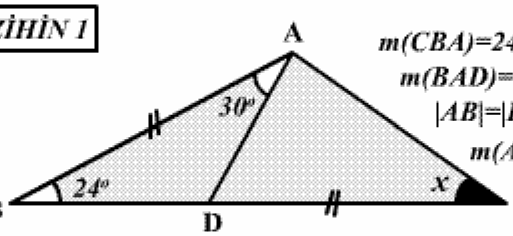
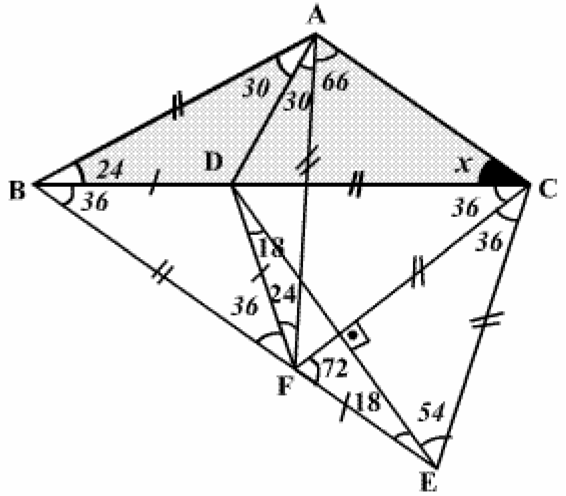
ZİHİN 1



m(CBA)=24°
m(BAD)=30°
|AB|=|DC| ise
m(ACB)=x=?

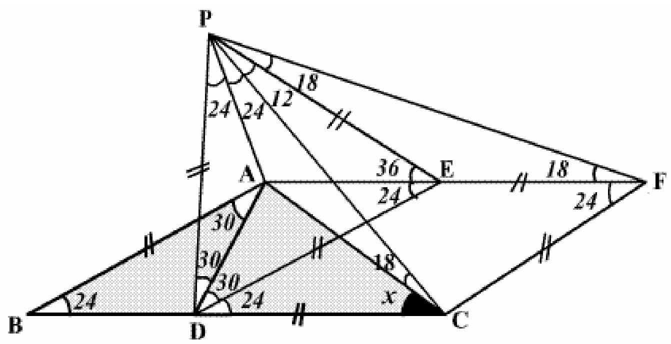
SentetikÇÖZÜM 1: ***EKY***

ABF eşkenar üçgeni oluşturulur.[BF] doğru parçası |BD| kadar uzatılıp BEC ikizkenarı oluşturulur. Buradan EFDC nin deltoid olduğu görülür. |CE|=|CF|=|CD|=|AF| olduğundan x=30° dir.



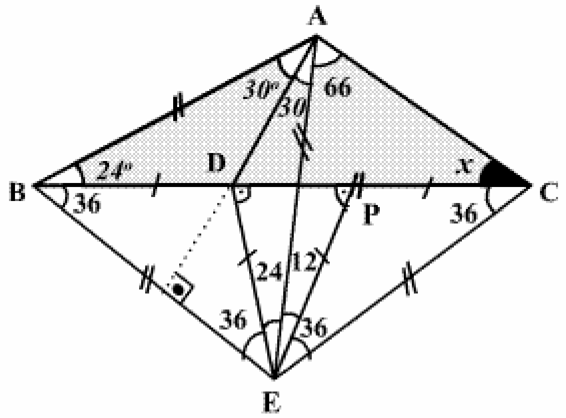
SentetikÇÖZÜM 2: Hasip YILMAZOĞLU

ABDE paralelkenarı ile EDCF eşkenar dörtgenini oluşturalım.Şimdi de PDE eşkenarını oluşturalım.PDC ve PEF ikizkenarları oluştu. m(AFC)=m(APC)=24 olduğundan APFC kirişler dörtgenidir.O halde x=m(DCP)-m(ACP)=48-18=30° dir.



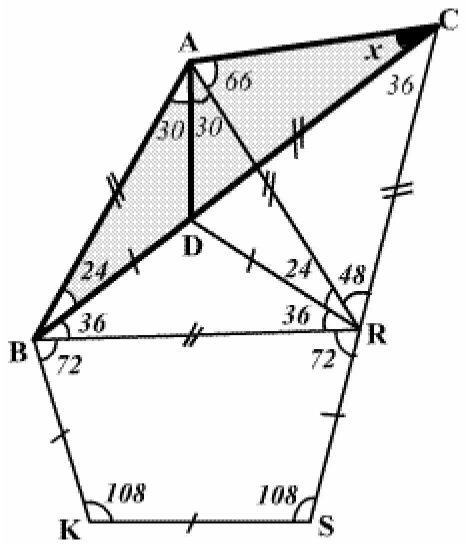
SentetikÇÖZÜM 3: Mustafa YAĞCI

*Önce BDE ikizkenarını sonra DEP ikizkenarın oluşturalım.BEP ikizkenarı ve de BDE ile EPC **eş** üçgenleri oluştu.ABE eşkenar üçgen olacağından |AE|=|EC| olur. O halde x=m(ACE)-m(BCE)=30° dir.*

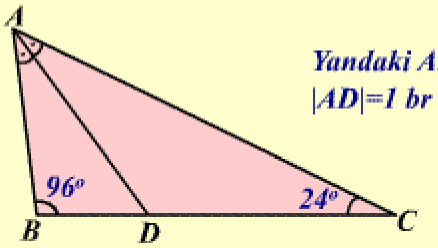


SentetikÇÖZÜM 4 : Mustafa YAĞCI

Düzgün bir KSRDB beşgenini çizelim.B ile R yi birleştirelim.[BD ışını ile [SR ışınının kesişim noktasına C diyelim.Tüm açı değerlerini şekle yazın.Şimdi bir kenarı [BR] olan şekildeki gibi ABR eşkenarını oluşturalım. [AD] eşkenarın açıortay doğrultusundadır.
İşte oluşan ABC üçgeni sorumuzun kendisidir.



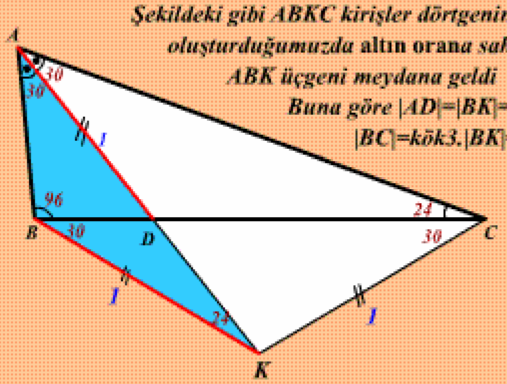
MY



Yandaki ABC üçgeninde
|AD|=1 br ise |BC|=?

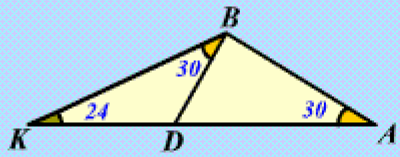
(ZİHİN 1 in farklı versiyonu)

Şekildeki gibi ABKC kirişler dörtgenini oluşturduğumuzda **altın orana** *sahip ABK üçgeni meydana geldi*
Buna göre |AD|=|BK|=1 olacağından
|BC|=kök3.|BK|=kök3 bulunur.

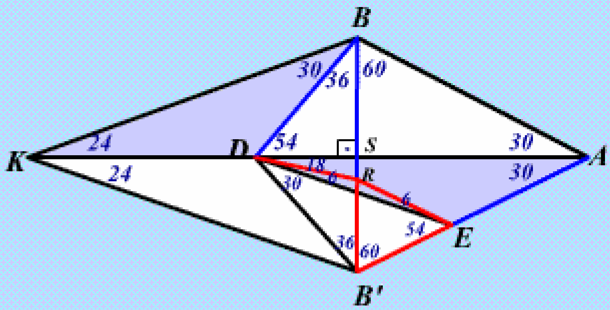


Bağımsız Çözüm:

SORU: *Şekilde verilenlere göre ve |BK|=1 br ise |AD|=?*



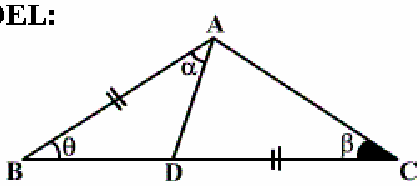
ÇÖZÜM : *ABK yı [AK] ekseninde katlayarak BDR ikizkenarını oluşturalım.Şimdi ise D ile E yi birleştirip DRE ikizkenarını* (tepe açısı m(DRB')+m(ERB')=168°) *oluşturalım.Yeni oluşan DEA ile KDB eş üçgenlerdir.*
(A.A.A. benzerliği ve 24° nin karşısındaki kenar eşliğinden)
O halde |BK|=|AD|=1 br dir.



(eşit uzunluklar aynı renkli)

hasipyilmazoglu

MODEL:



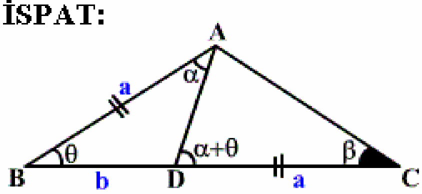
ABC üçgeninde $|AB|=|DC|$ dir...

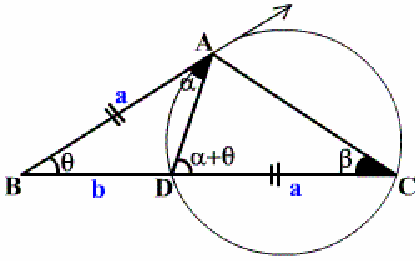
$m(BAD)=\alpha$, $m(ABC)=\theta$, $m(ACB)=\beta$ iken

$\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha}=\phi$ ise $\alpha=\beta$ dır... (ϕ : altın oran)

(Yağcı'2002)

İSPAT:





$|AB|=|DC|=a$ ve $|BD|=b$ olsun...

ABD üçgeninde sinüs teoremi gereğince $\dfrac{a}{\sin(\alpha+\theta)}=\dfrac{b}{\sin\alpha}$ dır...

Buradan da $\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{b}=\phi$ bulunur...

ϕ sayısı $x^2-x-1=0$ denkleminin bir kökü olduğundan $\dfrac{a}{b}=\phi$ ise $a^2-ab-b^2=0$ eşitliğinden bahsedilebilir...

