Karma Sorular Çalışma Kağıdı

Sorular ve Çözümleri

Konu Anlatımı (Eşitsizlikler Üzerine):

Not 1. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gerçel sayıları;

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$$

eşitsizliğini sağlar. Bunun faydalı bir türevi olarak;

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_1^2}{y_1} + \ldots + \frac{x_1^2}{y_1} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}$$

olduğu da kullanılabilir. Bunla ilgili birçok örneği sitede bulabilirsiniz. Ben hemen 2 tane örnek veriyorum:

1. $a + b + c = 1$ eşitliğini sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için;

$$\frac{a^4 + 5b^4}{a(a+2b)} + \frac{b^4 + 5c^4}{b(b+2c)} + \frac{c^4 + 5a^4}{c(c+2a)} \geq 1 - ab - bc - ca$$

olduğunu gösteriniz. **(Genç Balkan Takım Seçme 2014)**

Çözüm 1. a^4 ve $5b^4$ ü ayıralım. Ve Cauchy-Schwarz uygulayalım:
$[a(a+2b) + b(b+2c) + c(c+2a)][\frac{a^4}{a(a+2b)} + \frac{b^4}{b(b+2c)} + \frac{c^4}{c(c+2a)}] \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$
$a(a+2b) + b(b+2c) + c(c+2a) = (a+b+c)^2 = 1$ olduğu için

$$\frac{a^4}{a(a+2b)} + \frac{b^4}{b(b+2c)} + \frac{c^4}{c(c+2a)} \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \qquad (1)$$

$[a(a+2b) + b(b+2c) + c(c+2a)][\frac{5b^4}{a(a+2b)} + \frac{5c^4}{b(b+2c)} + \frac{5a^4}{c(c+2a)}] \geq (a^2\sqrt{5} + b^2\sqrt{5} + c^2\sqrt{5})^2 = 5(a^2 + b^2 + c^2)^2$ Yine benzer şekilde;

$$\frac{5b^4}{a(a+2b)} + \frac{5c^4}{b(b+2c)} + \frac{5a^4}{c(c+2a)} \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)^2 \qquad (2)$$

dir.

(1) ve (2) yi taraf tarafa toplayalım.

$$\frac{a^4+5b^4}{a(a+2b)}+\frac{b^4+5c^4}{b(b+2c)}+\frac{c^4+5a^4}{c(c+2a)}\geq 6(a^2+b^2+c^2)^2$$

olur. Eğer $6(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 1-ab-bc-ca$ ise ispat biter.

$1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ ifadesinde $ab+bc+ca=x$ diyelim. O zaman $a^2+b^2+c^2=1-2x$ olur. Yerine yazalım.

$\Longrightarrow 6(1-2x)^2 \geq 1-x$ olduğunu ispatlamalıyız.

$\Longrightarrow 24x^2-23x+5 \geq 0$ olduğunu ispatlamalıyız. İfadeyi çarpanlara ayıralım.

$\Longrightarrow (8x-5)(3x-1) \geq 0$ olduğunu ispatlamalıyız.

Şimdi $1=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ ifadesinde $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ yazarsak $13 \geq ab+bc+ca=x$ olduğu görülür.

O zaman $8\cdot\frac{1}{3}-5=-\frac{7}{3}\geq 8x-5$ ve $3\cdot\frac{1}{3}-1=0\geq 3x-1$ olur. Yani $(8x-5)(3x-1)\geq 0$ ifadesinde her iki parantez de sıfırdan küçük ya da sıfıra eşittir. İfade doğrudur. İspat biter.

2. Tüm a,b,c pozitif gerçel sayıları için;

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a}\geq K(a^2+b^2+c^2)$$

olmasını sağlayan en büyük K gerçel sabitini belirleyiniz.

