yandan, $P(A|B)P(B) = P(A\cap B)$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda, A ve B olaylarının bağımsız olması,

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

eşitliğinin sağlanması ile eşdeğerdir. Son elde edilen eşitlik, bağımsızlığın simetrik bir ilişki olduğunu yani $P(A) = P(A|B)$ olması durumunda $P(B) = P(B|A)$ olacağını gösterir.

Örnek 17. Bir sayı küpü ve bir madeni para aynı anda atılıyor. Sayı küpünün 3 gelmesi olasılığı 1/6 dır. Paranın yazı geldiği bildirildiğinde, sayı küpünün 3 gelmesi olasılığı değişmeyeceğinden, bu olaylar bağımsızdır.

Örnek 18. Bir kafeste 30 papağan ve 20 muhabbet kuşu bulunmaktadır. Papağanların 9 tanesi beyaz, 10 tanesi sarı, 11 tanesi yeşildir. Muhabbet kuşlarının da 6 tanesi beyaz, 5 tanesi sarı ve 9 tanesi yeşildir.
Kafesten rastgele alınan bir kuşun papağan olması olayını P, muhabbet kuşu olması olayını M ile gösterelim. Kuşun rengi ile ilgili olayları da anlaşıldığı biçimiyle B, S ve Y ile gösterelim.
Problemde verilen olasılık değerlerini bir tablo haline getirmek, işimizi kolaylaştıracaktır,

Kuş	Papağan	Muhabbet Kuşu	Toplam
Beyaz	9	6	15
Sarı	10	5	15
Yeşil	11	9	20
Toplam	30	20	50

Aşağıdaki olasılık değerleri tablodan yazılabilir:

$P(P \cap B) = 9/50$, $P(P \cap S) = 10/50$ ve $P(P \cap Y) = 11/50$

$P(P)P(B) = (30/50)(15/50) = 9/50$
$P(P)P(S) = (30/50)(15/50) = 9/50$
$P(P)P(Y) = (30/50)(20/50) = 12/50.$

Buradan şu sonuçları elde ederiz:
$P(P \cap B) = P(P)P(B)$: P ve B olayları bağımsızdır,
$P(P \cap S) \neq P(P)P(S)$: P ve S olayları bağımsız değildir ,
$P(P \cap Y) \neq P(P)P(Y)$: P ve Y olayları bağımsız değildir .

Gerçekten de, kafesten alınan bir kuşun papağan olma olasılığı 3/5 dir. Alınan kuşun beyaz olduğu bilindiğinde, papağan olması olasılığı yine 9/15=3/5 olur. Öte yandan, kuşun sarı olduğu bilinirse, papağan olması olasılığı 10/15=2/3 olur. Sonuç olarak, rastgele seçilen bir kuşun papağan olma olasılığı, kuşun rengi beyaz olduğunda aynı kalmakta fakat sarı olduğunda değişmektedir.

SONSUZ ELEMANLI ÖRNEK UZAYLAR

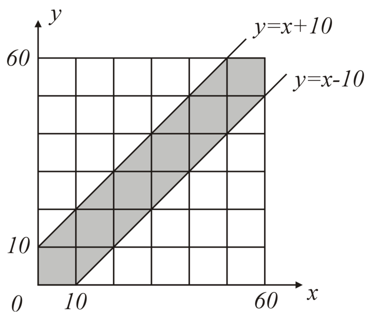
Örnek uzayın sonsuz çoklukta eleman içermesi durumunda olasılık fonksiyonunun tanımlanması için, bu kitabın amaç ve düzeyi dışında kalan yöntem ve kavramların kullanılması gerekir. Ancak, belirli türdeki problemlerin çözümüne yönelik olarak ve sezgisel bir yaklaşımla bazı tanımlar yapabiliriz. Örnek uzay, geometrik olarak ölçülebilir (boy, alan veya hacim gibi) bir kavramla temsil edildiğinde, aynı cinsten ölçüyle ifade edilebilen alt kümeler olayları temsil eder. Bu durumda, olayın ölçüsü, örnek uzayın ölçüsüne oranlanarak söz konusu olaya karşı gelen olasılık değeri belirlenir.

Örnek 19. Herhangi bir anda bir saate baktığımızda saniye kolunun 2 ile 3 arasında olma olasılığını hesaplayalım.
Örnek uzay, saniye kolunun gösterebileceği değerlerin kümesi olan [0,12] aralığıdır. Problemde tanımlı olay, [2,3] aralığı ile temsil edilir. Olaya karşı gelen kümenin uzunluğu 1; örnek uzaya karşı gelen kümenin uzunluğu 12 olduğundan, aranan olasılık 1/12 dir.

Örnek 20. Emirali ve Salih, birbirlerinden habersiz olarak aynı gün kütüphaneye gitmeye karar vermişlerdir. Her ikisi de saat 16:00 ile 17:00 arasında herhangi bir anda kütüphaneye girip 10 dakika kalıp dışarı çıkacaktır. İki arkadaşın kütüphanede karşılaşma olasılıklarını hesaplayınız.

Emirali ve Salih'in kütüphaneye giriş anlarını, saat 16:00 dan başlamak üzere, dakika cinsinden, sırası ile x ve y gerçel sayıları ile gösterelim ($0 \leq x, y \leq 60$). Böylece örnek uzay, Kartezyen koordinat sisteminde $\{(x,y)|0 \leq x \leq 60,\ 0 \leq y \leq 60\}$ karesi olur.

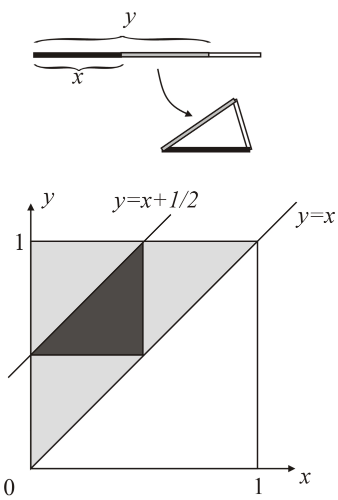
İki arkadaşın kütüphaneye geliş anı, $P(x,y)$ noktası ile temsil edilebilir ve bu durumda buluşabilmeleri için $|x - y| \leq 10$ olması gerekir. Bu eşitsizliğin gerçekleşmesi $y \geq x - 10$ ve $y \leq x + 10$ eşitsizliklerinin aynı anda gerçekleşmesi ile eşdeğerdir. Bir başka deyişle, buluşmanın gerçekleşebilmesi için, $P(x,y)$ noktasının söz konusu kareninin içinde, $y = x - 10$ ve $y = x + 10$ doğruları arasındaki bölgede yer alması gerekir. Bu bölge, şekildeki gölgelendirilerek gösterilmiştir.



Örnek olaya karşı gelen bölgenin alanı 3600; buluşmanın gerçekleşebildiği bölgenin alanı da 1100 olduğundan, aradığımız olasılık 11/36 olarak ede edilir.

Örnek 21. Uzunluğu 1 m olan bir çubuk rastgele iki noktasından kırıldığında ortaya çıkan üç parçanın bir üçgen oluşturma olasılığını hesaplayınız.

Çubuğun bir ucunu belirleyip kırılma noktalarının bu uçtan uzaklıklarını x ve y ile gösterdiğimizde $(x < y)$ örnek uzay, Kartezyen koordinat sisteminde $y = x$, $x = 0$ ve $y = 1$ doğrularının sınırladığı üçgensel bölge olur. Çubuğu kırdıktan sonra oluşan parçaların uzunlukları x, $y - x$ ve $1 - y$ olup, $x + (y - x) > 1 - y$, $x + 1 - y > y - x$ ve $(y - x) + (1 - y) > x$ üçgen eşitsizlikleri sağlanmalıdır. Bu eşitsizlikleri düzenleyerek $y > 1/2$, $y < x + 1/2$ ve $x < 1/2$ yazdığımızda, parçaların üçgen oluşturabilmesi için (x, y) koordinatlı noktanın $y = 1/2$, $x = 1/2$ ve $y = x + 1/2$ doğruları ile sınırlı üçgensel bölgenin içinde olması gerektiği anlaşılır.

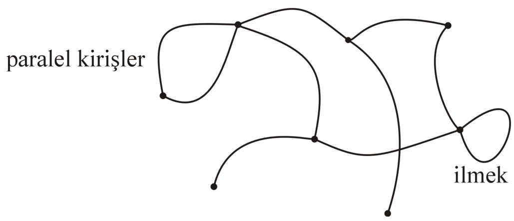


Çözümün gerçekleştiği bölgenin alanı $1/8$ ve örnek uzaya karşı gelen bölgenin alanı da $1/2$ olduğundan, aradığımız olasılık $1/4$ olarak bulunur.

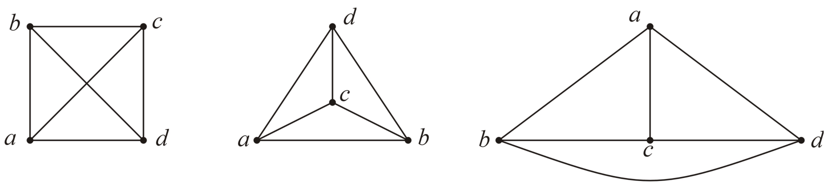
ÇİZGELER

TEMEL KAVRAMLAR

Düzlemde verilen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ noktaları ve uç noktaları, verilen bu noktalar olan eğri parçalarından oluşan bir şekle *çizge* adı verilir. Bir çizgede tüm nokta çiftlerinin bir eğri parçasıyla bağlanmış olması gerekmediği gibi bazı nokta çiftleri arasında birden çok eğri parçası çizilmiş olabilir veya bir eğri parçasının iki uç noktası da aynı nokta olabilir. Noktalara çizgenin *düğümleri*; eğri parçalarına da çizgenin *kirişleri* denir. Aralarında en az bir kiriş bulunan iki düğüme *komşu düğümler*, iki uç noktası aynı olan bir kirişe *ilmek*; iki düğümü birleştiren birden fazla kiriş varsa bunlara *paralel kirişler* adı verilir. Herhangi iki kirişi paralel olmayan ve ilmeği bulanmayan bir çizgeye *basit çizge* denir.



Bir çizge, düğümler arasındaki ilişkiyi yansıtan bir şekil olarak düşünülebilir. Bu durumda, bir çizgenin, düğümlerin yerleştirilmesine ve kirişlerin çizilmesine bağlı olarak farklı biçimlerde çizilebileceği anlaşılır. Sözgelimi aşağıdaki üç şekil, aynı çizgenin farklı biçimde çizilişlerini göstermektedir.



Bir çizgenin düzlemdeki çiziminde bazı kirişleri kesişebilir. Bu durumda kesişim noktalarını düğümlerden ayırt etmeye özen gösterilmelidir. Verilen bir G çizgesindeki düğüm sayısı genellikle v ile; kiriş sayısı da e ile gösterilir. Bir düğüme bağlı olan kirişlerin o düğüme bağlı olan uçlarının sayısına, çizgenin anılan düğümdeki *yerel derecesi* denir. Bir p_i düğümündeki yerel derece $d(p_i)$ ile gösterilir. Yerel derecenin 0 olduğu bir düğüme *izole düğüm* adı verilir. v tane izole düğümden ibaret olan çizge O_v ile gösterilir ve *boş çizge* adını alır.

TEOREM. Düğümler kümesi $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_v\}$ olan herhangi bir çizgede, kirişlerin sayısı e olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$d(p_1) + \cdots + d(p_v) = 2e.$$

Örnek 1. Kalabalık bir davette her katılımcı diğerlerinin bir kısmıyla el sıkışıyor. Davette el sıkışma sayısı tek olanların sayısının çift olduğunu gösterelim.

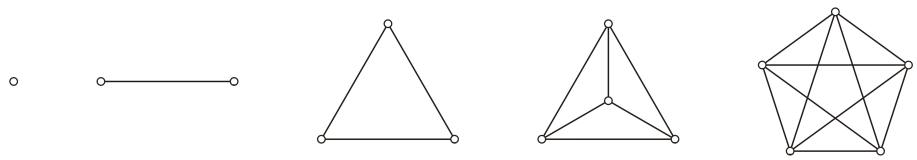
Her katılımcıyı bir nokta (düğüm) ile temsil edip, herhangi iki kişi el sıkıştığında bunları temsil eden noktaları bir eğri parçası (kiriş) ile birleştirdiğimizde bir çizge elde ederiz. Her düğümdeki yerel derece, düğümün temsil ettiği kişinin el sıkışma sayısına eşit olur. Yerel derecelerin toplamı bir çift sayı (kirişlerin iki katı) olduğundan, toplamda yer alan tek sayıların sayısı da çift olmak zorundadır.

Tüm düğümlerdeki yerel dereceler aynı r sayısına eşit olduğunda çizgeye bir $r-$*düzgün çizge* denir. Böyle bir çizgede $2e = vr$ olacağından v ve r den en az birisinin çift sayı olması gerektiği görülür. Sözgelimi, her düğümünde üç bağlantı olan 11 düğümlü bir çizge olamaz.

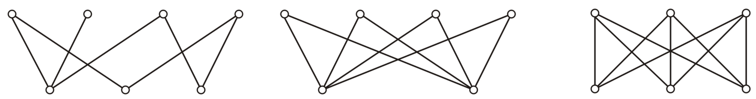
Örnek 2. 25 şehre sahip bir ülkenin şehirleri arasında karşılıklı uçak seferleri düzenlenecektir. Her şehrin doğrudan bağlantılı olduğu şehirlerin sayısı 5 olacak şekilde bir düzenleme yapılamaz.

TAM ÇİZGELER, İKİ-PARÇA ÇİZGELER

Herhangi ikisi komşu olan v düğüme sahip basit çizgeye *tam çizge* adı verilir ve K_v ile gösterilir. Bir başka deyişle bir tam çizge, mümkün olan en çok sayıda kirişe sahip olan basit çizgedir. Bir tanım özelliği olarak, k_v çizgesi bir $(v-1)-$düzgün çizgedir ve kirişlerinin sayısı $v(v-1)/2$ dir.ve tanım dan. Aşağıdaki şekilde K_1, K_2, K_3, K_4 ve K_5 yer almaktadır.

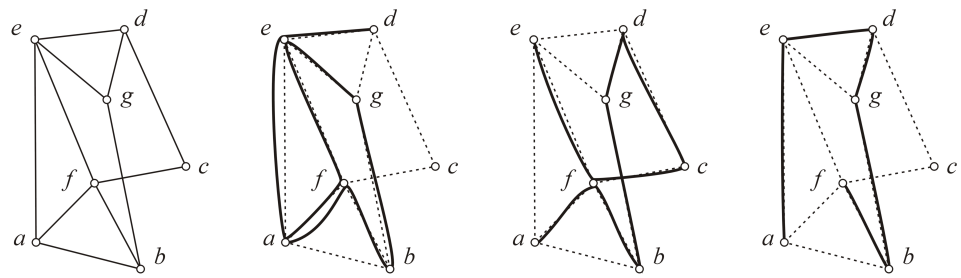


Bazı çizgelerin düğüm kümeleri boş olmayan öyle iki alt kümeye ayrılabilir ki, her bir parçaya düşen düğümler kendi aralarında komşu olmazlar. Bu özelliğe sahip çizgelere *iki-parça çizgeler* adı verilir. İki parçalı bir çizgenin düğüm kümesi n ve m düğüm içeren parçalara ayrılmış ve her bir parçadaki düğümler, diğer parçadaki düğümlerin hepsi ile komşu ise çizgeye iki-parça tam çizge denir ve $K_{n,m}$ ile gösterilir. Aşağıdaki şekilde iki-parça çizge örnekleri yer almaktadır. Ortadaki çizge $K_{4,2}$; en sağdaki de $K_{3,3}$ dür. Tanımlarda hemen elde edileceği üzere, $K_{n,m}$ nin düğüm sayısı $v = n + m$ ve kiriş sayısı da $e = nm$ dir.



KİRİŞ DİZİLERİ / BAĞLANTILI ÇİZGELER

Bir havayolu işletmesi 7 şehir arasında karşılıklı uçak seferleri düzenlemektedir. Aralarında sefer bulunan şehirler, aşağıdaki şekilde yer alan (sol baştaki) çizge yardımı ile gösterilmiştir.



Bir firmanın satış temsilcisi d şehrinden yola çıkıp sırası ile e, a, f, e, g, b, f, a şehirlerini ziyaret ederek gezisini tamamlamıştır. Bu gezi, şekildeki ikinci çizimle temsil edilmiştir. Bir çizgede bu biçimde tanımlı uç uca sıralı bir kirişler dizisine *gezi* adı verilir. Yukarıda tanımlı gezide a ve f şehirleri arasındaki kiriş iki kez kullanılmıştır. Çizgenin her kirişinin en fazla bir kez kullanıldığı bir geziye *yol* denir. Şekildeki üçüncü çizim e ve a düğümleri arasında bir yol örneğini göstermektedir. Çizgenin her düğümünü en fazla bir kez ziyaret eden (dördüncü çizimde olduğu gibi) bir yola da *Hamilton yolu* adı verilir.

Bir çizgenin herhangi iki düğümü verildiğinde bu düğümleri birleştiren bir yol bulunabiliyorsa çizgeye *bağlantılı çizge* denir.

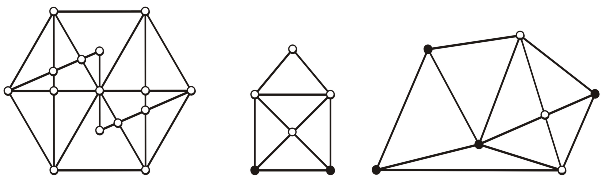
TEOREM. Düğüm sayısı v, kiriş sayısı e olan herhangi bir basit G çizgesi verilmiş olsun.
a) G bağlantılı ise $v - 1 \leq G \leq n(n-1)/2$ dir,
b) G bağlantısız ise $e \leq (n-1)(n-2)/2$ dir.

Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan bir yola *kapalı yol* veya *devre* denir. Bulmaca dergilerinde zaman zaman yer alan bir problem türü, verilen bir şeklin el kaldırmadan ve bir çizgiden iki kez geçilmeden çizilip çizilemeyeceğinin belirlenmesidir. Çizgeler cinsinden ifade edildiğinde, belirlenmesi istenen, çizgenin her kirişini tam bir kez kullanan bit devre bulunup bulunmadığıdır. Bir çizgede her kirişi tam bir kez kullanan bir devreye *Euler devresi* ve böyle bir devre çizilebilecek bir çizgeye de *Euler çizgesi* adı verilir.

TEOREM. Bağlantılı bir çizgenin Euler çizgesi olabilmesi için gerek ve yeter şart, her düğümündeki yerel derecenin çift olmasıdır.

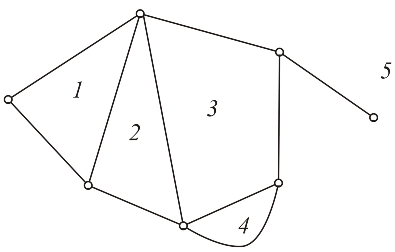
TEOREM. Bağlantılı bir çizgede yerel dereceler iki düğümde tek; diğer tüm düğümlerde çift ise, çizgenin tüm kirişlerini kullanan bir yol bulunabilir.

Örnek 3. Elimizi kaldırmadan, geçtiğimiz çizgi üzerinden ikinci kez geçmeden ve başladığımız noktaya gelmek koşulu ile aşağıdaki şekillerden sol baştakini çizebileceğimizi, tüm yerel derecelerin çift olmasından anlayabiliyoruz. Ortadaki şekil, derecesi tek olan düğümlerden birisinden başlayıp diğerinde bitirmek üzere çizilebilir. Sağ baştaki şekil ise, dört düğümün yerel derecesi tek olduğu için çizilmesi mümkün değildir.



DÜZLEMSEL ÇİZGELER / EULER FORMÜLÜ

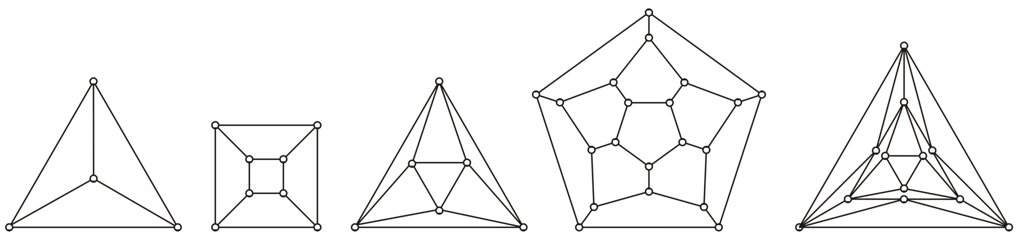
Herhangi iki kirişi kesişmeden çizilen bir çizgeye *düzlemsel çizge* adı verilir. Bir düzlemsel çizge, kirişleri kesişmeyecek şekilde çizlidiğinde kirişlerin çevrelediği düzlem parçalarına *çizgenin yüzleri* denir. Çizgenin dış bölgesi de bir yüz sayılmak üzere yüzlerin sayısı f ile gösterilir. k tane kenarla çevrelenmiş bir yüze $k-$*gensel yüz* adı verilir. Aşağıdaki çizgede $v = 7$, $e = 10$ ve $f = 5$ dir. 1 ve 2 numaralı yüzler üçgensel; 3 numaralı yüz dörtgensel; 4 numaralı yüz 2-gensel ve 5 numaralı yüz de 6-genseldir.



TEOREM. (EULER FORMÜLÜ) Herhangi bir bağlantılı düzlemsel çizge için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$v + f = e + 2.$$

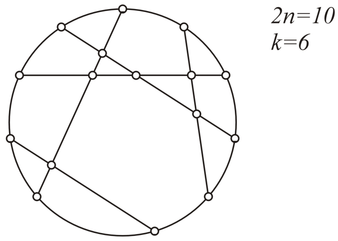
Euler formülü düzlem üzerinde olduğu gibi küre yüzeyi üzerinde de geçerlidir. Çok yüzlüler de küre üzerine çizilen çizgeler olarak düşünülebileceğinden, Euler formülünü sağlarlar. Örneğin bir küp, 6 yüz; 8 düğüm ve 12 kirişten oluşmuştur ve bunların sayısı Euler formülünü sağlar. Benzer şekilde, bir dörtyüzlü 6 kiriş, 4 düğüm ve 4 yüzden oluşur ve bunlar için de Euler formülünün sağlandığı görülür. Aşağıdaki şekilde verilen çizgeler düzgün dörtyüzlülere karşı gelen düzlemsel çizgelerdir ve hepsi için kiriş, düğüm ve yüz sayılarının Euler formülünü sağladığı gözlenebilir.



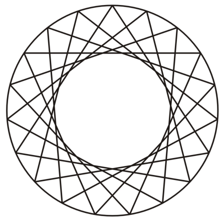
Dört yüzlü (Tetrahedron)	Altı yüzlü (Küp) Hexahedron	Sekiz yüzlü (Octahedron)	Oniki yüzlü (Dodecahedron)	Yirmi yüzlü (İcosahedron)
v=4	v=8	v=6	v=20	v=12
f=4	f=6	f=8	f=12	f=20
e=6	e=12	e=12	e=30	e=30

Örnek 4. Bir çember üzerinde $2n$ tane nokta alıyor ve bu noktaları uç noktaları kabul eden n tane kiriş çiziliyor. Bu kirişlerin çemberin iç bölgesindeki kesişme noktalarının sayısı k olup, herhangi üç kirişin aynı noktadan geçmediği bilinmektedir. Bu kirişlerin çemberi kaç bölgeye ayırdığını bulalım.

Elimizdeki şekli $v = 2n+k$ düğüm noktasına sahip bir çizge olarak düşünebiliriz. Çizgenin yerel dereceleri, $2n$ tane düğümde 3, k tanesinde ise 4 olup yerel derecelerin toplamı $6n+4k$ olduğundan $e = 3n+2k$ elde ederiz. Euler formülünü kullanarak çizgenin yüzlerinin sayısını $f = e-v+2 = 3n+2k-2n-k+2 = n+k+2$ olarak buluruz. Elde edilen sayının, çizgenin dışında kalan yüzü de içerdiği göz önünde bulundurularak, çemberin iç bölgesinin $n+k+1$ bölgeye ayrılmış olduğu bulunur.

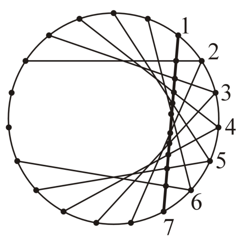


Örnek 5. Aşağıdaki süsleme şekli, bir çember üzerindeki 19 noktanın her birisinin saat yönünde ilerleyerek kendisinden sonra gelen 6. noktayla birleştirilmesiyle elde edilmiştir. Çember içinde oluşan bölgelerin sayısını belirleyiniz.



Çember içine çizilmiş olan 19 doğru parçasının herhangi üç tanesi aynı noktadan geçmemektedir. Çember üzerindeki noktaları, herhangi birisinden başlayıp saat yönünde ilerleyerek 1, 2, 3, ... şeklinde numaralandıralım.

2,3,4,5 ve 6 numaralı noktaları diğer noktalara birleştiren 10 doğru parçasından her birisi 1 ve 7 numaralı noktaları birleştiren doğru parçasını kesmektedir. Böylece, her doğru parçası üzerinde 10 tane kesişim noktası bulunduğu anlaşılır. Buradan, çemberin iç bölgesindeki kesişim noktalarının sayısı $19 \times 10/2 = 95$ olarak elde edilir. Şimdi, verilen şekli $95 + 19 = 114$ düğüm noktasına sahip 4-düzgün bir çizge olarak düşünebiliriz. Kiriş sayısı $4 \times 114/2 = 228$ olduğundan, Euler formülünden $f = e - v + 2 = 116$ olarak elde edilir. Böylece, çemberin iç bölgesindeki bölgelerin sayısı 115 olarak bulunmuş olur.



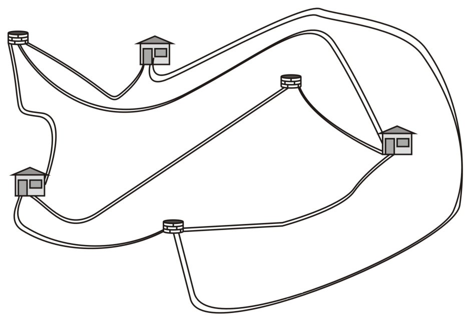
TEOREM. Herhangi bir basit düzlemsel G çizgesinde $e \leq 3v - 6$ dır.

TEOREM. Herhangi bir basit düzlemsel G çizgesinde üçgensel yüz bulunmuyorsa $e \leq$

$2v - 4$ dür.

Örnek 6. K_5 çizgesinde $v = 5$ ve $e = 10$ dur. $e > 9$ olduğundan, K_5 in düzlemsel olmadığı anlaşılır.

Örnek 7. Birbirlerine komşu evlerde oturan Emirali, Defne ve Salih'in, su ihtiyaçlarını karşılayabilecekleri üç kuyu bulunmaktadır. Kuyulardaki su miktarı her zaman yeterli olmayabildiği için üç komşunun tüm kuyulara ulaşabilmeleri gerekmektedir. Aralarında anlaşmazlık bulunan bu üç komşudan her birisi, kendi evinden herhangi bir kuyuya giden yolu diğerlerinin kullanmasına izin vermemektedir. Herhangi iki yol kesişmemek şartı ile her evden her kuyuya bir yol yapılmasının mümkün olup olmadığını araştıralım. Aşağıdaki şekil, bir tek bağlantı eksiği ile önerilen bir çözümü göstermektedir.



Evleri ve kuyuları birer düğümle temsil ettiğimizde problem, $K_{3,3}$ çizgesinin düzlemsel olup olmadığının incelenmesine indirgenmiş olur. $K_{3,3}$ çizgesinde herhangi iki kuyu veya herhangi iki ev bir kirişle bağlanmadığı için üçgensel yüz bulunamaz. Öte yandan, düğüm sayısı $v = 6$ ve kiriş sayısı $e = 9$ olup, üçgensel yüz içermeyen basit düzlemsel bir grafta sağlanması gereken $e \leq 2v - 4$ eşitsizliğinin sağlanmadığı görülür. Sonuç olarak, $K_{3,3}$ düzlemsel değildir ve problemde istenen şartı sağlayan bir çözüm bulunamayacağı anlaşılır.

ÖRNEK PROBLEMLER

1) Bir öğretmen 20 problem içeren bir listeden, 10 öğrenciden her birisi için seçim yaparak ödev verecektir. Öğretmen, seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?

Her öğrenciye problemler kümesinin bir alt kümesi düşecektir. Toplam olarak 2^{20} alt küme ve 10 öğrenci bulunduğuna göre, dağıtım $(2^{20})^{10} = 2^{200}$ farklı şekilde gerçekleşebilir.

2) Bir öğretmen 20 problem içeren bir listeden, 10 öğrenciden her birisine 2 soruyu ödev verecektir. Öğretmen, seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?

Oluşturulabilecek problem çiftlerinin sayısı $\binom{20}{2}$ olduğundan, toplam dağıtım yollarının sayısı $\binom{20}{2}^{10}$ olur.

3) Bir öğretmen 20 problem içeren bir listeden, 10 öğrenciden her birisi için seçim yaparak ödev verecektir. Öğretmen, her öğrenci için en az bir problem seçmek koşulu ile seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?

Problemler kümesinin boş olmayan alt kümelerinin sayısı $2^{20} - 1$ ve öğrenci sayısı da 10 olduğundan, dağıtımın gerçekleştirilebileceği yolların sayısı $(2^{20} - 1)^{10}$ olur.

4) 'BELLEK' sözcüğündeki harfler, aynı harf yanyana gelmemek üzere, kaç farklı şekilde sıralanabilir?

Verilen koşul gözardı edildiğinde $\frac{6!}{2!2!} = 180 = N_0$ farklı sıralama yapabiliriz. A_1 kümesi, iki E harfinin; A_2 de iki L harfinin yan yana geldiği sıralanışların kümeleri olmak üzere $n(A_1) = n(A_2) = \frac{5!}{2} = 60$ ve $N_1 = 120$ elde edilir. $N_2 = A_1 \cap A_2 = 4! = 24$ olduğundan, aradığımız sayı $180 - 120 + 24 = 84$ olur.

5) Alfabenin 29 harfi, içinde 'SAYI', 'DOĞRU', 'ŞEKİL' kelimelerinden hiç birisi okunmamak üzere kaç farklı şekilde dizilebilir?

Problemi çözmek için içerme dışarma prensibini kullanacağız. Gerekli hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

Şartları göz önünde bulundurmadan 29 harfi $N_0 = 29!$ farklı şekilde dizebiliriz.

'SAYI' kelimesinin okunduğu dizilişlerin sayısı 26!

'DOĞRU' kelimesinin okunduğu dizilişlerin sayısı 25!

'ŞEKİL' kelimesinin okunduğu dizilişlerin sayısı 25!

$(N_1 = 26! + 25! + 25! = 28 \cdot 25!)$

'SAYI' ve 'DOĞRU' kelimelerinin okunduğu dizilişlerin sayısı 22!

'SAYI' ve 'ŞEKİL' kelimelerinin okunduğu dizilişlerin sayısı 22!

'ŞEKİL' ve 'DOĞRU' kelimelerinin okunduğu dizilişlerin sayısı 21!
($N_2 = 22! + 22! + 21! = 45 \cdot 21!$)
'SAYI', 'DOĞRU' ve 'ŞEKİL' kelimelerinin okunduğu dizilişlerin sayısı 18!
($N_3 = 18!$)
Sonuç olarak, verilen kelimelerden herhangi birisinin okunmadığı dizilişlerin sayısı

$$29! - 28 \cdot 25! + 45 \cdot 21! - 18!$$

olarak elde edilir.

6) Bütün rakamları değişik, ilk ve son hanelerinin farkı mutlak değerce 2 olan 10 basamaklı kaç tane pozitif tam sayı vardır?

Mutlak değerce farkı 2 olan tek basamaklı sayı çiftlerinin sayısı 8 dir: (0,2), (1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (5,7), (6,8) ve (7,9). Bunlardan herhangi birini seçip, sayılardan birisini ilk; diğerini son basamak olmak üzere yazma işlemini 16 farklı şekilde gerçekleştirebiliriz. Geriye kalan 8 sayı, 8! farklı biçimden biri seçilerek sıralanır. Böylece $16 \cdot 8!$ farklı diziliş elde etmiş oluruz.
Göz önüne aldığımız dizilişlerin arasında ilk basamağı 0 olduğu için 9 basamaklı bir sayı olanların sayısı 8! dir. Bunları da hesaba kattığımızda (yani hesaptan çıkarttığımızda), aranan sayı $15 \cdot 8!$ olarak elde edilir.

7) 1 den n ye kadar olan tam sayıları, ilk sırada yer alan sayı dışındaki sayıların her birisinin sıralamada kendisinden önce gelen sayılardan en az birisiyle olan farkı (mutlak değerce) 1 olacak şekilde kaç farklı biçimde sıralayabiliriz?

Problemi özel bir halde ele alıp 1 den 9 a kadar olan sayıları belirtilen şekilde dizmeye çalışalım. İlk yazdığımız sayı 4 olsun. Bundan sonra, 3 yazmadan 2 yazamayız, 2 yazmadan 1 yazamayız. Dolayısı ile 3, 2 ve 1 geri kalan kısmıda ancak bu sıra ile gözükebilir. Aynı şekilde 5,6,7,8 ve 9 sayıları da bu sıralamayı koruyarak yerleştirilebilirler. Örneğin 4 5 6 7 3 8 2 1 9 gibi. İlk önce 4 yazdıktan sonra, bu tür bir sıralama elde etmek için 8 mümkün yer arasından 3, 2 ve 1 sayılarını yazacağımız 3 yer seçmemiz yeterlidir. Bu işlemi $\binom{8}{3}$ farklı şekilde gerçekleştirebiliriz. Bu, ilk yazılan sayının 4 olması durumundaki dizilişlerin sayısıdır. İlk yazılan sayı k olduğunda, geriye kalanlar için mümkün diziliş yollarının sayısı da benzer şekilde, $\binom{8}{k-1}$ olarak elde edilir. O halde tüm dizilişlerin sayısı da $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{8}{8} = 2^8$ olur.
Özel durumdaki çözüm kolaylıkla genelleştirilerek problemin cevabı 2^{n-1} olarak elde edilir.

8) Çok sayıda mavi, beyaz ve sarı top arasından, maviler çift sayıda olmak üzere n topu kaç farklı şekilde seçebiliriz?

Mavi toplardan $2k$ tane seçtiğimizde, geri kalan $n-2k$ topu beyaz ve sarı toplar arasından $x_b + x_s = n - 2k$ denkleminin negatif olmayan tam sayı çözümlerinin sayısınca yani, $n-2k+1$ farklı şekilde seçebiliriz. Bu durumda aradığımız sayı $k = 0, 1, \ldots, [n/2]$ değerleri için elde edilen çözüm sayılarının toplamına eşittir. Toplamı yazalım:

$$(n+1) + (n-1) + (n-3) + \cdots + (n - 2[n/2]).$$

Toplamın değeri n bir çift sayı ise $\dfrac{(n+2)^2}{4}$; n bir tek sayı olduğunda ise $\dfrac{(n+1)(n+3)}{4}$ olur.

[Not. n bir tek tam sayı olduğunda $\frac{(n+1)(n+3)}{4} = \frac{(n+2)^2}{4} - \frac{1}{4} = \left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]$ eşitliğini göz önünde bulundurarak, çözüm sayısının her n tam sayısı için $\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]$ olduğunu söyleyebiliriz.]

9) Aşağıdaki şekilde yatay ve dikey adımlar atarak 'MATEMATİK' kelimesi kaç farklı şekilde elde edilebilir?

```
                M
              M A M
            M A T A M
          M A T E T A M
        M A T E M E T A M
      M A T E M A M E T A M
    M A T E M A T A M E T A M
  M A T E M A T İ T A M E T A M
M A T E M A T İ K İ T A M E T A M
```

'MATEMATİK' yerine 'KİTAMETAM' kelimesinin kaç farklı şekilde elde edilebileceğini hesaplamak yeterlidir. Bunun için, en alt satırın tam ortasındaki 'K' harfinden başlamalıyız.

Son harfe ulaşana kadar bir harften diğerine geçerken yukarı, sağa veya sola adımlar atabiliriz. Ancak, bir kez sağa adım atıldıysa yol boyunca bir daha sola adım atamayız ve benzer şekilde bir kez sola adım atılınca yol boyunca bir daha sağa adım atılamaz. O halde her harf için ya hep *sağ/yukarı* ya da hep *sol/yukarı* tercihleri ile işlemi tamamlayabiliriz. *sağ/yukarı* tercihleri ile hareket ettiğimizde, her harfe geldiğimizde 2 seçenek olduğundan toplam 2^8 farklı yol izleyebiliriz. *sol/yukarı* tercihleri için aynı şekilde, 2^8 farklı yol izleyabiliriz.

Daima *yukarı* tercihi ile tanımlı yol iki durumun tek ortak yoludur. O halde tüm yolların sayısı $2 \cdot 2^8 - 1 = 511$ olur.

10) $2n$ beyaz, $2n$ kırmızı ve $2n$ mavi top, her biri $3n$ top almak koşuluyla Ateş ile Güneş arasında kaç farklı şekilde paylaştırılabilir?

Ateş'e verilen beyaz, kırmızı ve mavi topların sayısını sırası ile x_1, x_2 ve x_3 ile gösterirsek, $3n$ topun Ateş'e verilebileceği farklı yolların sayısı $x_1 + x_2 + x_3 = 3n$ denkleminin $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2n$ koşulları altındaki tam sayı çözümlerinin sayısına eşittir. Bu denklemin

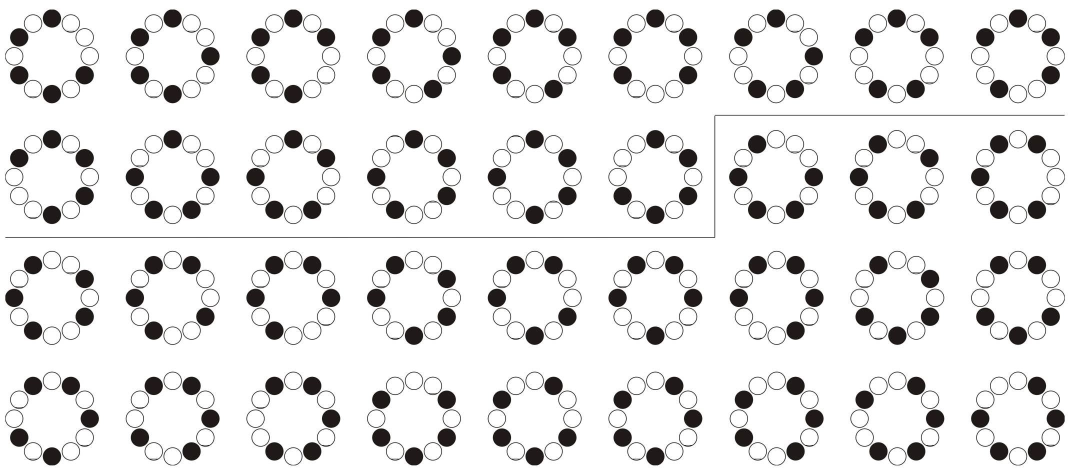
$0 \leq x_1, x_2, x_3$ koşulları ile tam sayı çözümlerinin sayısı $\binom{3n+2}{2}$ dir.

Şimdi $x_1 \geq 2n+1$ olan çözümlerin sayısını bulalım. Bunun için $x_1 = x_1' + 2n + 1$ dönüşümü yapılırsa $0 \leq x_1', x_2, x_3$ koşulları altındaki $x_1' + x_2 + x_3 = n - 1$ denklemine ulaşırız ki bunun da çözüm sayısı $\binom{n+1}{2}$ dir. x_2 ve x_3 için de aynı sonuçlar geçerli olduğundan, Ateş'e $3n$ topun $\binom{3n+2}{2} - 3\binom{n+1}{2} = 3n^2 + 3n + 1$ farklı yoldan verilebileceğini buluruz. Topların Ateş'e verilmesi, Güneş için de yapılan seçimi belirlediği için aranan sayı $3n^2 + 3n + 1$ dir.

11) Yuvarlak bir masanın etrafında oturan 12 şövalyeden 5 tanesi, yanyana oturanlardan ikisi birlikte seçilmemek koşuluyla, kaç farklı şekilde seçilebilir?

Şövalyeleri, herhangi birisinden başlayarak 1,2,3,...,12 diye numaralayalım. Yapılacak seçim 12 numaralı şövalyeyi içeriyorsa, geri kalan 4 şövalyenin seçilmesi, herhangi ikisi ardışık olmayacak şekilde 2,...,10 tam sayılarından 4 tanesinin seçilmesine denktir ve bu seçim de $\binom{6}{4} = 15$ farklı şekilde yapılabilir.

12 numaralı şövalyenin seçilmemesi durumunda 1,2,3,...,11 tam sayıları arasından herhangi ikisi ardışık olmayan 5 tanesini seçmemiz gerekir ve bunu da $\binom{7}{5} = 21$ farklı şekilde gerçekleştirebiliriz. O halde belirtilen türde yapılabilecek tüm seçimlerin sayısı 36 dır.



12) Haneleri negatif olmayan tam sayılardan oluşan ve her satırındaki ve her sütunundaki sayıların toplamı daima verilen bir r tam sayısına eşit olan 3×3 karelerin sayısını bulunuz.

Karenin aşağıdaki şekilde oluşturulduğunu düşünelim:

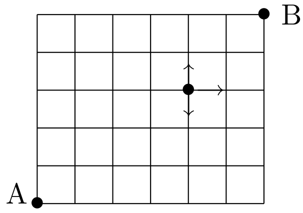
a	b	c
d	e	f
g	h	i

İlk iki satırdaki elemanlar uygun şekilde yazıldığında, üçüncü satır tek türlü belli olacağından, dikkatimizi ilk iki satırın oluşturulmasına yoğunlaştırabiliriz.

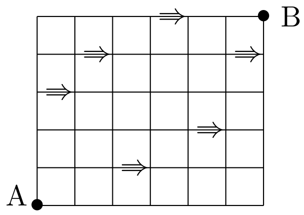
İlk satır $a+b+c=r$ denklemini sağlamak üzere, $\binom{r+2}{2}$ farklı şekilde oluşturulabilir. İkinci satır için mümkün olan yolların sayısı da aynı olduğundan, karenin ilk iki satırı $\binom{r+2}{2}^2$ farklı yoldan oluşturulabilir. Ancak, bu çözümler arasında $a+d>r$ eşitsizliğini sağlayanlar da yer alır ki, bu durumda üçüncü satıra negatif sayı yazmak zorunda kalırız ve bu da problemin şartıyla çelişir. O halde yukarıda bulduğumuz çözüm sayısından, $a+d>r$, $b+e>r$ ve $c+f>r$ eşitsizliklerinden en az birisinin sağlandığı çözümlerin sayısını çıkarmamız gerekir. Öte yandan $a+b+c+d+e+f=2r$ olduğundan, $a+d>r$ koşulu, $b+c+e+f<r$ koşulu ile denktir ve bu eşitsizliğin çözüm sayısı $\binom{r+3}{4}$ dür. $b+e>r$ ve $c+f>r$ eşitsizlikleri de aynı sayıda çözüm tarafından sağlanır. Bu üç eşitsizlikten herhangi iki tanesi aynı anda geçerli olmadığından, şartları sağlamayan çözümlerin sayısı $3\binom{r+3}{4}$ olur. Sonuç olarak, istenen şekildeki karelerin sayısı şöyledir:

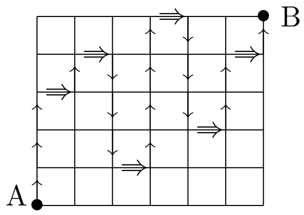
$$\binom{r+2}{2}^2-3\binom{r+3}{4}.$$

13) Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi bir 5×6 ızgaranın sol alt köşesinden (A) harekete başlayıp her noktada ya sağa ya yukarı ya da aşağıya doğru yönelerek ve her noktadan en fazla bir kez geçerek, sağ üst köşeye (B) kaç farklı şekilde ulaşılabilir?



Tanımlanan şekilde bir yolu tamamlayabilmek için sağa doğru tam olarak 6 tane adım atılması gerekir. Her sütun için, sağa atılacak bu adımın yerinin belirlenmesi, yolu tamamı ile belirler. Sütun sayısı 6 ve her sütun için 6 seçimimiz olduğundan, seçilebilecek yolların sayısı 6^6 olur.





14) Bir komitenin 15 üyesi, üzerine istenilen sayıda kilit takılabilen bir kasaya evrak yerleştirdikten sonra bütün kilitleri kapatırlar. Üyelerden herhangi 8 tanesi bir araya geldiğinde kasayı açabilmekte ancak herhangi 7 tanesi açamamaktadır. Kasada kaç kilit takılı olduğunu ve her üyede kaç anahtar bulunduğunu hesaplayınız. (Üyelerde eşit sayıda anahtar bulunduğu varsayılmaktadır.)

Komite üyelerinden herhangi 7 tanesinin oluşturduğu bir grubu ele alalım. Bu grup toplandığında kasayı açamadığında göre, kilitlerden bir tanesinin anahtarı bu gruptaki 7 kişide de bulunmamaktadır. Öte yandan, bu grup dışındaki her üyede bu kilidin anahtarı olmak zorundadır yani, her 7 kişilik grubun açamadığı kilit başka herhangi bir 7 kişilik grubun açamadığı kilitten farklıdır. O halde kapıdaki kilit sayısı, seçilebilecek tüm 7 kişilik grupların sayısına eşit olmalıdır. Bir başka ifadeyle, kilitlerin sayısı $\binom{15}{7} = 6435$ dir.
Her kilidin anahtarının 8 kopyası olduğundan, toplam anahtar sayısı $8\binom{15}{7} = 51480$ ve her üyeye düşen anahtar sayısı da $\frac{8}{15}\binom{15}{7} = \binom{14}{7} = 3432$ dir.

15) 12 öğrenci aynı gün saat 9:00-10:00 arasında iki ayrı dersin sınavına girecektir. Bir öğrencinin bir dersten sınanması 5 dakika sürdüğüne göre, bir çakışma olmadan sınav programı kaç farklı şekilde hazırlanabilir?