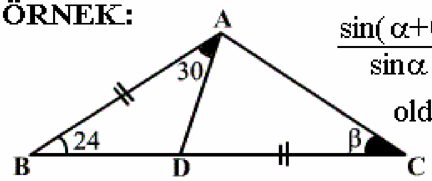
$a^2-ab-b^2=0 \Rightarrow a^2=ab+b^2 \Rightarrow a^2=b(a+b)$ bulunur...

$a^2=b(a+b)$ ifadesinden; kuvvet teoremi gereği, BA doğrusunun ADC üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu anlarız... O halde BAD açısı teğet kiriş açı olup, ACB açısına eşit olmak zorundadır...

$a^2=b(a+b) \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{(a+b)}{a}$ olduğundan K-A-K benzerliği gereği

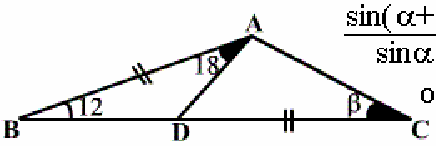
BAD ile BCA üçgenlerinin eşiliğinden de $\alpha=\beta$ eşitliği bulunabilir...

ÖRNEK:



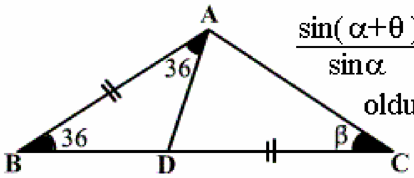
$\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin 54}{\sin 30}=\phi$

olduğundan $\beta=30$



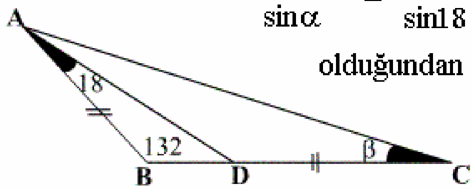
$\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin 30}{\sin 18}=\phi$

olduğundan $\beta=18$



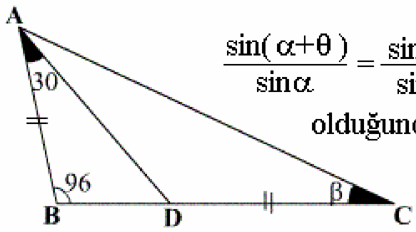
$\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin 72}{\sin 36}=\phi$

olduğundan $\beta=36$



$\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin 150}{\sin 18}=\phi$

olduğundan $\beta=18$

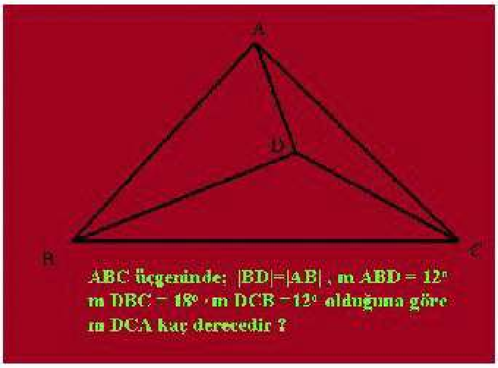


$\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin 126}{\sin 30}=\phi$

olduğundan $\beta=30$

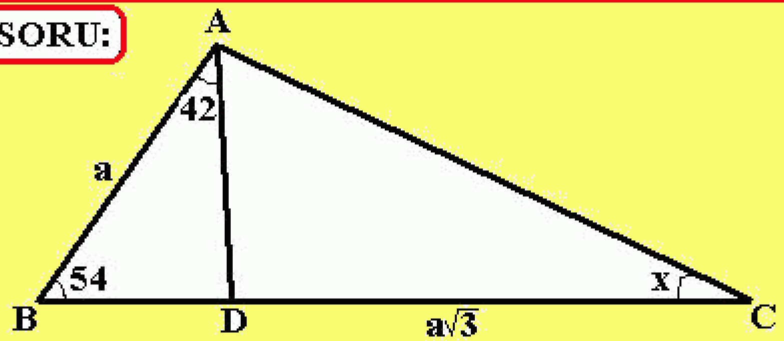
MUSTAFA YAĞCI ' 2002

ZİHİNLERİ BULANDIRAN 2.SORUNUN ÇÖZÜMÜ:



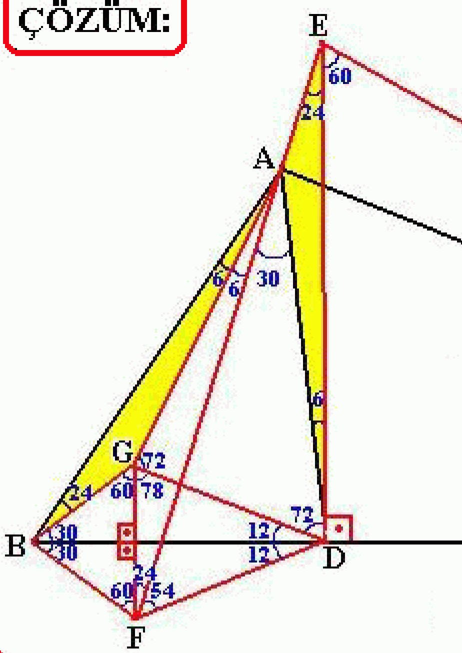
m(BAD)=m(BDA)=84 olur.m(DCA)=α olsun,m(DAC)=54-α olur.
ABC üçgeni için trigonometrik ceva teoremimi uygulayalım:
sin12.sin12.sin(54-α)=sinα.sin18.sin84 olur.Bu denklemi kullanarak
α açısını bulacağız.Ama önce bazı eşitliklerle uğraşalım:
cos18=sin72$\Rightarrow$2.sin36.cos36=cos18$\Rightarrow$4.sin18.cos18.cos36=cos18
$\Rightarrow$4.sin18.cos36=1 olur.$\Rightarrow$2.sin18.cos36=sin30$\Rightarrow$sin54-sin18=sin30
$\Rightarrow$sin18=sin54-sin30$\Rightarrow$sin18=2.sin12.cos42$\Rightarrow$sin18=2.sin12.sin48 olur.
$\Rightarrow$sin12/sin18=1/2.sin48 olur.
(sin12.sin12)/(sin18.sin84)=(sin12/sin18).(sin12/sin84) olur.(1)
Sin84=cos6 $\Rightarrow$ (sin12/sin84)=(sin12/cos6)=2.sin6 olur.
(1) eşitliğinde (sin12/sin18) ve (sin12/sin84) değerlerinin yerine bulduğumuz ifadeleri yazalım.
$\Rightarrow$ (sin12.sin12)/(sin18.sin84)=sin6/sin48 olur.
ABC üçgeninde trigonometrik ceva teoremini uygulamıştık.Şu sonuç çıkmıştı:
sin12.sin12.sin(54-α)=sinα.sin18.sin84 demiştik.
$\Rightarrow$ (sin12.sin12)/(sin18.sin84)=sinα/sin54-α olur.
Aynı zamanda biz (sin12.sin12)/(sin18.sin84) ifadesinin sin6/sin48 ifadesine
Eşit olduğunu biliyoruz.Dolayısıyla (sinα/sin54-α)= (sin6/sin48) olur.
$\Rightarrow$sinα.sin48=sin(54-α).sin6 $\Rightarrow$2.sinα.cos42=2.sin(54-α).cos84 olur.
$\Rightarrow$sin(α+42)+sin(α-42)=sin(138-α)+sin(-30-α) olur.
Sin(α+42)=sin(138-α) dır.Çünkü (α+42)+(138-α)=180 dir.
$\Rightarrow$sin(α-42)=sin(-30-α) $\Rightarrow$sin(42-α)=sin(α+30) olur.
$\Rightarrow$42-α=30+$\alpha$$\Rightarrow$12=2.$\alpha$$\Rightarrow$<u>$\alpha$=6</u> derece olarak bulunur.

SORU:

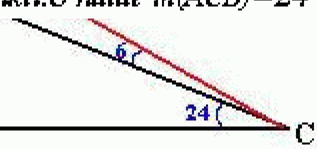


m(DAB)=42
m(ABC)=54
|DC|=√3.|AD|
olduğuna göre;
m(ACB)=x=?

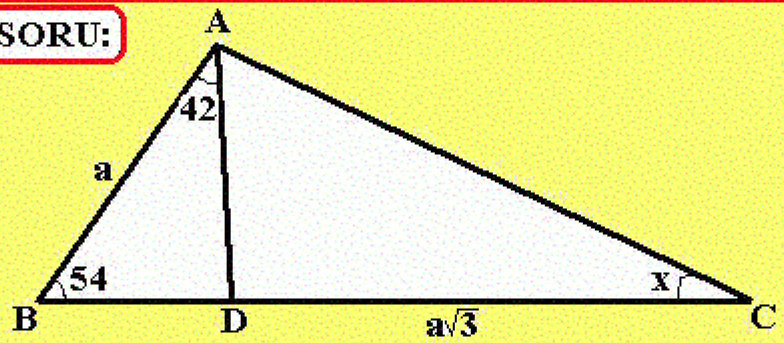
ÇÖZÜM:



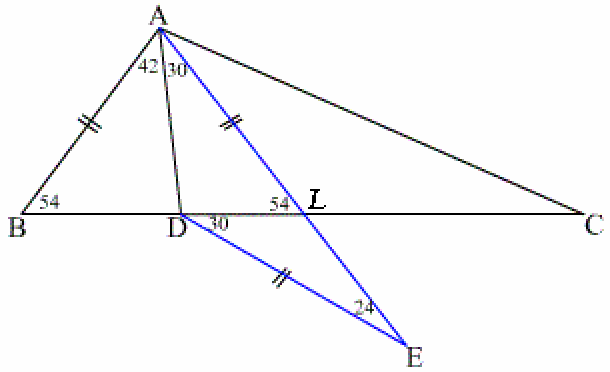
ABD üçgeni içinde bir G noktası için GAD ikizkenar üçgenini oluşturalım (36-72-72)...Daha sonra BAF ikizkenar üçgenini oluşturalım...m(FBD)=m(FAD)=30 olduğundan FBAD kirişler dörtgenidir...O halde m(BDF)=12, bu da bize BGDF nin deltoit, BGF nin eşkenar üçgen olduğunu söyler... m(ADE)=6 ve |DE| =1 olacak şekilde bir [DE] çizersek; EAD ile BGA üçgenlerinin eş olduğunu görürüz...Ayrıca F,A,E noktalarının da doğrusal olduğunu... Bu arada EDC üçgeni de 30-60-90 üçgeni oldu... Sonuçta m(DAE)+m(ECD)=180 olduğundan EADC kirişler dörtgeni çıktı.O halde m(ACB)=24



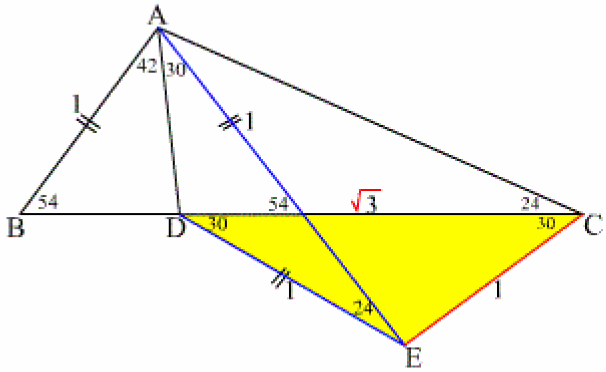
SORU:



m(DAB)=42
m(ABC)=54
|DC|=√3.|AD|
olduğuna göre;
m(ACB)=x=?



