Geomania Çıkmış Sorular Deneme Sınavı

Çözümler

1. Tüm x, y gerçel sayıları için,

$$f(f(y) + x^2 + 1) + 2x = y + (f(x+1))^2$$

koşulunu sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm 1. İlk eşitlik

$$f(f(y) + x^2 + 1) + 2x = y + (f(x+1))^2 \quad ...(1)$$

olsun. f fonksiyonun birebir ve örten olduğu barizdir. $f(0) = a, f(1) = b$ olsun. Eşitlikte $x \to 0$ koyarsak $\forall y \in \mathbf{R}$ için

$$y = f(f(y) + 1) - b^2 \quad ...(2)$$

idir. ...(2) yi ...(1) de yerine koyalım.

$$f\big(f(y) + 1 + x^2\big) + 2x + b^2 = f\big(f(y) + 1\big) + f^2(x+1) \quad ...(3)$$

olur. f in birebirliği biliyoruz o halde;

$$f(x^2 + y) + 2x + b^2 = f(y) + f^2(x+1) \quad ...(4)$$

elde edilir. Burada yerine $y \to 0$ koyarsak;

$$f^2(x+1) = f(x^2) + 2x + b^2 - a \quad ...(5)$$

elde edilir. Bunu ...(4) te yerine koyarsak;

$$f(x^2 + y) = f(x^2) + f(y) - a$$

elde edilir. Buradan da $\forall x$, $y \in R$, $x \geq 0$ için;

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a \quad ...(6)$$

elde edilir. Bu eşitliğin $x < 0$ için de sağladığını kolayca görebiliriz. O yüzden;

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a \quad ...(7)$$

elde edilir. ...(7) de $x = y = 1$ koyarsak $f(2) = 2b - a$ buluruz. ...(5) te $x = 1$ koyarsak $f^2(2) = b^2 + b + 2 - a$ elde ederiz. O yüzden;

$$(2b - a)^2 = b^2 + b + 2 - a \quad ...(8)$$

elde edilir. ...(5) te $x = -1$ koyarsak;

$$a^2 + a = b^2 + b - 2 \quad ...(9)$$

elde edilir. ...(8) ve ...(9) u da çözeriz ve buradan $a = 0, b = 1$ gelir. ...(5) ve ...(7) yeniden düzenlenirse;

$$f^2(x + 1) = f(x^2) + 2x + 1 \quad ...(10)$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad ...(11)$$

elde edilir. ...(10) u $f(1) = 1$ olduğunu kullanarak ...(5) te yerine koyarsak;

$$f(x^2) = f^2(x) + 2 \cdot f(x) - 2x \quad ...(12)$$

elde edilir. Burada $x \to -x$ koyarsak eşitlik bozulmaz ve f in çift fonksiyon olduğunu bilebiliriz. O yüzden ayrıca;

$$f(x^2) = f^2(x) + 2x - 2 \cdot f(x) \quad ...(13)$$

olduğunu da biliyoruz. ...(12) ve ...(13) ten tüm x gerçel sayıları için $f(x) = x$ elde edilir. İspat biter.

2. $m^6 = n^{n+1} + n - 1$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm 2. Eğer n bir tek sayı ise $\left(n^{\frac{n+1}{2}}\right)^2 < n^{n+1} + n - 1 < \left(n^{\frac{n+1}{2}} + 1\right)^2$ olduğundan eğer $n \geq 2$ ise buradan çözüm gelmeyeceğini söyleyebiliriz. $n = 1$ için sağlar.

Eğer $n \equiv -1 \pmod 3$ ise $\left(n^{\frac{n+1}{3}}\right)^3 < n^{n+1} + n - 1 < \left(n^{\frac{n+1}{3}} + 1\right)^3$ olduğundan buradan da $n \geq 2$ için çözüm gelmeyeceğini söyleyebiliriz. $n = 1$ i saymıştık.

Eğer $n \equiv 0 \pmod 3$ ise $m^6 \equiv -1 \pmod 3$ olur ve buradan da çözüm gelmez.