Öğrencilerin isimleri ilk dersin sınavına girecekleri sırayı göstermek üzere, mümkün 12! şekilden biriyle listelenebilir. İkinci sınav için hazırlanacak liste, ilk ders için hazırlanan listeye göre bir şaşkın diziliş olacağından $D_{12} = 12!\sum_{k=0}^{12}(-1)^k\frac{1}{k!}$ farklı şekilde düzenlenebilir.
Sonuç olarak, sınav programı

$$12! \cdot D_{12} = (12!)^2 \sum_{k=0}^{12}(-1)^k \frac{1}{k!}$$

farklı şekilde hazırlanabilir.

16) Bir klübün 10 üyesi içeri girerken vestiyere şapkalarını bırakırlar. Üyeler klüpten çıkarken bir şaşkınlığa düşen vestiyer görevlisi şapkaları eline geldiği gibi iade eder. Her üyenin kendisine ait olmayan bir şapka almış olması kaç farklı yoldan gerçekleşebilir?

Her üyenin farklı şapka aldığı bir durum, 1,2,...,10 sayılarının bir şaşkın dizilişini tanımlayacağından, aranan sayı $D_{10} = 10!\sum_{k=0}^{10}(-1)^k\frac{1}{k!}$ olur.

17) n pozitif bir tek tam sayı ve $b_1b_2\ldots b_n$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nin herhangi bir permütasyonu olmak üzere, $(b_1-1)(b_2-2)\cdots(b_n-n)$ çarpımının bir çift tam sayı olduğunu gösteriniz.

Çarpanlardan en az bir tanesinin çift olması, çarpımın çift olması için gerekli ve yeterlidir. Öte yandan, hem $\{1, 2, \ldots, n\}$ hem de $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ kümesinde $\frac{n+1}{2}$ tane tek; $\frac{n-1}{2}$ tane çift sayı yer alır. $\{(1, b_1),\ (3, b_3),\ (5, b_5), \ldots, (n, b_n)\}$ kümesinde yer alan $\frac{n+1}{2}$ çiftten en az birisinin ikinci bileşeni, diyelim ki b_k, bir tek sayı olmak zorundadır. Bu durumda $b_k - k$ bir çift tam sayı olur ve sonuç olarak, verilen çarpım da bir çift tam sayı olmak zorundadır.

18) 45 öğrenci 8 seçmeli derse kayıt yaptırmıştır. Her öğrenci yalnız bir derse kayıtlı ve her dersin de kontenjanı 10 kişiyse en az üç derse 5 veya daha fazla öğrencinin kayıtlı olduğunu gösteriniz.

İki derse kayıtlı olan 10'ar öğrenci ve diğer 6 derse 4 er öğrenci kayıt yaptırdığında 44 öğrencinin kaydı tamamlanmış olur. 45. öğrenci ilk iki dersten birisine kayıt olamaz ve geri kalan derslerden birisine kayıt yaptırdığında iddia ispatlanmış olur.

19) 4 haftalık bir turnuvada her gün en az bir set tenis oynayan bir oyuncunun turnuva süresince oynadığı setlerin sayısı 40 dan fazla değildir. Bu oyuncunun toplam olarak tam 15 set tenis oynadığı en az bir ardışık günler süreci bulunduğunu gösteriniz.

Oyuncunun i. gün ($i = 1, 2, \ldots, 28$) oynadığı set sayısını a_i ile; ilk i günde oynadığı toplam set sayısını da $b_i = a_1 + a_2 \cdots + a_i$ ile gösterelim. $1 \leq b_1$, $b_{28} \leq 40$ ve $b_{28} + 15 \leq 55$ olduğundan, $b_1, b_2, \ldots, b_{28}$ ve $b_1 + 15, b_2 + 15, \ldots, b_{28} + 15$ dizilerinde bulunan terimler, değerlerini $\{1, 2, \ldots, 55\}$ kümesinden alır . O halde bu kümeleri oluşturan 56 terim arasında en az iki tanesi eşittir.
Oyuncu her gün en az bir set tenis oynadığı için $\{b_n\}$ dizisi artan bir dizi olup tüm terimleri farklıdır. Aynı şekilde, $\{b_n + 15\}$ dizisinin de tüm terimleri farklıdır. Böylece, aynı olan terimlerin farklı dizilerde olduğu anlaşılır. Yani, $b_i = b_j + 15$ olacak şekilde ($1 \leq j < i \leq 28$) olacak şekilde iki terim bulabiliriz. Bu durumda da $b_i - b_j = 15$ olur. $b_i - b_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_i$ olduğundan, göstermek istediğimiz sonuca ulaşmış oluruz.

20) Bir Kartezyen koordinat sistemiyle verilen düzlemde, koordinatları tam sayılar olan beş nokta seçiliyor. Bu noktaları ikişer ikişer birleştiren doğru parçalarından en az bir tanesinin orta noktasının koordinatların da tam sayılar olmasının kaçınılmaz olduğunu gösteriniz.

Seçilen noktaların her birisinin x koordinatı ya tek ya da çift tam sayıdır. Beş nokta verilmiş olduğuna göre, hepsinin x koordinatları aynı türde (tek sayı veya çift sayı) olacak şekilde üç nokta bulunur. Bu üç noktanın herhangi ikisinin x koordinatları toplamı bir çift sayı olacağından, orta noktalarının x koordinatı da bir tam sayı olur. Bu noktaların y koordinatlarından en az ikisi aynı tür (ikisi de tek veya ikisi de çift sayı) olmak zorundadır. Bu iki noktanın hem x hem de y koordinatları toplamları çift sayılar olduğundan, orta noktasının koordinatları tam sayılardır.

21) Düzlemde 2010 tane nokta verilmiştir. Bu noktalardan hangi üçü alınırsa alınsın, en az ikisinin arasındaki uzaklık 1 den küçük oluyorsa, en az 1000 noktayı içine sığdırabileceğimiz 1 yarıçaplı bir çember çizilebileceğini gösteriniz.

Verilen noktalardan herhangi birisini seçip M diye isimlendirelim. 2010 noktanın tümü de M merkezli ve 1 yarıçaplı C_M çemberinin içindeyse başka bir şey ispatlamaya gerek

kalmaz. Bu çemberin dışında en az bir nokta olduğunu kabul edelim ve böyle bir N noktasını seçip, N merkezli ve 1 yarıçaplı C_N çemberini çizelim.
M ve N dışında herhangi bir P noktası aldığımızda bu üç noktadan en az ikisinin arasındaki uzaklık 1 den küçük olacaktır. M ve N arasındaki uzaklık 1 den büyük olduğuna göre, P ya C_M ya da C_N çemberinin (ya da her ikisinin) içinde olmalıdır. Toplam 2010 nokta ve bu noktaların hepsini toplayan 2 çemberimiz olduğuna göre çemberlerden en az birisinin içine 1005 veya daha fazla nokta düşmek zorundadır.

22) Beden eğitimi öğretmeni, hepsi farklı boy uzunluğuna sahip 20 öğrenciyi ikişerli sıraya sokmaya çalışmaktadır. Sıralama sonunda oluşan düzende, her öğrencinin önündekinden daha uzun ve yan yana duran iki öğrenciden sağda olanı diğerinden daha uzun olmak şartıyla öğretmen sıralamayı kaç farklı biçimde yapabilir.

İşlemi şöyle gerçekleştirmek mümkündür. Öğrenciler boy sırasına göre tek sıra halinde dizilirler ve ilk öğrenciden başlayarak sırası gelen her öğrenciye (SOL) veya (SAĞ) diye komut verilir. Öğrenci de, ikişerli sıranın kendisine söylenen sütununda boş olan ilk konuma yerleşir. Bu işlem sonucu, her sütunun kendi içinde boy sırası takip etmesi garanti edilmiş olur. Öğretmenin verdiği komutlar 10 kez (SAĞ) ve 10 kez de (SOL) komutu olmak üzere toplam 20 komutluk bir dizi oluşturur. Sırası geldiğinde sağ sütuna yerleşen bir öğrencinin solundaki konum boşsa, buraya kendisinden daha uzun bir öğrenci geleceğinden, problemde koşulan şart bozulmuş olur. O halde verilen komutlar dizisinin herhangi bir terimine kadar olan (SAĞ) komutlarının sayısı (SOL) komutlarının sayısından fazla olmamalıdır. Bu gözlem, komutlar dizisinin bir Dyck dizisi olması gerektiğini söyler. Öte yandan (SAĞ) ve (SOL) komutlarının sayısı aynı olduğundan, mümkün sıralanış biçimlerinin sayısı C_{10} Catalan sayısıdır. Sonuç olarak öğretmen, sıralamayı

$$\frac{1}{11}\binom{20}{10}$$

farklı yoldan gerçekleştirebilir.

23) X bir sonlu küme ve $|X| = n$ olmak üzere, X'in bütün alt kümelerindeki elemanların sayılarının toplamı nedir?

X kümesinin her bir elemanı tam olarak 2^{n-1} alt kümede yer aldığından, tüm alt kümelerdeki eleman sayılarının toplamı $n2^{n-1}$ dir.
Bu toplamı şöyle de hesaplayabilirdik. X in k elemanlı alt kümelerinin sayısı $\binom{n}{k}$ olup bu kümelerdeki eleman sayılarının toplamı $k\binom{n}{k}$ dır. O halde aradığımız sayı

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

dir. Her k tam sayısı için $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ olduğundan, bu toplamı

$$n\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1} + \cdots + n\binom{n-1}{n-1}$$

şeklinde yazarsak yine $n2^{n-1}$ sonucuna ulaşırız.

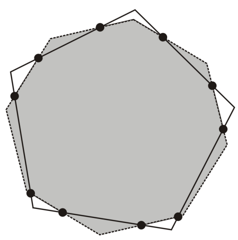
24) X bir sonlu küme ve $|X| = n$ olmak üzere, $\sum\limits_{A,B\subset X} |A \cap B|$ yi bulunuz.

X kümesinin iki alt kümesi (A, B), $2^n \times 2^n = 2^{4n}$ farklı şekilde seçilebilir. Öte yandan X kümesinin her bir elemanı 2^{n-1} alt kümede yer aldığı için alt küme çiftleri için yapılan seçimlerin $2^{n-1} \times 2^{n-1} = 4^{n-1}$ tanesinde kesişimin bir elemanı olarak yer alır. Sonuç olarak, mümkün olan tüm arakesitlerin eleman sayılarının toplamı $n4^{n-1}$ dir.

25) X bir sonlu küme ve $|X| = n$ olmak üzere, her $x \in X$ için $f(f(x)) = f(x)$ koşulunu sağlayan kaç tane $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu vardır?

Önce, problemde verilen koşulu sağlayan bir fonksiyonun en az bir tane sabit noktası olduğunu gösterelim. $b \in X$ olmak üzere $f(b) = a$ ise $a = f(b) = f(f(b)) = f(a)$ elde edilir ki bu da en az bir $a \in X$ için $f(a) = a$ olduğunu gösterir. Sabit noktaların kümesini S ile gösterelim. Her $x \in X$ için $f(f(x))$ olabilmesi için sabit noktaların dışındaki noktaların görüntüsü sabit kümeye düşmelidir. Yani X kümesinin her x elemanı için ya $f(x) = x$ olmalıdır ya da $f(x) = y$ ve $f(y) = y$ olmalıdır. k elemanlı bir sabit noktalar kümesi $\binom{n}{k}$ farklı şekilde belirlenebilir. Diğer $(n-k)$ elemanın her birisinin görüntüsü sabit bir nokta olacak şekilde k^{n-k} farklı seçim yapabiliriz. Bu işlem $k = 1, 2, \ldots, n$ için tekrarlanacağından, söz konusu fonksiyonların sayısı $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{n-k}\binom{n}{k}$ olarak elde edilir.

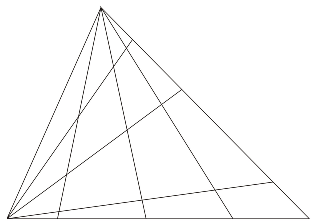
26) Ortak kenarları bulunmayan n_1 ve n_2 kenarlı iki dışbükey çokgen en fazla kaç noktada kesişir?

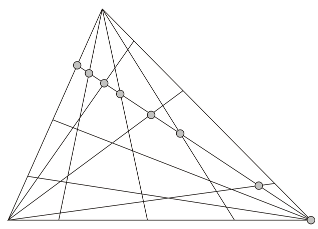


Genelliği bozmadan $n_1 \leq n_2$ kabul edelim. n_1 in her kenarı n_2 yi en fazla iki noktada keseceğinden, n_1 kenarlı çokgen üzerinde en fazla $2n_1$ kesişim noktası oluşabilir. O halde kesişim noktalarının sayısı en fazla $2n_1$ olabilir.

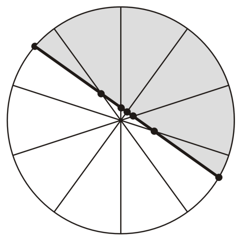
27) Bir üçgenin her kenarı üzerinde, köşelerden farklı n nokta alınmakta ve bu noktaların her birisinden karşı köşeye bir doğru çizilmektedir. Böylece elde edilen $3n$ doğru parçasından herhangi üçü üçgenin içinde aynı noktadan geçmediğine göre, bu doğrular üçgenin içini kaç bölgeye ayırırlar?

Önce iki köşeden çıkan doğruları çizersek üçgen $(n+1)^2$ bölgeye ayrılır. Şimdi, diğer köşeden çizdiğimiz her doğru daha önce çizilmiş bulunan $2n$ doğrudan her birisini keseceğinden, üzerindeki bu $2n$ kesişim noktası ile $2n+1$ parçaya ayrılmış olur. Parçalardan her birisi daha önce var olan bir bölgeyi iki kısıma ayırdığından, son çizdiğimiz n doğrudan her birisi $2n+1$ yeni bölge tanımlar. Sonuç olarak, tüm bölgelerin sayısı $(n+1)^2+n(2n+1)$ yani $3n^2+3n+1$ olarak elde edilir.





28) Dairesel bir bölge, içine çizilecek eşit aralıklı $2n$ tane yarıçap ve bir kiriş ile en fazla kaç bölgeye ayrılabilir?



Çizilen $2n$ yarıçap, daireyi $2n$ bölgeye ayırır. Eşit aralıklı $2n$ yarıçap, n tane çap anlamını taşır ve dolayısı ile bir kiriş bu yarıçaplardan en fazla n tanesini kesebilir. Bu durumda, n kesişim noktası kirişi $n+1$ parçaya ayırır ve bu parçalardan her birisi de yarıçaplar tarafından tanımlanmış olan bir bölgeyi iki parçaya ayırarak yeni bir bölge tanımlar. Sonuç olarak, elde edilebilecek bölge sayısı en fazla $2n+n+1=3n+1$ dir.

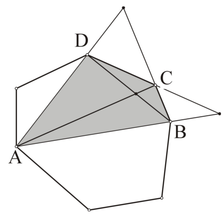
29) Dışbükey bir n-gen verilmiş olsun. Köşelerinin tümü $n-$genin köşeleri, kenarlarının tümü de $n-$genin köşegenleri olan kaç değişik k-gen çizilebilir?

Çokgenin köşelerini sıra takip ederek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ile isimlendirelim. Bir köşesi A_1 olan ve problemde tanımlanan şartı sağlayan bir $k-$gen seçmek, $A_3, A_4, \ldots, A_{n-1}$ köşeleri arasından herhangi ikisi ardışık olmayan $k-1$ tanesini seçmek demektir ve bu işlem $\binom{n-k-1}{k-1}$ farklı yoldan gerçekleştirilebilir. $A_2, \ldots, A_n$ köşelerinin herbirisi için aynı sayıda k-gen bulunacaktır. Bunların toplamını aldığımızda her $k-$gen tam k kere sayılmış olacağından, aradığımız sayı şöyledir:

$$\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}.$$

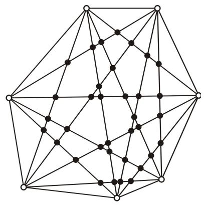
30) Dışbükey bir n-genin köşegenlerinden herhangi üçü n-genin içinde aynı noktadan geçmemektedir. Bu köşegenler n-genin içinde kaç farklı noktada kesişir?

Her kesişim noktası iki köşegenin kesiştiği nokta olur. Bu köşegenlerin uç noktaları A, B, C ve D olsun. AB ile CD nin; AC ile BD ve AD ile BC nin kesişimi olan üç noktadan bir tanesi çokgenin iç bölgesinde; diğer ikisi (eğer varsa) çokgenin dışındadır.



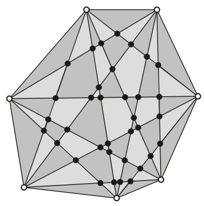
O halde çokgen içindeki her kesişim noktası çokgenin 4 köşesine; ve tersine olarak çokgenin köşelerinden herhangi dört tanesinin seçimi de çokgen içinde bir kesişim noktasına karşı gelir. Bu durumda kesişim noktalarının sayısı $\binom{n}{4}$ olarak bulunur.

Aşağıdaki şekilde bir 7-gen ve köşegenlerin kesişimi olan $\binom{7}{4} = 35$ nokta yer almaktadır.



31) Dışbükey bir n-genin köşegenlerinden herhangi üçü n-genin içinde aynı noktadan geçmemektedir. Bu köşegenler n-genin içini kaç bölgeye ayırırlar?

Tüm köşegenler çizildiğinde, $n-$genin köşeleri ile birlikte $n+\binom{n}{4}$ tane kesişim noktası oluşur. Elimizdeki şekil, düğüm sayısı $v = n + \binom{n}{4}$ olan düzlemsel bir çizge olarak algılandığında problem, yüzlerin sayısını (f) bulmaya dönüşür. $v + f = e + 2$ Euler formülünü uygulayabilmek için kirişlerin sayısını (e) bulmamız gerekir.



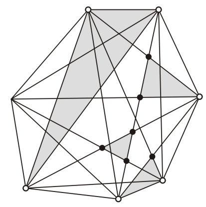
Çokgenin köşelerine karşı gelen n tane düğümün her birisinde yerel derece $n-1$ ve iç bölgedeki kesişim noktalarına karşı gelen $\binom{n}{4}$ tane kiriştsen her birisinde yerel derece 4 olduğundan yerel derecelerin toplamı $n(n-1)+4\binom{n}{4}$ olur. Buradan $e = \dfrac{n(n-1)}{2} + 2\dbinom{n}{4}$ olarak bulunur.

Euler formülünü kullanarak $f = \dfrac{n(n-1)}{2} + 2\dbinom{n}{4} + 2 - n - \dbinom{n}{4} = \dfrac{n(n-3)}{2} + \dbinom{n}{4} + 2$ elde edilir. Yüz sayısı, çokgenin dışındaki yüzü de saymakta olduğundan, çokgenin içindeki bölge sayısı $\dfrac{n(n-3)}{2} + \dbinom{n}{4} + 1$ olur ve gerekli sadeleştirme işlemlerinden sonra şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

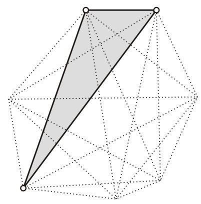
32) Dışbükey bir n-genin köşegenlerinden herhangi üçü n-genin içinde aynı noktadan geçmemektedir. Kenarları n-genin kenarları ya da köşegenleri üstünde olan kaç değişik üçgen vardır?

Kenarları $n-$genin kenarları ya da köşegenleri üstünde olan bir üçgenin her köşesi ya iki köşegenin kesişme noktası ya da $n-$genin bir köşesidir. $n-$genin köşelerini beyaz noktalar; köşegenlerin $n-$gen içindeki kesişme noktalarını da siyah noktalar olarak nitelendirelim.

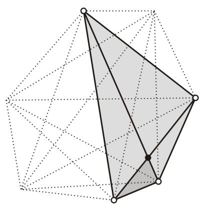


Sayısını aradığımız üçgenler dört ayrık sınıfa ayrılabilir: üç köşesi de beyaz olanlar (BBB), iki köşesi beyaz diğer köşesi siyah olanlar (BBS), iki köşesi siyah diğer köşesi beyaz olanlar (BSS), üç köşesi de siyah olanlar (SSS). Her sınıftaki üçgenlerin sayısını ayrı ayrı hesaplayacağız.

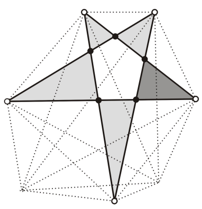
(BBB) üçgenlerinin her birisi, $n-$genin üç köşesinin seçimine karşı geldiğinden, bunların sayısı $\binom{n}{3}$ olur.



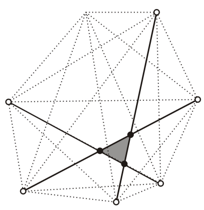
Bir (BBS) üçgeninin iki kenarı köşegenler üzerindedir. Bu iki köşegenin uç noktaları $n-$genin dört köşesini belirler. O halde her (BBS) üçgeni, $n-$genin dört köşesini tek türlü tanımlar. Öte yandan, dört tane köşenin herhangi bir seçilişi dört farklı (BBS) üçgenine karşı gelir. O halde (BBS) üçgenlerinin sayısı $4\binom{n}{4}$ olur.



Bir (BSS) üçgeninin üç kenarı da köşegenler üzerindedir ve bu üç köşegenin uç noktaları $n-$genin beş köşesini belirler. O halde her (BSS) üçgeni, $n-$genin beş köşesini tek türlü tanımlar. Öte yandan, beş tane köşenin herhangi bir seçilişi beş farklı (BSS) üçgenine karşı geldiğinden, (BSS) üçgenlerinin sayısı $5\binom{n}{5}$ olur.



Bir (SSS) üçgeninin üç kenarı da köşegenler üzerindedir ve bu üç köşegenin uç noktaları $n-$genin altı köşesini belirler. O halde her (SSS) üçgeni, $n-$genin altı köşesini tek türlü tanımlar. Altı tane köşenin herhangi bir seçilişi de bir tek (SSS) üçgenine karşı geldiğinden (SSS) üçgenlerinin sayısı $\binom{n}{6}$ olur.



Sonuç olarak, tüm üçgenlerin sayısı şöyledir:

$$\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 5\binom{n}{5} + \binom{n}{6}.$$

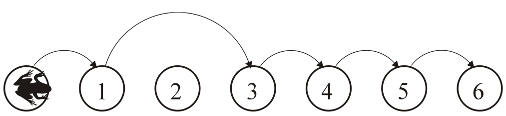
33) Maç süresi beraberlikle biten bir final karşılaşmasının sonunda şampiyonun belirlenmesi için iki takım 5 er penaltı kullanacaktır. Her bir penaltı atışının gole dönüşme olasılığının her iki takım için de 0,85 olduğunu kabul ederek, beraberliğin penaltı atışları sonunda bozulmamış olması olasılığını hesaplayınız.

Her bir takım için için, 5 atıştan tam olarak k tanesinin gole çevrilme olasılığını p_k ile gösterip hesapları bir tabloda toplayalım:

k	p_k
0	$\binom{5}{0}(0,85)^0(0,15)^5 \approx 0,000076$
1	$\binom{5}{1}(0,85)^1(0,15)^4 \approx 0,002152$
2	$\binom{5}{2}(0,85)^2(0,15)^3 \approx 0,024384$
3	$\binom{5}{3}(0,85)^3(0,15)^2 \approx 0,138178$
4	$\binom{5}{4}(0,85)^4(0,15)^1 \approx 0,391505$
5	$\binom{5}{5}(0,85)^5(0,15)^0 \approx 0,443705$

Her iki takımın da tam olarak k atışı gole çevirmiş olması olasılığı p_k^2 olduğundan, aradığımız olasılık $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = 0,369842\ldots$ olur.

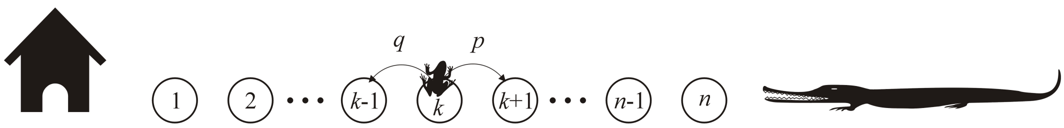
34) Ard arda dizili bir sıra taşın en başındakinin üstünde bulunan bir kurbağa, elinde bir madeni para tutmaktadır. Kurbağa parayı attığında yazı gelirse bir öndeki; tura gelirse iki öndeki taşa sıçramaktadır. Kurbağanın başladığı taştan sonraki 6. sıradaki taşa basma olasılığını hesaplayınız.



Kurbağanın k. sırada bulunan taşa basma olasılığını P_k ile gösterelim. Kurbağanın $k+1$ inci taşa basmaması tek şekilde gerçekleşebilir: kurbağa k numaralı taşa erişir ve bu taşın üstündeyken attığı para tura gelir. Bu olayın olasılığı $P_k/2$ olduğundan, $P_{k+1} = 1 - P_k/2$ olur. Kurbağanın harekete başladığı taşa 0. taş dersek $P_0 = 1$ alabiliriz. Buradan, $P_1 = 1/2$, $P_2 = 1 - P_1/2 = 3/4$, $P_3 = 5/8$, $P_4 = 11/16$, $P_5 = 21/32$, $P_6 = 43/64$ elde edilir.

[Not. İndirgemeli diziler kullanılarak P_k olasılığı için genel bir ifade bulunabilir ve $k \to \infty$ için $P_k \to 2/3$ olduğu gösterilebilir.]

35) Bir gölde ard arda dizili n taşın $k-$incisinin üzerindeki kurbağa p olasılığı ile sağa sıçrayarak $k+1$ numaralı taşa; $q = 1-p$ olasılığı ile de sola sıçrayarak $k-1$ numaralı taşa geçmektedir. Bu şekilde harekete devam eden kurbağa, $1-$inci taşın üstünden sola şıçradığında karaya çıkıp yuvasına ulaşacak; $n-$inci taşın üzerindeyken sağa sıçradığında ise gölde onu bekleyen timsaha yem olacaktır. Kurbağanın harekete $k-$inci taştan başladığını kabul ederek kurtulma olasılığını hesaplayınız.



$k-$inci taş üzerinde bulunan kurbağanın kurtulma olasılığını P_k ile gösterelim. Kurbağanın kurtulması iki yoldan gerçekleşebilir: ya (p olasılığı ile) sağa sıçrar ve P_{k+1} olasılığı ile kurtulur, ya da (q olasılığı) ile sola sıçrar ve P_{k-1} olasılığı ile kurtulur. O halde

$$P_k = pP_{k+1} + qP_{k-1}$$

yazabiliriz. Elde ettiğimiz eşitlik, P_k için ikinci dereceden (sabit katsayılı, doğrusal ve homojen) bir indirgeme bağıntısıdır: $pP_{k+1} = P_k - qPk - 1$. Bu bağıntının karakteristik denklemi $px^2 - x + q = (x-1)(px-q) = 0$ dır.

(i) $p = q = 1/2$ ise, karakteristik denklem $(x-1)^2 = 0$ olacağından, $P_k = A + Bk$ yazarız. 0 numaralı taşı kara; $n+1$ numaralı taşı da göl olarak kabul edip $P_0 = 1$ ve $P_{n+1} = 0$ alabiliriz. Böylece $A = 1$, $B = -1/(n+1)$ olur ve

$$P_k = 1 - \frac{k}{n+1}$$

elde edilir.

(ii) $p \neq q$ ise, karakteristik denklemin kökleri 1 ve $q/p \neq 1$ olacağından $P_k = A + B(q/p)^k$ yazabiliriz. $P_0 = 1$ ve $P_{n+1} = 0$ koşullarını kullanarak $A + B = 1$ ve $A + (q/p)^{n+1}B = 0$ denklemlerini elde ederiz. $q/p = u$ dersek, bu denklemlerin ortak çözümü $A = \frac{-u^{n+1}}{1-u^{n+1}}$ ve $B = \frac{1}{1-u^{n+1}}$ dir. Buradan da

$$P_k = \frac{u^k - u^{n+1}}{1 - u^{n+1}}$$

elde edilir.

36) Ateş ile Güneş, hedefi ilk vuran kazanmak üzere, sıra ile bir hedefe nişan alarak (kendileri ve etraftakiler için tehlikeli olmayacak şekilde) minik taşlar atarak oyun oynamaktadırlar. Her bir atışta isabet kaydetme olasılığı Ateş için 7/10; Güneş için 8/10 dur. İlk atış hakkı Ateş'e tanındığına göre her oyuncu için kazanma olasılığını hesaplayınız.

Atış sırasının Ateş'te olması durumunda Ateş'in kazanma olasılığını P_A, Güneş'in kazanma olasılığını da P_G ile gösterelim. İlk atışında isabet kaydederse (7/10 olasılığı ile) Ateş oyunu kazanır. Ateş (3/10 olasılığı ile) isabet ettiremezse sıra Güneş'e geçer ve Güneş de atışında (2/10 olasılığı ile) başarılı olamazsa ilk konuma dönülmüş olur ve Ateş'in kazanma olasılığı yine P_A olur. O halde

$$P_A = \frac{7}{10} + \frac{3}{10}\frac{2}{10}P_A$$

olur ve buradan $P_A = 70/94$ bulunur.

Benzer şekilde, Güneş'in kazanma olasılığı için

$$P_G = \frac{3}{10}\frac{8}{10} + \frac{3}{10}\frac{2}{10}P_G$$

yazabiliriz. Buradan da $P_G = 24/74$ elde edilir.

Hesaplanan olasılıklardan $P_A + P_G = 1$ olduğu görülmektedir. Yani, her iki oyuncunun da sürekli kaçırması sonucunda oyunun bitmeksizin devam etmesi olasılığı 0 dır.

SONLU MATEMATİK - PROBLEMLER

1. Bir kenarı n birim olan bir kare, n^2 tane birim kareye bölünüyor ve her kare kırmızı, beyaz ya da maviye boyanıyor. Böyle bir boyamada, bu karenin bir satır veya sütununda aynı renkte en az üç tane birim kare olmasının kaçınılmaz olması için, n değeri en küçük ne olmalıdır?

2. Ayşe'nin, Barış'tan bir fazla madeni parası vardır. Her ikisi de bütün paralarını aynı anda fırlatıyorlar ve ortaya çıkan tura sayısını gözlüyorlar. Paraların her iki yüzünün de gelme ihtimalinin eşit olduğununa göre, Ayşe'nin Barış'tan daha fazla tura elde etme ihtimali nedir?

3. Bir kenarının uzunluğu 1 birim olan bir eşkenar üçgenin iç bölgesinden alınan 5 noktadan en az ikisinin arasındaki mesafenin $\frac{1}{2}$ birimden az olduğunu kanıtlayınız.

4. Bir bahçıvan dikdörtgen şeklindeki bahçesini iki köşegeni kullanarak dört üçgene bölüyor. Bahçıvan bu üçgenlerin her birine bir tür çiçek ekecektir ancak ortak kenarları olan üçgenlerde farklı tür çiçek ekmelidir. Bahçıvanın elinde karanfil, begonya, gül, lale ve sardunya tohumları olduğuna göre, bu işlemi kaç farklı şekilde yapabilir?

5. 6 çift ikiz öğrenciden oluşan bir grup, birbirinin ikizi olan öğrenciler aynı takımda olmamak koşulu ile,
   a) 6 kişilik
   b) 4 kişilik takımlara kaç değişik şekilde ayrılabilir.

6. Ateş ile Güneş bir çift zar atarak üst yüzlerinde gelen sayıların toplamına dayanan bir oyun oynamaktadırlar. Ateş'in kazanması için sayıların toplamının 12 olması ve Güneş'in kazanması için sayıların toplamının iki sefer üst üste 7 olması gerekmektedir. Oyun biri kazanana kadar devam edeceğine göre, Ateş'in oyunu kazanma olasılığı nedir?

7. İçerisinde kırmızı bir top bulunan torbaya, mavi yada kırmızı olma olasılıkları eşit olan bir top daha atılıyor ve torbadan bir top çekiliyor. Çekilen top kırmızı olduğuna göre torbaya sonradan atılan topun kırmızı olma olasılığı nedir?

8. 126'yı geçmeyen ve birbirinden farklı hangi 7 pozitif tam sayıyı alırsak alalım bunların içinde $b < a \leq 2b$ eşitsizliklerini sağlayan a, b sayılarının bulunabileceğini ispatlayınız.

9. 1 den 99 a kadar olan sayılardan seçilmiş 10 elemanlı her kümenin toplamları aynı olan iki alt kümeye ayrılabileceğini gösteriniz.

10. 1 den 16 ya kadar olan sayıları
    a) Düz bir çizgi üzerine
    b) Bir çember üzerine
    ard arda gelen iki terimin toplamı bir tam kare oluşturacak şekilde dizmek mümkün müdür?

11. Bir şatonun mahzeninde her birinde 12 kilit olan 12 kapının arkasındaki hazinelerini koruyan 7 cüce vardır. Kilitler birbirinden farklıdır ve her cücede bazı kilitlerin anahtarları vardır. Herhangi 3 cüce birlikte bütün kilileri açabilmekte ise cücelerdeki anahtar sayılarının toplamının en az 333 olduğunu gösteriniz.

12. 20 kişilik bir toplulukta 10 kişi İngilizce, 10 kişi Almanca ve 10 kişi Fransızca biliyor. Bu topluluğun üç kişilik bir alt kümesinde eğer İngilizce bilen en az bir kişi, Almanca bilen en az bir kişi ve Fransızca bilen en az bir kişi varsa, bu alt kümeye bir "komite" deniyor. Böyle bir toplulukta en çok kaç farklı komite olabilir?

13. Bir zarın karşılıklı iki yüzünde birer nokta, başka iki karşılıklı yüzünde ikişer nokta, geriye kalan iki yüzünde ise üçer nokta vardır. Bu şekilde 8 zar kullanılarak $2 \times 2 \times 2$ bir küp oluşturuluyor ve her yüzündeki toplam noktalar sayılıyor. Bu şekildeki bir kübün yüzlerindeki toplam nokta sayılarının 6 ardışık tam sayı olması mümkün müdür?

14. $n \times n$'lik bir tabloda kareler siyah ve beyaz renge boyanıyor. Herhangi iki satır ve sütunun kesişimindeki dört kare aynı renkte değilse n'nin en büyük değerini bulunuz.

15. 15 sayıdan oluşan $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ dizisi veriliyor. b_i, bu dizide a_i'den küçük olan sayıların miktarına eşit olacak şekilde bir $b_1, b_2, \ldots, b_{15}$ dizisi oluşturuluyor. (b_k) dizisi 1, 0, 3, 6, 9, 4, 7, 2, 5, 8, 8, 5, 10, 13, 13 olacak şekilde bir $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ dizisi bulunur mu?

16. Keyfi üç komşu sayının toplamı pozitif ve tüm sayıların toplamı negatif olacak şekilde 20 sayı bir sıraya yazılabilir mi?

17. 99 tane kartın bir yüzüne $1, 2, \ldots, 99$ sayıları yazılmıştır. Kartlar karıştırılır ve öteki yüzlerine yeniden $1, 2, \ldots, 99$ sayıları yazılır. Her kartın iki yüzündeki sayıların toplamı alınır. Bu 99 toplamın çarpımının çift olduğunu gösteriniz.

18. Her biri farklı boyda olan n kişi, en uzun kişinin her iki yönünde de boy uzunlukları azalacak şekilde sıralanıyorlar.
    a) Kaç değişik şekilde sıralanırlar?

a) En uzun kişi ile en kısa kişi arasındaki her iki sırada da boy uzunlukları azalacak şekilde bir daireyi kaç değişik şekilde oluşturabilirler?

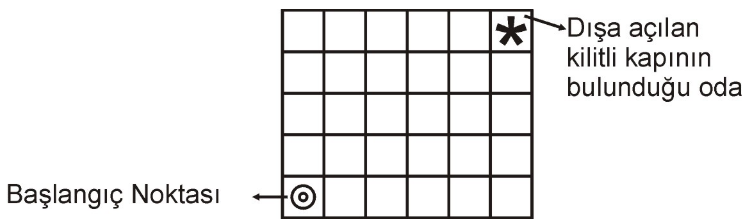
19. $1, 2, \ldots, n$ kümesinin, 1, 2, 3, ve 4'ün herhangi üçünün arka arkaya bulunmadığı tüm permütasyonlarının sayısını n cinsinden bulunuz.

20. Betül 1 den 100 e kadar farklı tam sayıları kullanarak, en büyük elemanı, diğer elemanların çarpımı olacak şekilde kümeler oluşturuyor. Her bir tam sayı en fazla bir kümede yer alıyorsa Betül en çok kaç küme oluşturabilir?

21. Tahtaya 1 den 10 a kadar olan sayılar yazılıyor. İki oyuncu sırayla bu sayılardan birisini seçiyor ve o sayı ile o sayıyı bölen tüm sayıları tahtadan siliyor. Son sayıyı silen oyunu kazanıyor. Bu oyunu kim kazanır?

22. Dalgın bir profesör iki adet kibrit kutusu alıyor ve ikisini de cebine atıyor. Kibrite ihtiyacı olduğu herhangi bir zaman elini cebine atıyor ve iki kutudan birini rastgele (eşit olasılıkla) alıyor. Bir gün profesör, daha önce kutudaki son kibriti aldıktan sonra dalgınlıkla tekrar kutuyu cebine atmış olacak ki, eline aldığı kibrit kutusunun boş olduğunu görüyor. Eğer iki kutuda da başlangıçta n tane kibrit çöpü varsa, son durumda diğer kutuda k tane kibrit çöpü olma olasılığı nedir? $(0 \leq k \leq n)$

23. Bir binanın odaları $m \times n$ lik bir dörtgen yapı oluşturacak şekildedir (Şekilde 5×6 lık durum gösterilmektedir). Tüm odalarda komşu odalara açılan bir kapı mevcuttur ancak binadaki tek giriş çıkış sağ üstteki odadandır. Bu odanın kapısı mn tane kilitle kitli olup, anahtarların her biri ayrı odadadır. Sol alttaki odada bulunan biri çıkışa ulaşmak için istediği komşu odaya geçmekte serbesttir fakat terk ettiği odaya açılan bütün kapılar odadan çıktığı anda kilitlenmektedir. Bu durumda hangi m ve n değerleri için birinin bütün anahtarları toplayıp binadan ayrılması mümkündür bulunuz ve ispatlayınız.



24. 4×4 lük bir satranç tahtasına en az kaç yıldız yerleştirilmelidir ki, rastgele 2 satır ve 2 sütundaki yıldızlar silindiğinde satranç tahtasında en az bir yıldız kalsın?

25. 30 parçaya bölünmüş çarkıfeleğin üzerine 50, 100, 150, ..., 1500 sayıları rastgele dağıtılmıştır. Üzerinde yazan sayıların toplamı 2350'den büyük ya da 2350'ye eşit olan ardışık üç parça olduğunu gösteriniz.

26. Bir satranç tahtasının üst ve alt kenarları ile sağ ve sol kenarları birleştirilerek bir torus oluşturuluyor. Böyle bir tahtaya birbirinin saldırı karesinde olmayan en fazla kaç tane at koyabiliriz?

27. İki kişi 2009×2009 boyutlu kareli alanda oyun oynuyorlar. Birinci oyuncu merkezdeki kareye "×" yazıyor; ikinci oyuncu bunun etrafındaki 8 kareden herhangi birisine "O" yazıyor. Bundan sonra birinci oyuncu, dolu karelerin komşuluğundaki karelerden birisine "×" yazıyor ve bu şekilde oynamaya devam ediyorlar. Birinci oyuncu köşedeki karelerden herhangi birisine "×" yazabilirse oyunu kazanıyor. Diğer durumlarda oyunu ikinci oyuncu kazanıyor. İki oyuncu da en iyi şekilde oynarsa oyunu kim kazanır?

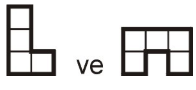
28. 500 oyuncunun katıldığı bir satranç turnuvasında üç kez yenilgi alan oyuncular elenmektedir. Turnuva tamamlandığında en az ve en fazla kaç karşılaşma yapılmış olabilir?

29. $A = \{1, 2, ..., 2006\}$ olsun. A kümesinden seçilen alt kümelerin herhangi iki tanesinin kesişiminde tam olarak 2004 tane elemanın olacağı en fazla kaç tane alt küme seçilebilir.

30. Bir sinemanın gişesininde insanlar bilet alırken doğum günleri kaydedilmekte ve daha önce bilet almış herhangi bir müşteriyle aynı günde doğmuş olan sıradaki ilk kişiye, bir defaya mahsus bedava bilet verilmektedir. Bilet gişesinin önünde duran Ali, istediği zaman kuyruğa girebilmektedir (Örneğin kuyruğa birinci sırada girebilir ya da ellinci sırada girebilir). Ali diğer insanların doğum günlerini bilmemektedir. Ali, kaçıncı sırada kuyruğa girerse bedava bilet alma şansı en fazla olur? (Bir senenin 365 gün olduğunu ve doğum günlerinin gelme olasılıklarının eşit olduğunu kabul edin. Sorunun çözümü için bir hesap makinesi veya bilgisayara gereksinim duyabilirsiniz.)

31. Birbirinin eşi ve yüzleri 1 den 6 ya kadar sayılarla numaralandırılmış olan 27 beyaz küpten tek bir küp oluşturuluyor ve oluşturulan kübün dış yüzeyi siyaha boyanıyor. Daha sonra bu küp tekrar parçalara ayırılıyor ve küpler bir torbada karıştırıldıktan sonra torbadan rsastgele seçilerek tekrar tek bir küp oluşturuluyor. Oluşturulan bu kübün dış yüzeyinin tamamen siyah olma olasılığı kaçtır?

32. Aşağıdaki şekilleri aynı sayıda kullanarak $n \times n$ lik bir satranç tahtasının, şekiller üst üste binmeyecek şekilde kaplanabilmesi için gerekli en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.



33. ABC eşkenar üçgeninin kenarlarının uzunluğu N 'dir. N bir tam sayı olmak üzere, eşkenar üçgen, içine kenarlarına paralel çizgiler çizilerek her birinin kenar uzunluğu 1 olan eşkenar üçgenlere bölünüyor. A köşesinden başlayarak oluşan eşkenar üçgenlerin içinden geçen bir yol oluşturuluyor. Her üçgenden en fazla 1 defa geçiliyor ve iki üçgen arasında ortak olan kenarlarından geçilerek yol alınıyorsa, diğer bir köşeye giden bir yol en çok kaç üçgenden geçerek oluşturulabilir?

34. Hangi n tam sayısı için bir çember üzerine dizilmiş hepsi birden sıfıra eşit olmayan ve komşu iki sayının farkının mutlak değerine eşit olan n tane gerçel sayı bulunabilir?

35. 67 öğrenciden oluşan bir grup, 1 den 6 e kadar numaralanmış 6 soru içeren bir sınava katılır. Sınavda, soru n ye verilen doğru yanıt için n puan kazanılırken, aynı soruya verilen yanlış yanıtla n puan kaybediliyor.
a) Herhangi iki skor arasındaki fark en az kaç olabilir.
b) En az 4 katılımcının aynı skoru elde etmesi gerektiğini gösteriniz.
c) En az iki öğrencinin altı soruya da aynı yanıtları verdiğini gösteriniz.

36. Bir öğrenciye 7 bölüme ayrılmış bir disk ile mavi, kırmızı, sarı ve yeşil kalemler veriliyor ve disk üzerindeki her bölümü boyaması isteniyor. Her renk bir defadan çok kullanılabilir veya hiç kullanılmayabilir. Bitişik olan bölümler farklı renklere boyanmak koşulu ile disk kaç değişik şekilde boyanabilir?

37. Bir öğretmen $1 \leq k \leq 50$ olmak üzere bir k pozitif tam sayısı tutuyor. Sınıftaki n çocuğun her biri sırayla, bu sayının kendi belirledikleri bir tam sayıya bölünüp bölünmediğini soruyorlar. Öğretmen "evet" veya "hayır" yanıtı veriyor. Soru ve yanıtları herkes duyuyor. Sayının bulunmasını garanti etmek için n en az kaç olmalıdır?

38. a, b, c harflerinden oluşan bir alfabe veriliyor. İçinde çift sayıda a bulunan n harfli kelimelerin sayısını bulunuz.

39. 5×7 lik bir satranç tahtasını sınırlarını geçmeden, her karede aynı miktarda kat olma koşulu ile birden fazla kat yapabilerek L harfi ile (2×2 lik bir kareden 1×1 lik bir köşesini çıkararak elde edilen şekil) kaplayabilir miyiz?

40. Her birisi 5 koşucudan oluşan 10 takım arasında yapılan maraton yarışmasını n inci sırada bitiren koşucu için takımına n puan verilmiş ve yarışmayı en az toplam puana ulaşan tek bir takım kazanmıştır. Yarışmayı aynı sırada tamamlayan iki koşucu olmadığını kabul ederek kazanan takımın puanının alabileceği değerlerin sayısını bulunuz.

41. $\{1, 2, 3, \cdots, 49, 50\}$ kümesinin, herhangi iki elemanının toplamı 7 ile bölünmemek koşulu ile oluşturulabilecek bir alt kümesinde en fazla kaç eleman olabilir?

42. Bir l_1 doğrusunun üzerinde A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 noktaları; l_2 doğrusunun üzerinde de B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 noktaları işaretlenmiş ve A_iB_j $(i, j = 1, ..., 5)$ doğruları çizilmiştir. Toplam 27 doğrunun yer aldığı bu şekilde, doğruların kesişim yeri olan noktaların sayısının en fazla kaç olabileceğini bulunuz.

43. Tüm tam sayılar kümesini hiç birisi boş olmayan ve ikili olarak kesişmeyen üç alt kümeye ayırmak istiyoruz. Bu işlemin farklı alt kümelerden seçilen her a, b için aşağıdaki şartı sağlayacak şekilde yapılması mümkün müdür?
a) üçüncü alt kümede $a + b = 2c$ denklemini sağlayan bir c elemanının bulunması
b) üçüncü alt kümede $a + b = c_1 + c_2$ denklemini sağlayan c_1 ve c_2 elemanlarının bulunması

44. Aralarından tam 4 tanesinin adı Ateş olan 12 öğrenci, her birisi 4 öğrenciden oluşan matematik, satranç ve müzik gruplarına dağılmıştır.Her grupta en az bir Ateş bulunması olasılığını hesaplayınız.