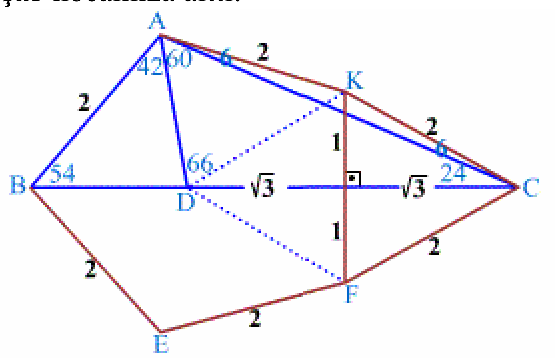
Önce BAL ikizkenar üçgenini oluşturduk...
Daha sonra [AL]'yi L yönünde uzatarak zihin-1 sorusu olan ADE üçgenini oluşturduk...



DEC üçgeni 30-30-120 ikizkenar üçgeni oldu...
m(DAE)=m(DCE)=30 olduğundan DACE dörtgeninin kirişler dörtgeni olduğunu gördük...
m(ACB)=24

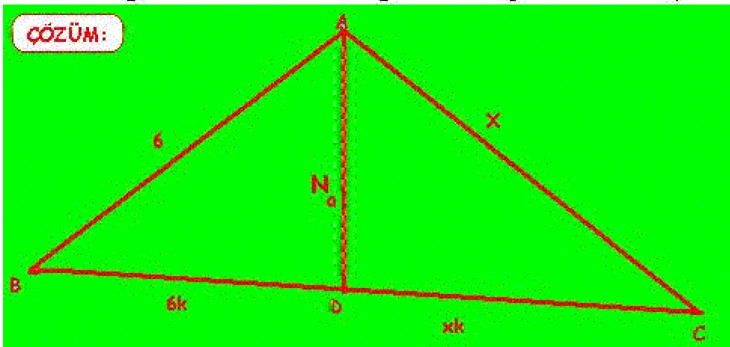
MUSTAFA YAĞCI

Bu çözüm sanırım **Mehmet Yaşar** hocamıza aitti:



Zihinleri Bulandıran 4. soru: (Eyüp Kamil Yeşilyurt-Şubat 2001)
c=6 cm olan bir ABC üçgeninde n_A açıortay uzunluğunun alabileceği en büyük tamsayı değeri için b kenar uzunluğunun alabileceği en küçük tamsayı değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:



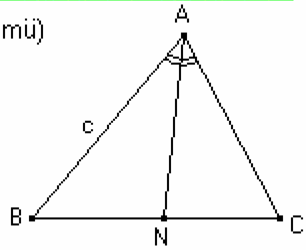
ABC üçgeninde dikkat edilirse 6+x > 6k+xk olup buradan k< 1 bulunur.
k zaten pozitif bir sayı olarak aldığımızdan 0<k<1 yazılabilir.
ABD üçgeninden bakacak olursak Na<6+6k olup ve k<1 olduğundan bu iki bilgiden Na en fazla tamsayı değeri olarak 11 olabilir. buna göre Na=11<6+6k dan da k>5/6 bulunur.
dikkat edilirse açıortay teoremi yazılır sa

$N_a^2 = 6x - 6xk^2 \Rightarrow 11^2 = 6x(1-k^2)$ ve $k > 5/6$ birlikte düşünülürse

$121 < 6x(1-\left(\frac{5}{6}\right)^2) \Rightarrow x > 66$ buradan x in en küçük tamsayı değeri 67 bulunur.

Soru: (Zihinleri Bulandıran 4. soru modeli ve çözümü)
(eky-2001)

IABI=c br olan ABC üçgeninde, nA açıortay uzunluğunun en büyük tamsayı değeri için IACI uzunluğunun en küçük tamsayı değeri kaç br dir?



Çözüm: eky-2005
[AN] açıortay olduğunda daima INBI<IABI ile
ABN üçgeninde üçgen eşitsizliği birlikte düşünülürse
n<IBNI+c<2c elde edilir. Buradan IANI en çok 2c-1 olabilir.
Şimdi sorunun ikinci aşaması; (eky-2001)
max(n)=2c-1 olduğunda IACI=x in en küçük değerine bakalım,
Açıortay uzunluğunu üçgenin yan kenarları cinsinden veren formülü kullanalım.

$$n_A = 2.\frac{|AB|.|AC|}{|AB|+|AC|}.\cos(A/2)$$

Elde ettiğimiz yukarıdaki değerleri bu denklemde yerine yazalım.

$2c - 1 = 2.\frac{c.x}{c+x}.\cos(A/2)$, $0<\cos(A/2)<1$

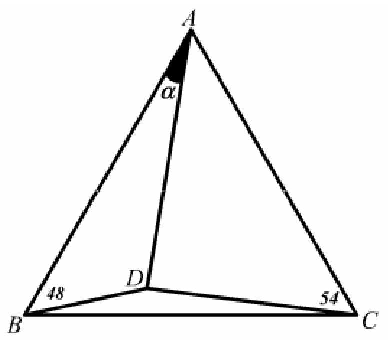
$2c - 1 < 2.\frac{c.x}{c+x}$

$x > 2c^2 - c$

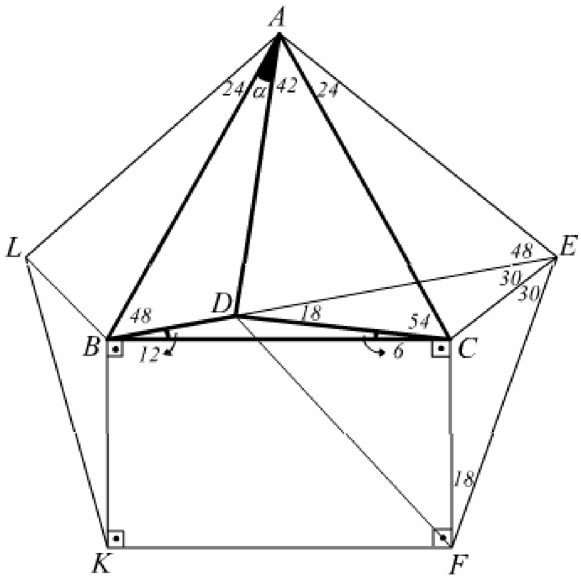
$x > c(2c-1)$

min (x)= c.(2c-1) -1

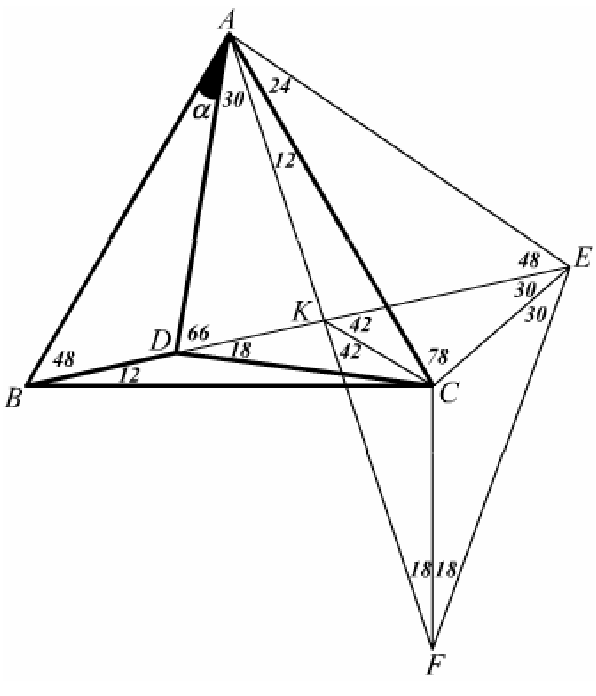
ZİHİNLERİ BULANDIRAN 5.SORU



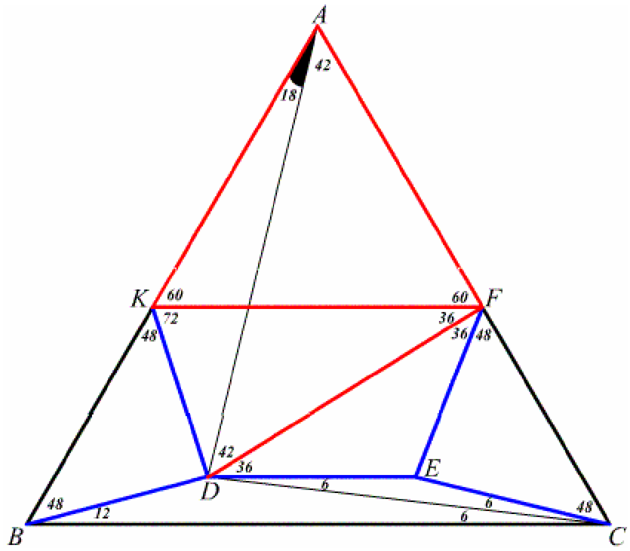
Soru (Mustafa Yağcı). *D noktası, ABC bir eşkenar üçgeninin iç bölgesindedir.* $m(ABD) = 48^o$ *ve* $m(ACD) = 54^o$ *olduğuna göre*; *BAD açısının ölçüsü kaç derecedir*?