Çözüm 2. $a=b=c$ verirsek $\frac{2}{3}\geq K$ olur. Biz $K=\frac{2}{3}$ için sağladığını gösterelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{5a+b}+\sum_{cyc}\frac{3a^3}{5c+a}=\sum_{cyc}\frac{a^4}{5a^2+ab}+3\sum_{cyc}\frac{a^4}{5ac+a^2}\geq$$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{5(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}+3\cdot\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+5(ab+bc+ca)}\geq$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

olduğunu söyleyebiliriz. İspat biter.

3. $x+y+z=3$ eşitliğini sağlayan tüm x,y,z pozitif gerçel sayıları için;

$$\frac{1}{x^2+y+z}+\frac{1}{x+y^2+z}+\frac{1}{x+y+z^2}\leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 3. Cauchy-Schwarz Eşitsizliğinden,
$(x^2+y+z)(1+y+z)\geq(x+y+z)^2 \Longrightarrow \frac{1}{x^2+y+z}\leq\frac{1+y+z}{(x+y+z)^2}$

Benzer şekilde $\frac{1}{x+y^2+z} \le \frac{1+x+z}{(x+y+z)^2}$ ve $\frac{1}{x+y+z^2} \le \frac{1+x+y}{(x+y+z)^2}$
Bu üç eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{1}{x^2+y+z}+\frac{1}{x+y^2+z}+\frac{1}{x+y+z^2} \le \frac{1+y+z}{(x+y+z)^2}+\frac{1+x+z}{(x+y+z)^2}+\frac{1+x+y}{(x+y+z)^2}$$

$$=\frac{3+2x+2y+2z}{(x+y+z)^2}=\frac{9}{9}=1$$

elde edilir.

Not 2. Hölder Eşitsizliği: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ve $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pozitif gerçel sayıları;

$$(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3).(b_1^3+b_2^3+\ldots+b_n^3).(c_1^3+c_2^3+\ldots+c_n^3) \ge (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\ldots+a_nb_nc_n)^3$$

eşitsizliğini sağlar.

4. Her pozitif gerçel a, b, c sayıları için

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$

olduğunu kanıtlayınız. **(IMO 2001)**

Çözüm 4. Hölder eşitsizliğinden kolay bir çözüm yapacağız. İlk baştaki ifadeye S diyelim. Hölder Eşitsizliğinden $(S).(S).((a^3+8abc)+(b^3+8abc)+(c^3+8abc)) \ge (a+b+c)^3$ idir. Biz $S \ge 1$ göstermek istiyoruz. Eğer biz $(a+b+c)^3 \ge ((a^3+8abc)+(b^3+8abc)+(c^3+8abc))$ gösterirsek ispat biter. $(a+b+c)^3 \ge a^3+b^3+c^3+24abc$ gösterirsek ispat biter. İfadeyi açarsak;
$a^3+b^3+c^3+6abc+3(a^2b+a^2c+b^2c)+3(ab^2+ac^2+bc^2) \ge a^3+b^3+c^3+24abc$ göstermemiz yani;
$(a^2b+a^2c+b^2c)+(ab^2+ac^2+bc^2) \ge 6abc$ göstermemiz yeterlidir. Bunu da $A.G.O$ eşitsizliğinden kolayca elde edebiliriz.

5. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}+\sqrt[4]{\frac{(b^2+c)(b^2-bc+c^2)}{2}}+\sqrt[4]{\frac{(c^2+a^2)(c^2-ca+a^2)}{2}} \le \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

olduğunu gösteriniz. **(2010 Takım Seçme)**

Çözüm 5. Cauchy-Schwarz'dan $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$ olduğundan

$$\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \ge \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

olduğunu söyleyebiliriz. $A.G.O$ dan;

$$\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \leq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{\frac{(a^2+b^2)}{2} + (a^2-ab+b^2)}{2}} = S$$

olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$S = \sum_{cyc} \sqrt{\frac{3a^2-2ab+3b^2}{4}} \leq \sqrt{\frac{3\left(6(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\right)}{4}}$$

elde edilir. Buradan sonra ispatlamamız gereken şey;

$$a^2+b^2+c^2 \geq (a+b+c)\sqrt{\frac{3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)}{6}}$$

olduğudur. Bunun için;

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{\sqrt{2(a+b+c)^2\left(9(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)\right)}}{6} = M$$

olmalıdır. $A.G.O$ dan;

$$M \leq \frac{11(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{12} \leq a^2+b^2+c^2$$

olduğundan eşitsizlik sağlanır ispat biter.