45. İçlerinde sırasıyla $1, 2, \ldots, 20$ litre su bulunan 20 tane varil vardır. Eğer A varilinde en az B varilindeki kadar su varsa, A varilinden B variline, B varilinde olan su kadar su aktarılabilmektedir. Aksi takdirde A varilinden B variline su aktarılamamaktadır. Bu kurala göre bir dizi aktarma yaptıktan sonra:
a) 5 varilde 3 litre su ve kalan 15 varilde sırasıyla $6, 7, \ldots, 20$ litre su elde edebilir miyiz?
b) Bir varilde 210 litre su elde edebilir miyiz?
(Her varilin hacminin en az 120 litre olduğunu kabul ediniz.)

46. Herhangi üç tanesi bir doğru üzerinde olmayan 2005 noktanın oluşturduğu kümeye T kümesi diyelim. Bu durumda bu 2005 noktadan herhangi biri için, köşeleri T kümesinden olan ve bu noktanın iç kısımında bulunduğu üçgenlerin sayısının bir çift tam sayı olduğunu gösteriniz.

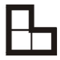
47. Kenarları 10 olan eşkenar bir üçgen, iç tarafından kenarlarına paralel olacak şekilde doğrularla bölünerek 100 adet eşkenar birim üçgene ayrılıyor. İçeride yeni oluşan ve kenarları büyük üçgene paralel olan eşkenar üçgen sayısını bulunuz.

48. Bir zar n kere atıldıktan sonra zarın üzerindeki bütün sayıların en az bir kere gelmiş olma olasılığına q diyelim. $q > \frac{1}{2}$ olmasını sağlayan en küçük n tam sayısı nedir? (Çözüm için hesap makinesine gereksinim duyabilirsiniz.)

49. $n \geq 3$ olmak üzere $A_1A_2 \ldots A_n$ kenar uzunlukları birbirine eşit bir çokgen olsun. $A_iA_jA_k$ biçimindeki geniş açılı üçgenlerin sayısını bulunuz.

50. Aşağıdaki şekillerden aynı sayıda kullanarak $n \times n$ bir satranç tahtasının, şekiller üst üste binmeyecek şekilde kaplanabilmesi için gerekli en küçük n pozitif tam sayısını

bulunuz.

 ve 

51. 4 kırmızı, 8 mavi bilye bir halka şeklinde rasgele diziliyor. 2 kırmızı bilyenin yan yana gelmeme ihtimali nedir?

52. Bir kişi bir hafta (7 gün) boyunca 7 kişilik arkadaş grubundan her akşam farklı bir 3 kişilik grubu yemeğe davet etmek istiyor. Herbir arkadaşının en az bir kere davet edilmesi şartı ile bu bir haftalık davetiye listesinin kaç farklı şekilde hazırlanabileceğini bulunuz.

53. $1 \leq a \leq 10,\ b \geq 0,\ c \geq 2,\ 20 \leq d \leq 30$ şartlarını sağlayan ve toplamları $a+b+c+d = 100$ olan kaç tane tam sayı bulunabileceğini hesaplayınız.

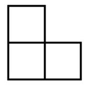
54. Herhangi bir $n \geq 1$ tam sayısı için köşeleri negatif olmayan ve n 'yi aşmayan koordinatlı noktalarda bulunan kareler gözönüne alındığında
a) $n = 4$ için kaç tane kare vardır.
b) Herhangi bir n için genel bir formül bulunuz.

55. Ali, Burak, Ceren ve Derya bir tünelin girişinde bulunuyorlar. Sadece bir fenerleri var ve fener olmadan kimse tünele girmek istemiyor. Fakat tünelden aynı anda en fazla iki kişi geçebiliyor. Ali, Burak, Ceren ve Derya'nın tüneli geçmeleri sırasıyla $1, 2, 5$ ve 10 dakika sürüyor. Herkesin tünelin diğer tarafına geçmesi için en az ne kadar zamana ihtiyaçları vardır ?

56. 12 kişi yuvarlak bir masanın etrafında oturmaktadır. Bu 12 kişi çiftlerin elleri birbirini kesişmemek koşulu ile kaç farklı şekilde el sıkışabilir?

57. $(0, 0)$ merkezli ve $x^2 + y^2 \leq 1$ bölgesini kaplayan bir göl, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ çemberi, ve $k = 1, \cdots, n$ olmak üzere $(0, 0)$'dan başlayan ve x ekseni ile $360^o \times k/n$ açı yapan yarı doğrular vasıtasi ile $2n$ parçaya bölünmüştür. Gölde $4n + 1$ kurbağa bulunmaktadır ve her hamlede 3 veya daha çok kurbağa bulunan bölgelerden birindeki üç kurbağa, bu bölge ile sınır paylaşan diğer üç bölgeye sıçramaktadır. Her bölgenin kendisinde veya komşularının üçünde birden kurbağa bulunduğu bir duruma ulaşabileceğini gösteriniz.

58. $m \times n$ dikdörtgensel bir alan şekildeki köşe parçalarıyla kaplanıyor. Bir kaplamaya, içinde kenar uzunluğu m ya da n'den küçük olan ve köşe parçalarıyla kaplanmış bir dikdörtgen bulunmuyorsa, düzgün diyelim. Bu durumda bir $\{m, n\}$ çifti için bir $m \times n$ düzgün kaplama varsa $2m \times 2n$ için de bir düzgün kaplama olduğunu gösteriniz.



59. Bir kübün her köşesinde farklı doğal sayılar ve her kenarında da kenarın bağladığı iki köşedeki sayının en büyük ortak böleni vardır. Köşelerdeki sayıların toplamı kenarlardaki sayıların toplamına eşit olabilir mi?

60. Üç çavuş ve daha düşük rütbeli birkaç askerden oluşan bir takımda çavuşlar sıra ile görev almaktadır. Takım komutanı şu emirleri vermiştir.

- Her gün en az bir emir verilmelidir.
- Hiçbir asker ikiden fazla görev alamaz, ve herhangi bir askere günde birden fazla emir verilemez.
- Emir verilen askerlerin listesi herhangi iki gün için aynı olamaz.
- Bu kuralları çiğneyen ilk çavuş hapse atılacaktır.

Çavuşların aralarında önceden anlaşamadıkları bir durumda, belirtilen kurallara uyarak emir verebilecek ve hapse girmemeyi başarabilecek en az bir çavuş var mıdır?

61. Bir çemberin her bir noktası ya beyaz ya da siyah renktedir. Buna göre
a) Köşeleri böyle bir çember üzerinde ve aynı renkte olacak şekilde bir ikizkenar üçgen çizilebileceğini gösteriniz.
b) Köşeleri böyle bir çember üzerinde ve aynı renkte olan bir eşkenar üçgen çizilebilir mi?

62. 2007 tam sayı bir çemberin etrafına diziliyor. Burada art arda gelen 5 sayıdan 3'ünün toplamı diğerlerinin toplamının 2 katı olduğuna göre bu sayıların hepsinin ancak 0 olabileceğini gösteriniz.

63. n öğrenci, k soruluk bir sınava giriyor.

- Bir öğrenci sınavdaki soruların yarısından daha azına doğru cevap verirse başarısız sayılıyor.
- Sınavdaki sorular, sınava giren öğrencilerin yarısından fazlası tarafından doğru cevaplandırıldığında kolay olarak adlandırılıyor.

Bu bilgilere göre hangi (n, k) çiftleri için
a) Bütün soruların kolay olmasına rağmen bütün öğrencilerin başarısız olabilir?
b) Hiçbir soru kolay olmamasına rağmen bütün öğrencilerin başarılı olabilir?

64. Her kenarında n nokta bulunan üçgen şeklindeki noktaların üzeri $1, 2, \ldots, n$ uzunluklarındaki n adet çubuk kullanılarak kaç değişik şekilde kapatılabilir?

65. Beşinci ve sonraki terimleri, önceki dört terimin toplamının 10 a bölümünden kalan olacak şekilde $1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, \ldots$ dizisi oluşturuluyor.

a) $2, 0, 0, 4$ sayıları, verildikleri sıra ile bu dizide görülebilir mi?

b) Dizinin ilk dört terimi $1, 2, 3, 4$, dizinin herhangi başka bir kısmında tekrar görülebilir mi?

66. Düzlemde herhangi 3 tanesi aynı doğru üzerinde yer almayan 50 nokta veriliyor. Bu noktalar 4 renkten birisi ile boyanıyor ve köşelerini bu noktaların oluşturduğu bütün üçgenler çiziliyor. Bu düzlemde, köşeleri aynı renge boyanmış olan en az 130 çeşitkenar üçgen olduğunu gösteriniz.

67. Bir öğrenci bir kitabı 37 gün boyunca aşağıdaki kurallara göre okuyor.

- Her gün en az bir saat kitap okuyor.
- Her gün 12 saatten fazla olmamak kaydıyla tam sayıda (ondalıksız) saat okuyor.
- Toplamda en fazla 60 saat kitap okuyor.

Bu durumda öğrencinin bazı ardışık günlerde toplam 13 saat kitap okuduğunu gösteriniz.

68. Verilen her pozitif N tam sayısı için sadece 0 ve 1 rakamlarından oluşan N basamaklı ve N ile tam bölünen bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

69. $m(B\widehat{A}C) = 60^\circ$, $|AB| = 2005$, $|AC| = 2006$ olacak şekilde bir ABC üçgeni verilmiş olsun. Ateş ve Güneş sırayla kendilerine kalan üçgeni bir doğru boyunca, herbirinin alanı 1 veya daha büyük iki yeni üçgen oluşturacak şekilde kesiyorlar ve bu üçgenlerden geniş açılı olanı (ikisi de dik açılı ise herhangi birini) atılıp geriye kalan üçgenle oyuna devam ediyorlar. Bu kesme işlemini yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyuna Ateş'in başladığını ve her iki oyuncunun da mümkün olan en iyi hamleleri yapacağını kabul ederek oyunu kimin kazanacağını belirleyiniz.

70. $n \times m$'lik bir dama tahtasının bazı karelerini siyaha, geriye kalan karelerini ise beyaza boyamak istiyoruz, öyle ki, boyama işlemi tamamlandığında her siyah karenin çift sayıda siyah komşusu, her beyaz karenin çift sayıda beyaz komşusu olsun (Bir kareye çaprazdan da olsa temas eden karelere o karenin komşuları diyelim, ve karenin

kendisini de komşuları arasında sayalım). Bu işlemin hangi (n, m) ikilileri için yapılabileceğini belirleyiniz.

71. Beyaz bir kağıdın üzerine bir kenarında n tane kare bulunan bir ızgara elde etmek için en az kaç kare çizmeliyiz?

72. Üzerinde 1 den 15'e kadar sayılar olan kutular herhangi bir sıra ile yanyana diziliyor. En fazla dört farklı renk kullanılarak kutular boyanacaktır. Aynı renge boyanan kutuların üzerindeki sayıların sürekli artması veya sürekli azalması istenmektedir. Bütün dizilişler için istenen şekilde boyamanın yapılıp yapılamayacağını gösteriniz.

73. 7×7'lik bir satranç tahtası 49 birim kareye bölünüyor. Her satır ve sütunda çift sayıda dama taşı olacak şekilde n tane dama taşının birim karelere yerleştirilebileceği bütün n değerlerini bulunuz. (0 bir çift sayı olduğu için çözümler boş satır veya sütunlar içerebilirler. Bir birim kareye en fazla 1 tane dama taşı koyulabilir.)

74. İki oyuncu, aynı anda {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} kümesinden, yerine koymaksızın, sırayla birer sayı seçerler. Toplamı sıfır olan üç sayıyı (üç, dört ya da beşinci seçimde) elde eden ilk oyuncu, oyunu kazanır. İki oyuncudan birinin oyunu kazanması kaçınılmaz mıdır?

75. Bir küpün köşeleri 1 'den 8 'e kadar numaralandırılıyor. Çapraz olarak karşılıklı olan iki köşeyi birbirine bağlayan ve 3 köşeden geçen, geçtiği köşelerle bağladığı köşelerin numaralarının toplamı en az 21 olan bir yol olduğunu ispatlayınız.

76. $n \geq 2$ bir tam sayı olsun. n adet yarış arabası bir ralliye katılıyor. Araçlar 1'den n'ye kadar numaralanmış, ve başlangıç noktasından numara sırasına uygun şekilde sırayla ayrılıyorlar. Sonuçta her araba yol boyunca aynı sayıda araba tarafından geçiliyor, öte yandan arabaların yol boyunca geçtikleri arabaların sayılarının tümü birbirinden farklı. Bir araba bir başkasını yarış boyunca en çok bir kez geçiyor. Arabalar varış noktasına hiç bir beraberlik olmaksızın ulaşıyorlar. Bu durumun n'nin hangi değerleri için mümkün olduğunu belirleyiniz.

77. m şarkının söylendiği bir sanat festivaline sekiz sanatçı katılmaktadır. Her şarkı 4 sanatçı tarafından söylenmektedir ve herhangi iki şarkıcının söylediği şarkılarda aynı olanların sayısı sabittir. Bunun mümkün olduğu en küçük m sayısını bulunuz.

78. Her birinin üzerinde sıfırdan büyük bir tam sayı yazan kartlardan oluşan bir destede kartlar üzerindeki sayıların toplamı 2007 'dir. $1 \leq k \leq 2006$ olacak şekildeki bir k tam sayısı için, üstünde yazan sayıların toplamı k olan bazı kartlar seçilebiliyor ve bu her k tam sayısı için tek bir şekilde yapılabiliyor (üzerindeki sayılar eşit olan kartlar aynı kabul ediliyor). Bu şekilde kaç farklı deste vardır?

79. Karelere bölünmüş $m \times n$ lik bir tahtada bir hamle sırasıyla aşağıdaki iki aşamadan oluşmaktadır:

- Herhangi ikisi aynı satırda veya aynı sütunda olmayacak şekilde tahtadan boş kareler seçilir. Bu seçilen karelerin her birine beyaz bir taş konulur.
- Tahtadaki her boş kare incelenir, karenin bulunduğu hem satırda hem de sütunda bir beyaz taş varsa o kareye bir siyah taş konulur.

Bu şekilde bir dizi hamle yapıldıktan sonra tahtaya en fazla kaç beyaz taş konulabilir?

80. 10×10 luk birim karelerden oluşan bir levha düşünelim. Ortak kenarla birbirlerine bağlı olan birim karelerin oluşturduğu şekle gemi diyeceğiz. Herhangi iki geminin ortak köşesinin bulunmadığı gemiler kümesine donanma diyeceğiz (yani tüm gemiler köşe-bağımsız). Hiçbir yeni gemi eklenemeyecek bir donanmada en az kaç kare bulunması gerektiğini bulunuz.

81. a ve b lerden oluşan harf dizilerinde şu değişiklikleri yapabiliyoruz: $aba \to b$, $b \to aba$, $bba \to a$, $a \to bba$ (Örneğin, $a \to bba$, a nın yerine bba konulması anlamına geliyor). $\underbrace{aa\ldots a}_{2003}b$ dizisinden $b\underbrace{aa\ldots a}_{2003}$ dizisini elde etmek mümkün müdür?

82. Bir n sayısının, pozitif tam sayıların toplamları olarak yazılmasına n nin bir bölünüşü denir. (Terimlerin yer değiştirmesi ile edilen yazılım farklı bir biçim olarak kabul edilmeyecektir.)

Aşağıdaki tabloda 5 in farklı bütün bölünüşleri verilmiştir. İkinci sütun, her bölünüşte bulunan 1 lerin sayısını, ve üçüncü sütun her bölünüşte bulunan farklı terimlerin sayısını göstermektedir. En alt satırda da, ikinci ve üçüncü sütundaki sayıların toplamı verilmiştir.

Bölünüş	**1 lerin sayısı**	**Farklı terimlerin sayısı**
5	0	1
4+1	1	2
3+2	0	2
3+1+1	2	2
2+2+1	1	2
2+1+1+1	3	2
1+1+1+1+1	5	1
Toplam	**12**	**12**

Bir n sayısının farklı bütün bölünüşlerindeki 1 lerin sayısı $a(n)$, ve farklı bütün bölünüşlerinin her birindeki farklı terimlerin sayısının toplamı $b(n)$ olsun. Yukarıdaki tabloda $a(5) = b(5)$ olduğu gösterilmiştir.

Tüm n tam sayıları için, $a(n) = b(n)$ olduğunu kanıtlayınız.

83. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $S_n = \{n^2+1, n^2+2, ..., (n+1)^2\}$ olsun. S_n kümesindeki farklı elemanların ikili çarpımlarının sayısını n'ye bağlı olarak bulunuz? Örneğin; $S_2 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ olmak üzere,

$$
\begin{array}{ll}
5 \times 6 = 6 \times 5 = 30, & 5 \times 7 = 7 \times 5 = 35, \\
5 \times 8 = 8 \times 5 = 40, & 5 \times 9 = 9 \times 5 = 45, \\
6 \times 7 = 7 \times 6 = 42, & 6 \times 8 = 8 \times 6 = 48, \\
6 \times 9 = 9 \times 6 = 54, & 7 \times 8 = 8 \times 7 = 56, \\
7 \times 9 = 9 \times 7 = 63, & 8 \times 9 = 9 \times 8 = 72,
\end{array}
$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla; $n = 2$ için, farklı elemanların ikili çarpımlarının sayısı 10 'dur.

84. Bir rehine karelere bölünmüş $n \times n$ lik bir tahtanın üzerine yerleştiriliyor. Rehine, tahta üzerinde 2 çeşit yer değiştirme yapabiliyor:

- Kendi bulunduğu kareyle aynı kenara sahip bir komşu kareye gidebiliyor.
- Kendi bulunduğu kareyle aynı köşeye sahip olan ama aynı kenara sahip olmayan bir komşu kareye gidebiliyor.

Rehine, iki kere üst üste aynı çeşit yer değiştirme yapamıyor. Rehinenin başlangıç karesinden başlayarak tüm kareleri tam olarak bir defa ziyaret edebilmesine olanak sağlayan 1'den büyük doğal sayıları bulunuz. (Rehinenin, başladığı kareye dönmesi gerekmemektedir.)

85. Bir madeni para n kez atılıyor. İki tane turanın ard arda gelmeme ihtimali nedir?

86. Bir çocuk, 2005 taştan oluşan bir öbekteki taşlardan bir tanesini bizim göremeyeceğimiz şekilde işaretliyor. Her hamlede mevcut taşlari hiçbiri boş olmayan üç öbeğe ayırıyoruz. Çocuk, işaretli taşı içermeyen iki öbekten çok taş içereni (eşitlik durumunda herhangi birini) seçip buradaki taşları oyun dışına itiyor. Geri kalan taşları ise karıştırıyor ve hamle yapma sırası tekrar bize geliyor. Oyunda iki taş kaldığı zaman çocuk bize hangi taşın işaretli olduğunu söylüyor. İşaretli taş bulmayı garanti etmek için en az kaç hamle yapmamız gerekir?

87. Tümü birbirinden farklı ve hepsi 1707'den küçük 7 pozitif tam sayı alalım. Bunlar arasından $a < b + c < 4a$'yi sağlayacak biçimde a, b, c (tümü farklı) seçebileceğimizi gösteriniz.

88. 7×7 boyutlarında bir satranç tahtasının dört köşesi atılıyor.

a) En az kaç tane kareyi siyaha boyamak gerekir ki artı şeklinde boyanmamış 5 kare bulunamasın?

b) Her kareye bir tam sayı yazalım. Artı şeklinde alınacak herhangi 5 karedeki sayıların toplamı negatif iken tüm tahtadaki sayıların toplamının pozitif olabileceğini gösteriniz.

89. Sonlu bir X kümesinin üç elemanlı altı kümesi veriliyor. X in elemanlarını iki renkle boyayarak, hiçbir alt kümenin elemanlarının tamamının tek renkte olmayabileceğini gösteriniz.

90. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayıları dizisinde ardışık terimlerin altına, iki terimin aritmetik oratalaması yazılarak yeni bir dizi oluşturuluyor. Oluşturulan bu dizi için de aynı işlem uygulanarak, bu dizideki ardışık terimlerin aritmetik ortalamalarından oluşan bir dizi daha oluşturuluyor. Bu işleme tek elemanlı (a) bir dizi elde edene kadar devam ediliyor. Eğer a sayısı işlemler sırasında sadece en son dizide görülüyorsa bütün işlemler sırasında bir eleman en fazla kaç defa görülebilir?

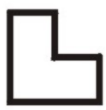
91. 100, 3'ün kuvvetlerinin toplamı biçiminde kaç farklı şekilde yazılabilir?

92. Bir sınıfta n tane öğrenci vardır. Öğretmen N tane soruyu bu öğrencilere dağıtır ve her öğrencisi $1 \leq i \leq n$ için a_i tane soru alır. Tüm a_i'ler eşit olmadığında öğrenciler soru sayılarını eşitlemek için şu şekilde bir yöntem geliştirirler: i ve j öğrencileri $a_i + a_j$ toplamı çiftse her biri $\frac{a_i+a_j}{2}$ soru alır; tekse bir değişiklik yapmazlar. Öğrenciler aşağıdaki durumlar için başlangıçtaki dağılım ne olursa olsun herkes eşit sayıda soru alacak şekilde organize olabilirler mi?

a) n=8, N=80

b) $n = 10$, N=100

93. m, n tam sayılar olmak üzere $m \times n$ birimlik dikdörtgenler şekildeki 3 birimlik parçalarla kaplanmak istenmektedir. Dikdörtgenlerin tamamen kaplanabilmesi için m ve n hangi değerleri alabilir.

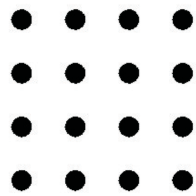


94. A ve B oyuncuları şu kurallarla bir oyun oynamaktadır: oyunun başında m tane n sayısı tahtaya yazılır. Oyuna A oyuncusu başlar ve oyuncular sırayla oynarlar. Sırası gelen oyuncu tahtadaki sayılardan sıfırdan farklı bir tanesini seçer. Eğer seçtiği k sayısı tahtadaki diğer sayıların hiç birisinden büyük değilse, oyuncu bu sayıyı $k-1$ ile

değiştirir, aksi takdirde oyuncu bu sayının yerine tahtadaki en küçük pozitif sayıyı yazar. Tüm sayıların sıfır olmasını ilk sağlayan kişi oyunu kazanır. Eğer her iki oyuncu da en iyi stratejileriyle oynarsa oyunu kim kazanır?

95. 99 tane birbirinden farklı 100'den küçük pozitif tam sayılar verilmiştir. $2, 3, \ldots, 99$ sayının toplamlarının tümü 100 ile bölünemiyorsa verilen tüm sayıların birbirine eşit olduğunu ispatlayınız.

96. Şekildeki gibi 4×4 lük bir satranç tahtasının merkezlerine 16 tane nokta yerleştirilmiştir.



a) Herhangi 3 noktası bir ikizkenar üçgenin köşeleri olmayacak şekilde, 6 nokta seçilebileceğini ispatlayınız.
b) Yukarıdaki özelliklere sahip 7 nokta seçilemeyeceğini ispatlayınız.

97. M kümesi doğal sayıların 2008 elemanlı bir alt kümesi olsun. M kümesinin elemanlarından hiç birinin kümenin herhangi iki elemanının toplamına eşit olmadığı bilindiğine göre bu kümenin en büyük elemanının minimum değeri ne olabilir?

98. 2005 kenarlı düzgün bir çokgenin köşeleri kırmızı, beyaz ve maviye boyanmıştır. Komşu iki köşe farklı renkteyse bu iki köşenin üçüncü renge boyanması işlemine tekrar boyama diyelim.
a) Sonlu sayıda tekrar boyama işleminden sonra bütün köşelerin aynı renge boyanabileceğini gösteriniz.
b) Sonunda elde edilen renk baştaki köşelerin rengine bağlı olarak sadece tek bir renk olarak mı belirlenir?

99. $S = \{1, 2, \ldots, 2004\}$ kümesinin bütün elemanları çeşitli renklere boyanacaktır. $a|b$, $b|c$ ve a, b, c birbirinden farklı olmak üzere (a, b, c) üçlülerinin hiçbirinde a, b ve c sayılarının üçünün de aynı renkte olması istenmiyor. En az kaç farklı renge ihtiyaç vardır?

100. $n \times n$ lik bir tablo; $-1, 0, 1$ sayıları ile dolduracaktır. Her sütundaki ve satırdaki sayıların toplamlarının birbirinden farklı olması isteniyor (bir sütundaki sayıların toplamı, başka bir sütundaki sayıların toplamına eşit olamayacağı gibi herhangi bir

satırdaki sayıların toplamına da eşit olamaz). $n = 4$ ve $n = 5$ durumları için tablo istenilen şekilde doldurulabilir mi?

101. İki bilişim kuramcısı, A ve B, jokerleri çıkartılmış, karıştırılmış bir deste iskambil kağıdı ile bir hile yaparlar. A, seyirciler arasından bir kişinin desteden rastgele beş kart seçmesini ister. Seyirci beş kart seçer ve A'ya uzatır. A, kartları dikkatle inceler ve bir tanesini seyirciye geri verir. Daha sonra, A geriye kalan dört kartı bir şekilde düzenler ve onları ters olarak üst üste koyar. B, olup bitenlerin farkında olmaksızın odaya girer, dört karta bakar ve eksik olan, seyircideki beşinci kartı tespit eder. Bu hile nasıl yapılmıştır?
Not: A ile B arasındaki iletişim, sadece dört kartın düzenlenmesi yoluyla olmuştur. Şifreli bir konuşma, elle işaretleşme, özel sensörlü algılama, işaretli ya da kıvrılmış kartlar gibi dört karttan oluşan destenin yönlendireceği herhangi bir ipucu yoktur.

102. Bir önceki sorudaki iki bilişim kuramcısı şimdi daha büyük bir hileyi deneyecekler. Aslında aynı hile ama bu kez 124 karttan oluşan bir desteyle gösterilerini sergileyecekler. Bu hile nasıl çalışır?
Not: 124, bu hilenin sergilenebileceği maksimum sayıdır. Kartların, dört takımdan oluştuğu ve herbirinin içerisinde 31 kart olduğu ya da Ocak, Mart, Mayıs ve Temmuz ayları kullanılarak bir takvimin günleri olduğu düşünülebilir. Ya da iki deste iskambil kağıdına üçüncü desteden sihirbazın aklında tutabileceği 20 kart ilave edildiği, belki de kartların arka yüzlerinin, kartların hangi paketten alındığı bilinecek şekilde tasarlandığı düşünülebilir. Ya da basitce 1'den 124'e kadar numaralandırılır.

103. Ayşe ve Barış'ın rasgele dizilmiş birer iskambil destesi vardır. Her seferinde destelerin en üstündeki kart alınabilmektedir. Sırayla Ayşe ve Barış kendi destelerinden birer kart alıp karşılaştıracaklardır. Aldıkları kartlar aynı olursa Barış kazanacak, değilse birer kart daha çekip bu şekilde kartlar bitene kadar devam edeceklerdir. Kartlar her seferde farklı çıkarsa Ayşe kazanacaktır. Ayşe'nin kazanma olasılığı nedir?

104. Bir öğrenci bir bilgisayar oyunu oynuyor. Oyun öğrenciye birbirinden farklı, rastgele seçilmiş 2002 sayı veriyor. Daha sonra oyun öğrencinin aşağıdaki kurallara göre işlemler yapmasını istiyor:

    - verilen sayılardan 2 tane seç, birini ikiyle çarp, diğerine ekle ve toplamı tut,
    - sonra, geri kalanlardan 2 sayı seç, birini ikiyle çarp, diğerine ekle; toplamı önceki toplamla çarp ve sonucu tut,
    - yukarıdaki işlemleri 2002 sayının tamamı bitene kadar tekrarla.

    Öğrenci, sondaki çarpım maksimumsa oyunu kazanıyor. Bu durumda kazanan stratejiyi bulup ispatla gösteriniz.

105. $n \times n$ 'lik kare şeklinde bir sırada erkek ve kız öğrenciler oturmaktadır. Her satırda, sütunda ve çapraz doğrular boyunca oturan kız öğrencilerin sayısı bilinmektedir. Buna göre hangi n sayıları için kız öğrencilerin yerini tam olarak belirlenebilir?

106. $n \times n$'lik bir dama tahtasında iki kişilik bir oyun oynanıyor. Birinci oyuncuda sınırsız sayıda beyaz taş, ikinci oyuncuda ise sınırsız sayıda siyah taş var. Oyuna boş bir tahta ile başlanıyor, hamleler sırayla yapılıyor, ve ilk hamleyi birinci oyuncu yapıyor. Her oyuncu sırası geldiğinde tahtadaki boş karelerden istediklerine, bir kareye birden fazla taş gelmeyecek şekilde kendi taşlarından koyuyor. Oyun tüm tahta dolduğunda sona eriyor. Sıra kendinde olan oyuncu oyun bitmemişse tahtaya en az bir taş koymak zorunda.

Oyun bittiğinde, tahtadaki bir taştan başlayarak her adımda sol, sağ, üst veya alt karelerden birindeki aynı renkten bir taşın bulunduğu kareye geçmek suretiyle dama tahtasının kenarlarından birine ulaşmak mümkün değilse bu taşa "hapsedilmiş" diyoruz. Her oyuncunun puanı (karşı renkten hapsedilmiş taşlar) $-$ (kendi renginden hapsedilmiş taşlar) şeklinde hesaplanıyor, ve her iki oyuncu da oyunu mümkün olan en yüksek puanla tamamlayacak şekilde oynuyor. $n*n$'lik tahtada birinci oyuncunun alacagi puan $f(n)$ ise:

$$\frac{2001^2}{3} < f(2003) < \frac{2002^2}{2}$$

olduğunu gosteriniz.

107. $M = \{1, 2, \ldots, 100\}$ kümesi veriliyor. $n \in \mathbb{N}$ ve $a, b \in M$ olmak üzere $a - b = n^2$ ise a ve b farklı alt kümelerde yer alacak şekilde M kümesinin dörtten az alt kümeye ayrılamayacağını gösteriniz. Aynı şartları sağlayacak şekilde M kümesi beş alt kümeye ayrılabilir mi?

108. Hareketine [1,1] noktasından başlayacak bir taşı koordinat sistemi üzerinde aşağıdaki kurallara göre hareket ettiriyoruz:

- Taş bir $[a, b]$ noktasından $[2a, b]$ veya $[b, 2a]$ noktasına hareket edebilir.
- Taş bir $[a, b]$ noktasından eğer $a > b$ ise $[a - b, b]$ noktasına hareket edebilir, eğer $a < b$ ise $[a, b - a]$ noktasına hareket edebilir.

Taş hangi pozitif x, y tam sayıları için $[x, y]$ koordinatına hareket ettirilebilir?

109. 5×9 luk bir satranç tahtasında bir oyun oynanıyor. Başlangıçta, belli bir sayıdaki diskler rastgele ama hiçbir karede birden fazla disk olmayacak şekilde karelere yerleştiriliyor. Her el bütün disklerin aşağıdaki kurallara göre hareket ettirilmesinden oluşmaktadır.

- Her disk bir kare aşağı, yukarı, sağa ve sola hareket ettirilebilir,

- Bir disk eğer bir el aşağı ya da yukarı hareket ettirildiyse bir sonraki el sola ya da sağa oynatılması gerekir, ve sola ya da sağa oynatılmışsa da bir sonraki el aşağı ya da yukarı hareket ettirilmelidir,
- Bir elin sonunda bir karede bir kareden fazla disk bulunamaz.

Oyun eğer başka bir el daha oynanması mümkün değilse bitiyor. Eğer oyuna 33 disk ile başlanırsa oyunu er ya da geç biteceğini ispatlayınız. Ayrıca 32 disk ile sonsuza kadar gidebileceğini gösteriniz.

110. Her bir kenarı n ($n > 2$) uzunluğunda olan bir eşkenar üçgen kenarlarına paralel doğrular çizilerek, her bir kenarı 1 uzunluğundaki n^2 eşkenar üçgene bölünüyor. Bu durumda üçgenler,

    - i ve $i + 1$ numaralı üçgenlerin $i = 1, 2, \ldots, n^2 - 1$ için en az bir ortak noktası olmalıdır.
    - i ve $i + 2$ numaralı üçgenlerin $i = 1, 2, \ldots, n^2 - 2$ için en az bir ortak noktası olmalıdır.

    kurallarını sağlayacak şekilde 1'den n^2 ye kadar numaralandırılabilir mi gösteriniz.

111. $(n+1)\times(n-1)$'lik bir tabloda kareler, herhangi iki satır ve iki sütunun kesişimindeki dört kare aynı renkte olmayacak şekilde üç renge boyanıyor. n'nin en büyük değerini bulunuz.

112. $m \times n$'lik bir matrise sayılar yazılmıştır. Bir satırdaki veya bir sütundaki tüm sayıların işaretleri değiştirilebilir. Bu işlemi sonlu sayıda yaparak verilmiş matrisin, her satırındaki ve sütunundaki sayıların toplamının negatif olmadığı bir matrise getirilebileceğini ispatlayınız.

113. Bir çember üzerine $N = 21$ olmak üzere $a_1, a_2, \ldots, a_N$ gerçel sayıları dizilmiş olsun. Ardışık konumdaki her 21 sayının toplamı en fazla 21 ve yine ardışık konumdaki her 13 sayının toplamı en fazla 13 ise $a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ toplamının en büyük değerini alması için, $a_1 = a_2 = \ldots = a_N = 1$ olması gerektiğini ispatlayınız.

114. Negatif olmayan bir n tam sayısı ve $(2n+1)\times(2n+1)$ bir satranç tahtası kareleri siyah ve beyaz renkte (normal satranç tahtası diziliminde) veriliyor. Burada $1 < m < 2n+1$ eşitsizliğini sağlayan her m için eğer satranç tahtasındaki bir $m\times m$ karenin alanının yarısından fazlası siyah renkteyse bu kareye S-kare diyelim. Bu durumda berilen satranç tahtası bir S-kare ise tahtadaki S-karelerin sayısını n cinsinden bulunuz.

115. Güneş tahtaya 5 sayı yazıyor. Ateş tahtadan bir sayı seçip kalan dört sayıdan seçilen x, y, z sayılarıyla $x + y - z$ i hesaplayıp ilk seçilen sayının yerine yazıyor.

Ateş başlangıçta Güneş'in yazdığı sayılardan bağımsız olarak tahtadaki beş sayıyı eşitleyebilir mi ?

116. Bir adada her biri ya hep doğru söyleyen ya da hep yalan söyleyen $n > 1$ aborjin vardır. Her aborjinin kendi olmadığı gruptan en az bir arkadaşı vardır. Her bir aborjine arkadaşlarından hep yalan söyleyenlerin mi daha çok, hep doğru söyleyenlerin mi daha çok, yoksa hep yalan söyleyenlerle hep doğru söyleyenlerin aynı sayıda mı olduğu sorulduğunda bütün aborjinler yalan söyleyen arkadaşlarının çoğunlukta olduğu cevabını veriyorlar. Aborjinlerden birisi seçilip yalan söylediği iddiasıyla hapse atılıyor. Kalan $n-1$ aborjine tekrar aynı soru soruluyor. Bu sefer aborjinlerin hepsi doğru söyleyen arkadaşlarının daha çok olduğu cevabını veriyorlar. Hapse atılan aborjinin daha önceden hep doğru mu yoksa hep yalan mı söylediğini ve adada daha çok hep yalan söyleyen mi yoksa hep doğru söyleyen aborjin mi olduğunu bulunuz.

117. Bir öğretmen tahtanın başına ve sonuna 1 yazıyor. İlk öğrenci tahtada yazılı sayıların arasına 2 yazıyor. İkinci öğrenci tahtada yazılı sayılardan ardışık her iki sayının arasına toplamlarını yazıyor yani tahtada $1, 3, 2, 3, 1$ yazılmış oluyor. Sonraki öğrenci aynı kuralla yazma işlemine devam ediyor ve tahtada $1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1$ yazılmış oluyor. n inci öğrenciden sonra tahtada yazılı sayıların toplamını bulunuz.

118. Bir kareyi öyle 5 parçaya bölünüz ki daha sonra parçaları birbiriyle birleştirerek birbirinden ayrı alanlara sahip üç farklı kare oluşturabilelim.

119. Hangi n tam sayıları için $n^2 \mathrm{x} n^2$ 'lik bir satranç tahtası 1 'den n^2 ye kadar olan sayıların her biri, her satır, her sütun ve $n \mathrm{x} n$ 'lik bloklarda sadece 1 defa görülecek şekilde yazılabilir?

120. Başlangıçta tüm biri kareleri beyaz olan $n \times n$ satranç tahtasının birim karelerinden k tanesi siyaha boyanmıştır. Boyama işlemi nasıl yapılırsa yapılsın, köşeleri siyah karelerin merkezinde bulunacak şekilde bir paralel kenar bulunmasını garanti edebilmek için k nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

121. Bir topluluk n evli çiftten oluşmaktadır. Her çiftteki eşlerin boyları arasındaki fark 10 cm den azdır. Her $t = 1, 2, \ldots, n$ için, erkekler arasında boy sırasına göre t. inci sırada yer alan erkek ile kadınlar arasındaki boy sırasına göre k. inci sırada yer alan kadın arasındaki boy farkının da 10 cm den az olduğunu gösteriniz.

122. Pozitif tam sayılar kümesi iki ayrık kümeye nasıl ayrılırsa ayrılsın, kümelerden en az birisinde, o kümedeki iki farklı sayının aritmetik ortalamasının da bulunacağını gösteriniz.

123. Bir kara tahtada dokuz tane 0; bir tane 1 yazılmıştır. Her hamlede bu sayılardan ikisi seçilip silinmekte ve her birisinin yerine aritmetik ortalamaları yazılmaktadır. Sonlu sayıda uygulanan hamlelerden sonra tahtada yar alan on sayı arasında yer alabilecek en küçük değer ne olur?

124. Sekiz ortaklı bir firmaya ait kasanın kapısı üzerinde sekiz tane kilit bulunmaktadır. Kilitlerin her birisinin anahtarı 5 farklı ortağa dağıtıldığına göre, bir araya geldiklerinde tüm kilitleri açabilecek iki ortak bulunabileceğini gösteriniz.

125. $\{1, 2, \ldots, 20\}$ kümesinin üç elemanlı ve elemanlarının çarpımı 4 ile bölünen alt kümelerinin sayısını bulunuz.

126. 9×9 satranç tahtasının birim karelerine 65 tane karınca yerleştirilmiştir. Her hamlede her karınca, bulunduğu karenin yatay veya dikey komşularından birisine geçmektedir. Karıncalar üst üste iki yatay veya iki dikey hamle yapmadığına göre, sonlu sayıda hamle sonra en az bir karede en az iki karınca bulunacağını gösteriniz.

127. Dışbükey bir onikigenin her kenarı ve her köşegeni 12 renkten biriyle boyanmıştır. Boyama işleminin nasıl yapıldığı bilinmeksizin, herhangi farklı üç renk seçildiğinde, kenarları bu renklerle boyanmış bir üçgen bulunması garanti edilebilir mi?

128. Sadece a, b ve c harfleri kullanılarak oluşturuluan n terimli bir dizide çift sayıda a bulunması olasılığını hesaplayınız.

129. Dik Kartezyen koordinat sisteminin (a, b) koordinatlı noktasında bulunan bir pire aşağıdaki üç noktadan birisine sıçrayabilmektedir:
- $(2a, b)$ koordinatlı nokta,
- $(a, 2b)$ koordinatlı nokta,
- $(a - b, b)$ koordinatlı nokta [$a > b$ ise] veya $(a, b - a)$ koordinatlı nokta [$a < b$ ise].

Başlangıçta $(1, 1)$ noktasında bulunan pirenin erişebileceği noktaların kümesini belirleyiniz.

130. Bir çiçekçi her buket için 2 veya 3 adet; her çelenk için 6 veya 7 adet yaprak kullanmaktadır. Çiçekçi, aldığı bir siparişi hazırlamak için 4 düzine yaprağın yetersiz kaldığını, 5 düzinenin ise fazla geldiğini görüyor. Sipariş kaç buket ve kaç çelenkten oluşmaktadır?

131. 16 adadan oluşan bir ülkede bir deniz yolları işletmesi, herhangi iki ada arasında aktarmasız yapılacak her yolculuk içi bir biletin gerektiği ve aşağıdaki özellikleri sağlayan gemi seferleri planlamıştır.
- Her adadan diğer adaların en az birisine tek biletle ulaşılabilir.
- Herhangi iki ada arasında doğrudan karşılıklı seferler tanımlı değildir.

- Hangi on ada seçilirse seçilsin, birisinden başlayıp tüm adalara uğrayarak ve tam olarak 10 bilet kullanılarak başlangıç adasına ulaşmak mümkündür.

Seçilen herhangi 11 ada için de birisinden başlanıp, hepsine uğrayarak ve tam olarak 11 bilet kullanarak başlangıç adasına dönmenin mümkün olduğunu gösteriniz.

132. Dik kartezyen koordinat sisteminde x ve y tam sayılar olmak üzere, $\{(x, y)|0 \leq x, y \leq 99\}$ kümesindeki her noktaya bir öğrenci yerleştirilecektir. Herhangi iki erkek öğrenci birbirini görememek koşulu ile, düzleme en fazla kaç erkek öğrenci yerleştirilebilir?

133. Bir çember üzerinde 98 beyaz nokta işaretlenmiştir. Ateş ile Güneş, sıra ile, bu noktalardan (daha önce birleştirilmemiş olan) herhangi ikisini seçerek ikisini de siyaha boyar ve bunları dpğru parçası ile birleştirir. Son beyaz noktayı boyayan oyunu kazanır. İlk hamleyi Ateş'in yapması halinde hangi oyuncu galibiyeti garanti edecek bir yol izleyebilir?

134. $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin $B_1, \ldots B_k$ alt kümelerinin herhangi ikisinin en fazla iki ortak elemanı olduğuna göre, k en fazla hangi değeri alabilir?

   A kümesinin 1, 2 ve 3 elemanlı tüm alt kümelerinin aldığımızda herhangi ikisinin en fazla iki ortak elemanı olan bir alt kümeler topluluğu seçmiş oluruz. O halde $k \geq C(n, 1) + C(n, 2) + C(n, 3) = \frac{n^3+5n}{6}$ dır.

135. 8×8 satranç tahtasının, 21 tane 3×1 dikdörtgen ile kaplanabilmesinin, birim karelerden hangisinin çıkarılması ile mümkün olacağını belirleyiniz.

SONLU MATEMATİK ÇÖZÜMLER

1. Bir kenarı n birim olan bir kare, n^2 tane birim kareye bölünüyor ve her kare kırmızı, beyaz ya da maviye boyanıyor. Böyle bir boyamada, bu karenin bir satır veya sütununda aynı renkte en az üç tane birim kare olmasının kaçınılmaz olması için, n değeri en küçük ne olmalıdır?

   Çözüm. Cevap 7'dir. Çünkü, $n = 7$ iken, ($49 = 3 \cdot 16 + 1$ olduğundan) çekmece prensibine göre (açıklamalara bakınız) aynı renkte en az 17 birim kare bulunur. Buradan yola çıkarak, $17 = 7 \cdot 2 + 3$ olduğundan, aynı prensip bize elimizdeki 7 satırdan en az birinde, en az üç tane aynı renkte birim kare olması gerektiğini söyler. Aynı durum sütunlar için de geçerlidir. $n = 6$ için çözümün geçerli olmadığı aşağıdaki örnekte görülmektedir.

   $$\begin{array}{cccccc} k & m & b & k & m & b \\ m & b & k & m & b & k \\ b & k & m & b & k & m \\ k & m & b & k & m & b \\ m & b & k & m & b & k \\ b & k & m & b & k & m \end{array}$$

   Aynı tablo $n \leq 6$ durumu için de, karşı örnek bulmak için kullanılabilir.

2. Ayşe'nin, Barış'tan bir fazla madeni parası vardır. Her ikisi de bütün paralarını aynı anda fırlatıyorlar ve ortaya çıkan tura sayısını gözlüyorlar. Paraların her iki yüzünün de gelme ihtimalinin eşit olduğununa göre, Ayşe'nin Barış'tan daha fazla tura elde etme ihtimali nedir?

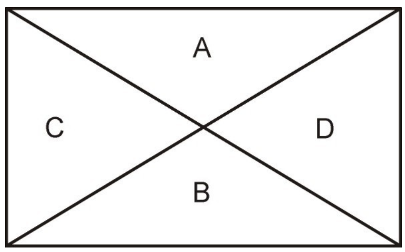
   Çözüm. Ya Ayşe Barış'tan daha çok tura atacaktır, ya da Ayşe Barış'tan daha çok yazı atacaktır. Ancak Ayşe tam olarak bir fazla madeni paraya sahip olduğu için, her ikisi birden olamaz. Simetriden dolayı, birbirinden bağımsız, eşi olmayan bu iki durum eşit ihtimalle gerçekleşir. Bu yüzden, Ayşe'nin Barış'tan daha fazla tura elde etme ihtimali $\frac{1}{2}$' dir. Bu olasılığın, oyuncuların sahip oldukları madeni paraların sayısından bağımsız olması sürpriz olabilir.

3. Bir kenarının uzunluğu 1 birim olan bir eşkenar üçgenin iç bölgesinden alınan 5 noktadan en az ikisinin arasındaki mesafenin $\frac{1}{2}$ birimden az olduğunu kanıtlayınız.

   Çözüm. Kenarların orta noktalarını ikişer ikişer birleştirerek dört tane küçük eşkenar üçgen elde edelim. Seçilen 5 noktadan en az ikisi bu eşkenar üçgenlerden birinin üzerinde veya iç bölgesindedir ve bu iki nokta arasındaki mesafe $\frac{1}{2}$ den küçüktür.

4. Bir bahçıvan dikdörtgen şeklindeki bahçesini iki köşegeni kullanarak dört üçgene bölüyor. Bahçıvan bu üçgenlerin her birine bir tür çiçek ekecektir ancak ortak kenarları olan üçgenlerde farklı tür çiçek ekmelidir. Bahçıvanın elinde karanfil, begonya, gül, lale ve sardunya tohumları olduğuna göre, bu işlemi kaç farklı şekilde yapabilir?