Çözüm-1 (Mustafa Yağcı): *BD* doğrusu üzerindeki bir *E* noktası için *BAE* ikizkenar üçgenini oluşturalım. *AC* = *AB* = *AE* olduğundan *CAE* üçgeni de ikizkenar olur. Şimdi *CAE* üç-geninin aynısını *ABC* eşkenar üçgeninin soluna yapıştıralım. Daha sonra $m(LAE) = 108^o$ ve *LA* = *AE* olduğundan *L, A, E* noktaları bir düzgün beşgenin üç ardışık köşesidir. *AEFKL* düzgün beşgeni oluşturulursa *BCFK* bir dikdörtgen olur. Buradan *DEC* ile *FEC* üçgenlerinin eşliği görülür. Sonuçta *EF* = *ED* çıkar ki aynı zamanda *EF* = *EA* olduğundan *EA* = *ED* olur. O halde $m(ADE) = 66^o$ olduğundan $m(BAD) = \alpha = 18^o$.

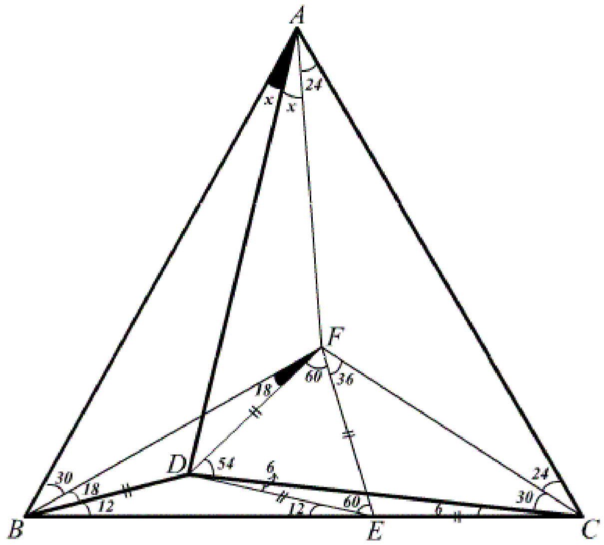


Çözüm-2 (Mustafa Yağcı-Cem Yıldırım): *BD* doğrusu üzerindeki bir *E* noktası için *BAE* ikizkenar üçgenini oluşturalım. *AC* = *AB* = *AE* olduğundan *CAE* üçgeni de ikizkenar olur. Şimdi de $m(CEF) = 30^o$ olacak şekilde bir *F* noktası ile *AEF* ikizkenar üçgenini oluşturalım. $m(CAF) = 12^o$ olur. $m(KBA) = m(KAB) = 48^o$ olduğundan *AK* = *KB* dolayısıyla *AKC* ile *BKC* üçgenleri eştir. $m(EKC) = m(FKC) = 42^o$ olur. *EFK* üçgeninde *EC* ve *KC* birer içaçıortay olduğundan *CF* de iç açıortay olmak zorundadır. $m(EFC) = m(KFC) = 18^o$ dir. Sonuçta *DEC* ile *FEC* üçgenleri eş çıktığından *EF* = *ED* dir aynı zamanda *EF* = *EA* olduğundan *EA* = *ED* olur ki $m(ADE) = 66^o$ olduğundan $m(BAD) = \alpha = 18^o$.

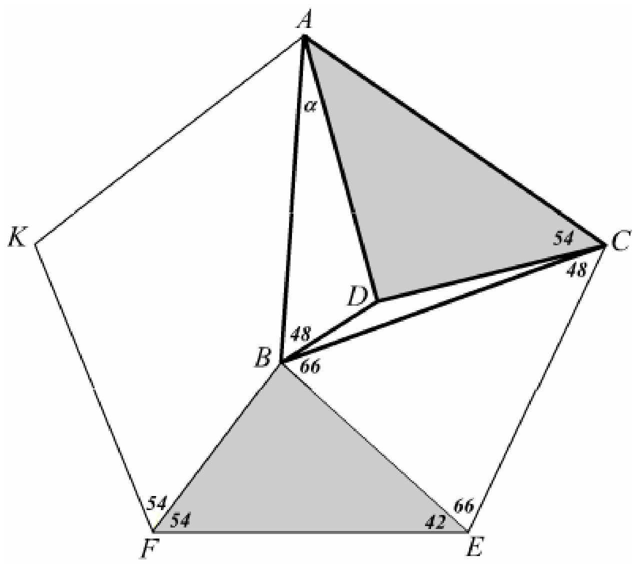


Çözüm-3 (Mustafa Yağcı): *BDEC* ikizkenar yamuğunu oluşturalım. $m(BCD) = m(CDE) = m(ECD) = 6^o$ olduğundan $BD = DE = EC$ dir. *AB* ve *AC* kenarları üzerindeki sırasıyla *K* ve *F* noktaları için *BDK* ve *CEF* ikizkenar üçgenlerini oluşturalım. *DEF* üçgeni de ikizkenar olur. Gerekli açı ölçüleri yerlerine yazılırsa *DFK* üçgeninin de ikizkenar olduğu görülür ki bu da *AKF* eşkenar üçgen olmasından dolayı *DFA* üç-geninin ikizkenar olmasını anlatır.

$m(FAD) = 42^o$ diye $m(DAK) = m(DAB) = 18^o$ olmalıdır.

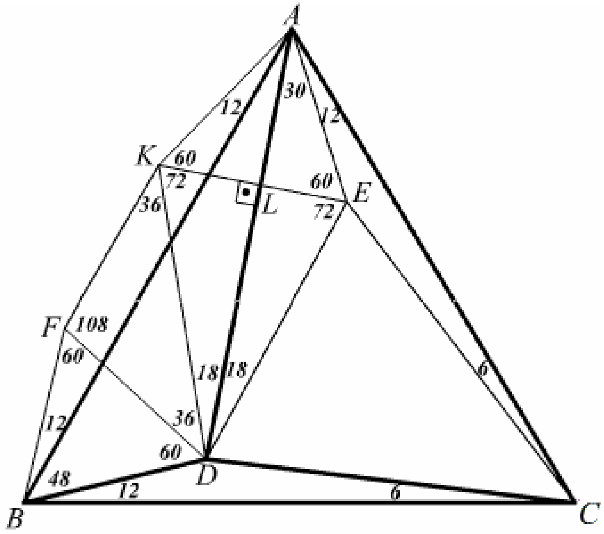


Çözüm-4 (Mustafa Yağcı): *BC* üzerindeki bir *E* noktası için *BDE* ikizkenar üçgenini oluşturalım. *CED* üçgeni de ikizkenar olur. Şimdi *DE* üzerine üçgenin içine doğru bir *DEF* eşkenar üçgeni inşa edelim. *BDF* ve *FEC* üçgenlerinin de birer ikizkenar olacaklarına dikkat edelim. *ABC* üçgeninde *BF* iç açıortay doğrusu çıktığından *ABF* ile *CBF* eştir. Bunun sonucu olarak *CFA* üçgeni de ikizkenar olur. Şimdi $m(FAC) = 24^o$ olduğundan $m(BAF) = 36^o$ dir. Aynı zamanda $m(BDF) = 144^o$ olduğundan *ABDF* bir kiriş dörtgenidir, o halde $m(BAD) = m(BFD) = 18^o$ dir.

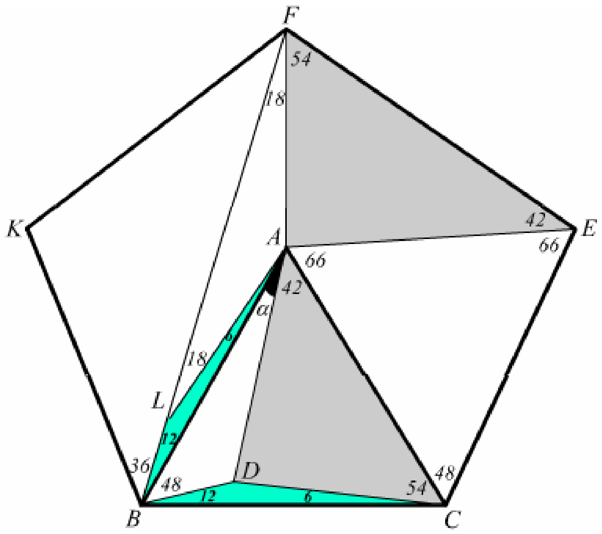


Çözüm-5 (Mustafa Yurtseven): *ABC* üçgenini içinde bırakan ve *AC*'yi kenar kabul eden *ACEFK* düzgün beşgenini inşa edelim. *AFC* ikizkenar üçgeninde *FB* yük-seklik olduğundan $m(KFB) = m(EFB) = 54^o$. Diğer yandan $CB = CE$ olduğundan $m(CBE) = m(CEB) = 66^o$. *FC* köşegeni çizilirse $m(BFC) = m(DCF)$ ve $BD \parallel FC$ olacağından *FBDC* bir ikizkenar yamuktur. O halde $FB = DC$. Aynı zamanda $FE = AC$ ve $m(EFB) = m(ACD) = 54^o$ olduğundan *EFB* ile *ACD* üçgenleri eştir.