6. $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{1}{x+y^{20}+z^{11}} + \frac{1}{y+z^{20}+x^{11}} + \frac{1}{z+x^{20}+y^{11}} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz. **(2011 II. Aşama)**

Çözüm 6. Hölder eşitsizliğinden

$$(x^{10}+y+1)(x^{10}+1+z^{10})(x+y^{20}+z^{11}) \geq (x^7+y^7+z^7)^3$$

Buradan da

$$\frac{1}{(x+y^{20}+z^{11})} \leq \frac{(x^{10}+y+1)(x^{10}+1+z^{10})}{(x^7+y^7+z^7)^3}$$

bulunur. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlamamız yeterlidir.

$$\sum_{cyc} \frac{(x^{10}+y+1)(x^{10}+1+z^{10})}{(x^7+y^7+z^7)^3} \leq 1$$

Son eşitsizliği düzenlersek

$$3+\sum_{cyc}x^{20}+3\sum_{cyc}x^{10}+\sum_{cyc}x+\sum_{sym}x^{10}y+\sum_{cyc}x^{10}y^{10}\leq (x^7+y^7+z^7)^3$$

haline dönüşür. Şimdi ise aşağıdaki lemmaları ispatlayalım:
Lemma 1: Her $x>0$ gerçel sayısı için

$$x^{21}+1\geq x^{20}+x$$

İspat: $x^{21}+1\geq x^{20}+x \Leftrightarrow (x-1)(x^{20}-1)\geq 0$ olur ve son eşitsizlik sağlanır.
Lemma 2: $xyz=1$ şartını sağlayan her $x,y,z>0$ gerçel sayıları iğin

$$\sum_{sym}x^{14}y^7\geq 2\sum_{cyc}x^{10}y^{10}$$

İspat: İfadeyi homojen hale getirirsek $(14,7,0)\succ(\frac{31}{3},\frac{31}{3},\frac{1}{3})$ olduğundan Muirhead eşitsizliğinden ispat biter.
Lemma 3: $xyz=1$ şartını sağlayan her $x,y,z>0$ gerçel sayıları için

$$\sum_{sym}x^{14}y^7\geq \sum_{sym}x^{10}y$$

İspat: İfadeyi homojen hale getirelim. $(14,7,0)\succ(\frac{40}{3},\frac{13}{3},\frac{10}{3})$ olduğundan Muirhead eşitsizliğinden ispat biter.
Lemma 4: $xyz=1$ Şartını sağlayan her $x,y,z>0$ gerçel sayıları için

$$\sum_{sym}x^{14}y^7\geq 2\sum_{cyc}x^{10}$$

İspat: İfadeyi homojenleştirelim. $(14,7,0)\succ(\frac{41}{3},\frac{11}{3},\frac{11}{3})$ olduğundan Muirhead eşitsizliğinden ispat biter. Lemmaları kullanarak;

$$3+\sum_{cyc}x^{20}+\sum_{cyc}x\leq 6+\sum_{cyc}x^{21}1$$

$$\sum_{cyc}x^{10}y^{10}\leq 12\sum_{sym}x^{14}y^7 2$$

$$\sum_{sym}x^{10}y\leq \sum_{sym}x^{14}y^7 3$$

$$3\sum_{cyc}x^{10}\leq \frac{3}{2}\sum_{sym}x^{14}y^7 4$$

bulunur. (1), (2), (3) ve (4) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$3+\sum_{cyc}x^{20}+3\sum_{cyc}x^{10}+\sum_{cyc}x+\sum_{sym}x^{10}y+\sum_{cyc}x^{10}y^{10}\leq 6+\sum_{cyc}x^{21}+3\sum_{sym}x^{14}y^7$$

buluruz. Son olarak

$$6+\sum_{cyc} x^{21}+3\sum_{sym} x^{14}y^{7}=(x^7+y^7+z^7)^3$$

olduğundan çözüm biter.