O halde $n \equiv 4 \pmod 6$ diyelim. $n + 1 | n^{n+1} + n + 2 = y^6 + 3$ olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $n+1 \equiv 5 \pmod 6$ olur. Buradan $n+1$ i bölecek şekilde bir $p \equiv 2 \pmod 3$ olacak şekilde bir p asalının varlığını bilebiliriz. $y^6 \equiv -3 \pmod{n + 1}$ idir. O halde $y^6 \equiv -3 \pmod p$ olur. Ancak bir tamkare $p \equiv 2 \pmod 3$ olmak üzere $\pmod p$ de -3 kalanını veremez. $p > 2$ idir.

İspat: Diyelim ki bir x için $x^2 \equiv -3 \pmod p$ olsun. Şimdi de $2y + 1 \equiv x \pmod p$ olacak şekilde bir y seçelim. Buradan $y^2 + y + 1 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow y^3 \equiv 1$

(mod p) olur. O halde y nin $\pmod p$ deki mertebesi d olmak üzere $(d,3) = 1,3$ olabilir. $= 1$ ise $y \equiv 1 \pmod p$ olur. $p = 3$ olması gerekir. Çelişki! $(d,3) = 3$ olsa $3 \mid d \mid p-1$ olması gerekir. Çelişki! Kabul yanlıştır ve böyle x ler yoktur.

O halde bu durumdan da çözüm gelmez ve ispat biter. Yalnızca $n = 1$ sağlar.

3. K, düzlemdeki dışbükey bir 2016-genin kenar ve köşegenlerinin kümesi olsun. A, K nin bir altkümesi olmak üzere; A ya ait her doğru parçası çifti kesişiyorsa, A ya *kesişimli küme* diyelim. İki kesişimli kümenin birleşiminin en çok kaç elemana sahip olabileceğini belirleyiniz.

Çözüm 3. Cevabımız 4031. Eğer $n \geq 5$ ise n-gen için cevabın $2n-1$ olduğunu göstereceğiz.

A bir kesişimli küme olsun öyle ki $|A| \geq n$. A'daki köşe sayısı doğru parçası sayısından büyük olmayacağından A bir döngü içerir. Bunu anlamak için tersini düşünelim. Bir döngü içermese bir ağaç olması gerekirdi, fakat n köşeli bir ağaçta en fazla $n-1$ kenar olabilir. Bu yüzden bir döngü kesin vardır. PQ ve QR bu döngüde iki doğru parçası olsun. Döngüdeki her doğru parçası, XP ve RY hariç, PQ ve QR'nin ikisini birden kendi iç noktalarında keser. Bundan dolayı her doğru parçası PQ ve QR ye göre karşıdan karşıya geçmektedir. Burada döngünün tek sayıda doğru parçası içerdiğini ve döngüdeki köşelerden hiçbirinin $\angle PQR$ açısının iç bölgesinde olmadığını çıkarırız.

Şimdi bu döngüdeki köşelimizi adlandıralım. Döngümüzde k bir pozitif tamsayı olmak üzere $2k+1$ tane köşe olduğunu kabul edelim. Bu köşeler $P_1, P_2, \ldots, P_{2k+1}$ olsun. Bu köşeleri saat yönünde sıralandırmış olmak için döngüdeki doğru parçalarının P_iP_{i+k}, P_iP_{i+k+1} olduğunu $1 \leq i \leq 2k+1$ için (İndisler mod$n$'e göredir) kabul edeceğiz. (Her doğru parçasının PQ ve QR ye göre karşılıklı olmasının doğal sonucu) Bu doğru parçalarını A^* ile gösterelim. Burada $2k+1$ tane doğru parçası olduğuna dikkat edelim. A bir kesişimli küme olduğundan A'daki diğer doğru parçaları ancak XP_i formunda olabilir; X, $\angle P_{i+k+1}P_iP_{i+k}$ açısının iç bölgesinde bir köşe. $|A| \geq n$ olduğundan tüm böyle doğru parçaları (A^{Δ} ile gösterelim) A'ya ait olmak zorundadır. Çünkü bu köşe döngüden sadece bir köşeye bağlı olabilir ya da başka bir deyişle döngümüzü kurarken elimizdeki tüm doğru parçalarını toplarsak da n sayısına ancak ulaşabiliriz. Bu nedenle eğer A bir kesişimli küme ve $|A| \geq n$ ise ve $|A| = n$' dir ve $A = A_{(P_1,P_2,\ldots,P_{2k+1})} = A^* \cup A^{\Delta}$.