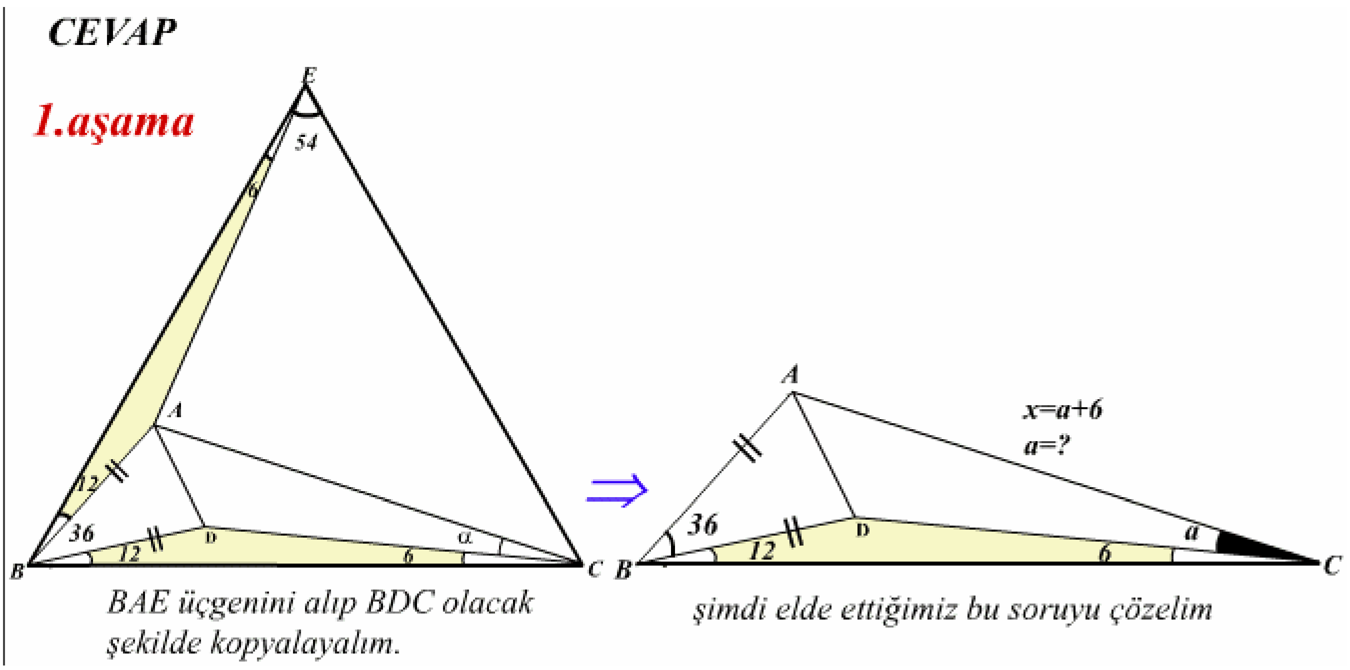
$m(CAD) = m(FEB) = 42^o$ olduğundan $m(BAD) = 60^o - m(CAD) = 60^o - 42^o = 18^o$.

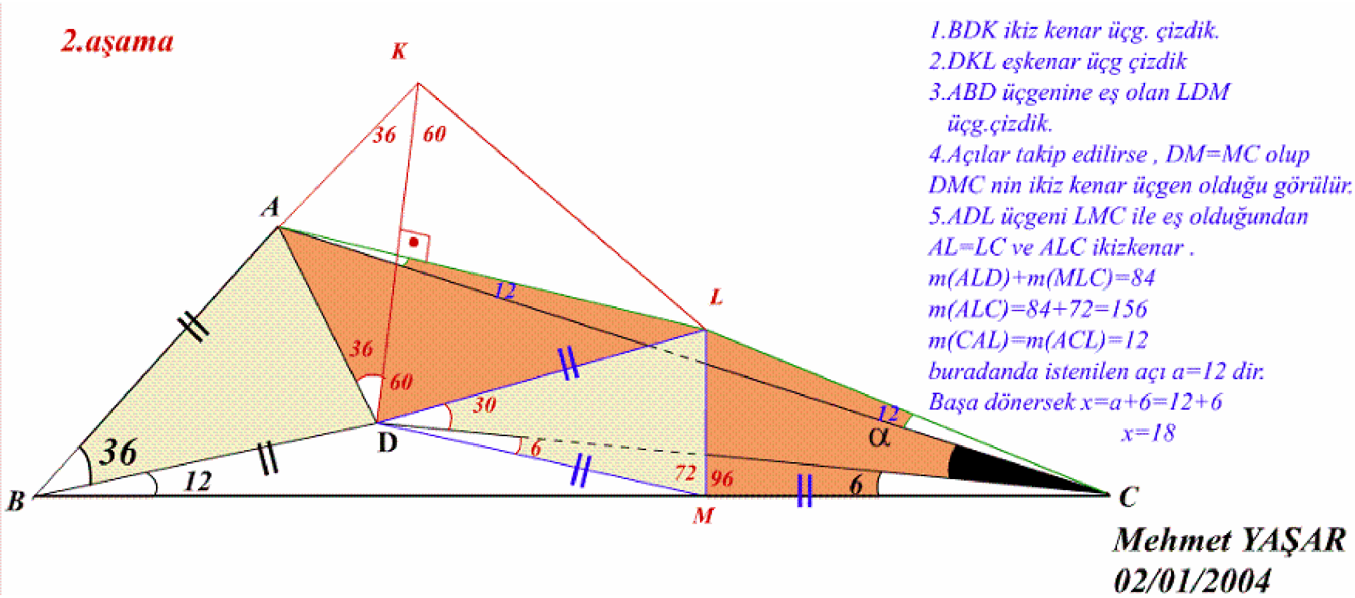


Çözüm- 6 (Yunus Temelli): [BD] kenarı üzerine üçgenin dışına doğru şekildeki gibi BFD eşkenar üçgenini çizelim. BDC ile BFA üçgenlerinin eşliğini görerek $BFKA$ ikizkenar yamuğunu çizelim. $BD = BF = DF = FK = KA$ olduğundan DFK üçgeni ikizkenardır. BDC üçgeni [AC] üzerine AEC olarak kopyalanırsa KAE üçgeni de eşkenar olur. Buradan $DKAE$ dörtgeninin bir deltoit olduğu görülür. O halde $m(KAD) = 30^o$ olmalı, dolayısıyla $m(BAD) = 30^o - 12^o = 18^o$ olarak bulunur.

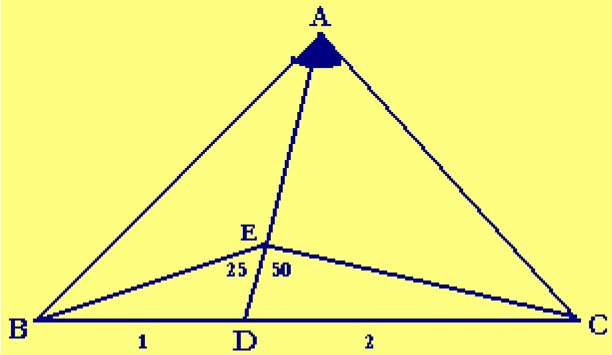


Çözüm (Nail Karagöz): BC kenarı üzerine şekildeki gibi $BCEFK$ düzgün beşgenini inşa edelim. Düzgün beşgenin köşelerinin açıları 108^o'dir. Düzgün beşgenle ilgili diğer bilgileri bildiğimizi varsayıyoruz. Bu arada, A noktasının düzgün beşgenin merkezi olmadığını belirtelim, şekil aldatabilir. Şimdi BDC üçgenini BLA olarak ABC üçgeninin dışına kopyalayalım. $m(KBL) = 36^o$ olduğundan (kanıtı kolay!), $L \in BF$. Öte yandan BFC ikizkenar üçgeninde FA yüksekliğin bir parçası olduğundan, $m(BFA) = 18^o$. Ayrıca $m(FLA) = 180^o - m(BDA) = m(DBA) + m(BCD) = 12^o + 6^o = 18^o$. O halde AFL üçgeni de ikizkenardır ve $FA = AL = DC$. Aynı zamanda $FE = BC = AC$ ve $m(AFE) = 108 - m(BFK) - m(BFA) = 108^o - 36^o - 18^o = 54^o = m(DCA)$ olduğundan AFE ile DCA üçgenleri eştir. Dolayısıyla $m(CAD) = m(FEA) = 108^o - m(AEC) = 108^o - (180^o - 48^o)/2 = 108^o - 66^o = 42^o$ ve sonuçta $m(BAD) = 60^o - m(CAD) = 60^o - 42^o = 18^o$ olarak bulunur.




2.aşama
K
36
60
A
L
12
36
60
30
6
72
96
6
α
12
B
D
M
C
1.BDK ikiz kenar üçg. çizdik.
2.DKL eşkenar üçg çizdik
3.ABD üçgenine eş olan LDM
üçg.çizdik.
4.Açılar takip edilirse , DM=MC olup
DMC nin ikiz kenar üçgen olduğu görülür.
5.ADL üçgeni LMC ile eş olduğundan
AL=LC ve ALC ikizkenar .
m(ALD)+m(MLC)=84
m(ALC)=84+72=156
m(CAL)=m(ACL)=12
buradanda istenilen açı a=12 dir.
Başa dönersek x=a+6=12+6
x=18
Mehmet YAŞAR
02/01/2004

ZİHİNLERİ BULANDIRAN 7.SORU

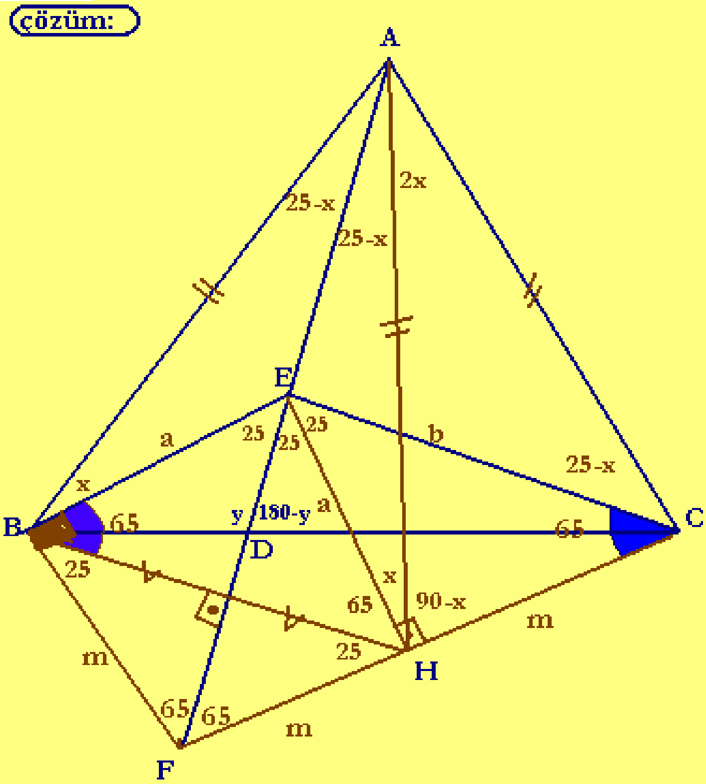


SORU:

Şekilde AB=AC dir.

m(BED)=25 , m(DEC)=50
BD=1 ve DC=2 olduğuna göre
m(BAC)=?