7. $a^3+b^3+c^3=a^4+b^4+c^4$ eşitliğini sağlayan tüm a,b,c pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2}\geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız. **(2012 Ortaokul II. Aşama)**

Çözüm 7. İlk terimi a ile ikinci terimi b ile üçüncü terimi de c ile genişletirsek,

$$\frac{a^2}{a^3+ab^3+c^3}+\frac{b^2}{a^3b+b^3+bc^3}+\frac{c^2}{a^3c+b^3c+c^3}$$

Cauchy-Schwarzı kullanırsak (Cauchy 'den türeyen bir faydalı eşitsizlik, başta bahsettiğimiz):

$$\frac{a^2}{a^3+ab^3+c^3}+\frac{b^2}{a^3b+b^3+bc^3}+\frac{c^2}{a^3c+b^3c+c^3}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3}$$

elde edilir. Düzenlersek:

$$=\frac{(a+b+c)^2}{a^4+b^4+c^4+a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3}=\frac{(a+b+c)^2}{(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$$

$\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}\geq 1$ bu eşitsizliği kanıtladığımızda soru bitmiş olur.
$a+b+c\geq a^3+b^3+c^3$ olarak düzenleyelim.
Her iki tarafı $(a^3+b^3+c^3)$ ile çarpıp Cauchy uygulayalım.

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\geq(a^3+b^3+c^3)(a^3+b^3+c^3)$$

sol tarafa Cauchy uygularsak;

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geq(a^3+b^3+c^3)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2)\geq(a^3+b^3+c^3)$$

sol tarafı $a^4+b^4+c^4$ ile sağ tarafı da $a^3+b^3+c^3$ ile çarpalım. (Soruda bize $a^4+b^4+c^4=a^3+b^3+c^3$ verilmiş.)

$$(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)\geq(a^3+b^3+c^3)(a^3+b^3+c^3)$$

ki bu eşitsizlik de Cauchy Schwarz eşitsizliğinden doğrudur.

Not 3. Schur Eşitsizliği: a, b, c pozitif gerçel sayılar ve r bir pozitif tamsayı olmak üzere;

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a)4 + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

eşitsizliği geçerlidir.

8. $abc = 1$ olacak şekilde alınan a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

olduğunu gösteriniz. **(IMO 2000)**

Çözüm 8. $abc = 1$ olduğundan, $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ olacak şekilde x, y, z pozitif reel sayıları vardır.

$$a - 1 + \frac{1}{b} = \frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y} = \frac{x - y + z}{y}$$

Benzer şekilde,

$$b - 1 + \frac{1}{c} = \frac{x + y - z}{z}$$

$$c - 1 + \frac{1}{a} = \frac{-x + y + z}{x}$$

$\Longrightarrow \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) = \left(\frac{-x+y+z}{x}\right)\left(\frac{x-y+z}{y}\right)\left(\frac{x+y-z}{z}\right) \leq 1$
$\Longleftrightarrow (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \leq xyz$

Parantezler açıldığında ise;

$$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 \leq x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ise iyi bilinen **Schur Eşitsizliği** nin $r = 1$ için özel hali olduğundan doğrudur.

9. a, b ve c pozitif gerçel sayılar olsun.

$$a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3a^3b^3c^3 \geq abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + a^2b^2c^2(a^3 + b^3 + c^3)$$

eşitsizliğini ispatlayınız. **(BMO 2015)**

Çözüm 9. Schurda özel olarak $r = 1$ alınıp açılırsa $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y)$ olur.

