Matematik Olimpiyatları

Geomania Deneme Sınavı 10

1. Gün

1. $a,b \leq 2014$ pozitif tam sayıları için A ve B kümeleri $A = \{x\colon x\in\mathbf{N}, 1 \leq x \leq a \leq 2014\}$ ve $B = \{x\colon x\in\mathbf{N}, 1 \leq b \leq x \leq 2014\}$ şeklinde tanımlanıyor. a ve b sayıları nasıl seçilirse seçilsin $s(A)\cdot s(B) \geq k\cdot s(A\cap B)$ eşitsizliği sağlanıyorsa k en çok kaç olabilir?

2. Bir ABC üçgeninde H diklik merkezi, M noktası da $[BC]$ nin orta noktası olsun. H noktasının MA doğrusuna izdüşümü P olmak üzere BC doğrusuna B noktasında teğet olan ve A noktasından geçen çemberin aynı zamanda P noktasından da geçtiğini gösteriniz.

3. a,b tamsayıları 1′den büyük sayılar olmak üzere a^b+b şeklinde yazılabilen sayılara *çılgın sayılar* diyelim. 2016 ardışık sayı içerisinde 2014 tane *çılgın sayı* bulunabilir mi?

Sınav süresi 4,5 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.

2. Gün

4. $p!+p$ tamkare olacak şekildeki tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

5. $n \geq 2$ olmak üzere $A=\{1,2,\ldots,n\}$ olsun. $S_1, S_2, \ldots, S_m$ kümeleri A kümesinin farklı öyle altkümeleridir ki $\forall\, 1 \leq i < j \leq m$ için $|S_i \cap S_j|=1$ şartını sağlar. Buna göre $m \leq n$ olduğunu gösteriniz.

6. ABC üçgeninde $|AB|=|AC|$ dir. BC doğrusu üzerinde bir P noktası alınıyor. AP üzerinde $|PC|=|PC_1|$ olacak şekilde bir C_1 noktası alınıyor. B den geçen ve AP ye C_1 noktasında teğet olan çember BC yi ikinci kez Q noktasında kesiyor. Q dan geçen ve AB ye paralel olan doğru AC yi R de kesiyor. BC nin AP ile PR doğrularının açıortayı olduğunu gösteriniz.

Sınav süresi 4,5 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.