Çözüm. A ve B üçgenlerinin sadece bir köşeleri ortak oduğundan, bahçıvan buralara istediği tohumu ekebilir. Öncelikle bu iki üçgene aynı tür tohumu ektiği durumu ele alalım. Burada beş çeşit tohumdan birini seçeceği için A ve B üçgenlerinin tohumları beş farklı şekilde seçilebilir. Daha sonra geri kalan dört tohumdan istediklerini diğer üçgenlere ekmekte serbesttir. Dolayısıyla bu tohumları $4 \cdot 4 = 16$ farklı şekilde seçebilir ve böylece toplamda bu durum için $5 \cdot 16 = 80$ farklı seçimi olur.



Eğer bahçıvan A ve B üçgenlerine farklı tohumlar ekerse, bu $5 \cdot 4 = 20$ farklı şekilde yapılabilir. Diğer üçgenler içinse üçer seçim kalacağından $3 \cdot 3 = 9$ farklı şekilde ekilebilir ki bu da bu durumda toplam $20 \cdot 9 = 180$ farklı ekim yapılabilir demektir. Dolayısıyla her iki durum beraber düşünüldüğünde bahçıvan bahçesine çiçekleri $80 + 180 = 260$ farklı şekilde ekebilir.

5. 6 çift ikiz öğrenciden oluşan bir grup, birbirinin ikizi olan öğrenciler aynı takımda olmamak koşulu ile,

a) 6 kişilik

b) 4 kişilik takımlara kaç değişik şekilde ayrılabilir.

Çözüm. a) İlk takımı oluştururken önce herhangi bir öğrenciyi alabiliriz. Bunu için 12 farklı tercih vardır. Bu öğrenciyi seçtikten sonra geriye kalan 11 öğrenciden seçilen öğrencinin ikizini çıkarttığımızda ikinci öğrencinin seçimi için 10 tercih kalacaktır. Her öğrenci seçtiğimizde sonraki öğrenciyi seçmek için tercih sayımız 2 eksik olacaktır. Ayrıca ilk takımı seçtiğimizde geriye kalan öğrenciler de ikinci takımı oluşturacaktır. Yani ilk takım seçildikten sonra ikinci takım tek şekilde oluşturulabilir. O halde seçimler için $12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ farklı durum vardır.

Ancak, seçimlerde sıralama önemsiz olduğundan her türlü sıralamayı çıkarmamız gerekir. Seçilen 6 öğrenci 6! farklı şekilde sıralanabilir. Ayrıca takımlar için de 2! farklı sıralama vardır. O halde takımlar

$$\frac{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{6! \cdot 2!} = 32$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

b) İlk şıkta ilk takımı seçtiğimiz şekilde bu durumda da ilk takım, öğrencilerin sıralanmalarını çıkarıldığında,

$$\frac{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6}{4!} = 240$$

farklı şekilde seçilebilir. Geriye iki çift ikiz ve ikizleri birinci takımı oluşturan 4 tek öğrenci kalır. İkizler farklı takımlarda olmak zorunda olduğu için 2 çift ikizin ikisi ikinci takımda ikisi üçüncü takımda yer almalıdır. İkinci takım $2 \cdot 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} = 24$ farklı şekilde oluşturulur. Geriye kalan 4 öğrenci de üçüncü takımı oluşturur.

Buraya kadar yapılan hesaplarda öğrencilerin sıralanmalarını göz önüne aldık fakat takımların sıralanmalarını almadık. Üç takım 3! farklı şekilde sıralanır O halde $\frac{240 \cdot 24}{3!} = 960$ farklı şekilde takım oluşturulabilir.

6. Ateş ile Güneş bir çift zar atarak üst yüzlerinde gelen sayıların toplamına dayanan bir oyun oynamaktadırlar. Ateş'in kazanması için sayıların toplamının 12 olması ve Güneş'in kazanması için sayıların toplamının iki sefer üst üste 7 olması gerekmektedir. Oyun biri kazanana kadar devam edeceğine göre, Ateş'in oyunu kazanma olasılığı nedir?

Çözüm. Ateş'in oyunu kazanma olasılığı p olsun. İlk iki atış sonucunda gelebilecek bütün ihtimalleri düşünelim. Aşağıda listelenen, bütün olasılıkları kapsayan ve ikişer ikişer ayrık olan ihtimallere göz atalım:

İlk atışta gelen sayıların toplamı 12 ise (1/36 ihtimal) Ateş kazanır.

İlk atışın sonucu 7 ve ikinci atışın sonucu 12 ise $(1/6 \cdot 1/36 = 1/216$ ihtimal) Ateş kazanır.

İlk iki atışın sonucu 7 ise $(1/6 \cdot 1/6 = 1/36$ ihtimal) Güneş kazanır.

İlk atışın sonucu 7 ve ikinci atışın sonucu 7 veya 12 değilse $(1/6 \cdot 29/36 = 29/216$ ihtimal) Ateş'in kazanma olasılığı p dir.

İlk atışın sonucu 7 veya 12 değilse (29/36 ihtimal) Ateş'in kazanma olasılığı p dir.

Dolayısıyla, $p = 1/36 + 1/216 + (29/216)p + (29/36)p$ buradan da $p = 7/13$ olarak elde edilir ($p > 1/2$ olduğuna dikkat ediniz).

7. İçerisinde kırmızı bir top bulunan torbaya, mavi yada kırmızı olma olasılıkları eşit olan bir top daha atılıyor ve torbadan bir top çekiliyor. Çekilen top kırmızı olduğuna

göre torbaya sonradan atılan topun kırmızı olma olasılığı nedir?

Çözüm. Ddört durum söz konusudur:
Sonradan eklenen top kırmızıdır ve eklenen top çekilmiştir,
Sonradan eklenen top mavidir, diğer top çekilmiştir,
Sonradan eklenen top kırmızıdır, diğer top çekilmiştir,
Sonradan eklenen top mavidir ve eklenen top çekilmiştir.
Fakat çekilen topun kırmızı olduğunu bildiğimiz için son durum geçersizdir. Geriye kalan üç olası durumun ikisinde eklenen top kırmızıdır. Yani çekilen top kırmızı ise eklenen topun da kırmızı olma olasılığı $\frac{2}{3}$ tür.

8. 126'yı geçmeyen ve birbirinden farklı hangi 7 pozitif tam sayıyı alırsak alalım bunların içinde $b < a \leq 2b$ eşitsizliklerini sağlayan a, b sayılarının bulunabileceğini ispatlayınız.

Çözüm. $\{1, 2, 3, \cdots, 126\}$ kümesini 6 alt kümeye ayıralım:
$\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{7, 8, \ldots, 14\}$, $\{15, 16, \ldots, 30\}$, $\{31, 32, \ldots, 62\}$, $\{63, 64, \ldots, 126\}$.
Çekmece ilkesine göre seçilen 7 sayıdan en az 2 tanesi bu 6 kümeden birinde bulunur ve bu durumda verilen eşitsizlikler sağlanır.

9. 1 den 99 a kadar olan sayılardan seçilmiş 10 elemanlı her kümenin toplamları aynı olan iki alt kümeye ayrılabileceğini gösteriniz.

Çözüm. 10 elemanlı kümeden oluşturabileceğimiz $2^{10} - 1 = 1023$ tane boş olmayan alt küme vardır. Bu alt kümelerden her birinin elemanları toplamına bakalım. Bu sayı en fazla $90 + 91 + \cdots + 99 = 945$ olabilir. $945 < 1023$ olduğundan çekmece prensibine göre en azından 2 alt küme için elemanlarının toplamı eşit olur. Bu kümeleri S ve T ile gösterelim. $S - (S \cap T)$ ve $T - (S \cap T)$ kümeleri istenilen ayırımı verir.

10. 1 den 16 ya kadar olan sayıları
a) Düz bir çizgi üzerine
b) Bir çember üzerine
ard arda gelen iki terimin toplamı bir tam kare oluşturacak şekilde dizmek mümkün müdür?

Çözüm. a) Sayıları 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8 şeklinde dizersek istenilen şartı sağlamış oluruz.
b) $4^2 = 16 < 16 + 1$ ve $6^2 = 36 > 15 + 16$ olduğu için 16 dan sonra sadece 9 gelebilir. 16 dan önce gelebilecek herhangi bir sayı olmadığı için verilen sayılar bir çember oluşturacak şekilde dizilemez.

11. Bir şatonun mahzeninde her birinde 12 kilit olan 12 kapının arkasındaki hazinelerini koruyan 7 cüce vardır. Kilitler birbirinden farklıdır ve her cücede bazı kilitlerin anahtarları vardır. Herhangi 3 cüce birlikte bütün kilileri açabilmekte ise cücelerdeki anahtar sayılarının toplamının en az 333 olduğunu gösteriniz.

    Çözüm. İlk dört cücedeki anahtar sayısına a, b, c, d diyelim. Herhangi 3 cüce bütün kilitleri açabildiğine göre en az 144 anahtara sahiplerdir. Yani $a+b+c \geq 144$, $a+b+d \geq 144$, $a+c+d \geq 144$, $b+c+d \geq 144$ olur. Bu dört eşitsizliği taraf tarafa toplarsak $3(a+b+c+d) \geq 4 \cdot 144$ yani $a+b+c+d \geq 192$ buluruz. Son 3 cücede de en az 144 anahtar olduğundan yedi cücelerde en az $192+144 = 336$ anahtar vardır.

12. 20 kişilik bir toplulukta 10 kişi İngilizce, 10 kişi Almanca ve 10 kişi Fransızca biliyor. Bu topluluğun üç kişilik bir alt kümesinde eğer İngilizce bilen en az bir kişi, Almanca bilen en az bir kişi ve Fransızca bilen en az bir kişi varsa, bu alt kümeye bir "komite" deniyor. Böyle bir toplulukta en çok kaç farklı komite olabilir?

    Çözüm. Komitede İngilizce bilen birisi olmak zorundadır. İngilizce bilmeyen 10 kişi $\binom{10}{3}$ farklı şekilde seçilebilir. Yani içinde İngilizce bilen birisi olan 3 kişilik alt küme sayısı $\binom{20}{3} - \binom{10}{3} = 1020$ dir. Buradan en çok 1020 farklı komite olabileceği anlaşılır. Şimdi 1020 farklı komitenin nasıl seçileceğini gösterelim. Tüm dilleri bilen aynı 10 kişi olsun. Komite oluşturmayan alt kümelerin sayısı $\binom{10}{3}$ olduğundan $\binom{20}{3} - \binom{10}{3} = 1020$ farklı komite böyle bir dağılımda mümkündür.

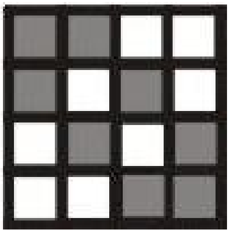
13. Bir zarın karşılıklı iki yüzünde birer nokta, başka iki karşılıklı yüzünde ikişer nokta, geriye kalan iki yüzünde ise üçer nokta vardır. Bu şekilde 8 zar kullanılarak $2 \times 2 \times 2$ bir küp oluşturuluyor ve her yüzündeki toplam noktalar sayılıyor. Bu şekildeki bir kübün yüzlerindeki toplam nokta sayılarının 6 ardışık tam sayı olması mümkün müdür?

    Çözüm. Oluşan yeni küpte, küçük küplerin bir köşesi ortak olacak şekilde yalnızca 3 yüzü görüneceğinden ve bu yüzlerde de 1, 2 ve 3 nokta olduğundan, büyük küpteki noktaların toplam sayısı $8 \cdot (1+2+3) = 48$ olur. Diğer yandan 6 ardışık tam sayının toplamı her zaman tek sayı olacağından (3 tek ve 3 çift sayının toplamı), yüzler üzerinde 6 ardışık tam sayıda nokta olamayacağı açıktır.

14. $n \times n$ lik bir tabloda kareler siyah ve beyaz renge boyanıyor. Herhangi iki satır ve sütunun kesişimindeki dört kare aynı renkte değilse n'nin en büyük değerini bulunuz.

    Çözüm. $n = 4$ için örnek şekilde gösterilmiştir.

    Şimdi $n = 5$ için bu şekilde bir boyamanın mümkün olmadığını gösterelim. Bu şartları sağlayan 5×5 lik bir tablo olsun. Genelliği bozmadan ilk satırın ilk üç sütununu siyah kabul edelim. Kalan dört satırın ilk üç sütununda iki siyah kare



olamaz (Aksi halde soruda istenen şart sağlanmış olur). Demek ki bu dört satırın ilk üç sütununda en az ikişer beyaz kare vardır. Üç sütundan iki sütun üç farklı şekilde seçilebileceği için bu dört satırdan en az iki tanesinde aynı sütunlarda beyaz bulunur ve buradan çelişki elde ederiz.

15. 15 sayıdan oluşan $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ dizisi veriliyor. b_i, bu dizide a_i'den küçük olan sayıların miktarına eşit olacak şekilde bir $b_1, b_2, \ldots, b_{15}$ dizisi oluşturuluyor. (b_k) dizisi 1, 0, 3, 6, 9, 4, 7, 2, 5, 8, 8, 5, 10, 13, 13 olacak şekilde bir $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ dizisi bulunur mu?

Çözüm. Hayır bulunamaz, çünkü (b_k) dizisine bakarsak, bu dizide 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8 sayılarının geçtiğini görürüz fakat 9'dan sonra iki tane 8 gelemez.

16. Keyfi üç komşu sayının toplamı pozitif ve tüm sayıların toplamı negatif olacak şekilde 20 sayı bir sıraya yazılabilir mi?

Çözüm. Evet yazılabilir. $-9, -9, 19, -9, -9, 19, \ldots, 19, -9, -9$ dizisinde herhangi üç komşu sayının toplamı 1'dir ama dizideki tüm sayıların toplamı -12'dir.

17. 99 tane kartın bir yüzüne $1, 2, \ldots, 99$ sayıları yazılmıştır. Kartlar karıştırılır ve öteki yüzlerine yeniden $1, 2, \ldots, 99$ sayıları yazılır. Her kartın iki yüzündeki sayıların toplamı alınır. Bu 99 toplamın çarpımının çift olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Toplam 45 tek sayı 44 çift sayı vardır. Çekmece ilkesinden dolayı en az bir tek sayının arkasina tek sayı yazılmıştır. Bu kartın üzerindeki sayıların toplamı çifttir, dolayısıyla çarpım da çift olur.

18. Her biri farklı boyda olan n kişi, en uzun kişinin her iki yönünde de boy uzunlukları azalacak şekilde sıralanıyorlar.
a) Kaç değişik şekilde sıralanırlar?
a) En uzun kişi ile en kısa kişi arasındaki her iki sırada da boy uzunlukları azalacak şekilde bir daireyi kaç değişik şekilde oluşturabilirler?

Çözüm. a) Önce en uzun kişiyi alalım. İkinci en uzun kişi, en uzun kişinini her iki tarafına da geçebilir, yani 2 olasılığımız var. Üçüncü en uzun kişi de en uzun kişinin her iki tarafına da geçebilir. Bu şekilde, uzundan kısaya doğru, herkesin ,en uzun

insan hariç, geçebileceği iki taraf vardır. O halde toplan 2^{n-1} farklı sıralama vardır.
b) Önce en uzun ve en kısa kişileri daireye yerleştirelim. Bundan sonra,ilk şıkta olduğu gibi, sırayla herkesin iki seçeneği olacaktır. O halde bu kez 2^{n-2} farklı sıralama vardır.

19. $1, 2, \ldots, n$ kümesinin, 1, 2, 3, ve 4'ün herhangi üçünün arka arkaya bulunmadığı tüm permütasyonlarının sayısını n cinsinden bulunuz.

    Çözüm. $n!$ permütasyondan, 1, 2, 3, ve 4'ten üçünün birarada, geriye kalan elemanın da ayrı sayıldığı durumlar çıkarılmalıdır. 1, 2, 3 ve 4'ten bir tanesini 4 farklı şekilde seçebiliriz. Kalan 3 sayı 6 farklı şekilde dizilebilirler. Her durum bize $(n-2)!$ permütasyon verir. Yani 1, 2, 3 ve 4'ten üçünün bir arada, geriye kalan elemanın da ayrı sayıldığı $24(n-2)!$ durum vardır. Bu eleme sırasında 1, 2, 3 ve 4'ü blok halinde barındıran permütasyonlar iki kere çıkarıldığından istenilen permütasyon sayısı $n! - 24(n-2) + 24(n-3)!$ olarak bulunur.

20. Betül 1 den 100 e kadar farklı tam sayıları kullanarak, en büyük elemanı, diğer elemanların çarpımı olacak şekilde kümeler oluşturuyor. Her bir tam sayı en fazla bir kümede yer alıyorsa Betül en çok kaç küme oluşturabilir?

    Çözüm. Her kümede en az 3 eleman olması gerektiği açıktır. Her kümenin en küçük elemanına bakalım. Bu eleman 10'dan küçük olmalıdır çünkü 10 veya daha büyük bir sayı olsaydı, kümenin en büyük elemanı en az $10 \cdot 11 = 110$ olmak zorunda olurdu. Bu durumda en çok 9 küme seçebiliriz. Sorudaki şartları sağlayan 9 küme seçtiğimizi varsayalım, bu durumda kümenin en küçük elemanları $1, 2, 3, \ldots, 9$ olmalıdır. En küçük elemanı 1 olan kümeye bakalım. Bu kümenin en az 3 tane daha elemanı olması gerektiği açıktır. Bu durumda en büyük eleman, 100'den büyük olur ve çelişki elde edilir. Yani seçilen kümelerin sayısı 9'dan küçük olmalıdır. 8 küme için $(2, 17, 34)$, $(3, 16, 48)$, $(4, 15, 60)$, $(5, 14, 70)$, $(6, 13, 78)$, $(7, 12, 84)$, $(8, 11, 88)$, $(9, 10, 90)$ şartları sağlar.

21. Tahtaya 1 den 10 a kadar olan sayılar yazılıyor. İki oyuncu sırayla bu sayılardan birisini seçiyor ve o sayı ile o sayıyı bölen tüm sayıları tahtadan siliyor. Son sayıyı silen oyunu kazanıyor. Bu oyunu kim kazanır?

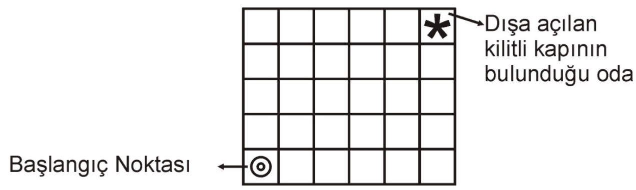
    Çözüm. Bu oyunu birinci oyuncu kazanır. İlk olarak 6 yı seçer ve 1,2,3,6 sayılarını siler. Geriye kalan sayıları $(4, 5)$, $(7, 9)$, $(8, 10)$ şeklinde ikişer ikişer eşleştirir. İkinci oyuncu hangi sayıyı seçerse birinci oyuncu da onun eşini seçerek oyunu kazanır. Burada tek bir kazanma stratejisi yoktur.

22. Dalgın bir profesör iki adet kibrit kutusu alıyor ve ikisini de cebine atıyor. Kibrite ihtiyacı olduğu herhangi bir zaman elini cebine atıyor ve iki kutudan birini rastgele

(eşit olasılıkla) alıyor. Bir gün profesör, daha önce kutudaki son kibriti aldıktan sonra dalgınlıkla tekrar kutuyu cebine atmış olacak ki, eline aldığı kibrit kutusunun boş olduğunu görüyor. Eğer iki kutuda da başlangıçta n tane kibrit çöpü varsa, son durumda diğer kutuda k tane kibrit çöpü olma olasılığı nedir? $(0 \le k \le n)$

Çözüm. Eğer son durumda diğer kutuda k tane kibrit kalıyorsa, bu kutudan daha önce $n-k$ kibrit alınmış olması gerekir. Profesör $(n+1)$. kibriti sol cebindeki kibrit kutusundan almak istemiş olsun. Bu durumda, o zamana kadar $2n-k+1$ adet seçim yapılmış olur ve bu da 2^{2n-k+1} farklı şekilde yapılabilir. Bunların $\binom{2n-k}{k}$ tanesi ise, $(n+1)$. seçimini sol cebinden yapmış olmasıdır. Dolayısıyla profesörün sol cebinden boş bir boş kutu çıkarma olasılığı $\frac{\binom{2n-k}{k}}{2^{2n-k+1}}$ olur. Sağ cebindeki kutunun boş olma olasılığı da aynı olduğuna göre, son durumda boş kutuyu açtığında diğer kutunun içerisinde k tane kibrit çöpü olma olasılığı $\frac{\binom{2n-k}{k}}{2^{2n-k}}$ olur.

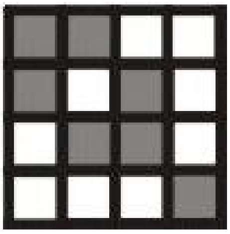
23. Bir binanın odaları $m \times n$ lik bir dörtgen yapı oluşturacak şekildedir (Şekilde 5×6 lık durum gösterilmektedir). Tüm odalarda komşu odalara açılan bir kapı mevcuttur ancak binadaki tek giriş çıkış sağ üstteki odadandır. Bu odanın kapısı mn tane kilitle kitli olup, anahtarların her biri ayrı odadadır. Sol alttaki odada bulunan biri çıkışa ulaşmak için istediği komşu odaya geçmekte serbesttir fakat terk ettiği odaya açılan bütün kapılar odadan çıktığı anda kilitlenmektedir. Bu durumda hangi m ve n değerleri için birinin bütün anahtarları toplayıp binadan ayrılması mümkündür bulunuz ve ispatlayınız.



Çözüm. m veya n'den herhangi birinin tek sayı olması durumunda çözüm açıktır. Bu yüzden m ve n'nin beraber çift olduğu duruma bakalım. Şimdi sol alt odadan sağ üste odaya, bütün odaları yalnızca bir kere ziyaret ederek bir yolun olduğunu kabul edelim. Bu yolda sırasıyla a, b, c ve d; sağa, sola, yukarı ve aşağı olan hareketlerin sayıları olsun. Bu durumda $a-b=n-1$ ve $c-d=m-1$ tek sayılardır. Öyleyse a veya b'den biri tek biri çifttir ve aynı durum c ve d için de geçerlidir. Dolayısıyla $a+b+c+d$ iki tek sayı, iki de çift sayının toplamıdır, yani çifttir. Ancak $a+b+c+d$, toplam hareket sayısıdır ve $mn-1$'e eşittir, yani tektir. Burada çelişkiye ulaştığımıza göre, m ve n beraber çift sayı olamazlar.

24. 4×4 lük bir satranç tahtasına en az kaç yıldız yerleştirilmelidir ki, rastgele 2 satır ve 2 sütundaki yıldızlar silindiğinde satranç tahtasında en az bir yıldız kalsın?

Çözüm. 7 yıldız yeterlidir. Bunu göstermek için 6 yıldızın yetersiz olduğunu gösterelim. 6 yıldız yerleştirildiğinde en az iki sütünda en çok bir yıldız vardır.Diğer iki sütunu sildiğimizde geriye en çok iki yıldız kalır. Bu yıldızların bulunduğu satırların da silinmesiyle geriye yıldız kalmaz.



7 için yıldızları şekildeki gibi dizersek hangi iki satır veya sütunu silersek silelim geriye en az bir yıldız kalır.

25. 30 parçaya bölünmüş çarkıfeleğin üzerine 50, 100, 150, ..., 1500 sayıları rastgele dağıtılmıştır. Üzerinde yazan sayıların toplamı 2350'den büyük ya da 2350'ye eşit olan ardışık üç parça olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Ardışık üçlü toplamlara S_1, S_2, $\ldots S_{30}$ diyelim. $S_1 + S_2 + \ldots + S_{30}$ toplamında 50, 100, 150, ..., 1500 sayıları üçer defa görünecektir. O halde

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \cdots + S_{30} &= 3(50 + 100 + 150 + \cdots + 1500) \\ &= 150(1 + 2 + \cdots + 30) \\ &= 150\left(\frac{30 \cdot 31}{2}\right) = 69750 \end{aligned}$$

olur. $S_1, S_2, \ldots, S_{30}$ 'dan her birinin 2350 'den küçük olduğunu varsayalım. Her biri 50 'nin katı olduğu için en fazla 2300 değerini alabilirler. Buradan

$$S_1 + S_2 + \cdots S_{30} \leq 30 \cdot 2300 = 69000 < 69750$$

eşitsizliği elde edilir. Yani $S_1, S_2, \ldots, S_{30}$ toplamlarından en az bir tanesi 2350'den büyük ya da 2350'ye eşittir.

26. Bir satranç tahtasının üst ve alt kenarları ile sağ ve sol kenarları birleştirilerek bir torus oluşturuluyor. Böyle bir tahtaya birbirinin saldırı karesinde olmayan en fazla kaç tane at koyabiliriz?

Çözüm. En fazla 32 at konabilir. Eğer satranç tahtasının klasik olarak siyah beyaz olarak renklendirildiği düşünülürse tüm atların bir renge konması en fazla at koymaya izin vereck çözümdür. Bundan daha iyisinin olmayacağını görmek için k tane at konulduğunu kabul edelim. Her at 8 kareye saldırmaktadır ve hiç bir boş kare 8'den fazla at tarafından saldırılamaz. Bu nedenle $8k \leq 8(64-k)$ yani $k \leq 32$ dir.

27. İki kişi 2009×2009 boyutlu kareli alanda oyun oynuyorlar. Birinci oyuncu merkezdeki kareye "$\times$" yazıyor; ikinci oyuncu bunun etrafındaki 8 kareden herhangi birisine "O" yazıyor. Bundan sonra birinci oyuncu, dolu karelerin komşuluğundaki karelerden birisine "$\times$" yazıyor ve bu şekilde oynamaya devam ediyorlar. Birinci oyuncu köşedeki karelerden herhangi birisine "$\times$" yazabilirse oyunu kazanıyor. Diğer durumlarda oyunu ikinci oyuncu kazanıyor. İki oyuncu da en iyi şekilde oynarsa oyunu kim kazanır?

    Çözüm. Oyunu birinci oyuncu kazanır. Birinci oyuncu, rakibinin işaretlediği karenin merkeze göre simetriğini işaretlerse köşelerden iki tanesine "$\times$" yazmayı garantiler ve ikinci oyuncu nasıl oynarsa oynasın her durumda oyunu kazanır.

28. 500 oyuncunun katıldığı bir satranç turnuvasında üç kez yenilgi alan oyuncular elenmektedir. Turnuva tamamlandığında en az ve en fazla kaç karşılaşma yapılmış olabilir?

    Çözüm. Turnuvadan elenen her oyuncu için, o oyuncunun yenildiği üç karşılaşma bulunur. Elenmiş olan 499 oyuncu için toplam 1497 karşılaşma yapılmıştır. Turnuvanın galibi yenilgi yüzü görmemişse tüm karşılaşmaların sayısı da 1497'dir. Turnuvanın galibi en fazla iki kez yenilmiş olabileceği için oynanan karşılaşmaların sayısının alabileceği en büyük değer 1499 olur.

29. $A = \{1, 2, ..., 2006\}$ olsun. A kümesinden seçilen alt kümelerin herhangi iki tanesinin kesişiminde tam olarak 2004 tane elemanın olacağı en fazla kaç tane alt küme seçilebilir.

    Çözüm. Cevap 2005 elemanlı alt kümelerin sayısı, yani 2006'dır. Öncelikle her alt küme en az 2004 elemana sahip olmalıdır. Tam olarak 2004 elemana sahip bir küme varsa, 2004 elemanlı başka bir küme olamaz. Çünkü bu durumda kesişimlerinde 2004'den daha az eleman olacaktır. Seçilen küme dışında sadece 2 tane daha alt küme seçilebilir. Bunlar da 2004 elemanlı kümede bulunmayan 2 elemanı ayrı ayır içeren 2005 elemanlı kümelerdir.
    Seçilen kümelerden hiçbiri 2004 elemandan oluşmuyorsa, 2006 elemanlı A kümesinin kendisini ve 2005 elemana sahip 2006 alt küme arasından seçimimizi yapabiliriz. Fakat seçilen kümeler arasında A varsa, A ile başka bir kümenin kesişiminde 2004'ten daha fazla eleman olacaktır. Bu yüzden A kümesi seçilmemelidir. Dolayısıyla çözüm 2005 elemanlı bütün alt kümleri seçmektir. Bu kümeler arasından seçilen herhangi 2 kümenin kesişiminde 2004 olacaktır. 2005 elemana sahip 2006 farklı alt küme olduğundan, cevap 2006'dır.

30. Bir sinemanın gişesininde insanlar bilet alırken doğum günleri kaydedilmekte ve daha önce bilet almış herhangi bir müşteriyle aynı günde doğmuş olan sıradaki ilk kişiye, bir defaya mahsus bedava bilet verilmektedir. Bilet gişesinin önünde duran Ali, istediği zaman kuyruğa girebilmektedir (Örneğin kuyruğa birinci sırada girebilir ya da ellinci sırada girebilir). Ali diğer insanların doğum günlerini bilmemektedir. Ali, kaçıncı sırada kuyruğa girerse bedava bilet alma şansı en fazla olur? (Bir senenin 365 gün olduğunu ve doğum günlerinin gelme olasılıklarının eşit olduğunu kabul edin. Sorunun çözümü için bir hesap makinesi veya bilgisayara gereksinim duyabilirsiniz.)

Çözüm. Ali'nin sıraya n. kişi olarak girdiğinde bedava bilet kazanma olaslığı $p(n)$ olsun. Ali'nin bedava bilet kazanabilmesi için önündeki $n-1$ kişinin yılın farklı günlerinde doğmuş olması ve Ali'nin bu $n-1$ kişiden herhangi biriyle aynı gün doğmuş olması gerekir. Dolayısıyla Ali'nin bedava bilet kazanma olasılığı, önündeki $n-1$ kişinin yılın farklı günlerinde doğmuş olma olaslığı ile Ali'nin içlerinden biriyle aynı gün doğmuş olma olasılıklarının çarpımına eşittir. Buradan

$$p(n) = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-(n-2))}{365^{n-1}} \frac{n-1}{365}$$

elde ederiz. O halde, bizim bulmamız gereken $p(n) > p(n+1)$ (denk bir ifadeyle $\frac{p(n)}{p(n+1)} > 1$) eşitsizliğini sağlayan en küçük n tam sayı değeridir. $\frac{p(n)}{p(n+1)} = \frac{365}{366-n} \cdot \frac{n-1}{n}$ ve $\frac{p(n)}{p(n+1)} > 1$, $365n - 365 > 366n - n^2$ olmasını gerektirir. Buradan $n^2 - n - 365 > 0$ olduğunu görürüz. Bu ikinci dereceden polinomun kökleri yaklaşık olarak -18.6 ve 19.6 dır. $n > 0$ olduğu için $n = 20$ olmalıdır. Başka bir deyişle Ali'nin bedava bilet kazanabilmek için yapabileceği en iyi şey yirminci sırada kuyruğa girmektir.

31. Birbirinin eşi ve yüzleri 1 den 6 ya kadar sayılarla numaralandırılmış olan 27 beyaz küpten tek bir küp oluşturuluyor ve oluşturulan kübün dış yüzeyi siyaha boyanıyor. Daha sonra bu küp tekrar parçalara ayırılıyor ve küpler bir torbada karıştırıldıktan sonra torbadan rsastgele seçilerek tekrar tek bir küp oluşturuluyor. Oluşturulan bu kübün dış yüzeyinin tamamen siyah olma olasılığı kaçtır?

Çözüm. Bu problem bir sayma problemidir. Dış yüzü siyah olan küplerin sayısını, oluşturulabilecek bütün küplerin sayısına bölerek dış yüzü siyah bir küp oluşturma oranını bulacağız. Siyaha boyanan küp parçalara ayırıldıktan sonra ortaya 4 çeşit küp çıkacaktır: 8 adet 3 yüzü siyah küp, 12 adet 2 yüzü siyah küp, 6 adet tek yüzü siyah küp ve 1 adet beyaz küp.
İlk gruptaki küpler köşelere 3 er farklı şekilde konulabilir. O halde 8 küp için 3^8 farklı ihtimal bulunur. Bu 8 küp de $8!$ şekilde köşelere yerleştirilir. Dolayısıyla 3 yüzü siyah küpler $3^8 \cdot 8!$ farklı şekilde yerleştirilir.
İkinci gruptaki 12 küpün her biri için 2 ihtimal bulunuyor. Bu küpler kenarlara

12! şekilde yerleştirilir. Dolayısıyla 2 yüzü siyah küpler için $2^{12} \cdot 12!$ farklı şekilde yerleştirilir.

Üçüncü gruptaki 6 küp için 4'er ihtimal bulunur. Bu küpler de küpün yan yüzlerinin ortasına 6! şekilde yerleşebilir. Bu küpler için de $4 \cdot 6!$ olasılık bulunur.

Beyaz küp ise oluşturulan küpün ortasına 24 farklı şekilde yerleştirilebilir. O halde toplam $3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12! \cdot 4^6 \cdot 6! \cdot 24$ dış yüzü siyah küp oluşturulabilir. Her küp 24 farklı şekilde yerleştirilebilir. Bu küpler 27! farklı şekilde sıralanırlar. Dolayısıyla toplam $24^{27} \cdot 27!$ küp oluşturulabilir.

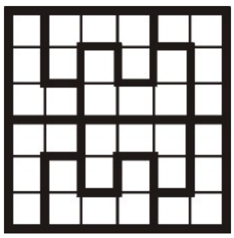
Sonuç olarak oluşturulan bir küpün dış yüzünün siyah olma olasılığı

$$\frac{3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12! \cdot 4^6 \cdot 6! \cdot 24}{24^{27} \cdot 27!} \approx 1.83 \cdot 10^{-37}$$

olur.

32. Aşağıdaki şekilleri aynı sayıda kullanarak $n \times n$ lik bir satranç tahtasının, şekiller üst üste binmeyecek şekilde kaplanabilmesi için gerekli en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

Çözüm. Her iki şekilden de k tane kullandığımızı düşünelim. Bu durumda bu parçalarla $4k + 5k = 9k$'lık bir alanı kaplarız yani $n^2 = 9k$ olur. Dolayısıyla n^2 9 ile, n ise 3 ile bölünebilir. $n = 3$ ise, 3×3 satranç tahtasını bu şekillerle kaplamamız gerekir ancak bunun olamayacağı açıktır. Sonuç olarak $n \geq 2 \cdot 3 = 6$ olmalıdır ki zaten 6×6 satranç tahtası için örnek aşağıda verilmiştir yani cevap 6'dır.



33. ABC eşkenar üçgeninin kenarlarının uzunluğu N 'dir. N bir tam sayı olmak üzere, eşkenar üçgen, içine kenarlarına paralel çizgiler çizilerek her birinin kenar uzunluğu 1 olan eşkenar üçgenlere bölünüyor. A köşesinden başlayarak oluşan eşkenar üçgenlerin içinden geçen bir yol oluşturuluyor. Her üçgenden en fazla 1 defa geçiliyor ve iki üçgen arasında ortak olan kenarlarından geçilerek yol alınıyorsa, diğer bir köşeye giden bir yol en çok kaç üçgenden geçerek oluşturulabilir?

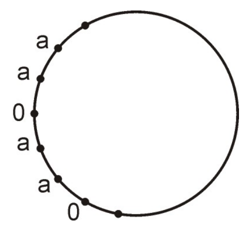
Çözüm. Oluşan üçgenleri soldan sağa doğru siyah ve beyaz olarak boyayalım. Ortak bir kenarı olan hiç bir üçgen aynı renkte olmayacağı için çizilen yol siyah ve beyaz üçgenler arasından geçmelidir. r. satırda r tane siyah ve $r-1$ tane beyaz üçgen vardır.
Yani toplam $\sum_{r=1}^{N} r = \frac{(N+1)\cdot N}{2}$ siyah ve $\sum_{r=1}^{N} r = \frac{N\cdot(N-1)}{2}$ beyaz üçgen vardır. Yol siyah üçgenden başlayacağı için en fazla beyaz üçgen sayısının iki katından bir fazla sayıda üçgenden geçen bir yol çizilebilir. Yolda geçilen üçgen sayısı en fazla

$$\frac{2N(N-1)}{2} + 1 = N^2 - N + 1$$

olabilir.

34. Hangi n tam sayısı için bir çember üzerine dizilmiş hepsi birden sıfıra eşit olmayan ve komşu iki sayının farkının mutlak değerine eşit olan n tane gerçel sayı bulunabilir?

Çözüm. Her bir sayı komşu iki sayının farkının mutlak değerine eşit olduğu için çember üzerindeki sayılar negatif değillerdir. a bu sayıların en büyüğü olsun. b ve c, $b \geq c \geq 0$ olmak üzere, a nın komşu sayıları olsunlar. $b \leq a$ ve $b - c \leq a$ olması yalnızca $b = a$ ve $c = 0$ iken sağlandığı için çember üzerindeki herhangi bir a sayısının komşuları a ve 0 olmalı ve çember üzerindeki 0 elemanının komşuları eşit olmalıdır. Bu durumda çember üzerindeki sayılar a, a, 0, a, a, 0, … olmak zorundadır. Yani n, 3 ün bir katıdır.



Ayrıca herhangi bir $n = 3k$ ve $a > 0$ için a, a, 0, a, a, 0, …, a, a, 0 (k tane a, a, 0) istenen koşulları sağlar.

35. 67 öğrenciden oluşan bir grup, 1 den 6 e kadar numaralanmış 6 soru içeren bir sınava katılır. Sınavda, soru n ye verilen doğru yanıt için n puan kazanılırken, aynı soruya verilen yanlış yanıtla n puan kaybediliyor.
a) Herhangi iki skor arasındaki fark en az kaç olabilir.
b) En az 4 katılımcının aynı skoru elde etmesi gerektiğini gösteriniz.
c) En az iki öğrencinin altı soruya da aynı yanıtları verdiğini gösteriniz.

Çözüm.
a) İki öğrenci birbirine en yakın puanı alabilmek için en düşük puanlı soruya farklı

cevap verip kalan sorulara aynı cevabı vermiş olmalılar. Bu durumda aralarındaki puan farkı 2 dir.

b) Alınabilecek en yüksek puan $1+2+3+4+5+6=21$ ve en düşük puan $-1-2-3-4-5-6=-21$ dir. Herhangi iki skor farkı çift olduğu için alınacak bütün skorlar $S=\{-21,-19,-17,\dots,-1,1,\dots,17,19,21\}$ kümseinden olmalıdır. S kümesinin 22 elemanı olduğu için her skor en fazla 3 kişi tarafından alınırsa 1 kişi önceki 22 skordan birini almak zorunda kalır. Dolayısıyla en az bir skor 4 kişi tarafından alınır.

c) Her skor $\pm1\pm2\pm3\pm4\pm5\pm6$ şeklinde olmalıdır. $2^6=64$ farklı skor elde edilebilir. Yani sınavda 64 farklı cevap kağıdı verilebilir. Sınıfta 67 öğrenci olduğu için en az iki öğrenci aynı kağıdı vermek zorundadır.

36. Bir öğrenciye 7 bölüme ayrılmış bir disk ile mavi, kırmızı, sarı ve yeşil kalemler veriliyor ve disk üzerindeki her bölümü boyaması isteniyor. Her renk bir defadan çok kullanılabilir veya hiç kullanılmayabilir. Bitişik olan bölümler farklı renklere boyanmak koşulu ile disk kaç değişik şekilde boyanabilir?

Çözüm. n uzunluğunda bir renk dizisi ardışık elemanları farklı olmak koşulunu sağlıyor ve ilk eleman(renk) ile son elemanı farklı ise bu diziyi uygun olarak adlandıralım. x_n 'de n uzunluğundaki uygun dizilerin sayısı olsun. O halde soruda istenilen sayı $\frac{x_7}{7}$ 'dir.

$n+2$ uzunluğundaki, ilk elemanı ile $(n+1)$. elemanı farklı olan uygun bir dizi, $n+1$ uzunluğundaki uygun bir diziye $(n+2)$. eleman eklenerek elde edilir. Bu şekildeki uygun dizilerin sayısı $x_{n+1}\cdot(4-2)=2x_{n+1}$ 'dir. $n+2$ uzunluğunda ve ilk elemanı ile $(n+1)$. elemanı aynı olan uygun bir dizi, n uzunluğundaki uygun bir diziye $(n+1)$. eleman, ilk elemanın aynısı olarak seçilip, $(n+2)$. elemanın eklenmesi ile oluşturulur. Bu dizilerin sayısı da $x_n\cdot 1\cdot(4-1)=3x_n$ 'dir.

O halde $x_{n+2}=2x_{n+1}+3x_n$ indirgeme bağıntısı ve $x_1=0$, $x_2=4\cdot 3=12$ koşulları kullanılarak

$$x_n=3(-1)^n+3^n$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

Buradan $\frac{x_7}{7}=\frac{3(-1)^7+3^7}{7}=312$ farklı boyama olduğu bulunur.

37. Bir öğretmen $1\le k\le 50$ olmak üzere bir k pozitif tam sayısı tutuyor. Sınıftaki n çocuğun her biri sırayla, bu sayının kendi belirledikleri bir tam sayıya bölünüp bölünmediğini soruyorlar. Öğretmen "evet" veya "hayır" yanıtı veriyor. Soru ve yanıtları herkes duyuyor. Sayının bulunmasını garanti etmek için n en az kaç olmalıdır?

Çözüm. Eğer öğretmenin tuttuğu sayı 1 ise, bunu öğrenmenin tek yolu, 50'den küçük tüm asal sayıların sorulup hepsinden "hayır" yanıtı alınmasıdır. 50'den küçük asal sayılar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 'di r (15 tane). Öyleyse $n \geq 15$'tir.

Öğrenciler şöyle bir strateji izleyebilirler: Yukarıda listelenen asalları küçükten büyüğe doğru sormaya başlarlar. "Hayır" cevabı aldıkça sormaya devam ederler. Bir p asalı için "Evet" cevabı alındığı takdirde, sayının p çarpanı bulunduğu için, k/p'nin ne olduğunu aramak yeterli olacaktır. Öte yandan k/p'nin asal çarpanları en az p, en çok ise k için yazdığımız asal listesinin son elemanından önceki bir asal olabilir (her m için m ile $2m$ arasında bir asalın varlığı teoremi, bu sorunun genellemesinin de yapılabileceğini gösterir. Bu soru açısından ise bunu listeden gözlemlemek yeterlidir). p'yi tekrar sormamız gerekmesine rağmen son asaldan yaptığımız tasarruf soru sayısını artırmadan sayıyı bulabileceğimizi gösterir. Yani sayıyı bulmayı garanti etmek için en az 15 az soru sorulmalıdır.

38. a, b, c harflerinden oluşan bir alfabe veriliyor. İçinde çift sayıda a bulunan n harfli kelimelerin sayısını bulunuz.

Çözüm. $2k$ tane a olsun, bunlar $\binom{n}{2k}$ değişik şekilde, geri kalanlarda 2^{n-2k} şekilde yerleşebilir. Bu nedenle cevap $\sum_k \binom{n}{2k} 2^{n-2k}$'tır. Bunu hesaplamak için

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2\sum_k \binom{n}{2k} 2^{2k}$$

eşitliğini kullanacağız. Buradan,

$$\frac{1}{2}2^n[(1+1/2)^n + (1-1/2)^n] = 2\frac{1}{2}(3^n+1)$$

elde edilir.

39. 5×7 lik bir satranç tahtasını sınırlarını geçmeden, her karede aynı miktarda kat olma koşulu ile birden fazla kat yapabilerek L harfi ile (2×2 lik bir kareden 1×1 lik bir köşesini çıkararak elde edilen şekil) kaplayabilir miyiz?

Çözüm. Bu şekilde kaplamamız imkansızdır. Her karede k tane kat olacak şekilde tahtayı kaplayabildiğimizi kabul edelim. Satırları $1, \ldots, 5$ olarak sütunları $1, \ldots, 7$ olarak adlandıralım ve tek sayılı sutün ve satırların kesişimindeki 12 kareyi düşünelim. Bu karelerden her biri k tane L ile kaplanmalı yani en az $12k$ tane L kullanılıyor olmalı. Ama bunlar $3.12k > 35k$ tane kare kaplar ve bir çelişki elde edilir.

40. Her birisi 5 koşucudan oluşan 10 takım arasında yapılan maraton yarışmasını n inci sırada bitiren koşucu için takımına n puan verilmiş ve yarışmayı en az toplam puana ulaşan tek bir takım kazanmıştır. Yarışmayı aynı sırada tamamlayan iki koşucu

olmadığını kabul ederek kazanan takımın puanının alabileceği değerlerin sayısını bulunuz.

Çözüm. Tüm takımların toplam puanı $1+2+\cdots+50 = 1275$ 'dir. Kazanan takımın puanı $\frac{1275}{10} = 127.5$ dan büyük olamaz. Öte yandan alınabilecek en küçük toplam puan da $1+2+3+4+5 = 15$ 'tir. Ancak, kazanan takımın tek olması göz önüne alındığında daha ayrıntılı bir hesaplama yapabiliriz. Kazanan takımın puanı s ise takımların toplam puanı en az $s + 9(s+1) = 10s + 9$ ve buradan $s \leq 126$ elde edilir. O halde kazanan takımın toplam puanının alabileceği değerlerin sayısı $126 - 15 + 1 = 112$ dir.

41. $\{1, 2, 3, \cdots, 49, 50\}$ kümesinin, herhangi iki elemanının toplamı 7 ile bölünmemek koşulu ile oluşturulabilecek bir alt kümesinde en fazla kaç eleman olabilir?

Çözüm: Verilen kümedeki sayıları, 7 ile bölündüğünde verikleri kalana göre 7 kümeye ayıralım:

$$\begin{aligned}
F_0 &= \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\} \\
F_1 &= \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50\} \\
F_2 &= \{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\} \\
F_3 &= \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\} \\
F_4 &= \{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\} \\
F_5 &= \{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47\} \\
F_6 &= \{6, 13, 20, 27, 34, 41, 48\}
\end{aligned}$$

Yazılacak olan alt kümede F_0 kümesinden en fazla bir eleman olabilir. Birisi F_1 diğeri F_6 'dan seçilen iki eleman aynı anda kullanılamaz. Aynı şekilde, birisi F_2 diğeri F_5 'ten ve birisi F_3 'ten diğeri F_4 'ten seçilen iki sayı aynı anda kullanılamaz. Bu durumda, en büyük alt küme olan F_1 in tüm elemanları, F_2 (veya F_5) 'in tüm elemanları, F_3 (veya F_4) 'ün tüm elemanları ile F_0 dan bir eleman alınarak 8+7+7+1 = 23 elemanlı bir alt küme oluşturulabilir.