Şimdi sorudaki ifadede $x = ab^2$, $y = bc^2$, $z = ca^2$ dönüşümü yapalım. O zaman Schur eşitsizliğinden;

$a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3a^3b^3c^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y) = abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + a^2b^2c^2(a^3 + b^3 + c^3)$ bulunur. İspat biter.

Karışık Sorular (Eşitsizlik Üzerine)

10. $a^2+b^2+c^2=1$ koşulunu sağlayan tüm a,b,c negatif olmayan gerçel sayıları için,

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\geq 5abc+2$$

olduğunu kanıtlayınız. **(2014 Takım Seçme)**

Çözüm 10. $1\geq a\geq b\geq c\geq 0$ olduğunu kabul edelim. $(a+b)(a+c)=a^2+ab+bc+ca\geq a^2+b^2+c^2=1$ olduğundan $\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\geq 2$ idir. ...(1)
$\sqrt{b+c}\geq\sqrt{2\sqrt{bc}}=\sqrt[4]{4bc}=S$ olsun. $S\geq 5abc$ olduğunu gösterirsek ispat biter. a,b,c pozitif gerçel sayılar olsun. $a^4b^3c^3\leq\frac{4}{5^4}$ olduğunu göstermeliyiz. $x=a^2, y=b^2, z=c^2$ olsun. $x+y+z=1$ idir. $A.G.O$ dan $x^4y^3z^3=4^43^33^3\left(\frac{x}{4}\right)^4\left(\frac{y}{3}\right)^3\left(\frac{z}{3}\right)^3\leq 4^43^33^3\left(\frac{4\cdot\frac{x}{4}+3\cdot\frac{y}{3}+3\cdot\frac{z}{3}}{10}\right)^{10}=\frac{4^43^33^3}{10^{10}}$ olduğunu bilebiliriz. Buradan $a^4b^3c^3\leq\sqrt{\frac{4^4.3^6}{10^{10}}}<\frac{4}{5^4}$ olur. Eğer biri 0 a eşit olsa da eşitsizliğin sağlandığını biliyoruz. O halde $\sqrt{b+c}\geq S\geq 5abc$ elde ederiz. ...(2)

...(1) ile ...(2) yi toplarsak ispat biter. Eşitlik $a=1, b=c=0$ için sağlanır.

11. $-2\leq x,y,z\leq 2$ ve $x^2+y^2+z^2+xyz=4$ koşullarını sağlayan tüm x,y,z gerçel sayıları için,

$$\frac{z(xz+yz+y)}{xy+y^2+z^2+1}\leq K$$

olmasını sağlayan en küçük K gerçel sayısını belirleyiniz. **(2013 Takım Seçme)**

Çözüm 11. $|x|$ ifadesi 2 ye eşit olmasın. O halde ;

$$xy+y^2+z^2+1-z(xz+yz+y)=$$

$$\left(x+y-\frac{x+z^2}{2}\right)^2+\frac{4-x^2}{4}.\left[1-\frac{z(xz+2y)}{4-x^2}\right]^2+\frac{(4-x^2-y^2-z^2-xyz)z^2}{4-x^2}\geq 0$$

olduğundan K en az 1 dir. Eşitlik $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, y=z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ iken sağlanır.
$|x|=2$ ise bu durumun incelenmesi kolaydır. Buradan çelişki çıkmaz.
Sonuç olarak $K=1$ sağlar.