Şimdi göstereceğiz ki eğer A ve B kesişimli kümeler ve $|A| = n = |B|$ ise A ve B ayrık olamaz. Ayrık olduklarını varsayalım. Her köşenin bağlı olduğu en az bir köşe olduğundan şöyle bir varsayımda bulunabiliriz. $Q_1Q_2, Q_2Q_3, \ldots, Q_{m-1}Q_m, Q_mQ_1$ bir döngü olsun öyle ki Q_iQ_{i+1} doğru parçaları i tekse A'ya, i çiftse B'ye ait olsun. ($Q_{m+1} = Q_1$) Öyle bir döngü vardır ki çokgenin her köşesi A ve B'den en az birer doğru parçasının bitiş noktasıdır. A ve B kesişimli olduğundan tüm Q_iQ_{i+1}' ler i tekse Q_1Q_2'yi, i çiftse Q_2Q_3'ü keser. Bu nedenle i çift ise tüm Q_i'ler ya Q_1Q_2'nin üzerindedir ya da Q_1Q_2'ye göre Q_3 ile farklı taraftadır. Ve i tek ise tüm Q_i'ler ya Q_2Q_3'ün üzerindedir ya da Q_2Q_3' ye göre Q_1 ile farklı taraftadır. m tektir ve Q_1 A^* 'ın bir köşesidir. O zaman Q_3 ya Q_mQ_1'in üzerindedir ya da Q_mQ_1' e göre Q_2 ile farklı taraftadır. Ve Q_{m-1} ya Q_1Q_2'

nin üzerindedir ya da Q_1Q_2'e göre Q_m ile farklı taraftadır. XQ_1, B'ye ait bir doğru parçası olsun. XQ_1, Q_2Q_3 ve $Q_{m-1}Q_m$'in ikisini de kesmek zorundadır ve B'ye aittir. O halde X çokgende Q_2 ve Q_m arasındadır. Fakat bu durumda XQ_1 aynı zamanda A^{Δ} 'ya ve bu nedenle A'ya aittir. Çelişki!

Son olarak eğer P, Q, R, S, T çokgende beş ardışık köşe ise, $A_{(P,Q,R)} \cup A_{(R,S,T)}$ $2n-1$ doğru parçası içerir.

4. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin kesişim noktası E olmak üzere, $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{BAD})$ koşulu sağlanıyor. $[BC]$ kenarı üstündeki bir F noktası için, $m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{EBF}) = m(\widehat{BFE})$ ise, A, B, F, D noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4. (ABD) çemberi BC yi G de kessin. $\angle BAD = \angle DGC = \angle CED$ olduğu için E, G, C, D çemberseldir. Bu durumda

$$BE \cdot BD = BG \cdot BC \ldots 1$$

olacaktır. $\angle BAD = \angle AEB$ olduğu için

$$BE \cdot BD = AB^2 \ldots 2$$

dir. (1) ile (2) yi birleştirirsek

$$BG \cdot BC = AB^2 \ldots 3$$

elde edilir. Bu da

$$\angle BAF = \angle BCA \ldots 4$$

ile eşdeğerdir. $\angle BAD = \angle BDC$ olduğu için CD doğrusu (ABD) çemberine teğettir. Dolayısıyla,

$$\angle CBD = \angle GDC \ldots 5$$

Bu durumda $EGCD$ kirişler dörtgeninde $\angle GEC = \angle GDC = \angle CBD$ olacaktır. Bunu (4) ile birleştirirsek

$$\angle EGB = \angle GEC + \angle BCA = \angle EBF + \angle BAF = \angle EFB \ldots 6$$

elde ederiz. Bu da $F = G$ anlamına gelir. Yani A, B, F, D noktaları çemberseldir.

5. $ab + bc + ca \leq 1$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$a + b + c + \sqrt{3} \geq 8abc\left(\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 5. $(a+b)(a+c) = a^2 + ab + bc + ca \leq a^2 + 1$ dir.

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \leq \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

olur.

Lemma. $9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$

İspat. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$ olduğunu biliyoruz. Yerine koyarsak $9(a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$ ve $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$ göstermemiz yeterli olur. Bu da $A.G.O$ dan barizdir.