çözüm:



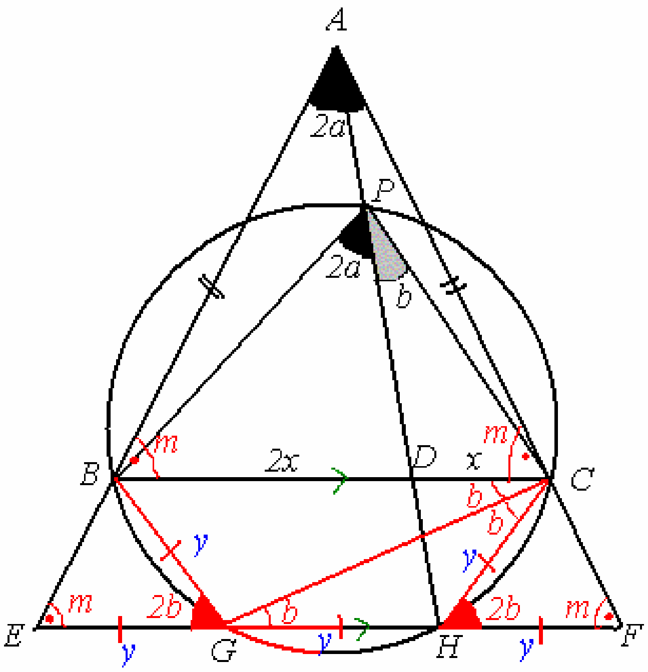
siny=sin(180-y)

BED üçgeninde sinüs teoremi $\frac{a}{\sin y} = \frac{1}{\sin 25}$

DEC üçgeninde sinüs teoremi $\frac{b}{\sin(180-y)} = \frac{2}{\sin 50}$

bu denklemler den ; $\frac{a}{b} = \cos 25 = \sin 65$

buna göre AE yi doğrusal olarak uzatırsak ve AF elde edersek bu trigonometrik bağıntılara bağlı olarak EBF dik üçgenini çizebiliriz. o halde EF=b olur ki buda FC birleştirdiğimiz zaman oluşan FEC üçgeninin ikizkenar olmasıdır. buna göre açıları yazarsak doğrusal FE dogrusu açıortay olup BD=1 ve DC=2 olduğundan BFC açıortay teoremi gereğince BF=m dersek FC=2m olur. FEC ikizkenar olduğundan EH yüksekliğini indirirsek FH=HC =m olarak ikiye böler ki oluşan EBFH dörtgeni deltoid olur buna göre AH birleştirirsek ABH üçgeni ikizkenar olacaktır veAB=AH=AC olurki bu noktadan sonra açılar yazılırsa m(A)=25-x+25-x+2x=50 olur



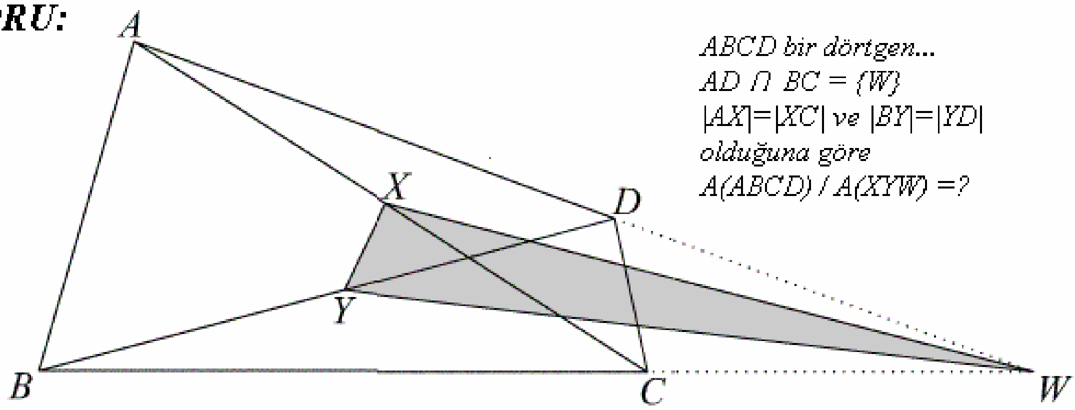
Tübitak(2002):|AB|=|AC|,|BD|=2|DC|, m(BAC)=m(BPD) ise b=a olduğunu gösteriniz.
Çözüm: *PBC üçgeninin çevrel çemberini çizelim.[AD ışını ile çevrel çemberin kesim noktalarına H diyelim.H noktasından BC kenarına çizilen paralel doğru ile çemberin diğer kesim noktası G olsun.Gerekli isimlendirmeler yapılırsa şekilden AEF üçgeninin ikizkenar ve BCHG dörtgeninin ikizkenar yamuk olduğu görülür.Bu dörtgen aynı zamanda kiriş dörtgeni olduğundan m(BCH)=m(BPH) olacağından*

2a=2b => a=b elde edilir.

A.Ç.

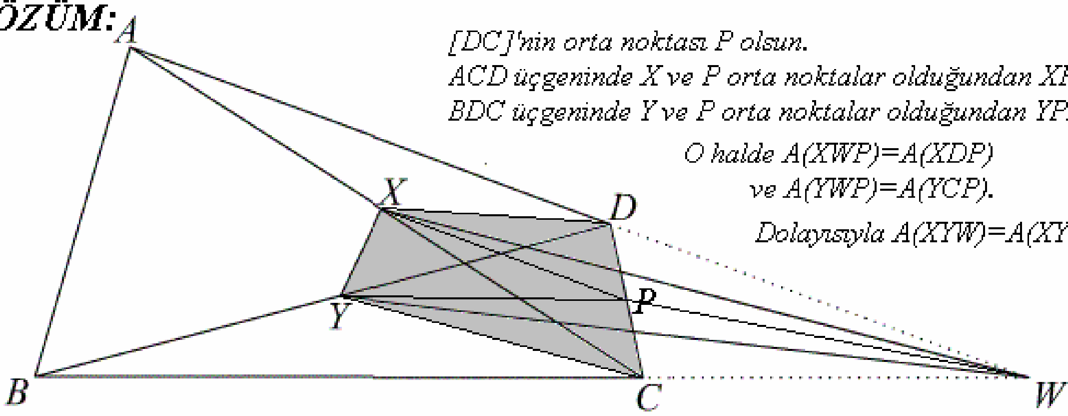
ZİHİNLERİ BULANDIRAN 8.SORU

SORU:



ABCD bir dörtgen...
AD ∩ BC = {W}
|AX|=|XC| ve |BY|=|YD|
olduğuna göre
A(ABCD) / A(XYW) =?

ÇÖZÜM:

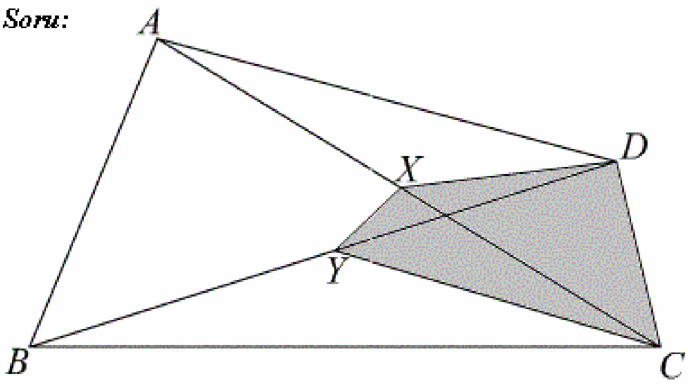


[DC]'nin orta noktası P olsun.
ACD üçgeninde X ve P orta noktalar olduğundan XP//AW.
BDC üçgeninde Y ve P orta noktalar olduğundan YP//BW.

O halde A(XWP)=A(XDP)
ve A(YWP)=A(YCP).
Dolayısıyla A(XYW)=A(XYCD).

XYCD dörtgeninin alanının ABCD dörtgeninin alanının 1/4'ü olduğunu ispatlarsak soru çözülmüş olur.
Kalan kısım ÖSS tarzı hoş bir soru oldu.Ben yine de çözümü bir sonraki mailde göndereyim... ***MY***

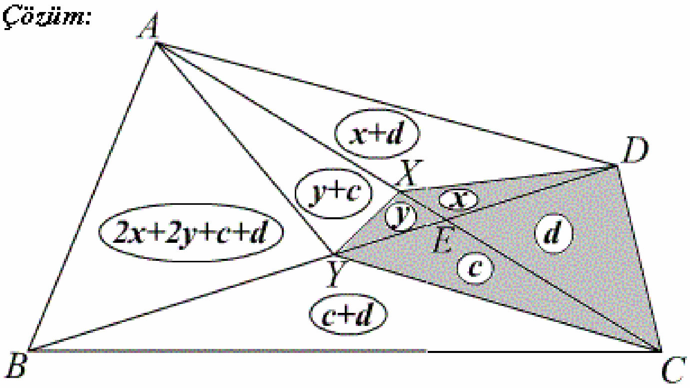
Soru:



ABCD herhangi bir dörtgen,
X ve Y köşegenlerin orta
noktaları olduğuna göre
A(ABCD)=4.A(XYCD) olduğunu
ispatlayınız...

Mustafa Yağcı

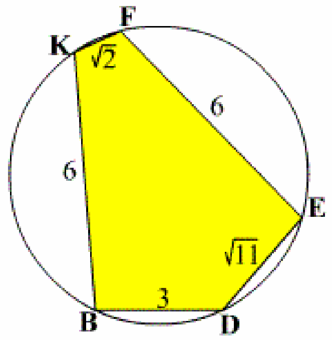
Çözüm:



A(XED)=x
A(XEY)=y
A(TEC)=c
A(CED)=d olsun..
|AX|=|XC| olduğundan A(AXD)=x+d
|AX|=|XC| olduğundan A(AXY)=y+c
|BY|=|YD| old. A(ABY)=2x+2y+c+d
|BY|=|YD| old. A(BYC)=c+d
Taralı alan x+y+c+d ve toplam alan
4x+4y+4c+4d olduğundan ispat
tamamlanmış olur...