12. $a^2+b^2+c^2\geq 3$ koşulunu sağlayan tüm pozitif a,b,c gerçel sayıları için,

$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)}+\frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)}+\frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)}\geq\frac{3}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız. **(2011 Takım Seçme)**

Çözüm 12. $(b+1)(b+5) \leq \frac{4}{3}(b+2)^2$ olduğunu ifadeyi açarak kolayca görebiliriz. O halde bizim;

$$\frac{(a+1)^2}{(a+1)(b+2)} + \frac{(b+1)^2}{(b+1)(c+2)} + \frac{(c+1)^2}{(c+1)(a+2)} \geq 2$$

göstermemiz yeterli olacaktır. *Faydalı Eşitsizlikten* dolayı;

$$\frac{(a+1)^2}{(a+1)(b+2)} + \frac{(b+1)^2}{(b+1)(c+2)} + \frac{(c+1)^2}{(c+1)(a+2)} \geq \frac{(a+b+c+3)^2}{ab+bc+ca+3(a+b+c)+6}$$

idir. Bundan sonra bizim;

$$(a+b+c+3)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+6(a+b+c)+9$$
$$\geq 2(ab+bc+ca)+6(a+b+c)+12$$

göstermemiz yeterlidir. Bu da $a^2+b^2+c^2 \geq 3$ olduğundan doğrudur. İspat biter.

13. Bir ABC üçgeninde, A_1, B_1 ve C_1, iç teğet çemberin sırasıyla, BC, AC ve BC kenarlarına değdiği noktalar olmak üzere,

$$\sqrt{\frac{|AB_1|}{|AB|}} + \sqrt{\frac{|BC_1|}{|BC|}} + \sqrt{\frac{|CA_1|}{|CA|}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

olduğunu kanıtlayınız. **(2009 Takım Seçme)**

Çözüm 13. $AC_1 = AB_1 = x, BC_1 = BA_1 = y, CA_1 = CB_1 = z$ olsun. Soru x, y, z pozitif gerçel sayıları için;

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{x}{x+y}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

haline döner. Buradan da;

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \sum \frac{\sqrt{(xy+xz)(z+x)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \frac{\sqrt{2(xy+yz+zx)}\sqrt{2(x+y+z)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} =$$

$$2\sqrt{1+\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

diyerek soruyu bitirebiliriz. İspat biter.

Not: $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ olduğunu $A.G.O$ dan kolayca elde edebiliriz. Yapmamız gereken $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ olduğunu benzer şekilde kullanıp oluşan ifadeleri taraf tarafa çarpmaktır. Sonuç direkt olarak bu elde edilir.

14. x, y, z pozitif gerçeel sayıları $xy + yz + zx = 3xyz$ koşulunu sağlıyorsa

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3$$

eşitsizliğini ispatlayınız. Eşitlik durumunu bulunuz. **(BMO 2014)**

Çözüm 14. $xy + yz + zx = 3xyz \ \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ olur. Cauchy Schwarz uygulayalım.

$$\Longrightarrow \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)(x^2y + y^2z + z^2x) \geq (x + y + z)^2$$

$$\Longrightarrow x^2y + y^2z + z^2x \geq \frac{(x + y + z)^2}{3}$$

Eğer $\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq 2(x + y + z) - 3$ ise ispat biter. Taraf tarafa çarpalım.

$$\Longrightarrow (x + y + z)^2 \geq 6(x + y + z) - 9$$

$$\Longrightarrow (x + y + z)^2 - 6(x + y + z) + 9 \geq 0$$

$$\Longrightarrow (x + y + z - 3)^2 \geq 0$$

Son ulaştığımız ifade zaten doğrudur. İspat biter.

15. a, b, c pozitif reel sayıları $a + b + c = 3$ koşulunu sağlasın.

$$A = \frac{2 - a^3}{a} + \frac{2 - b^3}{b} + \frac{2 - c^3}{c}$$

toplamının en küçük değerini bulunuz. **(JBMO 2015)**

Çözüm 15. En küçük değerin $A = 3$ olduğunu ispatlayacağız.

$$A = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 3$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - ((a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)) \geq 3$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + 2(ab + bc + ac) \geq 12$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + ab + bc + ac \geq 6$$

Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{a} + bc \geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}}$$

dır. Bu eşitsizliğin simetrikleri de uygulanırsa,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+ab+bc+ac \geq$$

$$2(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}})$$

olduğu görülür.