42. Bir l_1 doğrusunun üzerinde A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 noktaları; l_2 doğrusunun üzerinde de B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 noktaları işaretlenmiş ve A_iB_j $(i, j = 1, ..., 5)$ doğruları çizilmiştir. Toplam 27 doğrunun yer aldığı bu şekilde, doğruların kesişim yeri olan noktaların sayısının en fazla kaç olabileceğini bulunuz.

Çözüm. l_1 ve l_2 üzerinde bulunmayan her kesişim noktası, A_iB_j ve A_kB_m, $(i \neq k, j \neq m)$ gibi iki doğru tarafından belirlenmiş olduğundan, l_1 ve l_2 üzerinde ikişer nokta tanımlamış olur. l_1 üzerinde iki nokta $\binom{5}{2} = 10$ farklı şekilde seçilebilir. Aynı şekilde l_2 üzerinde de iki nokta 10 farklı şekilde seçilebileceğinden, l_1 ve l_2 üzerinde bulunmayan kesişim noktalarının sayısı 100 dür. Öte yandan verilen 10 nokta ve l_1 ile l_2 nin kesişim noktası da hesaba katılarak, noktaların sayısının en fazla 111 olacağı anlaşılır.

43. Tüm tam sayılar kümesini hiç birisi boş olmayan ve ikili olarak kesişmeyen üç alt kümeye ayırmak istiyoruz. Bu işlemin farklı alt kümelerden seçilen her a, b için aşağıdaki şartı sağlayacak şekilde yapılması mümkün müdür?
a) üçüncü alt kümede $a + b = 2c$ denklemini sağlayan bir c elemanının bulunması
b) üçüncü alt kümede $a + b = c_1 + c_2$ denklemini sağlayan c_1 ve c_2 elemanlarının bulunması

Çözüm. **a)** Mümkün değildir. Verilen şarta göre herhangi iki alt kümeden alınan rasgele birer elemanın toplamı çift olmalıdır. Bu seçilecek her iki alt kümedeki elemanların hepsinin tek ya da hepsinin çift olmasını gerektirir. Bu imkansızdır.
b) Verilen şartı sağlayan ayırıma bir örnek olarak $A = \{3k;\ k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3k+1;\ k \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{3k+2;\ k \in \mathbb{Z}\}$ kümelerini alabiliriz .

44. Aralarından tam 4 tanesinin adı Ateş olan 12 öğrenci, her birisi 4 öğrenciden oluşan matematik, satranç ve müzik gruplarına dağılmıştır.Her grupta en az bir Ateş bulunması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm. Öğrencilerin bu gruplara dağılabileceği hallerin sayısı

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = \frac{12!}{(4!)^3} = 34.650$$

dir. Tüm Ateş'lerin aynı grupta olabileceği hallerin sayısı

$$\binom{3}{1}\binom{4}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = \frac{3 * 8!}{(4!)^2} = 210$$

dur. 3 Ateşin bir grupta toplanıp 1 Ateş'in başka bir grupta olması

$$\binom{3}{1}\binom{4}{3}\binom{8}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{7}{3}\binom{4}{4} = 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 35 = 6.720$$

farklı şekilde gerçekleşebilir. 2 Ateşin bir grupta, diğer iki Ateşin de bir diğer grupta toplanması da

$$\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{4} = 3 \cdot 6 \cdot 28 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 15 \cdot 1 = 15.120$$

farklı şekilde gerçekleşebilir.

Böylece her grupta en az 1 Ateşin bulunmadığı durumların sayısı $210+6720+15120 = 22050$ olur. Aranan olasılık $\frac{15120}{34650} = \frac{24}{55}$ tir.

45. İçlerinde sırasıyla $1, 2, \ldots, 20$ litre su bulunan 20 tane varil vardır. Eğer A varilinde en az B varilindeki kadar su varsa, A varilinden B variline, B varilinde olan su kadar su aktarılabilmektedir. Aksi takdirde A varilinden B variline su aktarılamamaktadır. Bu kurala göre bir dizi aktarma yaptıktan sonra:
a) 5 varilde 3 litre su ve kalan 15 varilde sırasıyla $6, 7, \ldots, 20$ litre su elde edebilir miyiz?
b) Bir varilde 210 litre su elde edebilir miyiz?
(Her varilin hacminin en az 120 litre olduğunu kabul ediniz.)

Çözüm. A varilinden B variline su aktaracağımızı farz edelim. Varillerdeki su miktarlarını tek ve çift sayı olma durumuna göre aşağıdaki tablolara göre inceleyebiliriz.

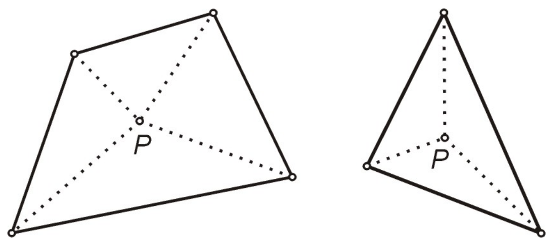
Önce	
A	B
Çift	Çift
Tek	Çift
Çift	Tek
Tek	Tek

Sonra	
A	B
Çift	Çift
Tek	Çift
Tek	Çift
Çift	Çift

Buna göre B varilinde bulunan suyun litre olarak miktarı hep bir çift sayı olacaktır. Bu gözlemimize göre:
a) Herhangi bir aktarımdan sonra taşıdığı su miktarı, litre cinsinden 'tek' olan varillerin sayısı azalır veya aynı kalır. Bu sebeple, istenilen konuma ulaşmak mümkün değildir. Sonuç olarak, Başlangıç durumundaki varilin dışında, içinde 3 litre su bulunan başka bir varil elde edemeyiz.
b) Eğer bütün suyu tek bir varilde toplamış olsaydık, bir önceki adımda her birinin içinde 105 litre su olan iki varilimiz olması gerekirdi. 105 tek sayı olduğu için 105 litre su bulunduran bir varil elde edemeyiz.

46. Herhangi üç tanesi bir doğru üzerinde olmayan 2005 noktanın oluşturduğu kümeye T kümesi diyelim. Bu durumda bu 2005 noktadan herhangi biri için, köşeleri T kümesinden olan ve bu noktanın iç kısımında bulunduğu üçgenlerin sayısının bir çift tam sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. T kümesinden herhangi bir nokta alalım ve bu noktaya P noktası diyelim. $T - \{P\}$ kümesinden herhangi dört noktanın oluşturduğu kümeye ise S kümesi diyelim. Bu durumda S kümesinin noktaları ya bir konveks dörtgen oluşturur ya da noktalardan biri diğer üçünün oluşturduğu üçgenin içindedir. Aşağıdaki iki değişik şekilden de görülebileceği gibi, P noktası bu noktalara göre bakıldığında (T kümesindeki noktalardan herhangi üçü aynı doğru üzerinde olmadığı için) ya tam olarak iki üçgenin içindedir ya da bunların içinde değildir yani sıfır üçgenin içindedir.



Dolayısıyla, olası bütün $\binom{2004}{4}$ tane S kümesine bakıp P noktasını barındıran üçgenlerin sayısını topladığımızda, topladığımız her sayı bir çift sayı olacağından toplam da bir çift sayı olacaktır. Bu sayıya k diyelim. Ancak burada P noktasını barındıran üçgenleri tam olarak 2001 kere saymış olduk çünkü üç nokta verildiğinde bu noktaları dörde tamamlamak için seçilebilecek tam olarak 2001 başka nokta vardır. Dolayısıyla P noktasını barındıran üçgenlerin toplam sayısı $k/2001$ olur. Sonuç olarak k çift, 2001 ise tek sayı olduğundan P noktasını barındıran üçgenlerin sayısı bir çift tam sayıdır.

47. Kenarları 10 olan eşkenar bir üçgen, iç tarafından kenarlarına paralel olacak şekilde doğrularla bölünerek 100 adet eşkenar birim üçgene ayrılıyor. İçeride yeni oluşan ve kenarları büyük üçgene paralel olan eşkenar üçgen sayısını bulunuz.

Çözüm. Öncelikle problemin genel halini ele alalım. Büyük üçgenimizin her kenarını n lik parçalara bölerek a_n adet eşkenar birim üçgen elde ettiğimizi düşünelim. Problemin çözümündeki ana düşüncemiz a_n dizisi için bir indirgeme ilişkisi bulmak olacaktır.Büyük eşkenar üçgenimizin köşeleri A, B ve C olsun. ABC eşkenar üçgeninin her kenarını $n+1$ eşit parçaya bölelim yani her kenarına n tane bir kenarı BC üzerinde olan $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ adet üçgen saymış oluruz.
Şimdi de BC üzerinde tek bir köşesi olan üçgenleri inceleyelim. BC üzerinde her kesişim noktası için birer adet 1 altbirimlik eşkenar üçgen, $n-2$ altbirimlik 2 eşkenar üçgen, ... saymış oluruz. Dolayısıyla, bir köşesi BC kenarı üzerinde olan toplam üçgen sayısı $n + (n-2) + (n-4) + ...$ olur.
Buradan indirgeme ilişkimiz

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(n+2)(n+1)}{2} + n + (n-2) + (n-4) + ... \text{ olur.}$$

n yerine $n+1$ koyduğumuzda

$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{(n+3)(n+2)}{2} + (n+1) + (n-1) + (n-3) + ...$ bulunur.

Alt alta topladığımısda ise:

$a_{n+2} = a_n + \frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+3)(n+2)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + x_n + \frac{(n+2)(3n+5)}{2}$ buluruz.

Aradığımız sayı a_{10} olduğundan

$a_{10} = a_8 + \frac{10(3.8+5)}{2} = a_8 + 145 = ... = a_0 + 315 = 315$

Dolayısıyla aradığımız üçgen sayısı 315 tir.

48. Bir zar n kere atıldıktan sonra zarın üzerindeki bütün sayıların en az bir kere gelmiş olma olasılığına q diyelim. $q > \frac{1}{2}$ olmasını sağlayan en küçük n tam sayısı nedir? (Çözüm için hesap makinesine gereksinim duyabilirsiniz.)

Çözüm. $n \geq m \geq 1$ olmak üzere, $p(n,m)$, zar n kere atıldıktan sonra m farklı yüzünün gelme olasılığını belirtsin. Eğer n zar atımı sonrası m farklı yüz gelmişse burada iki durum vardır: ya önceki $n-1$ atım sonrasında m farklı yüz gelmiştir ve n. atımda yeni bir yüz gelmemiştir ya da $n-1$ atım sonrasında $m-1$ farklı yüz gelmiştir ve n. atımda yeni bir yüz gelmiştir. Buradan:

$$\begin{aligned} p(n,m) &= (\text{yeni yüz gelmeme olaslığı})p(n-1,m) \\ &+ (\text{yeni yüz gelme olasılığı})p(n-1,m-1) \end{aligned}$$

olur ve buradan da

$$p(n,m) = \frac{m}{6}p(n-1,m) + \frac{7-m}{6}p(n-1,m-1)$$

bulunur. $q = p(n,6) > \frac{1}{2}$ koşulunu sağlayan en küçük n değerini bulmamız gerekir. $p(12,6) = 0.438\ldots$ ve $p(13,6) = 0.514\ldots$ olduğu için $n = 13$ buluruz.

49. $n \geq 3$ olmak üzere $A_1A_2\ldots A_n$ kenar uzunlukları birbirine eşit bir çokgen olsun. $A_iA_jA_k$ biçimindeki geniş açılı üçgenlerin sayısını bulunuz.

Çözüm. Çözümü iki durumda inceleyeceğiz. Öncelikle n çift sayı olsun. A_1 köşesindeki açı geniş olan üçgenlerin sayısını bulalım. Bu üçgenler $j < k$ ve $k-j > \frac{n}{2}$ olan $A_1A_jA_k$ üçgenleridir. İstenilen şartı sağlayan üçgenlerin sayısı $2 < j < k$ ve $k-j > \frac{n}{2}$ biçimindeki (j,k) ikililerinin sayısına eşittir. 2 ile $\frac{n}{2}-1$ arasındaki bir j

sayısı için $\frac{n}{2} - j$ tane k değeri vardır. Buradan olası bütün (j, k) ikililerinin sayısı

$$\left(\frac{n}{2} - 2\right) + \left(\frac{n}{2} - 3\right) + \cdots + 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{1}{8}(n-2)(n-4)$$

olarak bulunur. A_1 köşesindeki açı geniş olan üçgenlerin sayısı $\frac{1}{8}(n-2)(n-4)$ dir. Buradan geniş açılı $A_iA_jA_k$ üçgenlerinin sayısı $\frac{1}{8}n(n-2)(n-4)$ olarak bulunur.

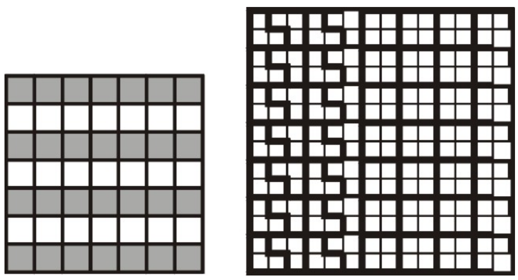
İkinci olarak n tek sayı olsun. Önceki duruma benzer olarak A_1 köşesindeki açı geniş olan $A_1A_jA_k$ üçgenlerin sayısını bulalım. Bu durumda $2 < j < k$ ve $k - j > \frac{n}{2}$ biçimindeki (j, k) ikililerinin sayısı

$$\frac{n-3}{2} + \frac{n-3}{2} + \cdots + 1 = = \frac{(n-1)(n-3)}{8}$$

Dolayısıyla geniş açılı üçgenlerin sayısı $\frac{n(n-1)(n-3)}{8}$ olarak bulunur.

50. Aşağıdaki şekillerden aynı sayıda kullanarak $n \times n$ bir satranç tahtasının, şekiller üst üste binmeyecek şekilde kaplanabilmesi için gerekli en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

Çözüm. Her iki şekilden de k tane kullandığımızı düşünelim. Bu durumda bu parçalarla $4k + 3k = 7k$'lık bir alanı kaplarız yani $n^2 = 7k$ olur. Dolayısıyla n^2 7 ile, yani n 7 ile bölünebilir. $n = 7$ ise, 7×7 satranç tahtasını bu şekillerle kaplamamız gerekir ancak bunun olamayacağı kolayca görülebilir. Eğer 7×7 satranç tahtasını aşağıdaki gibi boyarsak, 4 kutudan oluşan her şekil iki taralı, iki de düz kutu kaplayacaktır. Dolayısıyla 3 kutudan oluşan şekillerin, $28 - 14 = 14$ taralı, $21 - 14 = 7$ düz kutu kaplaması gerekir; yani her 3 kutuluk şeklin, 2 taralı kutu kaplaması gerekir ancak her satırda 7 kutu olduğundan bunun olamayacağı aşikardır.



Bu bilgiler ışığında, $n \geq 2 \cdot 7 = 14$ olması gerektiği açıktır. Dolayısıyla, 14×14 satranç tahtasını şekildeki gibi kaplayabileceğimize göre, istenen kaplama türü en küçük $n = 14$ için vardır.

51. 4 kırmızı, 8 mavi bilye bir halka şeklinde rasgele diziliyor. 2 kırmızı bilyenin yan yana gelmeme ihtimali nedir?

Çözüm. Cevap $\frac{7}{33}$'tür. Önce hiçbir kırmızı topun yanyana olmadığı durumları sayacağız, ardından bu sayıyı bütün farklı bilye dizilimlerin sayısına böleceğiz.
Sayma işlemini kolaylaştırmak için bir tane mavi bilye seçip, geri kalan 11 bilyeyi bi çizgi şeklinde dizelim. Bu yanyana konulan 11 bilyenin dizilminde 2 tane kırmızı bilyenin yanyana gelmeme ihtimali, halka şeklinde dizilen 12 bilyeninki ile aynı olacaktır. Sıraya önem vermeden n tane elemandan k tanesi $\binom{n}{k}$ yani n'in k'lı kombinayonları kadar farklı şekilde seçilebilir. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ olduğu için, 4 tanesi kırmızı olan 11 bilye $\binom{4}{11} = 330$ farklı şekilde dizilebilir.
2 kırmızı bilyenin yanyana olmaması için her iki kırmızı bilyenin arasında en az bir tane mavi bilye olmalıdır. Bu yüzden 4 kırmızı bilyeyi önce yanyana koyarsak, 3 tane mavi bilyeyi yanyana olan her iki kırmızı bilyenin arasına birer birer koyarsak, kırmızı bilyeleri birbirinden ayırmış oluruz. 3 mavi bilyeyi bu şekilde sabitledikten sonra, elimizde 4 tane mavi bilye kalıyor. 4 kırmızı bilyeyi birer ayraç olarak düşünürsek, geriye kalan 4 mavi bilye bu ayraçların sağında veya solunda yer alabilirler. 4 ayraç ve 4 bilyeyi $\binom{8}{4} = 70$ farklı şekilde dizebiliriz.
Dolayısıyla iki kırmızı bilyenin yanyana olmama ihtimali $\frac{70}{330} = \frac{7}{33}$ tür.

52. Bir kişi bir hafta (7 gün) boyunca 7 kişilik arkadaş grubundan her akşam farklı bir 3 kişilik grubu yemeğe davet etmek istiyor. Herbir arkadaşının en az bir kere davet edilmesi şartı ile bu bir haftalık davetiye listesinin kaç farklı şekilde hazırlanabileceğini bulunuz.

Çözüm. U ile 7 kişilik arkadaş grubundan oluşturulabilecek 3 kişilik alt grupların kümesini gösterelim. Bu durumda $|U| = \binom{7}{3} = 35$ 'tir. S ile de U dan 7 gün için yapılabilecek davetiye listesini gösterirsek, $|S| = P(35, 7) = 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$ olur. A_i, S den yapılan ve i inci $(1 \le i \le 7)$ arkadaşın hiç davet edilmediği seçimlerin kümesi olursa

$$|A_i| = P(\binom{6}{3}, 7) = P(20, 7)$$

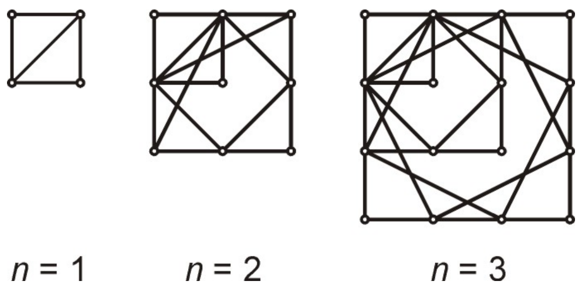
bulunur. Ayrıca $i \neq j$ için $|A_i \cap A_j = P(\binom{5}{3}, 7) = P(10, 7)$ ve $i \neq j \neq k$ için $A_i \cap A_j \cap A_k = \{\}$ olur. Bu durumda sorunun cevabı olan $|\bigcap_{i=1}^{7} A_i^c|$ yı içerme-dışarma prensibinden
$|S| - \sum_{i=1}^{7} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le 7} |A_i \cap A_j| = |S| - 7|A_1| + \binom{7}{2} |A_1 \cap A_2| = P(35, 7) - 7P(20, 7) + 21P(10, 7)$ olarak buluruz.

53. $1 \leq a \leq 10,\ b \geq 0,\ c \geq 2,\ 20 \leq d \leq 30$ şartlarını sağlayan ve toplamları $a+b+c+d = 100$ olan kaç tane tam sayı bulunabileceğini hesaplayınız.

Çözüm. Çözümde içerme-dışarma prensibini kullanacağız. $a \geq 1,\ b \geq 0,\ c \geq 2,\ d \geq 20$ ve $a+b+c+d = 100$ şartlarını sağlayan $\binom{80}{3}$ tane çözüm bulunur. Bunlar arasından
$a \geq 11,\ b \geq 0,\ c \geq 2,\ d \geq 20$ şartlarını sağlayan çözümlerin kümesini A ile,
$a \geq 1,\ b \geq 0,\ c \geq 2,\ d \geq 31$ şartlarını sağlayan çözümlerin kümesini B ile
gösterirsek $|A| = \binom{70}{3}$, $|B| = \binom{69}{3}$, $|A \cap B| = \binom{70}{3}$ ve bu durumda $|A \cup B| = \binom{70}{3} + \binom{69}{3} - \binom{59}{3} = 74625$ olur.
Sonuç olarak $1 \leq a \leq 10,\ b \geq 0,\ c \geq 2,\ 20 \leq d \leq 30$ şartını sağlayan ve toplamları $a+b+c+d = 100$ olan çözümlerin sayısı $\binom{80}{3} - \binom{70}{3} - \binom{69}{3} + \binom{59}{3} = 7535$ dir.

54. Herhangi bir $n \geq 1$ tam sayısı için köşeleri negatif olmayan ve n 'yi aşmayan koordinatlı noktalarda bulunan kareler gözönüne alındığında
a) $n = 4$ için kaç tane kare vardır.
b) Herhangi bir n için genel bir formül bulunuz.

Çözüm. a) Öncelikle $n = 1, 2, 3$ için kaçar tane kare olduğunu hesaplayalım. $n = 1$ için kenarı 1 olan sadece bir tane yer vardır. $n = 2$ için kenarı 1 olan kare için 2.2 tane, kenarı 2 ve $\sqrt{2}$ olan kareler içinse 1er tane yer vardır. $n = 3$ için kenarı 1 olan kare için 3.3 tane, kenarı 2 ve $\sqrt{2}$ olan kareler için 2.2 şer tane yer vardır, kenarı 3 olan kare için ise 1 tane yer vardır.



Açıkça görülebileceği gibi her n için 1 tane yeni kareye yer vardır. Aynı boyuttaki kare için n arttıkça $2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ tane yer vardır. Ayrıca her m boyutlu karenin içine $m-1$ tane birbirinden farklı kare çizilebileceği için verilen her n için

$$R_n = 1.n^2 + 2.(n-1)^2 + 3.(n-2)^2 + \ldots + n.1^2$$

formülünü elde ederiz. $n = 4$ için $R_4 = 50$ bulunur.
b) $R_n - R_{n-1} = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2$ ve $n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

eşitlikleri kullanılarak

$$R_(n) = \frac{(n+1)^2.((n+1)^2 - 1)}{12}$$

elde edilir.

55. Ali, Burak, Ceren ve Derya bir tünelin girişinde bulunuyorlar. Sadece bir fenerleri var ve fener olmadan kimse tünele girmek istemiyor. Fakat tünelden aynı anda en fazla iki kişi geçebiliyor. Ali, Burak, Ceren ve Derya'nın tüneli geçmeleri sırasıyla $1, 2, 5$ ve 10 dakika sürüyor. Herkesin tünelin diğer tarafına geçmesi için en az ne kadar zamana ihtiyaçları vardır?

Çözüm. Herkesin tünelin diğer tarafına geçmesi 17 dakika sürer.
Ali ve Burak tüneli birlikte geçerler (2 dakika);
Ali feneri geri götürür (1 dakika);
Ceren ve Derya tüneli birlikte geçerler (10 dakika);
Burak feneri geri götürür (2 dakika);
Ali ve Burak birlikte tüneli geçerler0 (2 dakika).

Toplamda 17 dakikadan daha kısa bir sürede tünel geçilemez çünkü tünelden tek defa geçilmeli ve fener çift defa geri götürülmelidir. Yani tünelden en az 3 defa gidiş yönünde ve 2 defa dönüş yönünde geçilmeli. Eğer tünelden 7 ya da daha fazla sayıda geçilirse zaman 17 dakikadan kısa süremez. Eğer tünelden 5 kere geçilirse gidiş yönündeki geçişler en az 2 dakika sürer ve Derya ile birlikte geçiş 10 dakika sürer. Eğer her seferinde Ali feneri geri getirirse Ceren ve Derya tüneli birlikte geçemezler. Bu durumda süre en az $10+5+2+2\cdot 1 = 19$ dakika sürer. Eğer dönüşlerden birinde başka birisi feneri geri getirirse en az $10+2+2+2+1 = 17$ dakikaya ihtiyaç vardır.

56. 12 kişi yuvarlak bir masanın etrafında oturmaktadır. Bu 12 kişi çiftlerin elleri birbirini kesişmemek koşulu ile kaç farklı şekilde el sıkışabilir?

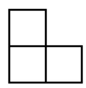
Çözüm. N_p, yuvarlak bir masa etrafında oturan $2p$ kişinin, çiftlerin elleri kesişmeyecek şekildeki, farklı el sıkışmalarının sayısı olsun. Masadaki bir kişiyi sabit tutalım ve buna A diyelim. El sıkışma çiftler halinde yapıldığı için A ve el sıkıştığı kişinin her iki yanındaki insan sayısı çift olmalıdır.
Eğer masada 2 kişi varsa el sıkışma 1 şekilde olabilir: $N_1 = 1$.
Masada 4 kişi varsa A, B ya da D ile el sıkışabilir. A, C ile el sıkıştığı takdirde ise, B, D ile el sıkışacak ve çiftelerin elleri kesişecektir. O halde $N_2 = 2$ 'dir.
Masada 6 kişi olduğunda A ya yanındaki B veya F ile el sıkışacak ve kalan 4 kişi N_2 şekilde el sıkışacak, ya da karşısındaki D ile el sıkışacak ve B C ile, E F ile N_1 şekilde el sıkışacaklardır. Bu da $N_3 = 2N_2 + N_1^2 = 5$ değişik şekilde olur.
Eğer 8 kişi varsa, A ya yanıda oturan B veya H ile el sıkışıp, kalan 6 kişi N_3 farklı şekilde el sıkışacak ya da D veya F 'den birisi ile el sıkışacak, aralarında kalan 2 kişi

N_1, diğer taraftakı 4 kişi de N_2 şekilde el sıkışacaktır. Yani $N_4 = 2N_1 + 2N_1N_2 = 14$ 'tür.
Benzer şekilde $N_5 = 2N_4 + 2N_3N_1 + N_2^2 = 42$ ve $N_6 = 2N_5 + 2N_4N_1 + 2N_3N_2 = 132$ elde edilir. O halde 6 çift, yuvarlak bir masa etrafında elleri kesişmemek koşulu ile 132 farklı şekilde el sıkışabilirler. ($1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$ şeklinde devam eden sayılara Katalan sayıları denir.)

57. $(0,0)$ merkezli ve $x^2 + y^2 \leq 1$ bölgesini kaplayan bir göl, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ çemberi, ve $k = 1, \cdots, n$ olmak üzere $(0,0)$'dan başlayan ve x ekseni ile $360^o \times k/n$ açı yapan yarı doğrular vasıtasi ile $2n$ parçaya bölünmüştür. Gölde $4n+1$ kurbağa bulunmaktadır ve her hamlede 3 veya daha çok kurbağa bulunan bölgelerden birindeki üç kurbağa, bu bölge ile sınır paylaşan diğer üç bölgeye sıçramaktadır. Her bölgenin kendisinde veya komşularının üçünde birden kurbağa bulunduğu bir duruma ulaşabileceğini gösteriniz.

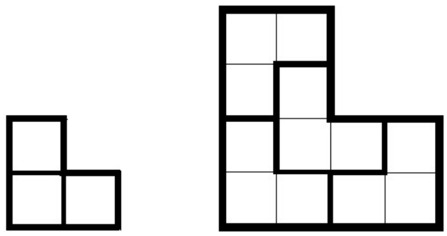
Çözüm. $4n + 1 > 2 \cdot (2n)$ olduğu için hamle yapılamayacak bir duruma gelinmeyeceği açıktır. Verilen her bölgeden dışarıya doğru oyunun en az bir anında sıçrama (bundan sonra bu bölgede yapılan bir "hamle" şeklinde ifade edilecek) yapılacağını gösterelim: Sonsuz hamle yapılan bölgeler vardır. Eğer sonlu hamle yapılan bölgeler de olsaydı (bölgelerin oluşturduğu çizge bağlantılı olduğu için) bunlardan biri sonsuz hamle yapılan bölgelerden birine komşu olurdu. Fakat bu durumda bu bölgedeki kurbağa sayısı sınır tanımayan şekilde artardı, çelişki. Öyleyse her bölgede en az bir kez bir kurbağanın bulunmuş olduğunu söyleyebiliriz.
Şimdi, oyunun bir anında ikisi de kurbağa içermeyen komşu ikililerin sayısına bakalım. Yapılan hamle, o hamlede boşalabilecek tek bölgenin tüm komşularına kurbağa gönderdiği için, bu sayının artmasi imkansızdır. Sayıya katkıda bulunan iki komşudan birine kurbağa geldiği anda da bu sayı azalacaktır. Bu durumda bu sayi sonlu hamle sonunda sıfıra ulaşacaktır. Bu da istenilen önermeyi kanıtlar.

58. $m \times n$ dikdörtgensel bir alan şekildeki köşe parçalarıyla kaplanıyor. Bir kaplamaya, içinde kenar uzunluğu m ya da n'den küçük olan ve köşe parçalarıyla kaplanmış bir dikdörtgen bulunmuyorsa, düzgün diyelim. Bu durumda bir $\{m, n\}$ çifti için bir $m \times n$ düzgün kaplama varsa $2m \times 2n$ için de bir düzgün kaplama olduğunu gösteriniz.



Çözüm. Dört köşe parçasını şekildeki gibi yerleştirelim. Bu durumda köşe parçası sayısını ikiye katladık ve açıkça görülebileceği gibi bu köşeleri $m \times n$ düzgün kaplamayı yaptığımız gibi yerleştirerek $2m \times 2n$ düzgün kaplama elde edebiliriz.

59. Bir kübün her köşesinde farklı doğal sayılar ve her kenarında da kenarın bağladığı



iki köşedeki sayının en büyük ortak böleni vardır. Köşelerdeki sayıların toplamı kenarlardaki sayıların toplamına eşit olabilir mi?

Çözüm. Bu olası değildir. $a > b$ koşulunu sağlayan iki doğal sayı için $(a, b) \leq b$ ve $(a, b) \leq a/2$ eşitsizlikleri sağlanır. Dolayısıyla, eğer $a \neq b$ ise, $(a, b) \leq (a + b)/3$ doğrudur. Tüm 12 kenar için bu denklemler yazılıp toplandığında istenen durumun sadece $(a, b) = (a + b)/3$ koşulu her kenar için sağlandığında mümkün olabileceği görülür. Bu durumda a ile b'den büyük olanı küçüğün iki katıdır. $a = 2b$ varsayıp a köşesinden çıkan diğer kenarların ucundaki köşelerdeki sayılara c ve d diyelim. Bu sayılar a'nın ya yarısı ya da iki katı olmak zorundadır. Eğer en az biri a'dan küçükse b'ye eşit olmalıdır; aksi halde bu iki sayı birbirlerine eşittir. Her iki durum da başlangıç varsayımımızla çelişmekterdir.

60. Üç çavuş ve daha düşük rütbeli birkaç askerden oluşan bir takımda çavuşlar sıra ile görev almaktadır. Takım komutanı şu emirleri vermiştir.

- Her gün en az bir emir verilmelidir.
- Hiçbir asker ikiden fazla görev alamaz, ve herhangi bir askere günde birden fazla emir verilemez.
- Emir verilen askerlerin listesi herhangi iki gün için aynı olamaz.
- Bu kuralları çiğneyen ilk çavuş hapse atılacaktır.

Çavuşların aralarında önceden anlaşamadıkları bir durumda, belirtilen kurallara uyarak emir verebilecek ve hapse girmemeyi başarabilecek en az bir çavuş var mıdır?

Çözüm. Üçüncü sırada görev alan çavuş hapse girmekten kurtulabilir. Birinci, ikinci ve üçüncü çavuşlar tarafından ardışık olarak verilen emir dizilerinin toplamına tur diyelim. Hapisten kurtulmak için, her turun sonuncu günü komutayı alan üçüncü çavuş yalnız ve yalnızca önceki iki gün boyunca bir emir almış askerlere emir verir. (Üçüncü kural gereği böyle askerler vardır.) Böylece her turun sonunda her asker ya hiç ya da iki görev almış olacaktır. Ve hiç görev almamış askerlerin sayısı azalacaktır. En sonunda da tüm askerler iki emir almış olacak, ilk çavuş da hapis cezası alacaktır.

61. Bir çemberin her bir noktası ya beyaz ya da siyah renktedir. Buna göre

a) Köşeleri böyle bir çember üzerinde ve aynı renkte olacak şekilde bir ikizkenar üçgen çizilebileceğini gösteriniz.

b) Köşeleri böyle bir çember üzerinde ve aynı renkte olan bir eşkenar üçgen çizilebilir mi?

Çözüm. a) Soruda verilen çemberin içine çizilmiş bir düzgün beşgeni ele alalım. Bu beşgenin köşelerinden en az üçünün aynı renkte olduğu açıktır. Diğer yandan düzgün beşgenin herhangi üç köşesi bir ikizkenar üçgen oluşturacağından bu çember içine her köşesi aynı renk olan bir ikizkenar çizilebileceği açıktır.

b) Çemberi iki eşit uzunluktaki yaya bölelim. Yayların buluştuğu noktalara ise A ve B noktaları diyelim. Yaylardan birinin siyah, diğerinin ise beyaz renkteki noktalardan oluştuğunu düşünelim ve A ve B noktalarının da biri beyaz biri siyah olsun. Bu durumda açıkça görülebileceği gibi, çemberin içine çizilebilecek her eşkenar üçgenin yalnızca iki köşesi aynı renkte olacaktır. Dolayısıyla böylesi bir çemberin içine köşeleri aynı renkte olan bir üçgen her durumda çizilemez.

62. 2007 tam sayı bir çemberin etrafına diziliyor. Burada art arda gelen 5 sayıdan 3'ünün toplamı diğerlerinin toplamının 2 katı olduğuna göre bu sayıların hepsinin ancak 0 olabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Sayılara $x_1, x_2, \ldots, x_{2007}$ diyelim ve art arda gelen herhangi beş sayıyı inceleyelim. Bunların üçünün toplamı diğerlerinin toplamının iki katı olduğuna göre, bu beş sayının toplamı üç ile bölünebilir. Dolayısıyla,

$$0 \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \equiv x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \ (mod\ 3) \Rightarrow x_1 \equiv x_6 \ (mod\ 3)$$

olduğu görülür. Aynı şekilde her $i = 1, \ldots, 2007$ için $x_i \equiv x_{i+5}$ $(mod\ 3)$ (burada $j \equiv k$ $(mod\ 2007)$ ise $x_j \equiv x_k$ olmak üzere) olduğu kolayca görülür.

Şimdi herhangi beş, art arda gelen a, b, c, d, e tam sayısını ele alalım. Burada $a \equiv b \equiv c \equiv d \equiv e$ $(mod\ 3)$ olduğu için,

$$0 \equiv a + b + c + d + e \equiv 5a \ (mod\ 3)$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla her $i = 1, \ldots, 2007$ için $x_i \equiv 0$ $(mod\ 3)$ olduğu görülür. Bu durumda x_i tam sayıları yerine $y_i = \dfrac{x_i}{3}$ olacak şekilde y_i tam sayıları koyulabilir ve bu sayıların da istenen koşulları sağladığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla x_i tam sayıları için ulaştığımız sonuçlar y_i tam sayıları için de geçerlidir yani y_i tam sayıları yerine de yeni tam sayı değerleri koymaya aynı şekilde devam edebiliriz. Sonuç olarak görürüz ki başta aldığımız sayılar üçün bütün kuvvetleriyle bölünebilmektedirler. Yani başta aldığımız sayılar ancak sıfır olabilir.

63. n öğrenci, k soruluk bir sınava giriyor.

- Bir öğrenci sınavdaki soruların yarısından daha azına doğru cevap verirse başarısız sayılıyor.
- Sınavdaki sorular, sınava giren öğrencilerin yarısından fazlası tarafından doğru cevaplandırıldığında kolay olarak adlandırılıyor.

Bu bilgilere göre hangi (n, k) çiftleri için
a) Bütün soruların kolay olmasına rağmen bütün öğrencilerin başarısız olabilir?
b) Hiçbir soru kolay olmamasına rağmen bütün öğrencilerin başarılı olabilir?

Çözüm. v öğrencilerin doğru cevap sayılarının toplamı olsun.
a) Eğer bütün öğrenciler başarısız olduysa her biri $\frac{k}{2}$ 'den daha az doğru cevap vermiştir. Bu durumda toplam doğru cevap sayısı $v < n \cdot \frac{k}{2}$ olacaktır.
Eğer bütün sorular kolay ise her biri için en az $\frac{n}{2}$ öğrenci cevap vermiştir. O halde $v > k \cdot \frac{n}{2}$ olur. Bu iki durumu da sağlayan (n, k) çifti yoktur.
b) Eğer bütün öğrenciler başarılı ise her biri en az $\frac{k}{2}$ doğru cevap vermiştir. Bu durumda
$$v \geq \frac{k}{2} \cdot n = \frac{k \cdot n}{2}$$
olur. Eşitlik, her öğrenci $\frac{k}{2}$ doğru cevap verdiği durumda geçerlidir. Diğer taraftan hiç bir soru kolay değil ise, her soruya $\frac{n}{2}$ 'den daha az sayıda doğru yanıt verilmiştir. O halde $v \leq \frac{n}{2} \cdot k = \frac{n \cdot k}{2}$ 'dir. Eşitlik, her soruya $\frac{n}{2}$ doğru cevap verildiği durumda geçerlidir.
İki eşitsizlik birden sadece $v = \frac{n \cdot k}{2}$ olduğu durumda doğrudur (Yani her öğrencinin $\frac{k}{2}$ doğru yanıt verdiği ve her bir soruta $\frac{n}{2}$ doğru cevap verildiği durumda.) O halde n ve k çift sayılardır.
Şimdi herhangi çift n ve k sayıları için istenen durumun sağlanabileceğini gösterelim. Sorulara 1 'den k 'ya kadar, öğrencilere de 1 'den n 'ye kadar numaralandıralım. Tek numaralı öğrencilerin sadece tek numaralı soruları, çift numaralı öğrencilerin de sadece çift numaralı soruları doğru cevaplandırdığı durumda hem bütün öğrenciler basarılıdır, hem de hiç bir soru kolay değildir.

64. Her kenarında n nokta bulunan üçgen şeklindeki noktaların üzeri $1, 2, \ldots, n$ uzunluklarındaki n adet çubuk kullanılarak kaç değişik şekilde kapatılabilir?

Çözüm. Cevap 3^{n-1} 'dir. İddiamızı tümevarım yöntemiyle ispatlayalım. $n = 1$ için sadece 1 olasılık vardır: $3^{1-1} = 1$. $n \geq k$ için hipotezin doğru olduğunu varsayalım ve $n = k+1$ olduğu duruma bakalım. En uzun çubuk sadece kenarlara yerleştirilebilir ve bu da 3 farklı şekilde olur. Bu çubuk yerleştirildiğinde geriye k lık şekil kalır. $n = k$ için hipotezin doğru olduğunu kabul ettiğimiz için en uzun çubuk yerleştirildikten

sonra geri kalan noktalar 3^{k-1} şekilde kaplanır. En uzun çubuk da 3 farklı şekilde yerleştirilebildiğine göre $n = k + 1$ için $3 \cdot 3^{k-1} = 3^k$ farklı yol vardır. Hipotez bu durum için de doğru olduğu için şekildeki noktalar 3^{n-1} şekilde kaplanabilir.

65. Beşinci ve sonraki terimleri, önceki dört terimin toplamının 10 a bölümünden kalan olacak şekilde $1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, \ldots$ dizisi oluşturuluyor.
a) $2, 0, 0, 4$ sayıları, verildikleri sıra ile bu dizide görülebilir mi?
b) Dizinin ilk dört terimi $1, 2, 3, 4$, dizinin herhangi başka bir kısmında tekrar görülebilir mi?

Çözüm.
a) Dizideki tek sayıları T harfi ile ve çift sayıları $Ç$ harfi ile ifade edelim. Buna göre diziyi

$$T, Ç, T, Ç, Ç, T, Ç, T, Ç, Ç, T, Ç, T, Ç, Ç, T, Ç, T, \ldots$$

olarak ifade edebiliriz. $Ç, Ç, T, Ç, T$ diziliminin dördüncü terimden itibaren tekrarlandığı açıktır. Buradan dört çift sayının arka arkaya bu dizide yer alamayacağı sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla $2, 0, 0, 4$ sayıları, verildikleri sıra ile bu dizide görülemezler.
b) Bu dizide görülen her a, b, c, d dizilimi için sonlu sayıda (en fazla 10.000) farklı sıralanış vardır. O halde dizide en az iki kere görülen bir a_0, b_0, c_0, d_0 dizilimi vardır. Bir a_0, b_0, c_0, d_0 diziliminden diğerine verilen kurala göre ulaştığımız için bu dizi, a_0, b_0, c_0, d_0 den itibaren periyodik olmalıdır. Dizide görülen her a, b, c, d, e dizilimi için, b, c, d, e terimlerine bakarak a terimini bilmek mümkündür. O halde bu dizinin terimlerine ikinci a_0, b_0, c_0, d_0 diziliminden başlayarak sağa değil de sola doğru bakarsak dizinin terimlerinin sola doğru giderken de periyodik olduğunu anlarız. $1, 2, 3, 4$ dizilimi, dizide bir kere görüldüğü için sonsuz kere daha görülecektir.

66. Düzlemde herhangi 3 tanesi aynı doğru üzerinde yer almayan 50 nokta veriliyor. Bu noktalar 4 renkten birisi ile boyanıyor ve köşelerini bu noktaların oluşturduğu bütün üçgenler çiziliyor. Bu düzlemde, köşeleri aynı renge boyanmış olan en az 130 çeşitkenar üçgen olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $50 = 4 \cdot 12 + 2$ olduğundan, çekmece ilkesine göre en az 13 nokta aynı renktedir.
İddia: Bir düzlem üzerinde herhangi üçü doğrusal olmayan $n > 8$ noktayı köşeleri

olarak kabul eden en az $\dfrac{n(n-1)(n-8)}{6}$ adet çeşitkenar üçgen vardır.

İspat: Bu n nokta kullanılarak $\dfrac{n(n-1)}{2}$ adet doğru parçası ve $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$ adet üçgen oluşturulabildiğini biliyoruz. Şimdi bu noktalarla en fazla $n(n-1)$ ikizkenar üçgen oluşturulabileceğini gösterelim. Her AB doğru parçasından en fazla iki ikizkenar üçgen oluşturulabilir (eğer üç ABC, ABD ve ABE ikizkenar üçgeni oluşturulabilseydi C, D ve E noktaları doğrusal olurdu.).

Dolayısıyla bu n nokta ile en az $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \dfrac{n(n-1)(n-8)}{6}$ çeşitkenar üçgen oluşturulabilir.

Sonuç olarak $n = 13$ durumu için en az $\dfrac{13.12.5}{6} = 130$ çeşitkenar üçgen oluşturulabilir.

67. Bir öğrenci bir kitabı 37 gün boyunca aşağıdaki kurallara göre okuyor.

- Her gün en az bir saat kitap okuyor.
- Her gün 12 saatten fazla olmamak kaydıyla tam sayıda (ondalıksız) saat okuyor.
- Toplamda en fazla 60 saat kitap okuyor.

Bu durumda öğrencinin bazı ardışık günlerde toplam 13 saat kitap okuduğunu gösteriniz.

Çözüm. Öğrenci $i = 1, 2, \ldots, 37$ için i gününde α_i saat kitap okumuş olsun ve ilk i günde kitap okuduğu toplam saat $A_i = \alpha_1 + \alpha 2 + \ldots + \alpha_i$ olsun. Şimdi $k < l$ olan k ve l tam sayıları için

$$\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \ldots + \alpha_{k+l} = 13 \Leftrightarrow A_l - A_k = 13 \Leftrightarrow A_l = A_k + 13$$

olduğunu göstermemiz gerekiyor. Burada soruda verilenleri düşündüğümüzde

$$1 \leq A_1 < A_2 < \ldots < A_{37} \leq 60$$

$$14 \leq A_1 + 13 < A_2 + 13 < \ldots < A_{37} + 13 \leq 73$$

eşitsizliklerini elde ederiz.

Bu durumda 1 ile 73 arasında 74 tam sayı olduğuna göre ve her iki eşitsizlikteki tam sayılar birbirine eşit olamayacağına göre bir k ve l tam sayı çifti için $A_l = A_k + 13$ olmalıdır.

68. Verilen her pozitif N tam sayısı için sadece 0 ve 1 rakamlarından oluşan N basamaklı ve N ile tam bölünen bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $1 \leq i \leq N$ için $\underbrace{11\ldots1}_{i} = a_i (\text{mod } N)$ olsun. a_i lerden herhangi birisi 0 olursa istenen şart sağlanmış olur. (Sayıyı N basamaklı yapmak için sonuna gerektiği kadar 0 ekleyebiliriz). Eğer a_i lerin hiçbirisi 0 değilse çekmece ilkesinden dolayı en az iki tanesi birbirine eşittir, çünkü toplam N sayısı vardır ama a_1 ler en fazla $N-1$ farklı değer olabilir. $i > j$ olmak üzere $a_i = a_j$ olsun. Bu durumda $\underbrace{11\ldots1}_{itane} - \underbrace{11\ldots1}_{jtane} = \underbrace{11\ldots1}_{i-jtane}\underbrace{00\ldots0}_{jtane}$ sayısı N ile bölünür. Yani $\underbrace{11\ldots1}_{i-jtane}\ \underbrace{00\ldots0}_{N-(i-j)tane}$ sayısı N basamaklıdır ve N ile bölünür.

69. $m(B\widehat{A}C) = 60^\circ$, $|AB| = 2005$, $|AC| = 2006$ olacak şekilde bir ABC üçgeni verilmiş olsun. Ateş ve Güneş sırayla kendilerine kalan üçgeni bir doğru boyunca, herbirinin alanı 1 veya daha büyük iki yeni üçgen oluşturacak şekilde kesiyorlar ve bu üçgenlerden geniş açılı olanı (ikisi de dik açılı ise herhangi birini) atılıp geriye kalan üçgenle oyuna devam ediyorlar. Bu kesme işlemini yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyuna Ateş'in başladığını ve her iki oyuncunun da mümkün olan en iyi hamleleri yapacağını kabul ederek oyunu kimin kazanacağını belirleyiniz.