O halde biz

$$8abc\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right) \leq \frac{16abc(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{18abc}{ab+bc+ca}$$

olduğunu gösterdik. Bundan sonra;

$$a+b+c+\sqrt{3} \geq \frac{18abc}{ab+bc+ca}$$

göstermemiz yeterli olacaktır. Düzenlersek;
$(a+b+c)(ab+bc+ca)+\sqrt{3}(ab+bc+ca) \geq 18abc$ göstermeliyiz. $A.G.O$ dan $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$ dir. O halde $\sqrt{3}(ab+bc+ca) \geq 9abc$ göstermemiz yeterlidir.

$A.G.O$ dan $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ idir. Verilen bilgiden $13 \geq \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ olur ve $\frac{1}{3\sqrt{3}} \geq abc$ olur. Buradan da $\sqrt{3}(ab+bc+ca) \geq 9abc$ elde ederiz. İspat biter. Eşitlik $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ için sağlanır.

6. A ülkesindeki 2011 kent ile B ülkesindeki 2011 kent arasında karşılıklı uçak seferleri yapılıyor. İki kent arasındaki seferleri yalnızca bir hava yolu şirketi işletebiliyor ve bir kentten çıkan seferleri en çok 19 farklı hava yolu şirketi işletebiliyor. Uçuşlar hava yolu şirketleri arasında bu koşulları sağlayacak biçimde nasıl paylaşılmış olursa olsun, yalnızca bir tek hava yolu şirketinin uçuşlarını kullanarak herhangi ikisi arasında gidebileceğimiz k kent bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Çözüm 6. Önce 212 için örnek verelim. A daki ve B deki kentleri, her iki ülkede de 16 tane 106 kent ve 3 tane 105 kent olmak üzere 19'ar gruba ayıralım. Bu gruplar arasındaki uçuşları farklı havayolu şirketleri kontrol etsin (Uçuşlar bir ülkeden diğerine olduğu için toplam 19^2 havayolu şirketi olması gerekir). Bu durumda aynı havayolu şirketi kullanılarak en çok 212 kente ulaşılabilir.

Şimdi uygun havayolu ile her zaman 212 kente ulaşmanın mümkün olduğunu gösterelim. $i \in \{1,2,\dots s\}$ olmak üzere, havayolu şirketi değiştirmeden ulaşılabilen kentlerin kümesi K_i, kentlerin sayısı ise k_i olsun (bir havayolu şirketi için birden fazla küme bulunabilir). Soruda verilen şarttan dolayı her kent en fazla 19 kümenin içinde olabilir. Yani, toplamda 4022 kent olduğundan, $\sum_{i=1}^{n} k_i \leq 4022 \cdot 19$ dur. Öte yandan, i havayolu şirketi, K_i 'de bulunan kentler arasında en fazla $\frac{k_i^2}{4}$ uçuş düzenleyebilir. Toplam uçuş sayısı 2011^2 olduğundan $\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i^2}{4} \geq 2011^2$, yani $\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \geq 4 \cdot 2011^2$ olur. Şimdi, k_i 'lerden en az biri 212'den büyükse ispat biter. Hepsinin en çok 211 olduğu duruma bakalım. Yani, $\sum_{i=1}^{n} k_i \leq 4022 \cdot 19$ ve $k_i \leq 211$ iken, $\sum_{i=1}^{n} k_i^2$ nin alabileceği en büyük değere bakalım. $a \geq b > 0$ iken, $(a+1)^2 + (b-1)^2 > a^2 + b^2$ olduğundan, $\sum_{i=1}^{n} k_i^2$ en büyük değerini k_i lerin hemen hemen hepsi 211 iken alır. $363 \cdot 211 > 4002 \cdot 38$ olduğundan $363 \cdot 211^2 \geq \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \geq 4 \cdot 2011^2$ olur. Fakat $363 \cdot 211^2 < 4 \cdot 2011^2$ olduğundan, bu durum mümkün değildir.

7. $p^3 - 4p + 9$ un tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını bulunuz.

Çözüm 7. $p = 2,\ 7,\ 11$ değerleri için $p^3 - 4p + 9 =\ 3^2,\ 18^2,\ 36^2$ olarak bulunur.

