

Çıkmış Sorular Deneme Sınavı

February 23, 2016

1. Tüm x, y gerçel sayıları için,

$$f(f(y) + x^2 + 1) + 2x = y + (f(x + 1))^2$$

koşulunu sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

2. $m^6 = n^{n+1} + n - 1$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

3. K , düzlemdeki dışbükey bir 2016-genin kenar ve köşegenlerinin kümesi olsun. A , K nin bir altkümesi olmak üzere; A ya ait her doğru parçası çifti kesişiyorsa, A ya *kesişimli küme* diyelim. İki kesişimli kümenin birleşiminin en çok kaç elemana sahip olabileceğini belirleyiniz.

4. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin kesişim noktası E olmak üzere, $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{BAD})$ koşulu sağlanıyor. $[BC]$ kenarı üstündeki bir F noktası için, $m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{EBF}) = m(\widehat{BFE})$ ise, A, B, F, D noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

5. $ab + bc + ca \leq 1$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$a + b + c + \sqrt{3} \geq 8abc \left(\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \right)$$

olduğunu gösteriniz.

6. A ülkesindeki 2011 kent ile B ülkesindeki 2011 kent arasında karşılıklı uçak seferleri yapılıyor. İki kent arasındaki seferleri yalnızca bir hava yolu şirketi işletebiliyor ve bir kentten çıkan seferleri en çok 19 farklı hava yolu şirketi işletebiliyor. Uçuşlar hava yolu şirketleri arasında bu koşulları sağlayacak biçimde nasıl paylaşılmış olursa olsun, yalnızca bir tek hava yolu şirketinin uçuşlarını kullanarak herhangi ikisi arasında gidebileceğimiz k kent bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

7. $p^3 - 4p + 9$ un tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını bulunuz.

8. $[AB]$ çaplı bir ω_1 çemberi ile A merkezli bir ω_2 çemberi C ve D noktalarında kesişiyor. ω_2 çemberinin üstünde, ω_1 çemberinin dışında ve AB doğrusuna göre C ile aynı tarafta yer alan bir E noktası için, BE doğrusu ω_2 çemberini ikinci kez F noktasında kesiyor. ω_1 çemberinin üstünde ve bu çemberin C den geçen çapına göre A ile aynı tarafta olan bir K noktası $2|CK| \cdot |AC| = |CE| \cdot |AB|$ koşulunu sağlıyor. KF doğrusu ω_1 çemberini ikinci kez L noktasında kesiyor. D noktasının BE doğrusuna göre simetriğinin, L , F ve C noktalarından geçen çemberin üstünde olduğunu kanıtlayınız.

9. $x_i \in 1, 2, \dots, 23, (1 \leq i \leq 2016)$, biçimindeki tüm $(x_1, x_2, \dots, x_{2016})$ 2016-lılarından oluşan kümeyi P ile gösterelim. Bir $S \subset P$ altkümesi, her $(x_1, x_2, \dots, x_{2016}) \in S$ için,

$$y_i \leq x_i (1 \leq i \leq 2016) \Rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_{2016}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa, S ye *alçalan küme*

$$x_i \leq y_i (1 \leq i \leq 2016) \Rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_{2016}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa da, S ye *yükselen küme* diyelim. A ve B boş olmayan sırasıyla bir alçalan ve bir yükselen küme olmak üzere, $|A \cap B| / (|A| \cdot |B|)$ nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.