Çözüm: Oyunu ilk başlayan Ateş kazanır. C_1 noktası AC doğru parçası üzerinde ve $|AC_1| = 2005$ olan nokta olsun. ABC_1 eşkenar üçgenini ele alalım. Eğer bu üçgen için birinci oyuncunun bir kazanma stratejisi varsa o zaman bu üçgenin ilk kesilmesinin, eşkenar üçgen olmasından dolayı AC kenarı üzerinde alınan bir D noktası için, BD doğru parçası boyunca olacağını kabul edebiliriz. Bu durumda Ateş'in oyuna ABC üçgenini BD doğru parçası boyunca keserek başlaması kazanmasını garanti edecektir. Eğer ABC_1 üçgeni için ikici oyuncunun bir kazanma stratejisi var ise o zaman da Ateş'in oyuna ABC üçgenini BC_1 doğru parçası boyunca keserek başlaması kazanmasını garanti edecektir.
Dikkat edilecek olursa her bir adım sonunda kalan üçgenin alanı bir önceki üçgenin alanından en az bir küçüktür. Bu da oyunun sonlu zamanda biteceğini gösterir.

70. $n \times m$'lik bir dama tahtasının bazı karelerini siyaha, geriye kalan karelerini ise beyaza boyamak istiyoruz, öyle ki, boyama işlemi tamamlandığında her siyah karenin çift sayıda siyah komşusu, her beyaz karenin çift sayıda beyaz komşusu olsun (Bir kareye çaprazdan da olsa temas eden karelere o karenin komşuları diyelim, ve karenin kendisini de komşuları arasında sayalım). Bu işlemin hangi (n, m) ikilileri için yapılabileceğini belirleyiniz.

Çözüm. nm'nin çift olduğu durumlarda çözüm vardır. Genelliği kaybetmeden satır sayısı olan n'nin çift olduğunu varsayalım. 1. ve 2. satırları siyaha, 3. ve 4. satırları beyaza, 5. ve 6. satırlari siyaha $\cdots$ boyarsak istenilen türden bir boyama elde ederiz.

nm tek ise böyle bir boyama mümkün değildir: Eğer mümkün olsaydı, beyaz kare sayısı veya siyah kare sayısı tek olurdu. Genelliği kaybetmeden beyaz kare sayısının tek olduğunu varsayalım. Her beyaz kare için bir köşe, ve komşu olmayan her iki beyaz kareye tekabül eden köşeler arasında bir kenar barındıran çizgeyi oluşturalım.

Bu çizgenin tek sayıda köşesi ve her köşeden çıkan tek sayıda kenar olacaktır. Bu mümkün olmadığı için çelişki elde ederiz.

71. Beyaz bir kağıdın üzerine bir kenarında n tane kare bulunan bir ızgara elde etmek için en az kaç kare çizmeliyiz?

Çözüm. $2n$-1 tane kare çizmek yeterlidir. Koordinatlarla konuşursak karşı köşeleri (0,0) ile (i,i) de , $1 \leq i \leq n$, olan kareleri çizeriz ve de karşı köşeleri (i,i) ile (n,n) de , $1 \leq i \leq n-1$, olan kareleri çizeriz. Bunun gerekli olduğunu göstermek için öncelikle $0 < i < n$ için $(0,i)$ den $(1,i)$ ye olan çizgiler ile $(n-1,i)$ den (n,i) ye olan çizgilerin aynı karede olamayacağını not edelim yani en az $2n-2$ kare gereklidir. Eğer ızgarayı $2n-2$ kare ile tamamlamak mümkünse bu çizgilerin her biri ayrı kareler yer alacaktır ve aynısı $0 < i < n$ için $(i,0)$ dan $(i,1)$ ye olan çizgiler ile $(i,n-1)$ den (i,n) ye olan çizgiler içinde tutacaktır. Yukarıda belirtilen yatay çizgilerden her biri, düşey çizgilerden sadece iki tanesi ile ortak bir karede bulunabilir.

72. Üzerinde 1 den 15'e kadar sayılar olan kutular herhangi bir sıra ile yanyana diziliyor. En fazla dört farklı renk kullanılarak kutular boyanacaktır. Aynı renge boyanan kutuların üzerindeki sayıların sürekli artması veya sürekli azalması istenmektedir. Bütün dizilişler için istenen şekilde boyamanın yapılıp yapılamayacağını gösteriniz.

Çözüm. Kutuların aşağıdaki gibi dizilmesi durumunda istenildiği gibi bir boyamanın yapılamayacağını gösterilebilir.

$$\underbrace{5,4,3,2,1}_{I},\underbrace{9,8,7,6}_{II},\underbrace{12,11,10}_{III},\underbrace{14,13}_{IV},\underbrace{15}_{V}.$$

Kutuların yukarıdaki sırayla dizildiğini ve dört farklı renge boyandığını kabul edelim. Bu dizilişteki kutuları $I., II., III., IV.$ ve $V.$ olmak üzere 5 gruba ayıralım. $I.$ grupta 5 kutu olduğundan en az ikisi aynı renge sahiptir. Kutu numaraları azaldığından ve diğer dört gruptaki numaralar daha büyük olduğundan bu rengi diğer gruplarda kullanamayız. Geriye kalan 3 renk ile $II.$ gruptaki 4 kutu boyanmak istendiğinde en az iki kutu aynı renge boyanacaktır. Benzer şekilde kutu numaraları azaldığından ve diğer üç gruptaki numaralar daha büyük olduğundan bu rengi diğer gruplarda kullanamayız. Bu şekilde devam edildiğinde en az 5 rengin gerekli olduğu görülmektedir ve dolayısıyla istenildiği gibi bir boyama yukarıdaki diziliş için yapılamaz.

73. 7×7'lik bir satranç tahtası 49 birim kareye bölünüyor. Her satır ve sütunda çift sayıda dama taşı olacak şekilde n tane dama taşının birim karelere yerleştirilebileceği bütün n değerlerini bulunuz. (0 bir çift sayı olduğu için çözümler boş satır veya sütunlar içerebilirler. Bir birim kareye en fazla 1 tane dama taşı koyulabilir.)

Çözüm. Verilen koşulları sağlayacak şekilde $4, 6, 8, ..., 40, 42$ dama taşı bu satranç tahtasına dizilebilir.

Çözüme n sayısının 7 tane çift sayının toplamı olduğu, dolayısıyla n'in de bir çift sayı olması gerektiği gözlemi ile başlıyoruz. Bir satıra en fazla 6 adet dama taşı yerleştirilebilir, dolayısıyla $n \leq 6 \cdot 7 = 42$.

Çözümü elde etmek için tamamı dama taşlarıyla dolu $2k \times 2k$'lık kareler ve bir köşegeni dışındaki her birim karesinde dama taşları olan $(2k+1)x(2k+1)$ boyutlarındaki kareler kullanacağız. Bütün bu kareler gerekli koşulları sağlamaktadır ve bu tür bazı kareleri soruda istenen koşulları sağlayacak şekilde birleştirebiliriz.

4 ile 42 sayıları arasındaki n çift sayıları için n tane dama taşının diziliş biçimini aşağıda açıklayalım:

$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36$ tane dama taşı için sırasıyla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ adet 2×2 kare kullanılır. Bütün bu kareler 7×7'lik satranç tahtasının içine sığmaktadır.

6 tane dama taşı için bir köşegeni boş olan 3×3'lük bir kare kullanılır. Bu kareye tamamı dama taşlarıyla dolu 2×2'lik kareler ekleyerek $10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38$ tane dama taşı içeren çözümleri elde ederiz.

40 adet dama taşı için bir adet 5×5'lik ve beş adet 2×2'lik kare kullanılır.

42 adet dama taşı için bir köşegeni hariç bütün 7×7'lik satranç tahtası dama taşları ile doldurulur.

Son olarak 2 tane dama taşının verilen koşulları sağlayacak şekilde yerleştirilemeyeceğini gözlemleyiniz.

74. İki oyuncu, aynı anda {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} kümesinden, yerine koymaksızın, sırayla birer sayı seçerler. Toplamı sıfır olan üç sayıyı (üç, dört ya da beşinci seçimde) elde eden ilk oyuncu, oyunu kazanır. İki oyuncudan birinin oyunu kazanması kaçınılmaz mıdır?

Çözüm. Aşağıda örnek olarak verilen, bütün satır, sütun ve köşegenlerinin toplamları sıfır olan 3×3'lük sihirli kareyi dikkate alalım. Yukarıda ifade edilen oyunun amacının sağlanabildiğini görmek zor değildir; çünkü, toplamları sıfır olan üç tam sayı, aynı satır, sütün ya da köşegen üzerinde sıralanmışlardır.

1	2	-3
-4	0	4
3	-2	-1

Dolayısıyla, bu oyun, üç taş ya da en iyiyi oynayarak beraberlikle bittiği bilinen sıfırlar ve çarpılar oyunlarıyla eşdeğerdedir.

Sonuç olarak, herhangi bir oyuncunun bu oyunu kazanması zorunlu değildir.

75. Bir küpün köşeleri 1 'den 8 'e kadar numaralandırılıyor. Çapraz olarak karşılıklı olan

iki köşeyi birbirine bağlayan ve 3 köşeden geçen, geçtiği köşelerle bağladığı köşelerin numaralarının toplamı en az 21 olan bir yol olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Köşeleri herhangi bir kenarın iki ucundaki köşeler aynı renkte olmayacak şekilde siyah ve beyaza boyayalım. Soruda istenilen şekilde bir yola da s yolu diyelim. Herhangi bir s yolu 2 siyah ve 2 beyaz köşe içerecektir. Ayrıca hepsi aynı renkte olmayan 3 nokta seçtiğimizde bu noktaları içeren bir s yolu vardır. $6 + 7 + 8 = 21$ olduğundan 6,7 ve 8 aynı renkte değilse toplamları en az 21 olan bir $s - yolu$ bu köşeleri içerecektir. 5,7 ve 8 'in toplamı 20 'dir. Eğer aynı renkte değillerse taplamı 21 'den fazla olan bir s yolunun içinde olacaklardır. Geriye bir tek 5,6,7 ve 8 'in aynı renkte olduğu ve 4 'ün, 7 ve 8 'den farklı bir renkte olduğu durum kalır. 4,7 ve 8 'i içeren 2 s yolu vardır. Dördüncü köşe 1 olamayacağıdan 2 olacaktır ve toplam 21 olacaktır.

76. $n \geq 2$ bir tam sayı olsun. n adet yarış arabası bir ralliye katılıyor. Araçlar 1'den n'ye kadar numaralanmış, ve başlangıç noktasından numara sırasına uygun şekilde sırayla ayrılıyorlar. Sonuçta her araba yol boyunca aynı sayıda araba tarafından geçiliyor, öte yandan arabaların yol boyunca geçtikleri arabaların sayılarının tümü birbirinden farklı. Bir araba bir başkasını yarış boyunca en çok bir kez geçiyor. Arabalar varış noktasına hiç bir beraberlik olmaksızın ulaşıyorlar. Bu durumun n'nin hangi değerleri için mümkün olduğunu belirleyiniz.

Çözüm. Bir araba en çok $n - 1$ arabayı geçebilir. Tüm arabaların geçtiği araba sayılarının farklı olmasını istediğimize göre $0, 1, 2, ..., n-1$ tam sayılarının hepsi geçme sayılarının arasında yer almalıdır. Eger k her arabanın geçildiği araba sayısı ise $0 + 1 + 2 + ... + (n - 1) = kn$ eşitliği bize $k = (n - 1)/2$ verir. Buradan öncelikle n'nin tek olmasının bir gerek koşul olduğunu görürüz.

Her n tek için böyle bir durumu açıkça tarif edeceğiz: Anlatımda kolaylik için $m = \frac{n+1}{2}$ diyelim. Yarış şöyle gelişirse istediğimiz durum olusur: Önce $l + 1$, iki araba geçer, daha sonra $l+2$ dört araba geçer,... n numaralı araba $n-1$ araba gecer. Daha sonra $l - 1$ numaralı araba $n - 2$ araba geçer, $l - 2$ $n - 4$ araba geçer,..., 1 numaralı araba 1 araba geçer. Sonucun istediğimiz şartları sağladığını doğrulamak kolaydır.

77. m şarkının söylendiği bir sanat festivaline sekiz sanatçı katılmaktadır. Her şarkı 4 sanatçı tarafından söylenmektedir ve herhangi iki şarkıcının söylediği şarkılarda aynı olanların sayısı sabittir. Bunun mümkün olduğu en küçük m sayısını bulunuz.

Çözüm. r iki şarkıcının ortak olarak söylediği şarkı sayısı olsun, o zaman $m\binom{4}{2} = r\binom{8}{2}$ denebilir ve buradan $m = 14r/3$ bulunur. Genel olarak $m \geq 14$ olsa da $m = 14$ durumu {1,2,3,4}, {5,6,7,8}, {1,2,5,6}, {3,4,7,8}, {3,4,5,6}, {1,3,5,7}, {2,4,6,8}, {1,3,6,8}, {2,4,5,7}, {1,4,5,8}, {2,3,6,7}, {1,4,6,7}, {1,2,7,8}, {2,3,5,8} düzenlemesiyle mümkündür.

78. Her birinin üzerinde sıfırdan büyük bir tam sayı yazan kartlardan oluşan bir destede kartlar üzerindeki sayıların toplamı 2007 'dir. $1 \leq k \leq 2006$ olacak şekildeki bir k tam sayısı için, üstünde yazan sayıların toplamı k olan bazı kartlar seçilebiliyor ve bu her k tam sayısı için tek bir şekilde yapılabiliyor (üzerindeki sayılar eşit olan kartlar aynı kabul ediliyor). Bu şekilde kaç farklı deste vardır?

Çözüm. Kartların üzerinde $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ olmak üzere k çeşit sayı olsun ve bunlardan da sırasıyla $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tane olsun.
Sırasıyla $(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1) = 2008$, $a_1 = 1$ ve $a_i = (p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_{i-1}+1)$ olduğunu göstereceğiz.
$1 \leq k \leq 2006$ olduğu için toplamlar 1 eden kartlar da vardır ve bu da $a_1 = 1$ olmasını gerektirir.
Sadece p_1 'den küçük ve p_1 'e eşitsayılar a_1 'ler kullanılarak oluşturulabilir. O halde $k \geq 2$ için $a_2 = p_1 + 1$ olmak zorundadır. Aynı şekilde a_1 'ler ve a_2 'ler kullanılarak $a_1p_1 + a_2p_2 = (p_1 + 1)(p_2 + 1) - 1$ 'e eşit ya da daha küçük sayılar oluşturulabilir. Buradan da $a_3 = (p_1 + 1)(p_2 + 1)$ bulunur. Genelleştirirsek $a_i = p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_{i-1}+1)$ elde edilir. Ayrıca $a_1p_1+a_2p_2+\cdot a_kp_k = 2007$ olduğundan $(p_1 + 1)(p_2 + 1)\cdots(p_k + 1) = 2007 + 1 = 2008$ olarak bulunur.
O halde aradığımız $(p_1 + 1)(p_2 + 1)\cdots(p_k + 1) = 2008$ olan $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ ların sayısıdır.
$2008 = 2^3 \times 251$ olduğundan ve 2 ve 251 asal olduklarından

$$
\begin{aligned}
(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_k+1) &= 2 \times 1004 = 4 \times 502 = 8 \times 251 \\
&= 2 \times 2 \times 502 = 2 \times 4 \times 251 = 2 \times 2 \times 2 \times 251
\end{aligned}
$$

ya da bu çarpımların permütasyonlarına eşit olacaktır. Sırasıyla 1, 2, 2, 2, 3, 6 ve 4 permutasyon olduğuna göre toplam $1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 6 + 4 = 20$ deste vardır.

79. Karelere bölünmüş $m \times n$ lik bir tahtada bir hamle sırasıyla aşağıdaki iki aşamadan oluşmaktadır:

- Herhangi ikisi aynı satırda veya aynı sütunda olmayacak şekilde tahtadan boş kareler seçilir. Bu seçilen karelerin her birine beyaz bir taş konulur.
- Tahtadaki her boş kare incelenir, karenin bulunduğu hem satırda hem de sütunda bir beyaz taş varsa o kareye bir siyah taş konulur.

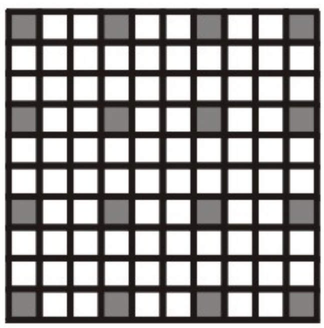
Bu şekilde bir dizi hamle yapıldıktan sonra tahtaya en fazla kaç beyaz taş konulabilir?

Çözüm. Cevap $n + m - 1$ dir. En soldaki sütundan ve en yukarıdaki satırdan başlamak üzere kareleri birden başlayarak numaralandıralım. (a, b) hamlesi, a. satırın ve b. sütunun kesişimindeki kareye bir beyaz taş koymayı belirtsin. Bu şekilde $(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,n), (3,n), \ldots, (m,n)$ hamleleri ile tahtaya $n+m-1$ tane beyaz taş koyabiliriz. Böylece tahtanın en üst satırını ve en sağ sütununu beyaz taş ile geri kalanını ise siyah taş ile doldurmuş oluyoruz.

Şimdi de $n + m - 1$ den fazla beyaz taş konamayacağını gösterelim. Tahtada bir takım hamleler yapılmış olsun. İkiden daha az beyaz taş bulunduran bütün satır ve sütunlardaki taşları toplayalım. Bu şekilde en fazla $n+m-1$ tane beyaz taş toplamış oluruz. Tahtada hala beyaz taşlar olduğunu farz edelim. Bu taşlardan son hamle ile konmuş bir tanesine bakalım. Bu taşa c diyelim. c nin tahtada kalmış olması, c nin bulunduğu satır ve sütunda en az birer tane daha beyaz taşın olmasını gerktirir. Bu taşlara da d ve e diyelim. Eğer d ve e nin ikisi de son hamle sırasında konmamışsa son hamleden bir önceki hamlenin sonunda ikinci kurala göre c nin olduğu yerde bir siyah taş konulmalıydı. Bu sebeple ya d ya da e son hamle sırasında yerleştirilmiş olmalıdır. Ancak bu durum da ilk kurala aykırıdır. Çünkü aynı hamlede aynı satıra veya aynı sütuna iki taş konulmuş demektir. Bu bir çelişkidir. Yapılan toplama sonunda tahtada beyaz taş kalmış olamaz. Dolayısıyla konabilecek en fazla taş sayısı $n + m - 1$ dir.

80. 10×10 luk birim karelerden oluşan bir levha düşünelim. Ortak kenarla birbirlerine bağlı olan birim karelerin oluşturduğu şekle gemi diyeceğiz. Herhangi iki geminin ortak köşesinin bulunmadığı gemiler kümesine donanma diyeceğiz (yani tüm gemiler köşe-bağımsız). Hiçbir yeni gemi eklenemeyecek bir donanmada en az kaç kare bulunması gerektiğini bulunuz.

Çözüm. Yeni bir gemi eklenemeyecek donanmalara tam adını verelim. Biz tam donanmada olabilecek en az kare sayısını bulmalıyız. İlk olarak tam bir donanmanın en fazla 16 birim kare içerdiğini gösterelim. Levhaya 16 tek karelik gemiyi şekildeki gibi yerleştirelim.



Görüldüğü gibi her karenin bir köşesi gemilerden birinin bir köşesiyle ortaktır. ve dolayısıyla hiçbir gemi eklenemez.

Şimdi 16'dan az birim karenin oluşturduğu hiçbir tam donanma olmadığını gösterelim. Bir tam donanmayı sabitleyelim. Şekildeki griye boyanmış 16 birim kareyi düşünelim. Bu 16 birim karenin herbiri için tam donanmadaki gemilerden birinin (en az) bir köşesi ortak olan bir karesi vardır. Donanmanın tüm bu karelerin birbirinden farklıdır. Bu nedenle bu filoda en az 16 kare vardır.

81. a ve b lerden oluşan harf dizilerinde şu değişiklikleri yapabiliyoruz: $aba \to b$, $b \to aba$, $bba \to a$, $a \to bba$ (Örneğin, $a \to bba$, a nın yerine bba konulması anlamına geliyor). $\underbrace{aa\ldots a}_{2003}b$ dizisinden $b\underbrace{aa\ldots a}_{2003}$ dizisini elde etmek mümkün müdür?

Çözüm. Verilen değişiklikler yapıldığında indisleri tek sayı olan a ların sayılarının ikiye bölümünden kalanların değişmeyeceğini göstereceğiz. Aynı durum indisleri çift sayı olan a lar için de geçerlidir. w_1, w_2 herhangi iki diziyi belirtmek üzere w_1abaw_2 dizisine $aba \to b$ değişikliğini yapalım. Elde ettiğimiz w_1bw_2 dizisinde w_1 deki a ların indisleri değişmezken, w_2 deki a ların indisleri iki azalacaktır. Dolayısı ile indisleri tek(ve çift) sayı olan a ların sayısı ya aynı kalacak ya da 2 azalacakır ve buradan indisleri tek(ve çift) sayı olan a ların sayısının ikiye bölümünden kalanların değişmediği görülür. Bu şekilde diğer değişiklikler de incelendiğinde hepsi için önermemizin doğru olduğu görülür.

$b\underbrace{aa\ldots a}_{2003}$ dizisinde indisi çift sayı olan a ların sayısı 1002 iken $\underbrace{aa\ldots a}_{2003}b$ dizisinde indisi çift sayı olan a ların sayısı 1001 dir. Dolayısı ile $\underbrace{aa\ldots a}_{2003}b$ dizisinden $b\underbrace{aa\ldots a}_{2003}$ dizisini elde etmek mümkün değildir.

82. Bir n sayısının, pozitif tam sayıların toplamları olarak yazılmasına n nin bir bölünüşü denir. (Terimlerin yer değiştirmesi ile edilen yazılım farklı bir biçim olarak kabul edilmeyecektir.)

Aşağıdaki tabloda 5 in farklı bütün bölünüşleri verilmiştir. İkinci sütun, her bölünüşte bulunan 1 lerin sayısını, ve üçüncü sütun her bölünüşte bulunan farklı terimlerin sayısını göstermektedir. En alt satırda da, ikinci ve üçüncü sütundaki sayıların toplamı verilmiştir.

Bölünüş	1 lerin sayısı	Farklı terimlerin sayısı
5	0	1
4+1	1	2
3+2	0	2
3+1+1	2	2
2+2+1	1	2
2+1+1+1	3	2
1+1+1+1+1	5	1
Toplam	**12**	**12**

Bir n sayısının farklı bütün bölünüşlerindeki 1 lerin sayısı $a(n)$, ve farklı bütün bölünüşlerinin her birindeki farklı terimlerin sayısının toplamı $b(n)$ olsun. Yukarıdaki tabloda $a(5) = b(5)$ olduğu gösterilmiştir.

Tüm n tam sayıları için, $a(n) = b(n)$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. n nin tüm bölünüşlerin sayısı $p(n)$ olsun. $a(n)$ ve $b(n)$ yi $p(1), p(2), \cdots, p(n-1)$ türünden ifade etmeye çalışacağız.

$n-1$ in her hangi bir bölünüşüne 1 eklenirse, içinde en az bir tane 1 olan, n nin bir bölünüşü elde edilir. Dolayısıyla, n nin en az bir tane 1 içeren bölünüşlerinin sayısı $p(n-1)$ dir. Benzer şekilde, n nin en az iki tane bir içeren bölünüşlerinin sayısı $p(n-2)$ dir. Genel olarak, her $i = 1, 2, \cdots, n-1$ için, n nin en az i tane 1 içeren bölünüşlerinin sayısı $p(n-i)$ dir. Son olarak, n nin n tane 1 içeren bölünüşlerinin sayısı 1 dir.

Şimdi, n nin sadece bir tane 1 içeren bölünüşlerini, $p(n-1)$ in bir parçası olarak, bir defa saydık. İki tane 1 içeren bölünüşlerini, $p(n-1)$ in bir parçası olan en az bir tane 1 içeren bölünüş ve $p(n-2)$ in bir parçası olan en az iki tane 1 içeren bölünüş olmak üzere iki defa saydık. Genel olarak, her $i = 1, 2, \cdots, n$ için, i tane 1 içeren bölünüşlerini i defa saydık.

Başka bir deyişle, n nin bölünüşleri sayma sayımız, her bölünüşteki 1 lerin sayısına eşittir.

Yani, $a(n) = p(n-1) + p(n-2) + \cdots + p(1) + 1$ dir.

Şimid her bölünüşteki farklı sayıların sayısının toplamını yani $b(n)$ yi düşünelim. Her $i = 1, 2, \cdots, n$ için, n nin bölünüşlerinden i içerenlerin sayısını sayacağız.

Her $i = 1, 2, \cdots, n-1$ için, $a_1 + \cdots + i + \cdots + a_k = n \Leftrightarrow a_1 + \cdots + a_k = n - i$ olduğu için, n nin bölünüşlerinden içinde i bulunanların sayısı $p(n-i)$ dir. Özel olarak $i = n$ durumunda 1 tane bölünüş vardır.

Dolayısıyla, $b(n) = p(1) + \cdots + p(n-1) + 1$ dir.

Sonuç olarak, $a(n) = b(n)$ dir.

83. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $S_n = \{n^2+1, n^2+2, ..., (n+1)^2\}$ olsun. S_n kümesindeki farklı elemanların ikili çarpımlarının sayısını n'ye bağlı olarak bulunuz? Örneğin; $S_2 = \{5,6,7,8,9\}$ olmak üzere,

$$\begin{array}{ll} 5\times 6 = 6\times 5 = 30, & 5\times 7 = 7\times 5 = 35, \\ 5\times 8 = 8\times 5 = 40, & 5\times 9 = 9\times 5 = 45, \\ 6\times 7 = 7\times 6 = 42, & 6\times 8 = 8\times 6 = 48, \\ 6\times 9 = 9\times 6 = 54, & 7\times 8 = 8\times 7 = 56, \\ 7\times 9 = 9\times 7 = 63, & 8\times 9 = 9\times 8 = 72, \end{array}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla; $n = 2$ için, farklı elemanların ikili çarpımlarının sayısı 10 'dur.

Çözüm. S_n kümesindeki farklı elemanların, sıralama önemsenmeyerek yapılan, tüm ikili çarpımları farklıdır. Şimdi, bu ifadeyi aşağıda ispatlayalım.

a, b, c ve d tam sayıları için $n^2 < a < b < c < d$ ve $ad = bc$ olsun. $d > (n+1)^2$ olduğunu gösterirsek, sonuca ulaşmış olacağız.

Aşağıdaki eşitsizliği dikkate alalım.

$$\begin{aligned} (d-a)^2 &= (d+a)^2 - 4ad \\ &= (d+a)^2 - 4bc \\ &> (d+a)^2 - (b+c)^2 \quad \left((b-c)^2 > 0 \Rightarrow b^2+c^2 > 2bc\right) \\ &= (d+a+b+c)(d+a-b-c) \\ &> 4n^2(d+a-b-c) \end{aligned}$$

$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ 'yı dikkate alırsak, $d-c > b-a$ ve $d+a > b+c$ olduğunu kolayca görebiliriz. $(ad = bc \Rightarrow a(d-c) = (b-a)c \Rightarrow a(d-c) > (b-a)a \Rightarrow d-c > b-a)$ Bu yüzden, $d+a-b-c \geq 1$ olur.

İlk bulduğumuz eşitsizlikten $(d-a)^2 > 4n^2$ ve bu yüzden $d-a > 2n$ 'dir. Dolayısıyla; $d > (n^2+1) + 2n$, buradan da $d > (n+1)^2$ elde edilir.

Sonuç olarak S_n kümesindeki farklı elemanların, sıralama önemsenmeyerek yapılan, tüm ikili çarpımları farklıdır. Sıralama önemsenmeyerek, iki farklı elemanı $\binom{2n+1}{2} = n(2n+1)$ yolla seçebiliriz. Bu yüzden, S_n kümesindeki farklı elemanların ikili çarpımlarının sayısı $n(2n+1)$ dir.

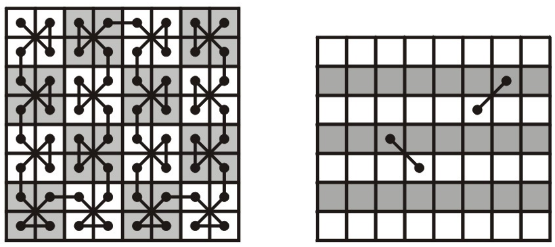
84. Bir rehine karelere bölünmüş $n \times n$ lik bir tahtanın üzerine yerleştiriliyor. Rehine, tahta üzerinde 2 çeşit yer değiştirme yapabiliyor:

- Kendi bulunduğu kareyle aynı kenara sahip bir komşu kareye gidebiliyor.

- Kendi bulunduğu kareyle aynı köşeye sahip olan ama aynı kenara sahip olmayan bir komşu kareye gidebiliyor.

Rehine, iki kere üst üste aynı çeşit yer değiştirme yapamıyor. Rehinenin başlangıç karesinden başlayarak tüm kareleri tam olarak bir defa ziyaret edebilmesine olanak sağlayan 1'den büyük doğal sayıları bulunuz. (Rehinenin, başladığı kareye dönmesi gerekmemektedir.)

Çözüm. Cevap $n = 2k$ ve k herhangi bir pozitif tam sayıdır. Öncelikle, tüm çift n doğal sayıları için mümkün olabileceğini ispatlayalım. Tahtayı 2×2 bloklar halinde bölelim ve rehineyi en sol üst köşedeki kareye yerleştirelim. Rehine ilk bloğun içerisinde sırasıyla sağ-aşağı, yukarı, sol-aşağı ve aşağı yönlerinde hareket etsin. Böylelikle, ilk bloktaki dört kareyi de tam olarak bir defa ziyaret etmiş olur ve ikinci bloğa geçer. Rehine, İkinci ve diğer bloklarda da birinci blokta yaptığı hareketleri yapsın ve en sol alttaki bloğa gelsin. Bu bloğun içerisinde sırasıyla sağ-aşağı, sol, sağ-yukarı ve sağ yönlerinde hareket etsin. Böylece, ilk kolondaki hareketini tamamlayıp ikinci kolonun en alt bloğuna geçer. Bu blokta da sağ-aşağı,sol, sağ-yukarı ve yukarı yönlerinde hareket etsin ve devamında da yukarı doğru blok blok çıkarak 2. kolonu da tamamlasın. Rehine, bu şekilde diğer kolonları da yukarı ve aşağı hareket ederek tamamlar ve herbir kareyi kurallara uygun olarak sadece bir defa ziyaret etmiş olur.



Şimdi de, tüm tek n doğal sayıları için mümkün olamayacağını ispatlayalım. İlk olarak, tahtanın ikinci, dördüncü, altıncı, $\ldots$,$(n-1)$. satırlarını koyu renkle boyayalım. Koyu renk karelerin sayısı $\frac{n^2-n}{2}$ dir. İkinci tür yapılan yani çapraz yer değiştirmeler, koyu renk karelerden açık renk karelere ya da açık renk karelerden koyu renk kareleredir. Rehine, her kareyi iki kere ziyaret edemeyeceği ve ardarda aynı tür hareket yapamayacağı için, herbir çapraz geçiş farklı koyu renk karelere denk gelecektir. Bu nedenle rehine, en fazla koyu renk kare sayısı kadar yani $\frac{n^2-n}{2}$ kere yer değiştirme yapabilir. Buna bağlı olarak çapraz olmayan yer değiştirme sayısı da en fazla $\frac{n^2-n}{2}+1$ dir. Toplam yer değiştirme sayısı ise $\frac{n^2-n}{2}+\frac{n^2-n}{2}+=n^2-n+1$ dir.$n \geq 3$ için, n^2-n+1 sayısı gerekli yer değiştirme sayısı olan n^2-1 den küçük olduğu için, tek n doğal sayıları için soruda istenen şartı sağlamak mümkün değildir.

85. Bir madeni para n kez atılıyor. İki tane turanın ard arda gelmeme ihtimali nedir?

Çözüm. Uzunluğu n olan ve ard arda iki tane turanın gelmediği yazı ve tura dizilerinin sayısını $f(n)$ ile gösterelim. n kez atılan madeni paranın oluşturabileceği dizi sayısı 2^n'dir. Dolayısıyla iki turanın ard arda gelmeme ihtimali $\frac{f(n)}{2^n}$ olacaktır. Yazı sonucunu Y, turayı ise T ile gösterelim. Madeni para bir kez atılırsa sonuç ya yazı ya da tura, yani $f(1) = 2$ olur. İki kez atılırsa sonuç YT, TY, YY olabilir. Yani $f(2) = 3$ olur.

$n > 2$ iken n kez atılan ve ard arda iki tane turanın gelmediği bir dizi ancak ve ancak şu iki şekilde olabilir:
Atılan ilk para yazı gelir, gerisi ard arda iki turanın gelmediği $n-1$ tane madeni paranın atılması sonucu elde edilir.
Atılan ilk para tura, ikincisi yazı gelir, gerisi iki tane turanın ard arda gelmediği $n-2$ tane madeni paranın atılması sonucu elde edilir.

Bu iki olasılık birbirinden bağımsızdır. Dolayısıyla $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ olur. Görüldüğü üzere $f(n)$ dizisi, Fibonacci dizisinin 2 terim kaydırılmış halidir.
Fibonacci dizisi şu şekilde tanımlanır: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, ve $k > 2$ iken $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$. Buradan $F_3 = 2$ ve $F_4 = 3$ elde edilir. Dolayısıyla $f(n) = F_{n+2}$ olur.
$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin çözümlerini $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ile gösterirsek, Fibonacci dizisinin kapalı formunun formulü $F_n = \frac{\Phi^n - \phi^n}{\sqrt{5}}$ olur.
Dolayısıyla n kez atılan madenin paranın ard arda iki turayı yanyana içermeme ihtimali $\frac{F_{n+2}}{2^n} = \frac{\Phi^{n+2} - \phi^{n+2}}{2^n\sqrt{5}}$ olur.

86. Bir çocuk, 2005 taştan oluşan bir öbekteki taşlardan bir tanesini bizim göremeyeceğimiz şekilde işaretliyor. Her hamlede mevcut taşlari hiçbiri boş olmayan üç öbeğe ayırıyoruz. Çocuk, işaretli taşı içermeyen iki öbekten çok taş içereni (eşitlik durumunda herhangi birini) seçip buradaki taşları oyun dışına itiyor. Geri kalan taşları ise karıştırıyor ve hamle yapma sırası tekrar bize geliyor. Oyunda iki taş kaldığı zaman çocuk bize hangi taşın işaretli olduğunu söylüyor. İşaretli taş bulmayı garanti etmek için en az kaç hamle yapmamız gerekir?

Çözüm. Önce, her hamle sonrasında önceki taş sayısının en az yarısı kadar taşın oyunda kalabileceğini gösterelim. Aksi durum için taş sayısının en az yarısı kadar büyüklükte bir öbek ayırmamız gerekirdi. Ancak işaretli taş bu öbekte ise, diğer öbeklerden biri oyundan alındıktan sonra en azından öncekinin yarısi kadar taş oyunda kalırdı.

Şimdi de her hamlede taş sayısı $2k+1$ ise bunu $k+1$'e, taş sayisi $2k$ ise bunu k'ye indirecek bir metod tarif edelim. İlk durumda öbekleri $k, k, 1$, ikinci durumda ise $k, k-1, 1$ olarak ayıralım. Hamle tarifinden, ilk durumda en az k taşın, ikinci durumda ise en az $k-1$ taşın oyundan alınacağını görürüz. İlk paragraftan dolayi bu yol en az hamle sayısını verir.

2005 için,

$$2005 \to 1003 \to 502 \to 252 \to 127 \to 64 \to 33 \to 17 \to 9 \to 5 \to 3 \to 2$$

11 hamle yapmak gereklidir.

87. Tümü birbirinden farklı ve hepsi 1707'den küçük 7 pozitif tam sayı alalım. Bunlar arasından $a < b + c < 4a$'yi sağlayacak biçimde a, b, c (tümü farklı) seçebileceğimizi gösteriniz.

Çözüm. Sayılari $a_1 < a_2 < \cdots < a_7$ olacak şekilde sıraya dizelim. Bu şekilde a, b, c olmadığını kabul edelim. Her $i > 1$ için a_1, a_i, a_{i+1} üçlüsünde $a_i < a_1 + a_{i+1}$ olduğu açıktır. Öyleyse $a_1 + a_{i+1} \geq 4a_i$ olmasi gerekir. Bu eşitsizlikleri sırayla yazarsak

$$\begin{aligned}
a_1 + a_3 \geq 4a_2 \geq 4(a_1+1) &\quad\Rightarrow\quad a_3 \geq 3a_1 + 4 \\
a_1 + a_4 \geq 4a_3 \geq 4(3a_1+4) &\quad\Rightarrow\quad a_4 \geq 11a_1 + 16 \\
a_1 + a_5 \geq 4a_4 \geq 4(11a_1+16) &\quad\Rightarrow\quad a_5 \geq 43a_1 + 64 \\
a_1 + a_6 \geq 4a_5 \geq 4(43a_1+64) &\quad\Rightarrow\quad a_6 \geq 171a_1 + 256 \\
a_1 + a_7 \geq 4a_6 \geq 4(171a_1+256) &\quad\Rightarrow\quad a_7 \geq 683a_1 + 1024 \geq 1707
\end{aligned}$$

olur ve çelişki elde ederiz.

88. 7×7 boyutlarında bir satranç tahtasının dört köşesi atılıyor.
a) En az kaç tane kareyi siyaha boyamak gerekir ki artı şeklinde boyanmamış 5 kare bulunamasın?
b) Her kareye bir tam sayı yazalım. Artı şeklinde alınacak herhangi 5 karedeki sayıların toplamı negatif iken tüm tahtadaki sayıların toplamının pozitif olabileceğini gösteriniz.

Çözüm. a) $(2,5)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(4,6)$, $(5,4)$, $(6,2)$, $(6,5)$ kareleri yeterlidir. Şimdi sadece 6 veya daha az karenin yetmeyeceğini göstermemiz gerekiyor. Merkezleri $(2,2)$, $(2,6)$, $(3,4)$, $(5,2)$, $(5,6)$, $(6,4)$ karelerinde yer alan artılar birbirinden ayrıktır o yüzden her birinde bir kare renklendirilmelidir. Yani 5 veya daha az kare yeterli olmayacaktır. Diyelim ki tam 6 kare boyandı. O zaman $(1,3)$, $(1,4)$, $(7,2)$ karelerinden hiç biri renklendirilemez; benzer tartışmalarla kenarda yer alan hiçbir kare renklendirilemez. Benzer şekilde $(4,3)$, $(4,5)$, $(3,4)$, $(5,4)$ renklendirilemez, o zaman $(4,4)$ renklendirilmelidir.
Şimdi merkezleri $(2,6)$, $(3,3)$, $(5,2)$, $(5,6)$, $(6,4)$ olan artılar birbirinde ayrıktır ve

hiçbiri merkez kareyi içermez. $(2,2)$ ve $(2,4)$ renklendirilemez. Listedeki $(3,3)$ ü $(2,3)$ ile değiştirirsek $(3,2)$ ve $(3,4)$ renklendirilemez. Benzer şekilde merkez kare dışında hiç bir karenin renklendirilemeyeceği gösterilebilir, bu bir çelişkidir. Demek ki 7 kare lazımdır.

b) Yukarıdaki listede verilen 7 kareye -5, kalanlara 1 yazılırsa her artının toplamı negatif olur. Ve tahtadaki toplam sayı ise $5(-7)+(45-7)=3$ yani pozitif olur.

89. Sonlu bir X kümesinin üç elemanlı altı kümesi veriliyor. X in elemanlarını iki renkle boyayarak, hiçbir alt kümenin elemanlarının tamamının tek renkte olmayabileceğini gösteriniz.

Çözüm. $A_1,\ldots,A_6$ altkümeler olsun ve X in eleman sayısına n diyelim. $n\geq 6$ kabul etmemizde bir sakınca yoktur. Eğer $n=6$ ise $\binom{4}{2}=20>2.6$ olduğundan X 'in Y diye adlandıracağımız öyle bir üç elemanlı altkümesi vardır ki ne $A_1,....,A_6$'den birine eşittir ne de onların tamlayan kümelerine. Y 'nin elemanlarının bir renge diğer elemanların diğer renge boyanması yeterlidir.

Şimdi $n>6$ olsun. X 'in $\{u,v\}$'nin herhangi bir A_i kümesinin alt kümesi olmayan iki u, v elemanı olmalı çünkü X 'de en az $\binom{7}{2}=21$ çift varken bunların en fazla $6\cdot 3=18$ tanesi A_i içinde yer alabilir. u ve v 'yi yeni bir eleman w ile değiştirelim ve bu işlemi tümevarımla uygulamaya devam edelim. En son 6 elemana düştüğümüzde w elemanına hangi renk düşerse, w 'ye denk gelen u ve v 'lere de aynı rengi verirsek ispatı tamamlamış oluruz.

90. $a_1,a_2,\ldots,a_n$ gerçel sayıları dizisinde ardışık terimlerin altına, iki terimin aritmetik oratalaması yazılarak yeni bir dizi oluşturuluyor. Oluşturulan bu dizi için de aynı işlem uygulanarak, bu dizideki ardışık terimlerin aritmetik ortalamalarından oluşan bir dizi daha oluşturuluyor. Bu işleme tek elemanlı (a) bir dizi elde edene kadar devam ediliyor. Eğer a sayısı işlemler sırasında sadece en son dizide görülüyorsa bütün işlemler sırasında bir eleman en fazla kaç defa görülebilir?

Çözüm. Eğer elde edilen herhangi bir dizinin bütün elemanları aynı ise takip eden dizilerin de bütün elemanları aynı ve a sayısına eşit olur. Bu da a sayısının sadece son basamakta görülmesi kısıtlamasıyle çelişir. O halde her dizide en az bir tane farklı eleman vardır. Buna göre en sık görülen eleman ilk dizide en fazla $n-1$, ikinci dizide en fazla $n-2$, ...ve sondan bir önceki dizide en fazla 1 defa görülebilir. O halde en sık görülen eleman

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

defa görülebilir. Örnek olarak $(0,0,0,\ldots,2^{n-1})$ dizisi alınabilir.

91. 100, 3'ün kuvvetlerinin toplamı biçiminde kaç farklı şekilde yazılabilir?

Çözüm. $f(n)$, n sayısının 3 'ün kuvvetlerinin toplamı şeklindeki farklı yazımları olsun ve $f(0) = 1$ alalım. n 'yi, k tane 1 kullanarak, ancak 3 $n-k$ 'yı bölüyorsa, 3 'ün kuvveti şeklinde yazabiliriz. $n-k = 3m$ olsun. O halde n 'nin 3 'ün kuvvetlerinin toplamlarının farklı yazımlarının sayısı m 'nin 3 'ün kuvvetlerinin toplamı şeklindeki farklı yazımlarının sayısına eşittir. Yani $f(n) = \sum_{m=0}^{\frac{n}{3}} f(m)$ olur.
$f(100) = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(33)$ olarak yazılabilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
f(100) &= (34+31+28)f(0) + (25+22+15)(f(0)+f(1)) \\
&+ (16+13+10)(f(0)+f(1)+f(2)) \\
&+ (7+4+1)(f(0)+f(1)+f(2)+f(3)) \\
&= 210f(0) + 117f(1) + 51f(2) + 12f(3)
\end{aligned}
$$

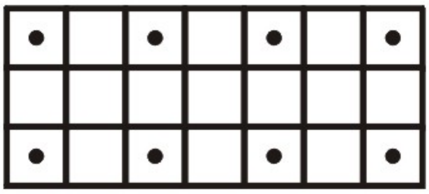
olur. $f(0) = f(1) = f(2) = 1$, ve $f(3) = 2$ olduğundan $f(100) = 402$ 'dir.

92. Bir sınıfta n tane öğrenci vardır. Öğretmen N tane soruyu bu öğrencilere dağıtır ve her öğrencisi $1 \leq i \leq n$ için a_i tane soru alır. Tüm a_i'ler eşit olmadığında öğrenciler soru sayılarını eşitlemek için şu şekilde bir yöntem geliştirirler: i ve j öğrencileri a_i+a_j toplamı çiftse her biri $\frac{a_i+a_j}{2}$ soru alır; tekse bir değişiklik yapmazlar. Öğrenciler aşağıdaki durumlar için başlangıçtaki dağılım ne olursa olsun herkes eşit sayıda soru alacak şekilde organize olabilirler mi?
a) n=8, N=80
b) $n = 10$, N=100

Çözüm. Öncelikle soruyu farklı şekilde soralım: n tane negatif olmayan tam sayının toplamı N dir. Her aşamada ikisi birden tek yada çift olan a ve b sayılarını seçip yerlerine $\frac{a+b}{2}$ yazıyoruz. Tüm sayıların birbirine eşit olması mümkün müdür?
a) n=8, N=80 olursa son aşamada tüm sayılar 10 olmalıdır. $1 \leq i \leq 8$ için $b_i = (a_i - 10)$ sayılarını ele alalım. Bu sayılardan en büyüğü a olsun. Genelliği bozmadan a'yı çift kabul edelim. a çiftse b_i ler arasında çift olan başka bir sayı daha olmalıdır. (b_i lerin toplamı 0 olduğu için). Bu sayıya b diyelim. a ve b'ye karşılık gelen sayıları seçip sorudaki yöntemi uygulayarak yeni oluşacak durumdaki b sayılarının en büyüğünün değeri küçülecektir. Bu yöntemi sürekli uygulayabilirsek sonunda $b_i$lerin hepsini 0 ve dolayısıyla tüm sayıları eşit duruma getirebiliriz. Yöntemi sadece tüm çift sayılar birbirine eşit ve tüm tek sayılar birbirine eşitse uygulamayayız. $0 < A < B$ olmak üzere A tane çift sayı x, $(8-A)$ tane tek sayı y'ye eşit olsun. Bu durumda $A \cdot x + (8-A)y = 80$ olur. Buradan $A(x-y) = 80 - 8y = 8(10-y)$olur. $x - y$ tek olduğu için A 8 ile bölünmelidir. Burada çelişki elde edilir. Yani başlangıç durumu ne olursa olsun tüm sayıları eşit yapan bir strateji vardır.
b) $a_1 = \ldots = a_8 = 11$, $a_9 = a_{10} = 6$ durumu için tüm sayıları eşitlemek mümkün değildir.