Mustafa Yağcı

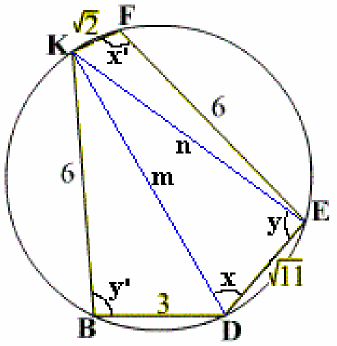
ZİHİNLERİ BULANDIRAN 9.SORU



$|KF|=\sqrt{2}$
$|FE|=6$
$|ED|=\sqrt{11}$
$|DB|=3$
$|BK|=6$
olduğuna göre;
KFEDB kirişler beşgeninin alanını bulunuz...

A) $6\sqrt{7}$ B) $7\sqrt{7}$ C) $8\sqrt{7}$ D) $9\sqrt{7}$ E) $10\sqrt{7}$

MY



KDE'de cos teoremi: $\cos x=\dfrac{m^2+11-n^2}{2.m.\sqrt{11}}$

KFE'de cos teoremi: $\cos x'=\dfrac{2+6^2-n^2}{2.\sqrt{2}.6}$

KED'de cos teoremi: $\cos y=\dfrac{n^2+11-m^2}{2.n.\sqrt{11}}$

KBD'de cos teoremi: $\cos y'=\dfrac{3^2+6^2-m^2}{2.3.6}$

x+x'=180 olduğundan cosx=-cosx' $\quad\dfrac{m^2+11-n^2}{2.m.\sqrt{11}}=-\dfrac{2+6^2-n^2}{2.\sqrt{2}.6}$

ve

y+y'=180 olduğundan cosy=-cosy' $\quad\dfrac{n^2+11-m^2}{2.n.\sqrt{11}}=-\dfrac{3^2+6^2-m^2}{2.3.6}$

Bu iki denklemden de m^2-n^2 ifadelerini çekip eşitleyelim....

$\boxed{n=\dfrac{3\sqrt{2}m+18\sqrt{11}}{m^2-36}}$ eşitliği elde edilir....

KBDE dörtgeninde batlamyus teoremi: $6\sqrt{11}+3n=m.|BE|$
KBEF dörtgeninde batlamyus teoremi: $36+\sqrt{2}.|BE|=n^2$

Bu iki denklemden de |BE|'leri çekersek; $m=\dfrac{6\sqrt{22}+3\sqrt{2}n}{n^2-36}$ elde edilir...

Bulduğumuz bu m değerini dikdörtgen içine alınmış denklemde yerine yazarsak;

$2n^5+\sqrt{11}n^4-144n^3-74\sqrt{11}n^2+2512n+1224\sqrt{11}=0$ denklemini elde ederiz....

Katsayıları tamsayı yapmak için $n=a\sqrt{11}$ değiştirmesini yapalım...

$242\sqrt{11}a^5+121\sqrt{11}a^4-1584\sqrt{11}a^3-814\sqrt{11}a^2+2512\sqrt{11}a+1224\sqrt{11}=0$

$242a^5+121a^4-1584a^3-814a^2+2512a+1224=0$

$242a^5 \quad +121a^4 \quad -1584a^3 \quad -814a^2 \quad +2512a \quad +1224=0$

$\underbrace{242a^5-484a^4}\underbrace{+605a^4-1210a^3}\underbrace{-374a^3+748a^2}\underbrace{-1562a^2+3124a}\underbrace{-612a+1224}=0$

$242a^4(a-2)+605a^3(a-2)-374a^2(a-2)-1562a(a-2)-612(a-2)=0$

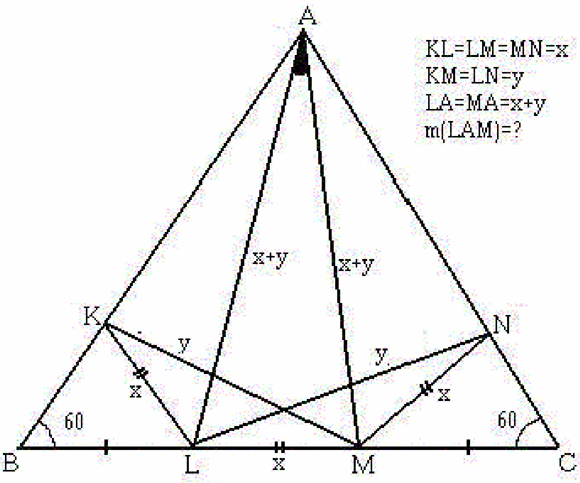
$(a-2).(242a^4+605a^3-374a^2-1562a-612)=0$ çıkar ki a=2 dir...

$n=a\sqrt{11}$ olduğundan $n=2\sqrt{11}$ olarak bulunur...

Buradan $m=(3\sqrt{22})/2$ çıkar, sonuçta da alan $9\sqrt{7}$ olarak bulunur....

MY

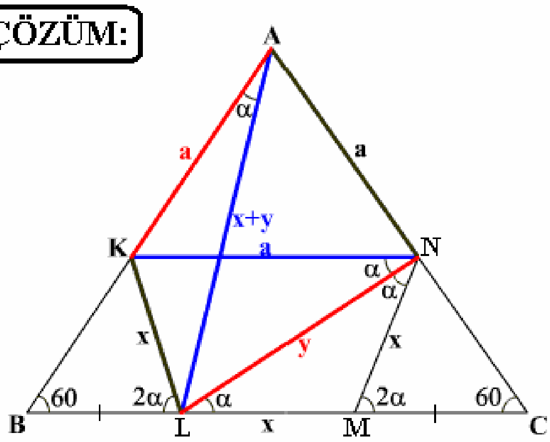
SORU:



Korkunç bir soru gerçekten uğraş istiyor bu sefer harika oldu
Başarılar dilerim hocam

MUSTAFA KARABIYIK

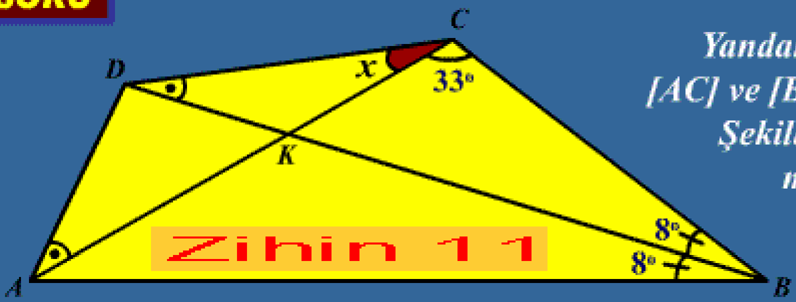
ÇÖZÜM:



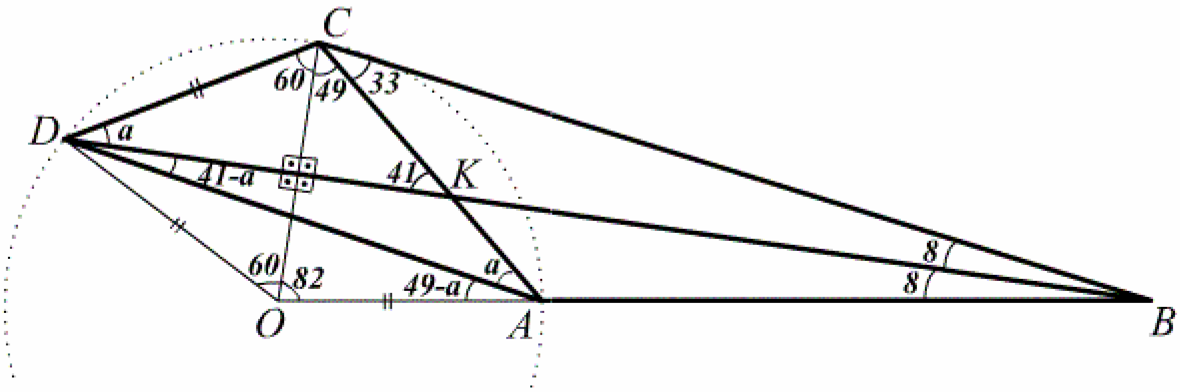
KBL ile NCM eş olduklarından |KB|=|NC|,dolayısıyla |AK|=|AN| olduğundan KAN eşkenar üçgendir...
AKLN dörtgeni batlamyus teoremini sağladığı için; (a.x+a.y=a.(x+y)) AKLN kirişler dörtgenidir...
m(KAN)=60 olduğundan m(KLN)=120 dir...
Buradan 3α=60 ve α=20 bulunur...
m(BAL)=m(LAM)=m(MAC)=20 olduğu görülür...

MY

SORU



Yandaki ABCD dörtgeninde
[AC] ve [BD] köşegen olmak üzere,
Şekilde verilenlere göre
m(KCD)=x=?



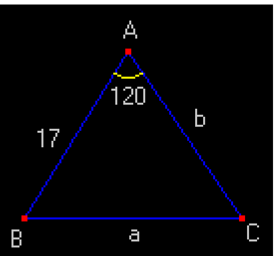
[BA] yı A yönünde uzatıp CBO ikizkenar üçgenini oluşturalım. BD açıortay olduğundan O ile D noktaları birleştirilirse; CBOD bir deltoit olur. m(COB)=82 ve m(OCA)=49 bulunur. Bu da COA üçgeninin ikizkenar olduğunu anlatır. m(CAO)=49 olur ki m(DAO)=49-a dır. O halde m(ADB)=41-a dır. O halde m(CDA)=41 olur. m(COA)=2.m(CDA) ve |OC|=|OA| olduğundan A,C,D noktalarından geçen çember O merkezlidir.O halde [OD] de yarıçaptır. |OC|=|OD|=|DC| eşitliğinden COD üçgeninin eşkenar üçgen olduğu anlaşılır ki m(DCO)=60 olduğundan m(DCA)=60+49=109 bulunur...

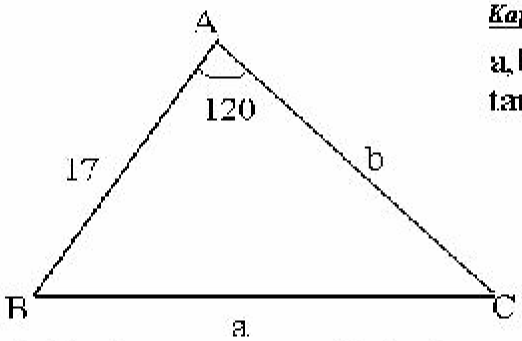
MY

Zihinleri Bulandıran 13. Soru - eky
Yayınlanma T. : 13 Kasım 2004

ABC üçgeninde, c=17 br. mBAC=120 derece, a ve b tamsayı olduğuna göre a nın alabileceği değerler toplamı kaç br dir?