$x^2 = p^3 - 4p + 9$ denklemini p asalı ve $x \in N_0$ için çözeceğiz.

$p = 2$ ise $x = 3$ sağlıyor, yani $p = 2$ çözümdür. $p \neq 2$ durumuna bakmak yeterlidir.

$x^2 \equiv 9 \pmod p$ olduğundan; bir k tam sayısı için $x = kp-3$ veya $x = kp+3$ olmalıdır.

$x = kp - 3$ ise; $(kp-3)^2 = p^3 - 4p + 9 \Rightarrow k^2p - 6k = p^2 - 4 \Rightarrow p|6k-4$ olmalıdır. $p \neq 2$ olduğundan, $p|3k-2$ olmalıdır. Yani $p \leq 3k+2$ olmalıdır.

$x = kp + 3$ ise; $(kp+3)^2 = p^3 - 4p + 9 \Rightarrow k^2p + 6k = p^2 - 4 \Rightarrow p|6k+4$ olmalıdır. $p \neq 2$ ise $p|3k+2$ olmalıdır. Yani $p \leq 3k+2$ olmalıdır.

İki durumda da $p \leq 3k+2$ olmalıdır. Öyleyse $p - 23 \leq k \Longrightarrow p^2 - 2p - 93 \leq kp - 3 \leq x$.

Şimdi x üzerinden iki durum inceleyelim:

i) $x \leq p^2 4 \Rightarrow \frac{p^2-2p-9}{3} \leq \frac{p^2}{4} \Rightarrow p \leq 8 + \frac{36}{p} \Rightarrow p \leq 11$;

ii) $x > \frac{p^2}{4} \Rightarrow x^2 = p^3 - 4p + 9$ olduğundan $\frac{p^4}{16} < p^3 - 4p + 9 \Rightarrow p < 16 - \frac{16(4p-9)}{p^3} \Rightarrow p \leq 13$.

Demek ki $p \leq 13$ olmalıdır, bu şartı sağlayan asallarda incelenirse yalnızca 7 ve 11 in sağladığı görülür. Yani, tüm çözümler $p = 2,\ 7,\ 11$ olarak bulunur.

8. $[AB]$ çaplı bir ω_1 çemberi ile A merkezli bir ω_2 çemberi C ve D noktalarında kesişiyor. ω_2 çemberinin üstünde, ω_1 çemberinin dışında ve AB doğrusuna göre C ile aynı tarafta yer alan bir E noktası için, BE doğrusu ω_2 çemberini ikinci kez F noktasında kesiyor. ω_1 çemberinin üstünde ve bu çemberin C den geçen çapına göre A ile aynı tarafta olan bir K noktası $2|CK| \cdot |AC| = |CE| \cdot |AB|$ koşulunu sağlıyor. KF doğrusu ω_1 çemberini ikinci kez L noktasında kesiyor. D noktasının BE doğrusuna göre simetriğinin, L, F ve C noktalarından geçen çemberin üstünde olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 8. AB çaplı çemberin merkezi O, D nin BE ye göre simetriği D', CD nin orta noktası M, DD' ün orta noktası N olsun. $AC = AE = r$ ve $KO = KC = R$ olsun. Sorudaki eşitlikten $CK/EC = R/r$ elde edilecektir. Bu da $\triangle EAC \sim \triangle KOC$ demektir. $\angle EAC = \angle KOC = 2\alpha$ ise, $\angle KDC = \angle EDC = \alpha$ dolayısıyla da E, K, D noktaları doğrusal olacaktır.

$\angle EKC = 2\theta$ dersek, $\angle ECK = 90° - \theta$ ve $\angle KCD = 2\theta - \alpha$, dolayısıyla da $\angle ECD = 90° + \theta - \alpha = \angle EFD$ olacaktır. $\angle FND = 90°$ olduğu için, $\angle FDN = \theta - \alpha$ ve $DN = ND'$ olduğu için de $\angle FD'N = \theta - \alpha$ dır. $\angle EKC = 2\theta$ demiştik. Bu durumda $\angle CBD = 2\theta$ ve $\angle MBD = \theta$ dır.