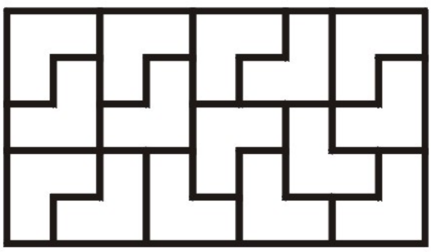
93. m, n tam sayılar olmak üzere $m \times n$ birimlik dikdörtgenler şekildeki 3 birimlik parçalarla kaplanmak istenmektedir. Dikdörtgenlerin tamamen kaplanabilmesi için m ve n hangi değerleri alabilir.

Çözüm. Dikdörtgenlerin 3 birimlik parçalarla tamamen kaplanabilmesi için alanının 3 ün bir tam katı olması gereklidir. $3|mn$ ise $3|m$ veya $3|n$ dir. Aynı zamanda 3 birimlik parçanın şeklinden dolayı $m, n \geq 2$ olmalıdır. Genelliği bozmadan $3|m$ kabul edelim:
n tek sayı olmak üzere $3 \times n$ lik bir dikdörtgen n adet parça ile kaplanmalıdır. Şekilden de görülebileceği gibi tek sayı indeksli, üstteki ve alttaki birim karelerden herhangi ikisi bir parça ile kaplanamaz ve bunlarin sayısı $n+1$ dir. Dolayısıyla bu dikdörtgen n parça ile tamamen kaplanamaz.



$n = 2k$ olmak üzere $3 \times 2k$ lık dikdörtgenler k adet 3×2 lik dikdörtgen ile kaplanabilir.

$m > 3$ ve $3|m$ olmak üzere $3l \times 2k$ lık dikdörtgenler kl adet 3×2 lik dikdörtgen ile kaplanabilir. n tek ve $n \geq 3$ ise, $6l \times n$ lik dikdörtgenler $6l \times 3$ lük ve $6l \times (n-3)$ lük iki parçaya ayrılır. Bu parçalar ise tamamen kaplanabilir.



Son olarak $n \geq 5$ ve n tek olmak üzere, $(6l+3) \times n$ lik dikdörtgenleri inceleyeceğiz. Bu dikdörtgenler 9×5 lik, $9 \times (n-5)$ lik ve $6(l-1) \times n$ lik üç parçaya ayrılır.

Önceki durumlardan 9×5 lik haricindekilerin kaplanabileceği aşikardır. 9×5 lik bir dikdörtgen ise şekildeki gibi kaplanabilir.

Sonuç olarak $m, n \geq 2$ ve $3|mn$ olmak üzere, m ve n sayılarından biri 3 diğeri ise tek sayı olma durumu dışındaki bütün hallerde dikdörtgenler tamamen kaplanabilir.

94. A ve B oyuncuları şu kurallarla bir oyun oynamaktadır: oyunun başında m tane n sayısı tahtaya yazılır. Oyuna A oyuncusu başlar ve oyuncular sırayla oynarlar. Sırası gelen oyuncu tahtadaki sayılardan sıfırdan farklı bir tanesini seçer. Eğer seçtiği k sayısı tahtadaki diğer sayıların hiç birisinden büyük değilse, oyuncu bu sayıyı $k-1$ ile değiştirir, aksi takdirde oyuncu bu sayının yerine tahtadaki en küçük pozitif sayıyı yazar. Tüm sayıların sıfır olmasını ilk sağlayan kişi oyunu kazanır. Eğer her iki oyuncu da en iyi stratejileriyle oynarsa oyunu kim kazanır?

Çözüm. Eğer sayı adedi olan m çift ise B'nin uygulayacağı strateji şudur: B tüm sayıları ikili gruplara ayırır ve eğer A bir sayıyı değiştirirse B o sayının grup eşini aynı şekilde değiştirir ve böylece her el sonrasında her grup kendi içinde aynı sayılardan oluşur. A oynarken tahtaya yazacağı sayı tahtada bulunacak en küçük sayı olacak ve bu sayı kendi grup eşinden kesinlikle daha küçük olacaktır. Bu şekilde devam edilince tüm sayıların sıfır olması ancak B oyuncusunun oynayışıyla gerçekleşebilir.

Şimdi m tek ve n çift olsun. Eğer hiçbir sayı sıfır değilse, B oynayışından sonra sayıların şu şekilde olmasını ayarlayabilir: tahtadaki en küçük sayı çift olacak, en küçük sayıların sayısı tek olacak ve diğer sayılar çift sayıda görünecek. Bunun için, A en küçük sayıyı değiştirdiğinde B'de en küçük sayıyı değiştirmeli, ama A başka bir sayıyı değiştirdiğinde B, A'nın değiştirdiği sayıya eşit olan başka bir sayıyı değiştirmelidir. Bu sayılardan birisi sıfır olana kadar bu şekilde devam eder, ondan sonra da B kalan sayıları ikili gruplara ayırıp yukarıda uygulanan stratejiyi kullanarak kazanır.

Son olarak, m ve n tek sayılar olsun. A'nın ilk oynayışı sonrasında tahtada üst paragrafta anlatılan durum gibi bir durum oluşur. Bundan dolayı A, B'nin stratejisini uygular ve kazanır.

Dolayısıyla cevap, mn tek ise A, çift ise B kazanır.

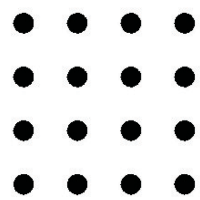
95. 99 tane birbirinden farklı 100'den küçük pozitif tam sayılar verilmiştir. $2, 3, \ldots, 99$ sayının toplamlarının tümü 100 ile bölünemiyorsa verilen tüm sayıların birbirine eşit olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Verilen tam sayıları $n_1, n_2, \ldots, n_{99}$ olarak adlandıralım. İki tane sayının birbirinden farklı olduğunu varsayalım. Genelliği bozmadan $n_1 \neq n_2$ olsun. Şimdi aşağıdaki 99 tane sayıyı inceleyelim:

$$s_1 = n_1, s_2 = n_2, s_3 = n_1 + n_2, s_4 = n_1 + n_2 + n_3, \ldots, s_{99} = n_1 + n_2 + \ldots + n_{99}$$

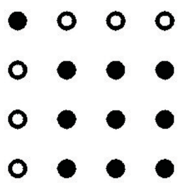
Yaptığımız varsayıma göre hiç bir s_i ,($i = 1, 2, 3, \ldots, 99$) ,100'e bölünemez. Çekmece Prensibi'ne göre bu sayılardan en az iki tanesinin 100'e bölümünden kalanı birbirine eşittir. Bu sayılara s_k ve s_l diyelim, $k > l$ olsun. Açıkca görülür ki s_k ve s_l , s_1 ve s_2'ye eşit olamaz.
s_k ve s_l 100'e bölününce aynı kalanı verdiğinden dolayı $s_k - s_l$ 100'e bölünür.
$100|(n_1 + n_2 + ... + n_k) - (n_1 + n_2 + ... + n_l)$
$100|(n_{l+1} + n_{l+2} + ... + n_k)$
Bu da baştaki birbirinden farklı iki tam sayımız olsun varsayımıyla çelişir. Demek ki tüm sayılar birbirine eşittir.

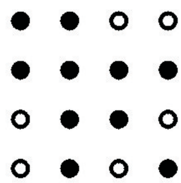
96. Şekildeki gibi 4×4 lük bir satranç tahtasının merkezlerine 16 tane nokta yerleştirilmiştir.



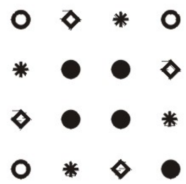
a) Herhangi 3 noktası bir ikizkenar üçgenin köşeleri olmayacak şekilde, 6 nokta seçilebileceğini ispatlayınız.
b) Yukarıdaki özelliklere sahip 7 nokta seçilemeyeceğini ispatlayınız.

Çözüm. a) Aşağıdaki şekiller sorulan özelliklere sahiptir. Bir başka deyişle, her 3 noktası bir ikizkenar üçgenin köşeleri olmayacak şekilde, 6 nokta seçilmiştir.

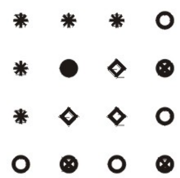




b) Her 3 noktası bir ikizkenar üçgenin köşeleri olmayacak şekilde, 7 nokta seçtiğimizi farz edelim. Bu durumda, iki olasılık vardır. İlk olarak seçilen bütün noktalar büyük karenin çevresinde olsun. 12 noktadan oluşan kümeyi, şekilde görüldüğü gibi, 3 tane dörtgenin köşeleri olacak şekilde 3 kümeye ayıralım. Aynı sembolden, bir ikizkenar üçgenin köşeleri olmayacak şekilde 3 tane nokta seçemeyeceğimiz açıkça görülür.



İkinci olarak büyük karenin iç kısmından seçilen en az bir nokta olsun. Diğer 15 nokta şekilde görüldüğü gibi 5 küme oluşturur. $\otimes$ ve $\diamondsuit$ ile işaretlenen noktalardan, sadece bir nokta seçebiliriz, **o** ve $*$ ile işaretli noktalardan 2 tane seçebiliriz. Toplamda, en fazla 6 nokta seçebiliriz.



97. M kümesi doğal sayıların 2008 elemanlı bir alt kümesi olsun. M kümesinin elemanlarından hiç birinin kümenin herhangi iki elemanının toplamına eşit olmadığı bilindiğine göre bu kümenin en büyük elemanının minimum değeri ne olabilir?

Çözüm. Problemi $|M| = \gamma$ genel durumu için çözeceğiz. a_i ler doğal sayılar olmak üzere $M = \{a_1, a_2, ..., a_\gamma\}$ olsun ve $a_i + a_j \in M$ olan $a_i \in M$ ve $a_j \in M$ ler olmasın. $i = 1, 2, ..., v$ olmak üzere tüm i ler için $a_i + 0 = a_i \in M$ olduğundan 0, M de bulunamaz.
$A = \{v-1, v, v+1, ..., 2v-2\}$ kümesinin her hangi iki elemanının toplamı kümede bulunmadığından, bu küme soruda verilen koşulu sağlar.
$\alpha = max(M)$ olsun. $\alpha \geq 2v - 2$ olduğunu ispatlayalım. Bunun için öncelikle $\alpha \leq 2v - 3$ olduğunu farzedelim. İki durum incelememiz gerekir.
$\alpha = 2k \leq 2v-3$ ise $1, 2, ..., k-1, k, k+1, ..., 2k-2, 2k-1$ doğal sayılarını oluşturabiliriz. Bu durumda $k - 1 = \frac{\alpha}{2} - 1 < v - 2$ adet toplamları $\alpha = 2k$ olan sayı çifti seçebiliriz.M kümesinin k ve $2k = \alpha$ dan farklı $v - 2$ adet elemanı olduğundan $(1, 2k-1), (2, 2k-2), \ldots, (k-1, k+1)$ ikililerinden en az bir tanesinin bileşenleri M kümesinde olacaktır. Buradan çelişki elde edilir.
$\alpha = 2k + 1 \leq 2v - 3$ ise $1, 2, ..., k, k+1, ..., 2k-1, 2k$ doğal sayıları içerisinden toplamları $\alpha = 2k + 1$ olan $k = \left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor \leq v - 2$ adet sayı çifti seçebiliriz. M kümesinin $2k - 1 = \alpha$ dan farklı $v - 1$ adet elemanı olduğundan $(1, 2k), (2, 2k-1), \ldots, (k, k+1)$ çiftlerinden en az bir tanesinin bileşenleri M kümesinde olacaktır. Buradan yine çelişki elde edilir.

Sonuç olarak $\alpha = max(M)$, $2v - 2$ ye eşittir ve $v = 2008$ için $\alpha = 4016$ bulunur.

98. 2005 kenarlı düzgün bir çokgenin köşeleri kırmızı, beyaz ve maviye boyanmıştır. Komşu iki köşe farklı renkteyse bu iki köşenin üçüncü renge boyanması işlemine tekrar boyama diyelim.
a) Sonlu sayıda tekrar boyama işleminden sonra bütün köşelerin aynı renge boyanabileceğini gösteriniz.
b) Sonunda elde edilen renk baştaki köşelerin rengine bağlı olarak sadece tek bir renk olarak mı belirlenir?

Çözüm. Üç rengi $0, 1, 2$ olarak adlandıralım. Soruyu çözmek için öncelikle aşağıda bulunan iki iddiayı ispatlayalım.
İddia 1: Herhangi dört komşu köşe tekrar boyama kuralıyla aynı renge boyanabilir.
İspat: Tekrar boyama işlemine göre iki farklı renkli komşu köşe aynı renge boyanabilir. Bu yüzden önce dört komşu köşeye iki çift olarak tekrar boyama işlemi yapılır. Eğer bu işlemden sonra iki komşu çift köşeler aynı renge boyandıysa istediğimiz sonuca ulaşmış oluruz. İki komşu çift farklı renkte olsun, örneğin (1122). Tekrar boyama işlemiyle aşağıdaki şekilde boyayabiliriz.

$$1122 \to 1002 \to 2202 \to 2112 \to 0000$$

İddia 2: Eğer dört komşu köşede ilk üç köşe aynı renk, dördüncü köşe farklı renkteyse tekrar boyama işlemiyle bütün köşeler dördüncü köşenin rengine boyanabilir.
İspat: Dört komşu köşenin rengini 1110 olarak alalım. Tekrar boyama kuralına uygun olarak aşağıdaki diziyi elde ederiz, bu da istediğimiz sonucu bize vermiş olur.

$$1110 \to 1122 \to 1002 \to 2202 \to 2112 \to 0000$$

Şimdi soruda istenen önermeleri göstermeye hazırız. İlk önce köşeleri A_1, A_2, ..., A_{2005} olarak adlandıralım.
a) Tüm köşeleri tekrar boyama işlemiyle aynı renge boyamamız gerekiyor.İlk yardımcı kuramdan dolayı A_1, A_2, A_3, A_4 aynı renge boyanabilir, bu renge örneğin kırmızı diyelim. Benzer şekilde A_5, A_6, A_7, A_8 de aynı renge boyanabilir. Eğer bu renk kırmızıysa sonraki dörtlüye bakarız, eğer farklı bir renkse bu sefer A_4, A_5, A_6, A_7 dörtlüsünü inceleriz. A_1, A_2, ..., A_7 köşeleri kırmızıya boyanabilir çünkü A_5, A_6, A_7 bir önceki tekrar boyama sayesinde kırmızıdan farklı bir renge boyanmıştı ve A_4 kırmızı renkti. İkinci yardımcı teoremden dolayı A_5, A_6, A_7, A_8 dörtlüsü A_4´ün rengine yani kırmızıya boyanabilir. $2002 = 4 + 3.666$ olduğundan dolayı biz bu işlemi 666 kez tekrarlayarak ilk 2002 köşeyi kırmızıya boyayabiliriz. Şimdi A_{2003}, A_{2004}, A_{2005}, A_1 köşelerini inceleyelim. Birinci yardımcı kuramı kullanarak yine bu dört köşeyi aynı renge boyarız. Eğer bu renk kırmızıysa istediğimiz sonucu elde

etmiş oluruz. Eğer başka bir renkse, bu renge mavi diyelim, ikinci yardımcı kuramı kullanarak A_{2002}, A_{2003}, A_{2004}, A_{2005} köşelerini kırmızıya boyarız. Ancak bu sefer A_1 köşesi mavi boyanmış olarak kalmış olur. Bu durumda A_1 köşesi dışındaki tüm köşeler kırmızı, A_1 mavidir. İkinci yardımcı kuramı kullanarak A_1, A_2, A_3, A_4 'ü maviye boyarız. Bu işlemi 666 kere tekrarlayarak A_1, A_2, …, A_{2002} köşelerini maviye boyamış oluruz. A_{2003}, A_{2004}, A_{2005}, köşeleri kırmızıya boyandığından, ikinci yardımcı kuram sayesinde bunları da maviye boyarız ve istediğimiz sonucu elde etmiş oluruz.

b) Tekrar boyama işleminden sonra tüm sayıların toplamının 3 ile bölümünden elde edilen kalan her zaman aynı kalır. $(01 \to 22, 02 \to 11, 12 \to 00)$. Son olarak elde edilen durumda tüm sayıların toplamı $2005x$ olacaktır. (x ile son elde edilen rengi gösteriyoruz.) Buradan rengin tek türlü belirlendiğini göstermiş oluruz.

99. $S = \{1, 2, \ldots, 2004\}$ kümesinin bütün elemanları çeşitli renklere boyanacaktır. $a|b$, $b|c$ ve a, b, c birbirinden farklı olmak üzere (a, b, c) üçlülerinin hiçbirinde a, b ve c sayılarının üçünün de aynı renkte olması istenmiyor. En az kaç farklı renge ihtiyaç vardır?

Çözüm. $f(n)$ fonksiyonu $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin elemanlarını soruda istenen biçimde boyamak için gerekli en az sayıdaki rengi belirtsin. Her n tam sayısı için, $2^{k-1} \leq n < 2^k$ olmak üzere, $f(n) = [(k+1)/2]$ olduğunu göstereceğiz. Eğer istenen şart sağlanacaksa o zaman görürülür ki $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{k-1}$ dizisindeki hiçbir üçlü aynı renkte olamaz. O halde bir rengi ikiden fazla defa kullanamayız. Buradan $f(n) \geq [(k+1)/2]$ elde edilir.

Şimdi de $[(k+1)/2]$ tane renkle, istenilen şartı sağlayacak şekilde bir boyama yapılabileceğini gösterelim. $m \leq n$ olan bir sayının asal çarpanlarına ayrılmış haline bakalım. p_i ler farklı asal sayıları belirtmek üzere $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ olsun. $h(m) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t$ olarak tanımlayalım. m sayısını da $[h(m)/2]$ rengi ile boyayalım. Bu kurala göre 1 den n ye kadar bütün sayılara renkler verelim. $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a|b$, $b|c$ ve a, b, c birbirinden farklı olsun. a nın b yi bölüyor olması $h(a) < h(b)$ olmasını gerektirir. Benzer biçimde $h(b) < h(c)$ elde ederiz. $h(c) - h(a) \geq 2$ eşitsizliğinden, $[h(c)/2] > [h(a)/2]$ eşitsizliğine ulaşırız. Bu da bize a nın ve c nin farklı renklerde olduğunu söyler.

Bizim durumumuzda $n = 2004$ tür. Dolayısıyla 6 renge ihtiyaç vardır.

100. $n \times n$ lik bir tablo; $-1, 0, 1$ sayıları ile dolduracaktır. Her sütundaki ve satırdaki sayıların toplamlarının birbirinden farklı olması isteniyor (bir sütundaki sayıların toplamı, başka bir sütundaki sayıların toplamına eşit olamayacağı gibi herhangi bir satırdaki sayıların toplamına da eşit olamaz). $n = 4$ ve $n = 5$ durumları için tablo istenilen şekilde doldurulabilir mi?

Çözüm. $n = 4$ durumu için aşağıdaki gibi doldurulabilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$n = 5$ durumunda ise doldurulamaz.
Sütun ve satırlardaki toplamlar $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ sayılarından biri olabilir. i. satırdaki sayıların toplamını a_i ile, j. sütundaki sayıların toplamını b_j ile gösterelim. Bütün satırların toplamı tablodaki bütün sayıların toplamına eşittir. Aynı durum sütunlardaki sayıların toplamı için de geçerlidir. Dolayısı ile

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

elde edilir. $a_1, \dots, a_5, b_1, \dots, b_5$ sayılarının birbirinden farklı olması için 11 elemanlı $T = \{-5, \dots, 0, \dots, 5\}$ kümesinin 10 elemanı bir satır veya sütundaki sayıların toplamına karşılık gelmelidir. s_1 sayılarının toplamı tek olan satırların sayısını, s_2 sayılarının toplamı tek olan sütunların sayısını belirtsin. Yukarıdaki eşitlik incelenirse, s_1 ve s_2 sayılarının ikiye bölümünden kalanların eşit olduğu görülür. $s_1 + s_2 = 6$ olmak zorundadır aksi halde T kümesinin birden fazla elemanı bir satır veya sütun toplamına karşılık gelmemiş olur. Sonuç olarak T kümesindeki bütün tek sayıların bir satır veya sütun toplamına karşılık gelmesi gerektiği görülür.
Tabloda satırların veya sütunların yerlerini değiştirmek (örneğin birinci satırdaki sayıları beşinci satıra, beşinci satırdakileri de birinci sütuna taşımak), satır veya sütunlardaki toplamların oluşturduğu kümeyi değiştirmeyecektir.

Söz gelimi $b_1 = 5$ olsun. a_i ler -5 olamaz. Yukarıdaki açıklamadan dolayı $b_2 = -5$ olarak varsayabiliriz. Toplamlardan en az birinin 4 veya -4 olması gerekir. $b_3 = 4$ olduğunu kabul edelim (satır toplamlarının 4 veya -4 olamayacağı açıktır). Üçüncü sütunda dört tane 1 ve bir tane 0 olmalıdır. Sıfır, sütunun en altındaki eleman olsun. Dolayısı ile herhangi bir i için $a_i = -3$ olamaz. $b_4 = -3$ olsun. Dördüncü sütunda en az üç tane -1 olmak zorundadır. Eğer bu -1 ler yukarıdan ilk dört satırda ise ilk üç satırda olduklarını varsayabiliriz. Buradan a_1, a_2 ve a_3 ün $-1, 0, 1$ in bir permütasyonu olduğu görülür. $a_5 = 3$ olamayacağı için $b_5 = 3$ de olamaz. $a_4 = 3$ olmalıdır. Bunun için dördüncü satırın son iki sayısının 1 olması gereklidir. $b_4 = -3$ olduğu için dördüncü sütunun son sayısı -1 dir. Beşinci satır ve beşinci sütundaki her ihtimalin bizi çelişkiye götüreceğini göstereceğiz.

Dördüncü satırın ilk dört hanesinde en fazla iki tane -1 olduğu durumu incelememiz yeterli olacaktır. Dördüncü sütundaki sayılar $-1, -1, 0, 0, -1$ olsun. Satırlardaki ilk dört sayıların toplamları $0, 0, 1, 1, -1$ olduğu için hiçbir satırdaki sayıların toplamının 3 olamayacağı görülür. $b_5 = 3$ olmalıdır. Birinci ve ikinci satırlardaki ilk dört sayının toplamları eşit olduğu için beşinci sütunun birinci ve ikinci hanelerinde farklı sayılar olmalıdır. Aynı gerekçeden beşinci satırın üçüncü ve dördüncü hanelerindeki sayılar da farklı olmalıdır. Örneğin beşinci sütundaki sayılar $1, 0, 1, 0, 1$ olursa $a_1 = a_4 = 1$ elde edilir. Olası bütün durumlara bakıldığında her seferinde bir çelişki olacağı açıktır.

101. İki bilişim kuramcısı, A ve B, jokerleri çıkartılmış, karıştırılmış bir deste iskambil kağıdı ile bir hile yaparlar. A, seyirciler arasından bir kişinin desteden rastgele beş kart seçmesini ister. Seyirci beş kart seçer ve A'ya uzatır. A, kartları dikkatle inceler ve bir tanesini seyirciye geri verir. Daha sonra, A geriye kalan dört kartı bir şekilde düzenler ve onları ters olarak üst üste koyar. B, olup bitenlerin farkında olmaksızın odaya girer, dört karta bakar ve eksik olan, seyircideki beşinci kartı tespit eder. Bu hile nasıl yapılmıştır?
Not: A ile B arasındaki iletişim, sadece dört kartın düzenlenmesi yoluyla olmuştur. Şifreli bir konuşma, elle işaretleşme, özel sensörlü algılama, işaretli ya da kıvrılmış kartlar gibi dört karttan oluşan destenin yönlendireceği herhangi bir ipucu yoktur.

Çözüm. Aşağıda verilen çözüm belki de en basit olanıdır. Tek çözüm değildir, ancak en az zihinsel çaba gerektirenidir.
Beş kartlık herhangi bir grubun içerisinde, en azından iki tanesi aynı takımdandır. A, aynı takımdan olan kartlardan birini seçer ve bu kartı seyirciye geri verir. Diğer kart, dört karttan oluşan kümenin ilk kartı olacak ve seyirciye verilen kartın hangi takımdan olduğunu işaret edecektir.
Sonra, geriye kalan üç kart Düşük, Orta ve Yüksek değerler olarak düşünülür (gerçek değerlerinin bir önemi yoktur). Önceden kararlaştırılmış herhangi bir sıralama yeterli olacaktır. Örneğin, astan papaza kadar artan değerlere göre sıralama yapılır. Aynı değerler için ise takım sıralamasına bakılır. Takımları alfabetik olarak sıralayabiliriz: Karo, Kupa, Maça, Sinek. Örnek olarak, Maça 3'lü Sinek 7'liden önce gelir ve takım sıralaması kullanılarak Kupa 7'li de Sinek 7'liden önce gelir. Dolayısıyla, bu durumda Düşük-Orta-Yüksek sıraması Maça 3, Kupa 7, Sinek 7 şeklinde yapılır.
Verilen Düşük, Orta ve Yüksek değerlerini, aşağıdaki şekilde bir ile altı arasındaki sayılarla kodlayabiliriz.
DOY=1, DYO=2, ODY=3, OYD=4, YDO=5, YOD=6.
Bu bizim için yeterli değildir, çünkü gizli kart hala 12 karttan biri olabilir. Ama, henüz kullanmadığımız bilgiyi söylemek için bir fırsatımız daha var; A, aynı kartlardan hangisini elinde bulunduracağına ve hangisini seyirciye geri vereceğine karar vermelidir. Elde tutulan kart takımı işaret etmesinin yanı sıra, başka nasıl kullanılabilir?

Astan papaza kadar olan 13 adet kartın bir çember etrafında sıralandığını hayal ediniz. İki kart arasındaki en kısa yol, bir karttan diğerine ileriye doğru sayarak elde edilir ve asla altı sıradan daha fazla olamaz. A, bu yüzden elinde tuttuğu kartı en kısa yoldan başlayarak seçer ve diğer kartı seyirciye geri verir. B ise, kodlanmış numarayı, elindeki dört kartın birincisinden ileriye doğru saymak için kullanır.

Örnek. Seyirci, Sinek 2, Karo 5, Sinek Vale, Kupa 5, Maça Papaz kartlarını seçsin ve bu kartları A'ya versin. Seçilen kartlar arasında sadece Sinek'ten, iki kart vardır. Sinek Vale'den, Sinek 2'ye doğru saymak, 4 sıra ilerlemektir. Bu yüzden; A, Sinek Vale'yi elinde tutarken, Sinek 2'yi seyirciye geri verir. Dolayısıyla, A'nın elindeki ilk kart Sinek Vale olacaktır. Diğer üç kart ise takım sıralaması da kullanılarak, Karo 5=Düşük, Kupa 5=Orta ve Maça Papaz=Yüksek şeklinde elde edilir. A, dörtlü grubu belirtmek için OYD sıralamasını kullanır. Bu yüzden dört kart Sinek Vale, Kupa 5, Maça Papaz ve Karo 5 şeklinde sıralanır.
B, kodu çözmek için Sinek Vale' den ileriye doğru sayacağına dikkat etmek zorundadır. Ayrıca, diğer 3 kartın yani Karo 5, Kupa 5 ve Maça Papaz'ın doğal sıralamasına ve dört sayısıyla kodlanan Kupa 5, Maça Papaz ve Karo 5 kartlarından oluşan OYD sıralamasına dikkat etmelidir. Dolayısıyla; B, Sinek Vale'den dört sıra ileriye sayar ve seyircideki kartın Sinek 2'li olduğunu söyler!
Küçük bir pratikle bu hile düzgün bir akış içerisinde yapılabilir. Aynı seyirciyle gösteri tekrarlanacaksa, hilenin anlaşılmasını zorlaştırmak için takım kartlarının pozisyonlarının değiştirilmesi tavsiye edilir. Örneğin n'inci gösteride takım kartları n $(mod\ 4)$ pozisyonuna göre yerleştirilebilir.

102. Bir önceki sorudaki iki bilişim kuramcısı şimdi daha büyük bir hileyi deneyecekler. Aslında aynı hile ama bu kez 124 karttan oluşan bir desteyle gösterilerini sergileyecekler. Bu hile nasıl çalışır?
Not: 124, bu hilenin sergilenebileceği maksimum sayıdır. Kartların, dört takımdan oluştuğu ve herbirinin içerisinde 31 kart olduğu ya da Ocak, Mart, Mayıs ve Temmuz ayları kullanılarak bir takvimin günleri olduğu düşünülebilir. Ya da iki deste iskambil kağıdına üçüncü desteden sihirbazın aklında tutabileceği 20 kart ilave edildiği, belki de kartların arka yüzlerinin, kartların hangi paketten alındığı bilinecek şekilde tasarlandığı düşünülebilir. Ya da basitce 1'den 124'e kadar numaralandırılır.

Çözüm. Destedeki kartları 0'dan 123'e kadar numaralandıralım : $c_0 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4$. A, c_i kartını seçer ve seyirciye geri verir öyle ki, $i = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \pmod 5$.
Şimdi, geriye kalan dört kartın toplamı $\equiv s \pmod 5$ olsun. Bütün kartların toplamı $\equiv i (mod 5)$ olduğu için, saklanan kart $c_i \equiv -s + i \pmod 5$ olmak zorundadır. Elde tutulan dört kart çıkarılarak, kartlar 0'dan 119'a kadar yeniden numaralandırılırsa,

saklanan kartın yeni numarası $\equiv -s \pmod 5$ olmalıdır.
Buradan, saklanan kart için tam olarak 24 tane olasılık vardır. Bunlar elde tutulan dört kartın sıraları değiştirilerek ifade edilebilir.

103. Ayşe ve Barış'ın rasgele dizilmiş birer iskambil destesi vardır. Her seferinde destelerin en üstündeki kart alınabilmektedir. Sırayla Ayşe ve Barış kendi destelerinden birer kart alıp karşılaştıracaklardır. Aldıkları kartlar aynı olursa Barış kazanacak, değilse birer kart daha çekip bu şekilde kartlar bitene kadar devam edeceklerdir. Kartlar her seferde farklı çıkarsa Ayşe kazanacaktır. Ayşe'nin kazanma olasılığı nedir?

Çözüm. Barış'ın iskambil destesindeki kartları sırasıyla 1 den 52 ye kadar numaralandıralım. Buna göre Ayşe'nin destesindeki kartları da $(a_1, a_2, \ldots, a_{52})$ olarak numaralandıralım. (Örneğin Barış'ın destesinde karo asını 10 ile belirtmişsek Ayşe'nin destesindeki karo asını da 10 ile numaralandıracağız.) Ayşe'nin kazanması için $(a_1, a_2, \ldots, a_{52})$ dizisinin her $i \in \{1, \ldots, 52\}$ için $a_i \neq i$ koşulunu sağlaması gerekir. Ayşe'nin kazanma olasılığının bu koşulu sağlayan dizilerin sayısının 52! sayısına bölümü olduğu açıktır. Dolayısıyla bizim $a_i, i \in \{1, \ldots, 52\}$ için $a_i \neq i$ koşulunu sağlayan $(a_1, a_2, \ldots, a_{52})$ dizilerinin sayısını bulmamız gerekir. Bu özelliği sağlayan dizilere düzensiz diziler diyelim (bakınız açıklama). $d(n)$, n uzunluğundaki düzensiz dizilerin sayısını belirtsin. Ekleme çıkartma yöntemini kullanarak düzensiz dizilerin sayısını bulacağız.

$$\begin{aligned} d(n) \quad = \quad & n! - (\text{herhangi } i \text{ için } a_i = i \text{ olan dizilerin sayısı}) \\ & +(\text{herhangi } i \neq j \text{ için } a_i = i \text{ ve } a_j = j \text{ olan dizilerin sayısı}) \\ & -(\text{herhangi farklı} i, j, k \text{için } a_i = i, a_j = j \text{ ve } a_k = k \text{ olan dizilerin sayısı}) \\ & \vdots \\ & +(-1)^n(\text{tüm } i \text{ ler için } a_i = i \text{ olan dizilerin sayısı}) \end{aligned}$$

$n!$ tane diziyle başladık, en az bir terimi düzensizlik koşulunu sağlamayan dizileri çıkarttık. Ancak çıkardığımız diziler içinde en az iki terimi düzensizlik koşulunu sağlamayan dizileri iki kere çıkartmış olduk. Bu sebeple fazladan çıkarttığımız dizileri ikinci satırda ekledik. Ama bu defa da en az üç terimi düzensizlik koşulunu sağlamayan dizileri fazladan eklemiş olduk. Bu şekilde ekleyip çıkartarak son olarak bütün terimleri düzensizlik koşulunu sağlamayan diziyi $(a_1 = 1, \ldots a_n = n)$ n sayısına bağlı olarak ekliyoruz veya çıkartıyoruz. Herhangi k farklı terimi (başka bir deyişle en az k farklı terimi) düzensizlik koşulunu sağlamayan dizilerin sayısına bakalım. $\binom{n}{k}$ farklı terim seçebiliriz. Kalan terimler $(n-k)!$ farklı şekilde sıralanabilir. Buradan herhangi k farklı terimi düzensizlik koşulunu sağlamayan dizilerin sayısını $\binom{n}{k}(n-k)!$

olarak buluruz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} d(n) &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots + (-1)^n \end{aligned}$$

Buradan Ayşe'nin kazanma şansını

$$\frac{d(52)}{52!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{52!}$$

olarak buluruz. Eşitliğin sağ tarafına bakıldığında, bu toplamın $\frac{1}{e}$ sayısının Maclaurin serisinin ilk 53 teriminin toplamı olduğu görülür. Bu sebeple Ayşe'nin kazanma şansı yaklaşık $\frac{1}{e}$ olarak kabul edilebilir.
Açıklama: $n > 1$ olmak üzere $a_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ için $a_i \neq i$ koşulunu sağlayan $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dizilere düzensiz diziler denir.

104. Bir öğrenci bir bilgisayar oyunu oynuyor. Oyun öğrenciye birbirinden farklı, rastgele seçilmiş 2002 pozitif tam sayı veriyor. Daha sonra oyun öğrencinin aşağıdaki kurallara göre işlemler yapmasını istiyor:

- verilen sayılardan 2 tane seç, birini ikiyle çarp, diğerine ekle ve toplamı tut,
- sonra, geri kalanlardan 2 sayı seç, birini ikiyle çarp, diğerine ekle; toplamı önceki toplamla çarp ve sonucu tut,
- yukarıdaki işlemleri 2002 sayının tamamı bitene kadar tekrarla.

Öğrenci, sondaki çarpım maksimumsa oyunu kazanıyor. Bu durumda kazanan stratejiyi bulup ispatla gösteriniz.

Çözüm. Verilen sayılar $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2002}$ şeklinde olsun. Maksimum çarpım değerine ise A diyelim. Dolayısıyla A, $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{2002}}$ verilen sayıların bir permütasyonu olmak üzere,

$$A = (2x_{i_1} + x_{i_2})(2x_{i_3} + x_{i_4}) \ldots (2x_{i_{2001}} + x_{i_{2002}})$$

şeklinde olur.

İlk olarak, $x > u$ ise $2x + u > x + 2u$ olduğunu görelim. Dolayısıyla çarpım, ancak çarpanlardaki büyük sayı ikiyle çarpılırsa büyüyecektir. Yani permütasyonumuzda, $j = 1, 3, 5, \ldots, 2001$ için $x_{i_j} > x_{i_{j+1}}$ olmalıdır.

Şimdi A'nın $(2x_{2002} + x_1)$ çarpanını bulundurduğunu gösterelim. Eğer durum bu olmasaydı A, $(2x_{2002} + u)(2v + x_1)$ şeklinde bir çarpanı barındırırdı. Ancak bu durumda

$$(2x_{2002} + u)(2v + x_1) < (2x_{2002} + x_1)(2v + u)$$

olur çünkü bu eşitsizlik ancak ve ancak

$$(x_{2002} - v)(u - x_1) > 0$$

eşitsizliği sağlandığında sağlanır ve ikinci eşitsizliğin her zaman sağlandığı açıktır. Dolayısıyla baştaki kabulümüz yanlıştır. Yani A, $(x_{2002} + x_1)$ çarpanını içerir.

Bu durum, $x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_{2001}}$ ve $\dfrac{A}{x_{2002} + x_1}$ çarpımı için de geçerli olacağından A sayısının maksimum değeri

$$A = (2x_{2002} + x_1)(2x_{2001} + x_2)\ldots(2x_{1002} + x_{1001})$$

olur.

Sonuç olarak kazanan strateji, her seferinde verilen sayıların en büyük ve en küçüğünü alıp, büyük olanı ikiyle çarparak devam etmektir.

105. $n \times n$ 'lik kare şeklinde bir sırada erkek ve kız öğrenciler oturmaktadır. Her satırda, sütunda ve çapraz doğrular boyunca oturan kız öğrencilerin sayısı bilinmektedir. Buna göre hangi n sayıları için kız öğrencilerin yerini tam olarak belirlenebilir?

Çözüm. Bilinenlerin $n = 1$, $n = 2$ ve $n = 3$ için yeterli olacağı açıktır.
$n = 5$ olsun ve i. satır, j. sütundaki öğrenciye a_{ij} diyelim. Eğer bu sırada bir kız öğrenci oturuyorsa $a_{ij} = 1$, yoksa $a_{ij} = 0$ olsun. O halde

$$h_i = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} \qquad , v_j = \sum_{i=1}^{5} a_{ij}$$

sırasıyla her satırdaki ve her sütündaki toplam kız öğrenci sayılarına eşit olacaktır. Toplam kız öğrenci sayısına da F diyelim.

$$r_1 = a_{51}, \quad r_2 = a_{41} + a_{52}, \quad \cdots \quad r_9 = a_{15}$$

sola yatık çapraz doğrular boyunca kız öğrenci sayısını,

$$l_1 = a_{11}, \quad l_2 = a_{21} + a_{12}, \quad \cdots \quad l_9 = a_{55}$$

sağa yatık çapraz doğrular boynca kız öğrenci sayısını verir.
Bu durumda

$$h_3 - v_1 - v_2 - v_4 - v_5 + r_2 + r_8 + l_2 + l_8 + r_5 + l_5 = 3a_{33}$$

olur. O halde bilinenlerin yukarıdaki gibi toplanıp çıkartılması ile merkezde kız öğrenci oturup oturmadığını kesin olarak çıkarabiliriz.

Ayrıca

$$F - \sum_{k=2}^{9} r_k = r_1 = a_{51}, \quad F - \sum_{k=1}^{8} r_k = r_9 = a_{15}$$

$$F - \sum_{k=2}^{9} l_k = l_1 = a_{11}, \quad F - \sum_{k=1}^{8} l_k = l_9 = a_{55}$$

eşitliklerinden köşelerde de kız öğrenci oturup oturmadığı kesin olarak bulunabilir. Geri kalan 20 yer için de 0 yerine 1 yazıldığında değişmeyen toplamı olan denklemler yazılarak bir sonuca varılabilir.
$n \geq 6$ olduğunda yukarıdaki gibi köşeler hakkında kesin bir sonuca ulaşılabilir. Ancak, diğer yerler için merkezi kız öğrenci oturup oturmadığı incelenen yer olmayacak şekilde 5×5 lik bir kare oluşturulmalıdır.

106. $n \times n$'lik bir dama tahtasında iki kişilik bir oyun oynanıyor. Birinci oyuncuda sınırsız sayıda beyaz taş, ikinci oyuncuda ise sınırsız sayıda siyah taş var. Oyuna boş bir tahta ile başlanıyor, hamleler sırayla yapılıyor, ve ilk hamleyi birinci oyuncu yapıyor. Her oyuncu sırası geldiğinde tahtadaki boş karelerden istediklerine, bir kareye birden fazla taş gelmeyecek şekilde kendi taşlarından koyuyor. Oyun tüm tahta dolduğunda sona eriyor. Sıra kendinde olan oyuncu oyun bitmemişse tahtaya en az bir taş koymak zorunda.

Oyun bittiğinde, tahtadaki bir taştan başlayarak her adımda sol, sağ, üst veya alt karelerden birindeki aynı renkten bir taşın bulunduğu kareye geçmek suretiyle dama tahtasının kenarlarından birine ulaşmak mümkün değilse bu taşa "hapsedilmiş" diyoruz. Her oyuncunun puanı (karşı renkten hapsedilmiş taşlar) $-$ (kendi renginden hapsedilmiş taşlar) şeklinde hesaplanıyor, ve her iki oyuncu da oyunu mümkün olan en yüksek puanla tamamlayacak şekilde oynuyor. $n*n$'lik tahtada birinci oyuncunun alacagi puan $f(n)$ ise:

$$\frac{2001^2}{3} < f(2003) < \frac{2002^2}{2}$$

olduğunu gosteriniz.

Çözüm. Birinci oyuncu yapacağı ilk hamlede eğer tahtanın dış çerçevesindeki karelerin tümüne birer taş koymazsa, ikinci oyuncu boş kalan karelerin birine taş koyarak hamlesini geçiştirebilir. İlk oyuncunun ikinci hamlesi ne olursa olsun, ilk oyuncu ilk iki hamlesindeki taşların tümümü ve bu siyah taşın olduğu yere taşlarını koyarak ilk hamlesini yapabilirdi, ve bu hapsedilen siyah taşların sayısını azaltmazdı. Boylelikle, genelliği bozmadan ilk hamle sonunda dış çerçevedeki karelerin tümünde beyaz taş olduğunu varsayabiliriz.

İkinci oyuncunun koyduğu tüm taşlar hapsolacaktır. Eğer her hamlede yalnızca bir taş kullanırsa kalan kare sayısının yarısından fazla zarar edemez. Bu bize $f(2003) < \frac{2002^2}{2}$'i (aslında biraz daha iyisini) verir.

Öte yandan ilk oyuncu ilk hamlesinde dış çerçevenin yanısıra 4.,7.,10.,... 2002. sütunlardaki kareleri doldurursa geriye $2\frac{2001^2}{3}$ boş kare kalir. Kalan bölgede hiç bir beyaz pulun hapsolmayacağı garantidir. Beyaz bundan sonra her elde yalnızca bir pul kullanırsa, en az bu kalan kare sayısının yarısı kadar siyah pul hapseder, bu da bize diğer eşitsizliği verir.

107. $M = \{1, 2, \ldots, 100\}$ kümesi veriliyor. $n \in \mathbb{N}$ ve $a, b \in M$ olmak üzere $a - b = n^2$ ise a ve b farklı alt kümelerde yer alacak şekilde M kümesinin dörtten az alt kümeye ayrılamayacağını gösteriniz. Aynı şartları sağlayacak şekilde M kümesi beş alt kümeye ayrılabilir mi?

Çözüm. M kümesi şartı sağlayacak şekilde dörtten az alt kümeye ayrılmış olsun. a ve b aynı alt kümedeyse $a \equiv b$ değilse $a \neq b$ diyelim. $n \leq 75$ için $n \neq n+9$, $n \neq n+16$, $n \neq n+25$, $n+9 \neq n+25$ ve $n+16 \neq n+25$ olduğundan ve toplam alt küme sayısı en fazla 3 olabileceğinden $n+9 \equiv n+16$ olur. O halde $m = n+9$'a bakarsak, $10 \leq m \leq 94$ için $m \equiv m+7$ olur. $m = 10$ için $10 \equiv 17 \equiv \cdots \equiv 59$ olur. Fakat $10 \equiv 59$ olduğu halde $59 - 10 = 7^2$ olduğundan çelişki elde ederiz.
Şimdi m'nin şartı sağlayacak şekilde 5 alt kümeye ayrılabileceğini gösterelim:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{10k,\ 1 \leq k \leq 10\} \cup \{10k+3,\ 0 \leq k \leq 9\} \\
A_2 &= \{10k+1,\ 0 \leq k \leq 9\} \cup \{10k+4,\ 0 \leq k \leq 9\} \\
A_3 &= \{10k+2,\ 0 \leq k \leq 9\} \cup \{10k+5,\ 0 \leq k \leq 9\} \\
A_4 &= \{10k+6,\ 0 \leq k \leq 9\} \cup \{10k+8,\ 0 \leq k \leq 9\} \\
A_5 &= \{10k+7,\ 0 \leq k \leq 9\} \cup \{10k+9,\ 0 \leq k \leq 9\}
\end{aligned}$$

Bu kümeler şartı sağlar çünkü tam karelerin son rakamı $0, 1, 4, 5, 6, 9$ olabilir ama bu alt kümelerdeki sayıların farkının son rakamları $0, 2, 3, 7, 8$ olabilir. Son rakamın 0 olması için iki eleman arasındaki farkın 100 olması gerekir ki bu da mümkün değildir. O halde verilen alt kümeler şartı sağlar.

108. Hareketine [1,1] noktasından başlayacak bir taşı koordinat sistemi üzerinde aşağıdaki kurallara göre hareket ettiriyoruz:

- Taş bir $[a, b]$ noktasından $[2a, b]$ veya $[b, 2a]$ noktasına hareket edebilir.
- Taş bir $[a, b]$ noktasından eğer $a > b$ ise $[a - b, b]$ noktasına hareket edebilir, eğer $a < b$ ise $[a, b - a]$ noktasına hareket edebilir.

Taş hangi pozitif x, y tam sayıları için $[x, y]$ koordinatına hareket ettirilebilir?

Çözüm. s negatif olmayan bir tam sayı olması koşulu ile $[x, y] = 2^s$ olması yeter ve gereklidir. $[p, q] = [p, p-q]$ olduğunu hatırlatarak gerekliliği göstermiş oluyoruz, yani tek bir ortak bölen asla olamaz ve başlangıçta da $[1, 1] = 1$ olduğunu unutmayalım. Yeterliliğini göstermek için $[x, y] = 2^s$ olduğunu varsayalım. $[p, q)]$, $[x, y]$ 'ye ulaşabilen ikililerden $p+q$'yu en küçük yapan ikili olsun.p ve q çift sayı olamaz çünkü o zaman $(\frac{p}{2}, q)$ veya $(p, \frac{q}{2})$ $p+q$ 'yu daha küçük yapan kabul edilebilir bir ikili olurdu. Eğer $p > q$ ise $[p, q]$, $(\frac{p+q}{2}, q)$ 'dan ulaşılabilir olur, bu da çelişkidir; benzer şekilde $p < q$ 'da mümkün değildir. O zaman $p = q$ 'dur, ama $[p, q]$ 2'nin bir kuvveti olduğuna göre ve p veya q çift olamadığına göre $p = q = 1$ 'dir. Yani $[x, y]$ ulaşılabilirdir.

