



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ocak 2016

Soru: n ile aralarında asal olan her a pozitif tam sayısı için $2n^2$ sayısının $a^n - 1$ sayısını tam bölmesini sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm: $p > 2$ n nin bir asal böleni (varsa) olsun ve p nin n yi bölen en büyük kuvveti m olsun : $v_p(n) = m$. a sayısını $a \equiv p + 1 \pmod{p^2}$ ve $a \equiv 1 \pmod{\frac{n}{p^m}}$ olacak şekilde seçelim. $p \mid a - 1$ olduğundan $v_p(a^n - 1) = v_p(a - 1) + v_p(n) = m + 1$ oluyor. $a^n - 1$ sayısı n^2 ile bölünüyor. O zaman $m + 1 \geq 2m \Rightarrow m \leq 1 \Rightarrow m = 1$. Şimdi m sayısı 2 nin n yi bölen en büyük kuvveti m olsun : $v_2(n) = m$. a sayısını $a \equiv 5 \pmod{8}$ ve $a \equiv 1 \pmod{\frac{n}{2^m}}$ olacak şekilde seçelim. $4 \mid a - 1$ olduğundan $v_2(a^n - 1) = v_2(a - 1) + v_2(n) = m + 2$. Yukarıdakine benzer şekilde $m + 2 \geq 2m + 1 \Rightarrow m \leq 1$. Sonuç olarak n kare bölensiz bir sayıdır.

p asal sayısı n nin bir çarpanı olmak üzere, $(\text{mod } p)$ de bir ilkel köke, $(\text{mod } \frac{n}{p})$ de ise 1 e denk olan bir a sayısını alalım. $p \mid a^n - 1$ olduğundan $p - 1 \mid n$ elde ediyoruz. Yani $p \mid n \Rightarrow p - 1 \mid n$. Bu koşulu sağlayan tüm kare-bölensiz sayıların sarudaki koşulu sağlıyor. $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ olmak üzere, $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ olsun. Her i için $p_i - 1 \mid n \Rightarrow p_i - 1 \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{i-1}$. $n = 1$ koşulları sağlamıyor: $k \geq 1$. şimdi $p_1 - 1 \mid 1 \Rightarrow p_1 = 2$.
 $i = 2$ için $p_2 - 1 \mid p_1 = 2$ ve $p_2 > p_1 = 2$, olduğundan $p_2 = 3$.
 $i = 3$ için $p_3 - 1 \mid p_1 \cdot p_2 = 6$ ve $p_3 > p_2 = 3$ olduğundan $p_3 = 7$.
 $i = 4$ için $p_4 - 1 \mid p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 42$ ve $p_4 > p_3 = 7$ olduğundan $p_4 = 43$.
 $i = 5$ için $p_5 - 1 \mid p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 1806$ ve $p_5 > p_4 = 43$, çelişki ($1807 = 13 \cdot 139$). O zaman $k \leq 4$.

n ni alabileceğ tüm değerler: 2, 6, 42, 1806.