9. $x_i \in 1, 2, \ldots, 23, (1 \le i \le 2016)$, biçimindeki tüm $(x_1, x_2, \ldots, x_{2016})$ 2016-lılarından oluşan kümeyi P ile gösterelim. Bir $S \subset P$ altkümesi, her $(x_1, x_2, \ldots, x_{2016}) \in S$ için,

$$y_i \le x_i (1 \le i \le 2016) \Rightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_{2016}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa, S ye *alçalan küme*

$$x_i \le y_i (1 \le i \le 2016) \Rightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_{2016}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa da, S ye *yükselen küme* diyelim. A ve B boş olmayan sırasıyla bir alçalan ve bir yükselen küme olmak üzere, $|A \cap B| / (|A| \cdot |B|)$ nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Çözüm 9. Cevap, $\frac{1}{23^{2016}}$.

Daha genel halini $K = 23$, $n = 2016$ değişkenlerini kullanarak ispatlayalım.

$A = P$ veya $B = P$ olduğunda $|A \cap B| / (|A| \cdot |B|) = 1|P| = 1K^n$ oluyor.

Herhangi A alçalan, B yükselen kümeleri için $|A \cap B| / (|A| \cdot |B|) \le 1K^n$ olduğunu tümevarımla gösterelim.

$n = 1$ için, $A = \{x_1 \colon x_1 \in N, 1 \le x_1 \le a_1 \le K\}$ ve $B = \{x_1 \colon x_1 \in N, 1 \le b_1 \le x_1 \le K\}$ olsun.

İddia: $|A| \cdot |B| \ge K \cdot |A \cap B|$

İspat:

$$\begin{aligned} |A| \cdot |B| &\ge K \cdot |A_1 \cap B_1| \\ a_1(K - b_1 + 1) &\ge K(a_1 - b_1 + 1) \\ K \cdot a_1 - a_1 b_1 + a_1 &\ge K \cdot a_1 - K \cdot b_1 + K \\ K \cdot b_1 - K - a_1 b_1 + a_1 &\ge 0 \\ (K - a_1)(b_1 - 1) &\ge 0. \end{aligned}$$

$n-1$ için eşitsizlik doğru olsun. Yani $n-1$-lilerden oluşan herhangi A' alçalan ve B' yükselen kümeleri için $|A' \cap B'| / (|A'| \cdot |B'|) \le 1K^{n-1}$ olsun.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ çoklularından oluşan A alçalan kümesini x_n sayısına göre gruplandıralım. A_i ile $x_n = i$ olan grubun son elemanın atılmasıyla oluşan $n-1$-liler kümesini gösterelim. Öncelikle $|A| = \sum_{i=1}^{K} |A_i|$ ve her A_i nin alçalan olduğunu fark edelim. A_{i+1} in bir elemanı $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ olsun. $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, i+1) \in A$ ise alçalanlık tanımından $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, i) \in A$, dolayısıyla $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in A_i$ olacak. Bu durumda $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_K$ olur.

Benzer şekilde, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ çoklularından oluşan B yükselen kümesini x_n sayısına göre gruplandıralım. B_i ile $x_n = i$ olan grubun son elemanın atılmasıyla oluşan $n-1$-liler kümesini gösterelim. Her B_i yükselen ve $|B| = \sum_{i=1}^{K} |B_i|$ olacaktır. Alçalan örneğine benzer şekilde $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_K$.

$n-1$-liler için doğru kabul ettiğimiz eşitlikten

$$|A \cap B| = \sum_{i=1}^{K} |A_i \cap B_i| \leq 1K^{n-1} \sum_{i=1}^{K} |A_i| \cdot |B_i| 1$$

elde edilir.

$|A_1| \geq |A_2| \geq \cdots \geq |A_K|$ ve $|B_1| \leq |B_2| \leq \cdots \leq |B_K|$ olduğu için Chebyshev Eşitsizliğinden

$$\sum_{i=1}^{K} |A_i| \cdot |B_i| \leq \frac{1}{K} \cdot \left(\sum_{i=1}^{K} |A_i| \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{K} |B_i| \right) = \frac{1}{K} \cdot |A| \cdot |B| 2$$

elde ederiz. (1) ile (2) yi birleştirirsek

$$|A \cap B| \leq \frac{1}{K^n} \cdot |A| \cdot |B|$$

sonucuna ulaşırız.