109. 5×9 luk bir satranç tahtasında bir oyun oynanıyor. Başlangıçta, belli bir sayıdaki diskler rastgele ama hiçbir karede birden fazla disk olmayacak şekilde karelere yerleştiriliyor. Her el bütün disklerin aşağıdaki kurallara göre hareket ettirilmesinden oluşmaktadır.

- Her disk bir kare aşağı, yukarı, sağa ve sola hareket ettirilebilir,
- Bir disk eğer bir el aşağı ya da yukarı hareket ettirildiyse bir sonraki el sola ya da sağa oynatılması gerekir, ve sola ya da sağa oynatılmışsa da bir sonraki el aşağı ya da yukarı hareket ettirilmelidir,
- Bir elin sonunda bir karede bir kareden fazla disk bulunamaz.

Oyun eğer başka bir el daha oynanması mümkün değilse bitiyor. Eğer oyuna 33 disk ile başlanırsa oyunu er ya da geç biteceğini ispatlayınız. Ayrıca 32 disk ile sonsuza kadar gidebileceğini gösteriniz.

Çözüm. 32 disk ile eğer 8×4 lük bir dikdörtgen oluşturulur ise hepsi aşağı, sağa, yukarı, sola şeklinde hareket ettirilerek oyun sonsuza kadar devam ettirilebilir. Oyunun 33 disk ile biteceğini göstermek için, tahtayı aşağıdaki gibi isimlendirelim:

1	2	1	2	1	2	1	2	1
2	3	2	3	2	3	2	3	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1
2	3	2	3	2	3	2	3	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1

1'de bulunan bir disk iki hareket sonrasında 3'e ulaşır, 2'de bulunan bir elde 1 veya 3'e ulaşır, ve 3'te bulunan bir disk ise bir elde 2'ye. Sonuçta eğer k tane disk 1'de başlarsa ve $k > 8$ ise oyun durur çünkü tüm disklere yetecek kadar 3 yoktur. $k \leq 8$ kabul edelim, o zaman 1 ve 3 üzerinde en fazla 16 tane taş bulunabilir ve 17 tane taş 2 üzerinden bulunmak zorundadır. 2 üzerinde bulunan 17 taşın 8 tanesi 3 üzerine geçse 9 tanesi 1 üzerine geçmek zorunda kalır. Bu dokuz tanesi iki el sonrasında geçecek yeterince 3 bulamayacaklarından oyun biter.

110. Her bir kenarı n ($n > 2$) uzunluğunda olan bir eşkenar üçgen kenarlarına paralel doğrular çizilerek, her bir kenarı 1 uzunluğundaki n^2 eşkenar üçgene bölünüyor. Bu durumda üçgenler,

- i ve $i+1$ numaralı üçgenlerin $i = 1, 2, \ldots, n^2 - 1$ için en az bir ortak noktası olmalıdır.
- i ve $i+2$ numaralı üçgenlerin $i = 1, 2, \ldots, n^2 - 2$ için en az bir ortak noktası olmalıdır.

kurallarını sağlayacak şekilde 1'den n^2 ye kadar numaralandırılabilir mi gösteriniz.

Çözüm. Böyle bir numaralandırma mümkün değildir. Öncelikle bu kurallara uygun şekilde bir numaralandırmanın yapılabildiğini kabul edelim. Burada $k \in \{1, \ldots, n^2\}$ için k numaralı üçgene T_k diyelim. Köşelerinden biri büyük üçgenin bir köşesiyle çakışan üçgenlere ise köşe üçgenleri diyelim.
Şimdi $k \notin \{1, 2, n^2 - 1, n^2\}$ olacak şekilde bir T_k köşe üçgeni olduğunu gösterelim. Eğer köşe üçgeni T_k, $k \in \{1, 2, n^2 - 1, n^2\}$ olacak şekilde olsaydı iki köşe ya $\{1, 2\}$ ya da $\{n^2 - 1, n^2\}$ ile numaralandırılmış olurdu. Ancak bu durumda, (a) koşuluna göre bu iki üçgenin bir ortak noktası olması gerekir ve bu sadece $n = 2$ durumunda mümkündür. Dolayısıyla $n > 2$ için $k \notin \{1, 2, n^2 - 1, n^2\}$ olacak şekilde bir T_k köşe üçgeni vardır.
Bu durumda T_k köşe üçgeni (a) ve (b) koşullarını sağladığından, T_{k-2}, T_{k-1}, T_{k+1} ve T_{k+2} üçgenleriyle ortak noktası olmalıdır. Ancak bir köşe üçgeninin en fazla üç üçgenle ortak noktası olabileceği için bir çelişki elde etmiş oluruz. Sonuç olarak kurallara uygun olarak yapılabilecek bir numaralandırmanın kabulu yanlıştır, yani bu kurallara göre bir numaralandırma işlemi $n > 2$ için mümkün değildir.

111. $(n+1) \times (n-1)$'lik bir tabloda kareler, herhangi iki satır ve iki sütunun kesişimindeki dört kare aynı renkte olmayacak şekilde üç renge boyanıyor. n'nin en büyük değerini bulunuz.

Çözüm Sorudaki şartı sağlayan tablolara "iyi" diyelim. $n = 10$ için 11×9'luk iyi tablo şekilde gösteriliyor.

$n \geq 11$ için $(n+1) \times (n-1)$'lik iyi tablo olmadığını gösterelim. Diyelim ki 12×10'luk bir iyi tablo olsun. Tablonun sütunlarını köşe olarak kabul eden çizgeye bakalım. Herhangi iki köşeye karşılık gelen sütunları düşünelim. Tablodaki herhangi bir satırın bu sütunlarla kesiştiği kareler aynı renge boyanmışsa biz de bu köşeleri i rengindeki kenarlarla birleştiriyoruz. Sorudaki şarttan dolayı herhangi iki köşe aynı renkte iki veya daha fazla kenarla birleştirilmiş olamaz. O halde R çizgedeki toplam kenar sayısı olmak üzere

$$R \leq \frac{3 \cdot 10 \cdot 9}{2} = 135$$

olur. Ayrıca tablodaki herhangi bir satırda k tane birinci renge, l tane ikinci renge, m tane de üçüncü renge boyanmış kare olsun ($k + l + m = 10$). Bu satır tam olarak $\binom{k}{2} + \binom{l}{2} + \binom{m}{2}$ tane kenar üretir.

$$\binom{k}{2} + \binom{l}{2} + \binom{m}{2} \geq \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} = 12$$

olduğu kolayca görülür. O halde $R \geq 12 \cdot 12 = 144$ olur. Fakat $144 \leq R \leq 135$ olduğundan çelişki elde ederiz.

112. $m \times n$'lik bir matrise sayılar yazılmıştır. Bir satırdaki veya bir sütundaki tüm sayıların işaretleri değiştirilebilir. Bu işlemi sonlu sayıda yaparak verilmiş matrisin, her satırındaki ve sütunundaki sayıların toplamının negatif olmadığı bir matrise getirilebileceğini ispatlayınız.

Çözüm. Matrisin her bir satırındaki sayıların toplamını a_i ile ($1 \leq i \leq m$), her bir sütunundaki sayıların toplamını b_i ile ($1 \leq i \leq n$) gösterelim. $a_i$ler arasında negatif sayı varsa o satırdaki sayıların işaretini değiştirelim. Bu şekilde devam ederek $a_i$lerden hiçbirinin negatif olmamasını sağlayalım. Eğer satırlar arasında toplamı negatif olan bir satır varsa, bu yapılan işlemlerden sonra, matristeki tüm sayıların toplamı artmıştır.
Aynı işlemi b_i'lere uygulayalım. Matristeki tüm sayıların toplamını devamlı artıracak şekilde bu işleme devam edelim. Sonlu adımdan sonra matrisin tüm sayıların toplamını artıramayacak duruma geliriz, çünkü matristeki tüm sayıların mutlak değerlerinin toplamı sonludur. Son durumda, $a_i$ler veya $b_i$ler arasında negatif olan varsa bu satırın veya sütunun işaretini değiştirerek matristeki tüm sayıların toplamını artırabiliriz. Fakat bu, matristeki tüm sayıların toplamını artıramayacak duruma geldiğimiz için bize çelişki verir. O halde sonlu adımdan sonra matrisin her satırındaki ve her sütunundaki sayıların toplamının negatif olmadığı bir matris elde etmiş oluruz.

113. Bir çember üzerine $N = 21$ olmak üzere $a_1, a_2, \ldots, a_N$ gerçel sayıları dizilmiş olsun. Ardışık konumdaki her 21 sayının toplamı en fazla 21 ve yine ardışık konumdaki her 13 sayının toplamı en fazla 13 ise $a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ toplamının en büyük değerini alması için, $a_1 = a_2 = \ldots = a_N = 1$ olması gerektiğini ispatlayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \ldots + a_{13} &\leq 13 \\
a_2 + a_3 + \ldots + a_{14} &\leq 13 \\
&\ldots \\
a_N + a_1 + \ldots + a_{12} &\leq 13
\end{aligned}$$

taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned}
13(a_1 + a_2 + \ldots + a_N) &\leq 13N \\
a_1 + a_2 + \ldots + a_N &\leq N
\end{aligned}$$

elde edilir. $a_1 = a_2 = \ldots = a_N = 1$ durumunda $a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ toplamı N değerini almaktadır yani maksimum değerine ulaşmaktadır. O halde yukarıdaki eşitsizliklerin hepsi eşitlik olmalıdır. Buradan tüm i değerleri için $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+12} = 13$ olur. Aynı işlemi 21 için de yaparsak, tüm i değerleri için $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+20} = 21$ elde ederiz.
İlk eşitliği ikinciden çıkartırsak ardışık 8 terimin toplamı 8 olur. Bu şekilde devam edersek; ardışık 5 terimin toplamı 5, 3 terimin toplamı 3, 2 terimin toplamı 2, 1 terimin toplamı 1 olur. Yani $a_1 = a_2 = \ldots = a_N = 1$ elde edilmiş olur.

114. Negatif olmayan bir n tam sayısı ve $(2n+1)\times(2n+1)$ bir satranç tahtası kareleri siyah ve beyaz renkte (normal satranç tahtası diziliminde) veriliyor. Burada $1 < m < 2n+1$ eşitsizliğini sağlayan her m için eğer satranç tahtasındaki bir $m\times m$ karenin alanının yarısından fazlası siyah renkteyse bu kareye S-kare diyelim. Bu durumda berilen satranç tahtası bir S-kare ise tahtadaki S-karelerin sayısını n cinsinden bulunuz.

Çözüm. Kenar uzunluğu çift tam sayı olan karelerde eşit sayıda siyah ve beyaz 1×1 kare bulunacağından bu tür kareler S-kare olamazlar. Kenar uzunluğu tek sayı olan karelerden ise köşelerindeki kareler siyah renkte olanlarda siyah kare sayısı beyaz karelerden fazla olacağından bu kareler S-kare olurlar. Dolayısıyla kenar uzunluğu tek olan bir B-kare ya 1×1 bir siyah karedir, ya da siyah köşeleri vardır.

Elimizde $(2n+1)\times(2n+1)$ bir S-kare olsun ve üzerinde $n+1$ adet siyah kare bulunan satırlara s_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, üzerinde n adet siyah kare bulunan satırlara b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $m \times m$ boyutundaki S-karelerin toplamına ise T_m $(m = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2n+1)$ diyelim.

T_1 için $T_1 = (n+1)(n+1) + n.n = (n+1)^2 + n^2$ elde edilir.

T_3 içinse $i = 1, 2, \ldots, n$ için her (s_i, s_{i+1}) satır çiftinde n adet karenin, $i = 1, 2, \ldots, n-$

1 için ise her (b_i, b_{i+1}) satır çiftinde $n-1$ karenin köşeleri siyah renktedir. Dolayısıyla

$$T_3 = n.n + (n-1)(n-1) = n^2 + (n-1)^2$$

olarak bulunur.

Benzer bir argümanla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için her (s_i, s_{i+2}) satır çiftine ve $i = 1, 2, \ldots, n-2$ için her (b_i, b_{i+2}) satır çifti dikkate alındığında

$$T_5 = (n-1).(n-1) + (n-2)(n-2) = (n-1)^2 + (n-2)^2$$

olduğu görülür.

Adım adım devam ettiğimizde ise

$$T_7 = (n-2)(n-2) + (n-3)(n-3) = (n-2)^2 + (n-3)^2$$

$$\vdots$$

$$T_{2n-1} = 2.2 + 1.1 = 2^2 + 1^2$$

$$T_{2n+1} = 1.1 = 1^2$$

elde ederiz.

Dolayısıyla S-karelerinin toplam sayısı

$$\begin{aligned} T_1 + T_3 + T_5 + \ldots T_{2n+1} &= 2(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3)}{3} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

115. Güneş tahtaya 5 sayı yazıyor. Ateş tahtadan bir sayı seçip kalan dört sayıdan seçilen x, y, z sayılarıyla $x + y - z$ i hesaplayıp ilk seçilen sayının yerine yazıyor. Ateş başlangıçta Güneş'in yazdığı sayılardan bağımsız olarak tahtadaki beş sayıyı eşitleyebilir mi ?

Çözüm.Güneş tahtaya a, b, c, d ve e sayılarını yazsın. Ateş, birinci olarak, a ve b yi $x = c + d - e$ ile değiştirsin. İkinci olarak, c ve d yi $e + x - x = e$ ile değiştirsin. Son olarak, x leri $e + e - e = e$ ile değiştirerek bütün sayıları eşitler.

$$(a, b, c, d, e) \to (x, x, c, d, e) \to (x, x, e, e, e) \to (e, e, e, e, e)$$

116. Bir adada her biri ya hep doğru söyleyen ya da hep yalan söyleyen $n > 1$ aborjin vardır. Her aborjinin kendi olmadığı gruptan en az bir arkadaşı vardır. Her bir aborjine arkadaşlarından hep yalan söyleyenlerin mi daha çok, hep doğru söyleyenlerin mi daha çok, yoksa hep yalan söyleyenlerle hep doğru söyleyenlerin aynı sayıda mı olduğu sorulduğunda bütün aborjinler yalan söyleyen arkadaşlarının çoğunlukta olduğu cevabını veriyorlar. Aborjinlerden birisi seçilip yalan söylediği iddiasıyla hapse atılıyor. Kalan $n-1$ aborjine tekrar aynı soru soruluyor. Bu sefer aborjinlerin hepsi doğru söyleyen arkadaşlarının daha çok olduğu cevabını veriyorlar. Hapse atılan aborjinin daha önceden hep doğru mu yoksa hep yalan mı söylediğini ve adada daha çok hep yalan söyleyen mi yoksa hep doğru söyleyen aborjin mi olduğunu bulunuz.

Çözüm. Aborjin hapse atılmadan önce adada en az bir hep doğru söyleyen aborjin vardır. Aksi takdirde bütün aborjinler doğruyu söylemiş olurlardı ki bu da adada doğru söyleyen aborjin olmaması ile çelişirdi.

Hapse atılma işleminden sonra adada hep doğru söyleyen bir aborjin olduğunu varsayalım. Fakat sadece bir kişinin hapse atılmış olması hep doğru söyleyenlerle hep yalan söyleyenlerin farkını negatiften pozitife değiştiremeyeceği için hapse atılma işleminden önce de aynı cevabı vermiş olması gerekirdi. Bu bahsedilen aborjinin hep dopru söylemesiyle çelişir. Yani Hapse atılma işleminden sonra adada hiç doğru söyleyen aborjin kalmamıştır.

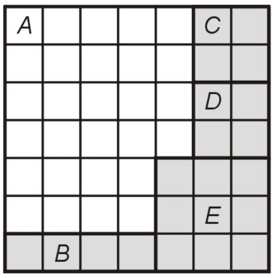
Sonuç olarak adada hapse atılan aborjin hep doğru söyleyen aborjindir ve hapse atılma işleminden sonra adada kalan bütün aborjinler hep yalan söyleyen aborjinlerdir.

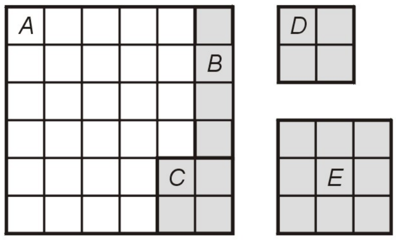
117. Bir öğretmen tahtanın başına ve sonuna 1 yazıyor. İlk öğrenci tahtada yazılı sayıların arasına 2 yazıyor. İkinci öğrenci tahtada yazılı sayılardan ardışık her iki sayının arasına toplamlarını yazıyor yani tahtada $1, 3, 2, 3, 1$ yazılmış oluyor. Sonraki öğrenci aynı kuralla yazma işlemine devam ediyor ve tahtada $1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1$ yazılmış oluyor. n inci öğrenciden sonra tahtada yazılı sayıların toplamını bulunuz.

Çözüm. Tahtada n inci öğrenciden sonra bulunan sayıların toplamı S_n olsun. $S_n = 3^n + 1$ olduğunu tümevarımla ispatlayalım. $S_0 = 2 = 3^0 + 1$. k ıncı öğrenciden sonra tahtaya kalkan öğrenci en başta ve en sonda yazan 1 ler hariç tahtada yazan her sayıyı iki kere toplar. Yani, $S_{k+1} = S_k + 2S_k - 2 = 3(3^k + 1) - 2 = 3^{k+1} + 1$ dir.

118. Bir kareyi öyle 5 parçaya bölünüz ki daha sonra parçaları birbiriyle birleştirerek birbirinden ayrı alanlara sahip üç farklı kare oluşturabilelim.

Çözüm. Aşağıda verilen haliyle A, B, C, D, E diye beş parçaya ayrılarak istenen sağlanabilir.



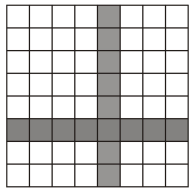


119. Hangi n tam sayıları için n^2xn^2 'lik bir satranç tahtası 1 'den n^2 ye kadar olan sayıların her biri, her satır, her sütun ve nxn 'lik bloklarda sadece 1 defa görülecek şekilde yazılabilir?

Çözüm:$n = 1$ için çözüm açıktır.
$n > 1$ için ise satranç tahtasında i. satır ve j. sütundaki kareyi (i, j) olarak gösterelim. A, (1,1) den (n, n) 'ye kadar olan $n \times n$ 'lik blok olsun. B ve C de sırasıyla A 'nın bir kare aşağıya ve sağa kaydırılması ile elde edilen $n \times n$ 'lik bloklar olsunlar.
1 den n^2 ye kadar olan sayılar her satır, sütun ve $n \times n$ 'lik blokta sadece 1 defa görüleceği için B 'nin en alt satırındaki sayılar A 'nın en üst satırındaki sayıların aynıları fakat farklı bir sıralanmasıdır. Aynı şekilde C 'nin en sağ sütunundaki sayılar da A 'nın en sol sütunundaki sayılarla aynıdır fakat sıralanışları farklıdır.
$(n + 1, n + 1)$ deki sayı, A 'nın en üst satırındaki sayılardan herhangi birisine eşit olamaz çünkü bu sayıların her biri $(n + 1, n + 1)$ ile aynı satırda bulunan, B 'nin en alt satırında birer defa görünmüşlerdir. Aynı şekilde $(n + 1, n + 1)$ deki sayı A 'nın en sağ sütunundaki sayılardan herhangi birisine eşit olamaz çünkü bu sayıların her biri $(n + 1, n + 1)$ ile aynı sütunda bulunan, C 'nin en sağ sütununda birer defa görünmüşlerdir. A, 1 'den n^2 'e kadar olan bütün sayıları içerdiği için $(n + 1, n + 1)$ deki sayıyı da içerir. Ancak bu sayının A 'nın en üst satırında ve en sağ sütununda yer almadığını gösterdik. O halde bu sayı (2,2) ile (n, n) arasındaki $n - 1 \times n - 1$ 'lik blokta yer alır. Fakat bu da (2,2) ile $(n + 1, n + 1)$ arasındaki $n \times n$ 'lik blokta 2 defa göründüğü anlamına gelir.
O halde verilen koşulları sağlayan tek tam sayı 1 'dir.

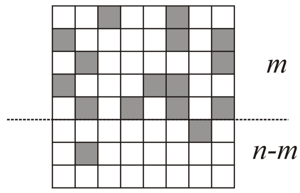
120. Başlangıçta tüm biri kareleri beyaz olan $n \times n$ satranç tahtasının birim karelerinden k tanesi siyaha boyanmıştır. Boyama işlemi nasıl yapılırsa yapılsın, köşeleri siyah karelerin merkezinde bulunacak şekilde bir paralel kenar bulunmasını garanti edebilmek için k nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm. Satranç tahtasının herhangi bir satır ve herhangi bir sütununda yer alan tüm kareler siyaha boyandığında, istenen türde bir paralelkenar çizilemeyeceği açıktır. Bu durumda, toplam $2n-1$ siyah kare vardır ve $k<2n$ iken, paralelkenarın varlığını garanti edemeyiz.



Şimdi, herhangi bir şekilde $2n$ karenin siyaha boyanmış olduğunu kabul edelim. İki veya daha fazla sayıda siyah kare bulunduran satırların sayısını m ile gösterelim. Genelliğe halel getirmeden, bu tür satırların, ilk m satırı oluşturduğunu kabul edebiliriz. Bu satırların her birisi için, satırdaki ilk siyah kare ile diğer siyah kareler arasında ölçülen uzaklıkları bir listeye kaydedelim.

Örneğin, yandaki şekilde, birinci satır için 3, ikinci satır için 5, 7; üçüncü satır için 6; dördüncü satır için 4, 5 ve beşinci satır için 2, 4, 6 değerleri kaydedilmiş olacaktır. Tanım gereği, kaydedilen bu değerler 1 ve $n-1$ arasında değerler alabilir.



Her birisi en fazla bir tane siyah kare bulundaran satırlardaki siyah karelerin toplamı en fazla $n-m$ olduğundan, üst m sırada yer alan siyah karelerin sayısı en az $2n-(n-m)=n+m$ dir. Bu karelerin m tanesi her sıradaki ilk siyah kare olup, diğer karelerin her birisi için, listemizde kaydedilmiş bir sayı bulunur. Sonuç olarak liste kayıtlı en az n tanes sayı yer alır. Bu sayılar 1 ile $n-1$ arasında değer alabildiğinden, en az ikisi eşittir. Böylece, iki farklı satırda, satırın ilk siyah karesinden eşit uzaklıkta iki siyah kare bulunduğu anlaşılır. Bu siyah kareler ile bu karelerin bulunduğu satırların ilk siyah karelerinin merkezleri bir paralelkenar tanımlar.

121. Bir topluluk n evli çiftten oluşmaktadır. Her çiftteki eşlerin boyları arasındaki fark 10 cm den azdır. Her $t=1,2,\ldots,n$ için, erkekler arasında boy sırasına göre t. inci sırada yer alan erkek ile kadınlar arasındaki boy sırasına göre k. inci sırada yer alan kadın arasındaki boy farkının da 10 cm den az olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Erkeklerin boy uzunluklarını $e_1>e_2>\cdots>e_n$ ve kadınların boy uzunluklarını da $k_1>k_2>\cdots>k_n$ ile gösterip, bir $t\in\{1,2,\ldots n\}$ için $|e_t-b_t|\geq 10$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda ya $e_t-b_t\geq 10$ veya $b_t-e_t\geq 10$ dur.

$e_t-b_t\geq 10$ olması durumunda $\{e_1,e_2,\ldots e_t\}$ kümesinin her elemanı ile

$$\{k_{t+1},k_{t+2},\ldots,k_n\}$$

kümesinin her elemanı arasındaki fark en az 10 dur. Öte yandan bu iki kümede toplam $t+1$ eleman olduğu için en az ikisinin, evli bir çifte ait olması kaçınılmazdır. Bu durum, her çiftteki eşlerin boyları arasındaki farkın 10 dan az olmasıyla çelişir. O halde $e_t-b_t\geq 10$ olamaz. $b_t-b_t\geq 10$ olması durumunda da benzer şekilde çelişki elde edilir. Sonuç olarak, Her $t \in \{1, 2, \ldots n\}$ için $|e_t - b_t| < 10$ olduğu anlaşılır.

122. Pozitif tam sayılar kümesi iki ayrık kümeye nasıl ayrılırsa ayrılsın, kümelerden en az birisinde, o kümedeki iki farklı sayının aritmetik ortalamasının da bulunacağını gösteriniz.

Çözüm. Bir $x > 6$ tam sayısı belirleyelim. $x + 2$, $x + 4$ ve $x + 6$ aynı kümedeyse problem çözülmüş olur. Bu üç saynı aynı kümede yer almıyorsa, en az bir tanesi x ile aynı kümede yer alır. Bu sayıyı $x + 2y$ ile gösterelim. Bu kümede $x - 2y$, $x + y$ ve $x + 4y$ sayılarından herhangi birisi yer alıyorsa yine üç terimli bir aritmetik dizi elde edilmiş olur. Aksi halde, bir aritmetik dizi teşkil eden $x - 2y$, $x + y$ ve $x + 4y$ sayılarının tümü diğer kümede yer alır.

123. Bir kara tahtada dokuz tane 0; bir tane 1 yazılmıştır. Her hamlede bu sayılardan ikisi seçilip silinmekte ve her birisinin yerine aritmetik ortalamaları yazılmaktadır. Sonlu sayıda uygulanan hamlelerden sonra tahtada yar alan on sayı arasında yer alabilecek en küçük değer ne olur?

Çözüm. Başlangıçtan itibaren her hamlede en küçük sayı 0 lardan birisi ile işleme alınıp, 0 lar tükeninceye kadar devam edilirse tahtadaki en küçük sayı $1/512$ olur. Şimdi, bu değerden daha küçüğüne ulaşılamıyacağını gösterelim.

Herhangi bir anda tahtada yazılı sayıların en küçüğü m ve tahtadaki 0 ların sayısı n olmak üzere $c = m/2^n$ şeklinde, tahtadaki sayıların durumu ile ilgili bir c gösterge değeri tanımlayalım.

Tabloda yer alan iki pozitif sayı işleme alındığında sıfırların sayısında değişme olmayacağından ve m değeri de azalmayacağından dolayı, gösterge değeri de ya aynı kalacak ya da artacaktır.

Tablodaki 0 lardan birisi bir r pozitif sayısı ile işleme alındığında, sıfırların sayısı azalacak; m ise ya aynı kalacak ya da $m = r/2$ olacaktır. Sonuç olarak, yeni gösterge değeri en az $\dfrac{m/2}{2^{n-1}} = m/2^n$ (bir önceki hamledeki gösterge değeri) olacaktır.

Yukarıdaki açıklamalardan, her hamlede göstege değerinin ya aynı kalacağı ya da artacağı anlaşılmaktadır. Başlangıç konumu için $c = 1/512$ olduğundan herhangi bir sayıda hamle sonunda $c \geq 1/512$ olur. Buradan, $m \geq \frac{2^n}{512} \geq \frac{1}{512}$ elde edilir. Sonuç olarak, herhangi (sonu) sayıda hamleden sonra tahtada yazılı sayıların en küçüğünün en az $1/512$ olabileceği anlaşılır.

124. Sekiz ortaklı bir firmaya ait kasanın kapısı üzerinde sekiz tane kilit bulunmaktadır. Kilitlerin her birisinin anahtarı 5 farklı ortağa dağıtıldığına göre, bir araya geldiklerinde tüm kilitleri açabilecek iki ortak bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Sekiz ortağın herhangi ikisinin oluşturduğu 28 kümeyi listeleyelim ve iki ortak bir araya geldiğinde açamayacakları bir kapı varsa, bu ortakların oluşturduğu kümeyi listeden silelim.

Her kilidin anahtarı beş ortağa verildiğine göre, o kilidi açamayacak olan üç ortak bulunur ve bunlar üç farklı biçimde ikili kümeler tanımlayacağından, her kilit için listeden üç çift silinir. Sekiz kilit için listeden silinebilecek çiftlerin sayısı en fazla 24 olur. Sonuç olarak, bir araya geldiklerinde tüm kapıları açabilecek en az dört farklı çift bulunabileceği anlaşılır.

125. $\{1, 2, \ldots, 20\}$ kümesinin üç elemanlı ve elemanlarının çarpımı 4 ile bölünen alt kümelerinin sayısını bulunuz.

Çözüm. Çarpımları 4 ile bölünmeyen üç tam sayının ya hepsi tek sayıdır ya da bir tanesi dörde bölünmeyen bir çift sayı ve ikisi tek sayıdır.

Verilen kümedeki tek sayıların sayısı 10 olduğundan, üç tek sayıdan oluşan alt kümelerin sayısı $\binom{10}{3} = 120$ dir.

Kümede 5 tane 4 ile bölünmeyen çift sayı bulunmaktadır. Bu tür bir sayı ile iki tek sayının oluşturduğu kümelerin sayısı da $5\binom{10}{2} = 225$ olarak elde edilir.

Üç elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{20}{3} = 1040$ olup, bunların $120+225 = 345$ tanesinin elemanları çarpımları 4 ile bölünmediğinden, aradığımız sayı $1040 - 345 = 795$ olur.

126. 9×9 satranç tahtasının birim karelerine 65 tane karınca yerleştirilmiştir. Her hamlede her karınca, bulunduğu karenin yatay veya dikey komşularından birisine geçmektedir. Karıncalar üst üste iki yatay veya iki dikey hamle yapmadığına göre, sonlu sayıda hamle sonra en az bir karede en az iki karınca bulunacağını gösteriniz.

Çözüm. Satranç tahtasının satır ve sütunlarına sıra numarası verip, bulunduğu satır ve sütunun sıra numarası tek sayı olan birim karelere A tipi, satır ve sütun numarası çift olan birim karelere B ve diğer birim karelere de C tipi kareler diyelim.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A	C	A	C	A	C	A	C	A
2	C	B	C	B	C	B	C	B	C
3	A	C	A	C	A	C	A	C	A
4	C	B	C	B	C	B	C	B	C
5	A	C	A	C	A	C	A	C	A
6	C	B	C	B	C	B	C	B	C
7	A	C	A	C	A	C	A	C	A
8	C	B	C	B	C	B	C	B	C
9	A	C	A	C	A	C	A	C	A

A tipi bir karede bulunan karınca, iki hamle sonra B tipinde bir kareye geçer.
B tipi bir karede bulunan karınca, iki hamle sonra A tipinde bir kareye geçer.
C tipi bir karede bulunan karınca, bir hamle sonra A veya B tipinde bir kareye geçer.

Öte yandan, A tipi karelerin sayısı 25, B tipi karelerin sayısı 16 ve C tipi karelerin sayısı da 40 dır. Herhangi bir aşamada A tipi karelerde toplam olarak 16 dan fazla karınca bulunması halinde, iki hamle sonra bunlardan en az iki tanesi B tipinde bir karede karşılaşmak zorunda kalır. O halde, her aşamada, A tipi karelerin en fazla 16 tanesinde karınca bulunabilir.

C tipi karelere 33 karınca yerleştirilirse, bir hamle sonra ya en az ikisi B tipi bir karede karşılaşır ya da A tipi karelere geçmiş olanların sayısı 16 dan fazla olur ve iki hamle sonra da bunların ikisi B tipi bir karede karşılaşır.

Sonuç olarak, 64 karıncadan (16 A tipi, 16 B tipi, 32 C tipi) daha fazla karınca yerleştirilmiş olması halinde en çok üç hamle sonra iki karıncanın bir karede karşılaşması kaçınılmaz olur.

127. Dışbükey bir onikigenin her kenarı ve her köşegeni 12 renkten biriyle boyanmıştır. Boyama işleminin nasıl yapıldığı bilinmeksizin, herhangi farklı üç renk seçildiğinde, kenarları bu renklerle boyanmış bir üçgen bulunması garanti edilebilir mi?

Çözüm. Boyanmış olan elemanların (kenar veya köşegen) sayısı 66 olduğundan, renklerden en az birisi, sözgelimi X rengi, 5 veya daha az sayıda elemanın boyanması için kullanılmıştır. X ile boyalı bir eleman, 10 farklı üçgende bir kenar olarak bulunacağı için, bütün şekil içinde, bir kenarı X ile boyalı en fazla 50 üçgen vardır. Öte yandan 12 renk arasından, birisi X olmak üzere, 3 farklı renk $\binom{11}{2} = 55$ yoldan seçilebilir. O halde en az $55 - 50 = 5$ şekilde üç farklı renk, kenarları o renklere boyanmış bir üçgen bulunmayacak şekilde seçilebilir.

128. Sadece a, b ve c harfleri kullanılarak oluşturuluan n terimli bir dizide çift sayıda a bulunması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm. Uzunluğu n olan diziler içinde tek sayıda a içerenlerin sayısını T_n ile; çift sayıda a içerenlerin sayısını da C_n ile gösterirsek her n pozitif tam sayısı için $T_n + C_n = 3^n$ olur. T_n tane diziden, son terimi a olanların sayısı C_{n-1}; son terimi b olanların sayısı T_{n-1} ve son terimi c olanların sayısı da T_{n-1} olduğundan, $T_n = 2T_{n-1} + C_{n-1}$ ve benzer şekilde $C_n = 2C_{n-1} + T_{n-1}$ elde edilir. İki denklemin taraf tarafa farkı alınarak $T_n - C_n = T_{n-1} - C_{n-1}$ bulunur. Son eşitlik, tek sayıda a içeren dizilerin sayısı ile çift sayıda a içeren dizilerin sayısı arasındaki farkın sabit kaldığını gösterir. O halde, $T_1 = 1$ ve $C_1 = 2$ olduğundan, her n pozitif tam sayısı için $T_n - C_n = T_1 - C_1 = -1$ olur. Bu eşitlik $T_n + C_n = 3^n$ denkleminde kullanılarak $C_n = \frac{3^n+1}{2}$ bulunur. Aradığımız olasılık değeri $\frac{3^n+1}{2\cdot 3^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^n}$ dir.

129. Dik Kartezyen koordinat sisteminin (a, b) koordinatlı noktasında bulunan bir pire aşağıdaki üç noktadan birisine sıçrayabilmektedir:
- $(2a, b)$ koordinatlı nokta,
- $(a, 2b)$ koordinatlı nokta,
- $(a - b, b)$ koordinatlı nokta $[a > b$ ise$]$ veya $(a, b - a)$ koordinatlı nokta $[a < b$ ise$]$.

Başlangıçta $(1,1)$ noktasında bulunan pirenin erişebileceği noktaların kümesini belirleyiniz.

Çözüm. Pire, bir sıçrayışla (a,b) koordinatlı noktadan (a',b') koordinatlı noktaya geçmiş olsun. Bu geçiş, üçüncü tür bir hareket sonucu oluştuysa ebob(a',b') =ebob(a,b) olur. Geçiş için birinci veya ikinci tür bir hareket söz konusu ise, ya ebob(a',b') =ebob(a,b) ya da ebob$(a',b') = 2\cdot$ebob(a,b) olur. Sonuç olarak, her sıçrama sonucunda pirenin bulunduğu noktanın koordinatlarının en büyük ortak böleni ya aynı kalır ya da iki katına çıkar. (a,b) koordinatlı noktadaki pirenin bir dizi sıçrama sonucu ulaşacağı bir karenin koordinatlarının en büyük ortak böleni de bir n tam sayısı için $2^n\cdot$ebob(a,b) şeklinde olacaktır.

Dolayısı ile $(1,1)$ noktasından harekete başlayan pire, ancak koordinatlarının en büyük ortak böleni 2^n olan noktalara ulaşabilir.

Şimdi, ebob$(x,y) = 2^n$ olmak üzere, herhangi bir (x,y) noktasına, $(1,1)$ noktasından başlayarak bir dizi sıçrama sonucunda ulaşılabileceğini gösterelim.

(x,y) noktasına ulaşılabilen tüm noktalar arasında, koordinatları toplamı en küçük olan nokta (a,b) noktası olsun. a veya b çift ise, $(a/2,b)$ veya $(a,b/2)$ noktasından (a,b) ye (dolayısı ile (x,y)) ye ulaşılabilir ve koordinatlarının toplamı $(a+b)$ den küçük ve (x,y) ye ulaşılabilen bir nokta bulunmuş olur. O halde a ve b tek olmalıdır. $a > b$ ise, $((a+b)/2, b)$ den; $b > a$ ise, $(a,(a+b)/2)$ den (a,b) ye ulaşılabilir. Yani, $a \neq b$ iken, koordinatları toplamı $(a+b)$ den küçük ve (x,y) ye ulaşılabilen bir nokta bulunmuş olur. Böylece $a = b$ olduğu anlaşılır.

a =ebob$(a,b)|2^n$ =ebob(x,y) ve a tek olduğundan, $a = b = 1$ elde edilir. Sonuç olarak, (x,y) noktasına, $(1,1)$ noktasından ulaşılabilir.

130. Bir çiçekçi her buket için 2 veya 3 adet; her çelenk için 6 veya 7 adet yaprak kullanmaktadır. Çiçekçi, aldığı bir siparişi hazırlamak için 4 düzine yaprağın yetersiz kaldığını, 5 düzinenin ise fazla geldiğini görüyor. Sipariş kaç buket ve kaç çelenkten oluşmaktadır?

Çözüm. Buketlerin sayısına b; çelenklerin sayısına c dersek, $3b+7c \leq 59$ eşitsizliğinden $c \leq 8$ elde ederiz. Öte yandan $2b+6c \geq 49$ eşitsizliği $6b+18c \geq 147$ şeklinde yazılıp $-6b-14c \geq 118$ eşitsizliği ile taraf tarafa toplanırsa $4c \geq 29$ veya $c \geq 8$ bulunur. Böylece $c = 8$ ve $b = 1$ olur.

131. 16 adadan oluşan bir ülkede bir deniz yolları işletmesi, herhangi iki ada arasında aktarmasız yapılacak her yolculuk içi bir biletin gerektiği ve aşağıdaki özellikleri sağlayan gemi seferleri planlamıştır.
- Her adadan diğer adaların en az birisine tek biletle ulaşılabilir.
- Herhangi iki ada arasında doğrudan karşılıklı seferler tanımlı değildir.

- Hangi on ada seçilirse seçilsin, birisinden başlayıp tüm adalara uğrayarak ve tam olarak 10 bilet kullanılarak başlangıç adasına ulaşmak mümkündür.

Seçilen herhangi 11 ada için de birisinden başlanıp, hepsine uğrayarak ve tam olarak 11 bilet kullanarak başlangıç adasına dönmenin mümkün olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Adalardan birisinden diğer adaların 6 veya daha azına tek bir biletle ulaşılabiliyorsa, bu adadan tek biletle ulaşılamayan en az 9 ada bulunur ve üçüncü koşulu sağlamayan 10 ada bulunmuş olur. O halde, her adadan tek biletle ulaşılabilecek en az 7 ada bulunmalıdır. Benzer şekilde, her adaya en az 7 adadan tek biletle ulaşmak mümkün olmalıdır.

Birisinden diğerine tek biletle ulaşılabilecek iki adaya bağlantılı adalar diyelim. İkinci özellik ve yukarıdaki açıklama ışığında, her adanın en az 14 ada ile bağlantılı olduğu anlaşılır. Yani her ada en fazla 1 ada ile bağlantısızdır. Herhangi bir şekilde 11 ada seçilmiş olsun. Bağlantısız olma ilişkisi simetrik olduğundan 11 ada içinde en az birisi, diğer 10 ada ile bağlantılı olmak zorundadır. 10 ada ile bağlantılı bir X adasını ayırıp geri kalan adaları, üçüncü koşulu sağlayacakları şekilde sıralayalım: $X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_{10} \to X_1$. Bu düzende (gerekirse $X_{11} = X_1$ kabul ederek), $X_i \to X \to X_{i+1}$ olacak şekilde bir X_1, X_{i+1} çifti bulunabilir. Böylece 11 ada için de istenen koşulun sağlanacağı gösterilmiş olur.

132. Dik kartezyen koordinat sisteminde x ve y tam sayılar olmak üzere, $\{(x,y)|0 \leq x, y \leq 99\}$ kümesindeki her noktaya bir öğrenci yerleştirilecektir. Herhangi iki erkek öğrenci birbirini görememek koşulu ile, düzleme en fazla kaç erkek öğrenci yerleştirilebilir?

Çözüm. Birim karenin dört köşesini oluşturacak şekilde seçilen herhangi dört noktaya en fazla bir erkek öğrenci yerleştirilebileceğinden, erkek öğrencilerin sayısı en fazla 2500 olabilir.

Bu sayıya ulaşabileceğimizi şöyle görebiliriz. Her iki koordinatı da bir çift sayı olan noktaların sayısı 2500 dür. Bu noktalara erkek öğrencileri yerleştirelim. İki erkek öğrencinin yerleştirildiği noktalar $E(2x, 2y)$ ve $E'(2x', 2y')$ olsun. $x = x'$ veya $y = y'$ olması halinde, bu iki öğrenciyi birleştiren doğru üzerinde en az bir kız öğrencinin varlığı açıktır. $x \neq x'$ ve $y \neq y'$ kabul ederek ebob$(n, m) = 1$ olmak üzere $\frac{n}{m} = \frac{y-y'}{x-x'}$ yazalım. Bu durumda ya m ya da n bir tek sayı olur ve $K(x+m, y+n)$ noktası, bir kız öğrencinin bulunduğu bir nokta olur. K noktası E ve E' noktalarını birleştiren doğru üzerinde olduğundan, E ve E' noktalarındaki öğrenciler birbirlerini göremezler.

133. Bir çember üzerinde 98 beyaz nokta işaretlenmiştir. Ateş ile Güneş, sıra ile, bu noktalardan (daha önce birleştirilmemiş olan) herhangi ikisini seçerek ikisini de siyaha boyar ve bunları dpğru parçası ile birleştirir. Son beyaz noktayı boyayan oyunu kazanır. İlk hamleyi Ateş'in yapması halinde hangi oyuncu galibiyeti garanti edecek bir yol izleyebilir?

Çözüm. Son üç beyaz noktadan herhangi birisine dokunan oyuncu oyunu kaybeder. Şöyle ki, bu noktalardan ikisini birleştirirse, diğer oyuncu son kalan beyaz noktayı seçerek oyunu kazanır; bu noktalardan birisini daha önce seçilmiş noktalardan birisiyle birleştirirse diğer oyuncu geri kalan iki beyaz noktayı seçerek yine oyunu kazanır.

$C(95, 2) = 94 \cdot 95/2 = 47 \cdot 95$ bir tek sayı olduğu için, Ateş ilk 95 noktanın tanımladığı tüm doğru parçaları çizilinceye kadar dayanarak, Güneş'i son üç beyaz noktadan birisini seçmeye zorlayarak oyunu kazanmayı garanti edebilir.

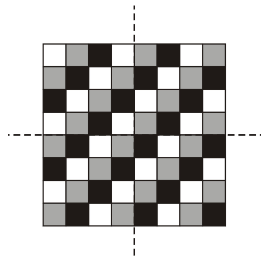
134. $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin $B_1, \ldots B_k$ alt kümelerinin herhangi ikisinin en fazla iki ortak elemanı olduğuna göre, k en fazla hangi değeri alabilir?

Çözüm. A kümesinin 1, 2 ve 3 elemanlı tüm alt kümelerinin aldığımızda herhangi ikisinin en fazla iki ortak elemanı olan bir alt kümeler topluluğu seçmiş oluruz. O halde $k \geq C(n, 1) + C(n, 2) + C(n, 3) = \frac{n^3+5n}{6}$ dır.

Şimdi, mümkün olan en büyük k değeri için $B_1, \ldots B_k$ alt kümeler topluluğunun, verilen koşulu sağladığını kabul edelim. Bu alt kümelerden birisinin 4 eleman (diyelim ki a, b, c, d) içermesi halinde bu kümeyi topluluktan çıkarıp yerine $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ ve $\{b, c, d\}$ kümelerini alırsak, verilen koşulu bozmadan kümelerin sayısını artırmış oluruz. Bu da, k nin mümkün olan en büyük değer olması ile çelişir.

135. 8×8 satranç tahtasının, 21 tane 3×1 dikdörtgen ile kaplanabilmesinin, birim karelerden hangisinin çıkarılması ile mümkün olacağını belirleyiniz.

Çözüm. Satranç tahtasının her birim karesini, yandaki şekilde görüldüğü düzende üç renkten (beyaz, gri, siyah) birisiyle boyayalım. Her 3×1 dikdörtgen, bir beyaz, bir gri ve bir siyah kareyi kaplar. Beyaz karelerin sayısı 21, Siyah karelerin sayısı 21 ve gri karelerin sayısı da 22 dir. Dolayısı ile, kaplama işi nasıl yapılırsa yapılsın, kaplanmayan birim kare, gri karelerden birisi olacaktır. Öte yandan, bir birim kare çıkarıldığı zaman kaplama işi yapılabiliyorsa, satranç tahtasının yatay ve dikey simetri eksenlerine göre bu karenin simetriğinde yer alan kareler çıkarıldığındada kaplama işi yapılabilir.



Kendisi ve simetrikleri gri olan birim kare üçüncü satır ile üçüncü sıranın kesişiminde yer alan gri birim karedir. Dolayısı ile, satranç tahtasından çıkartıldığında, geriye kalan 63 karenin 21 tane 3×1 diktörtgenle kaplanması ancak şu dört kareden birisinin çıkarılması ile mümkündür. Üçüncü satır ile üçüncü sütunun kesişimindeki birim kare, üçüncü satır ile altıncı sütunun kesişimindeki birim kare, altıncı satır ile üçüncü sütunun kesişimindeki birim kare, altıncı satır ile altıncı sütunun kesişimindeki birim kare. Bu karelerden birinin çıkartılmasıla kaplama işleminin gerçekleştirilebileceği ise yandaki şekilde gösterilmiştir.