O halde

$$\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}} \geq 3$$

olduğunu gösterirsek ispat biter.

Eşitsizliğin her iki tarafının karesini alırsak,

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}+2(a+b+c) \geq 9$$

$$\Longleftrightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq 3$$

$$\Longleftrightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c$$

Ulaştığımız son eşitsizliği Yeniden Düzenleme Eşitsizliği yardımıyla ispatlayacağız.

Genelliği bozmadan $a \geq b \geq c$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $ab \geq ac \geq bc$ ve $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$ olur. O halde Yeniden Düzenleme Eşitsizliği gereği

$$ab \cdot \frac{1}{c}+ac \cdot \frac{1}{b}+bc \cdot \frac{1}{a} \geq$$

$$ab \cdot \frac{1}{b}+ac \cdot \frac{1}{a}+bc \cdot \frac{1}{c}=a+b+c$$

elde edilir.

Eşitlik durumu, uyguladığımız A.G.O ve Y.D eşitsizliklerindeki eşitlik durumlarının sağlandığında geçerlidir. Bu da ancak $a=b=c=1$ iken mümkündür.

16. Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{x(2x-y)}{y(2z+x)}+\frac{y(2y-z)}{z(2x+y)}+\frac{z(2z-x)}{x(2y+z)} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız. **(2012 II. Aşama)**

Çözüm 16. (Lokman Gökçe)

$$\frac{x(2x-y)}{y(2z+x)}+\frac{y(2y-z)}{z(2x+y)}+\frac{z(2z-x)}{x(2y+z)}\geq 1$$

eşitsizliğinde $\frac{x}{y}=a$, $\frac{y}{z}=b, \frac{z}{x}=c$ dönüşümü yaparsak $abc=1$ olup eşitsizlik

$$\frac{2a-1}{2c+1}+\frac{2b-1}{2a+1}+\frac{2c-1}{2b+1}\geq 1$$

şekline dönüşür.

$$\frac{2a-1}{2c+1}+\frac{2b-1}{2a+1}+\frac{2c-1}{2b+1}\geq 1$$

Eşitsizliğinde payda eşitleyip düzenlersek;

$$\Longrightarrow 8a^2b+8b^2c+8c^2a+4a^2+4b^2+4c^2\geq$$

$$8abc+4ab+4bc+4ca+4a+4b+4c+4$$

Burada $abc=1$ yazar ve $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ eşitsizliğini kullanırsak;

$$\Longrightarrow 2a^2b+2b^2c+2c^2a\geq a+b+c+3$$

Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliğinden $a^2b+b^2c+c^2a\geq 3$ olduğundan;

$$\Longrightarrow a^2b+b^2c+c^2a\geq a+b+c$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte tekrar $\frac{x}{y}=a$, $\frac{y}{z}=b, \frac{z}{x}=c$ yazıp düzenlersek

$$x^3+y^3+z^3\geq x^2z+z^2y+y^2x$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik ise (x,y,z) ve (x^2,y^2,z^2) üçlüleri için yeniden düzenleme eşitsizliğinin uygulanması olup, eşitsizlik doğrudur.

Eşitlik durumu yalnızca $x=y=z$ durumunda sağlanır.

17. $a+b+c=3$ şartını sağlayan tüm a,b,c pozitif gerçel sayıları için;

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\geq\frac{3}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

18. $a+b+c=3$ koşulunu sağlayan tüm a,b,c pozitif gerçel sayıları için;

$$\frac{2-\sqrt{a}}{\sqrt{c+3a}}+\frac{2-\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}+\frac{2-\sqrt{c}}{\sqrt{b+3c}}\geq\frac{3}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Not. Son iki sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır. Çözen biri olursa forumda paylaşabilir. Bir sonraki çalışma kağıdına bu soru ve o kişinin çözümüyle başlayabiliriz. Kolay gelsin...