Not: Zihin soruları öss seviyesinin üstündedir. Olimpiyat için kullanılabilir.





Kapak Sorusu:(Zihin 13)

a,b tamsayı ise a hangi tamsayı değerlerini alabilir?

EKY

$a^2=b^2+10^2-2b.17\cos 120$ => $a^2=b^2+17^2+17.b$ elde edilir. Bu denklem $(2a-2b-17).(2a+2b+17)=3.17^2$ şeklinde yazılabilir. Burada üç durum söz konusudur:

1) $2a+2b+17=3.17^2$
$2a-2b-17=1$
$a=217, b=208$

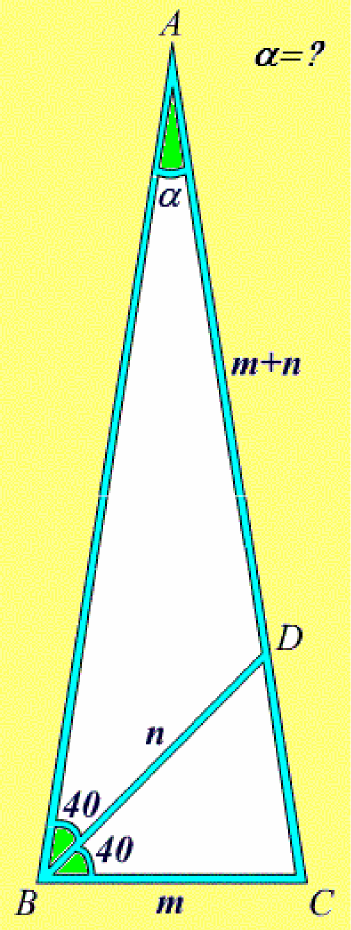
2) $2a+2b+17=17^2$
$2a-2b-17=3$
$a=73, b=63$

3) $2a+2b+17=3.17$
$2a-2b-17=17$
$a=17, b=0$

Buna göre $a=73$ ve $a=217$ olmalıdır.

Alper Çay

ZİHİNLERİ BULANDIRAN 14.SORU



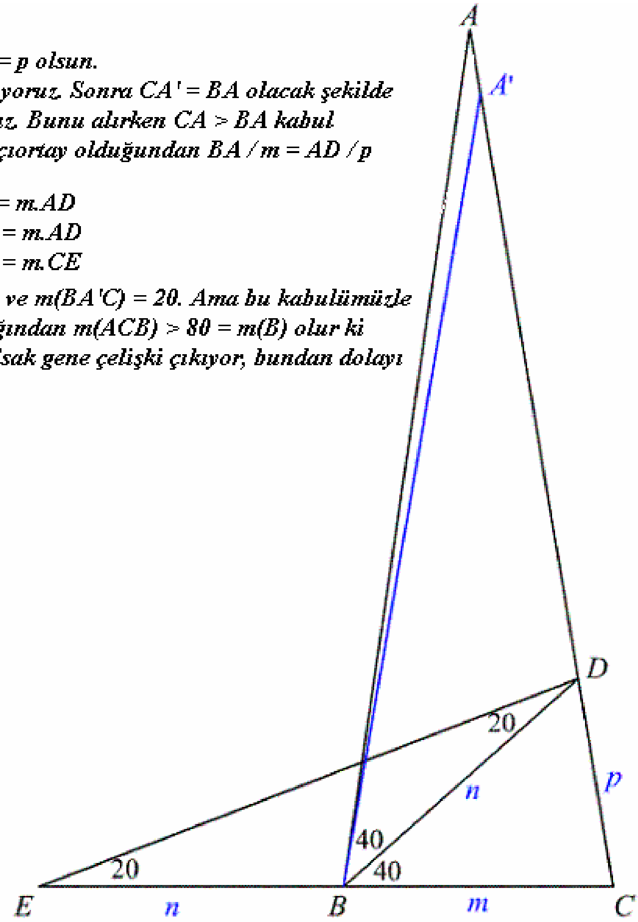
Hazırlayan: BİLAL KURT

Çözüm:

BC = m, BD = n, DA = m+n, CD = p olsun.
DBE ikizkenar üçgenini oluşturuyoruz. Sonra CA' = BA olacak şekilde CA üstünde bir A' noktası alıyoruz. Bunu alırken CA > BA kabul ediyoruz. ABC üçgeninde BD içaçıortay olduğundan BA / m = AD / p yani

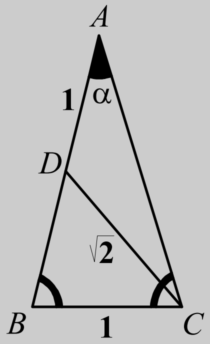
$$p.BA = m.AD$$
$$p.CA' = m.AD$$
$$p.CA' = m.CE$$

O halde A'DBE bir kiriş dörtgeni ve m(BA'C) = 20. Ama bu kabulümüzle çelişir çünkü m(BAC) < 20 olacağından m(ACB) > 80 = m(B) olur ki CA < BA demektir. Diğer türlü alsak gene çelişki çıkıyor, bundan dolayı A' = A olup, m(A) = 20.

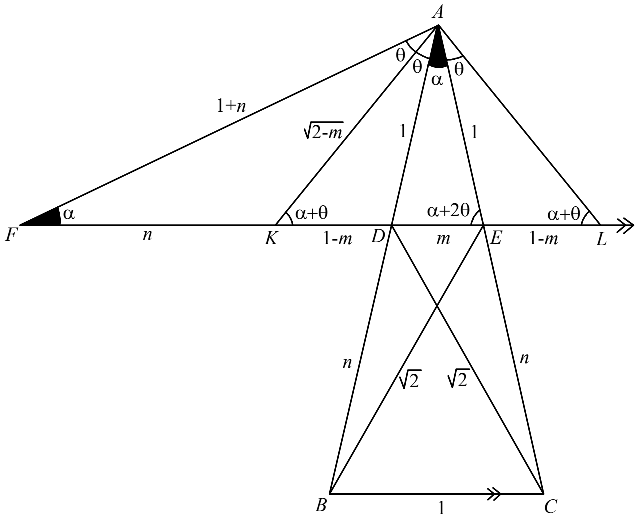


[ZBS-15]

ABC bir üçgen,
$|AB| = |AC|$,
$|AD| = |BC| = 1$,
$|CD| = \sqrt{2}$,
$m(CAB) = \alpha^{o}$
ise α *kaçtır*?



Çözüm 1: D noktasından BC'ye paralel çizilen doğru AC'yi E'de kessin. $|DE| = m$ diyelim. ADE ikizkenar üçgen olduğundan $|AD| = |AE| = 1$ ve $DBCE$ de bir ikizkenar yamuk olduğundan, $|DB| = n$ denirse $|EC| = n$ ve $|BE| = |DC| = \sqrt{2}$ olur.



Diğer yandan ikizkenar yamuk ailesinin her bireyi kiriş dörtgeni olduğundan $DBCE$ dörtgeninde Batlamyus (Ptolemy) Teoremi[1] gereği

$$m \cdot 1 + n \cdot n = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

yani $m + n^2 = 2$ elde ederiz.

Buradan $n^2 = 2 - m$ yani

$$n = \sqrt{2-m}$$

olduğunu bir kenara not edelim.[2]

Şimdi $[ED$ üzerinde AFE ikizkenar olacak şekilde bir F noktası alalım. $m(FAD) = 2\theta$ olsun. $m(FAE) = m(AEF) = \alpha + 2\theta = m(ACB) = m(ABC)$ olur. AFE ile CAB üçgenlerine dikkat edilirse hem taban açıları aynı hem de taban uzunlukları aynı olduklarından eştirler. O halde $m(AFE) = \alpha$ ve $|FA| = |FE| = 1 + n$ olur.

Şimdi DAF açısının açıortayını çizelim. FD'yi K'da kessin. $m(EAK) = m(EKA) = \alpha + \theta$ olacağından AEK ikizkenar olur, o halde $|EA| = |EK| = 1$ olduğundan $|FK| = n$ ve $|KD| = 1 - m$ olur.

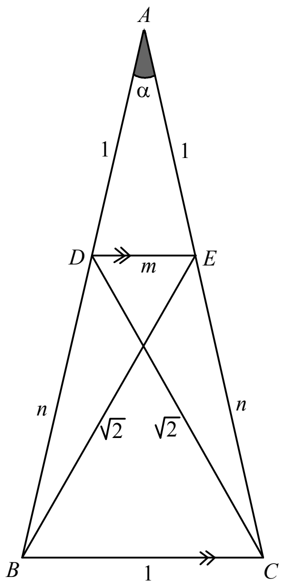
$[DE$ üzerinde bir L noktası için KAL ikizkenar üçgeni çizilirse ADK ve AEL üçgenlerinin eşliğinden $|EL| = 1 - m$ olur. AEK ile LAK üçgenleri benzer olduğundan $|AK|^2 = |KD| \cdot |KL|$ olur ki buradan

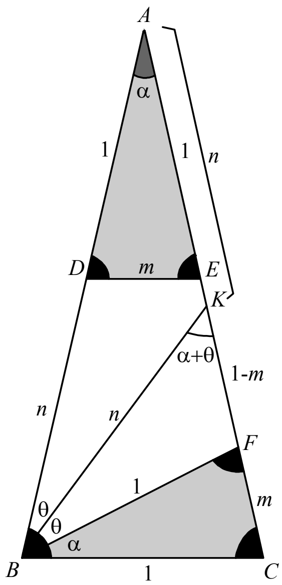
$$|AK| = \sqrt{2-m}$$

bulunur. Daha önce $\sqrt{2-m} = n$ olduğunu bulduğumuzdan $|AK| = |KF|$ yani $\alpha = \theta$ çıkar.

Şimdi canınızın istediği bir üçgenin iç açılarının ölçülerini toplarsanız 7α bulursunuz ki, bu da $\alpha = \frac{180^o}{7}$ demektir.

Çözüm 2:





Yine Batlamyus (Ptolemy) Teoremi gereği

$$m \cdot 1 + n \cdot n = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

yani $m + n^2 = 2$ elde ederiz. O halde $n = \sqrt{2-m}$.

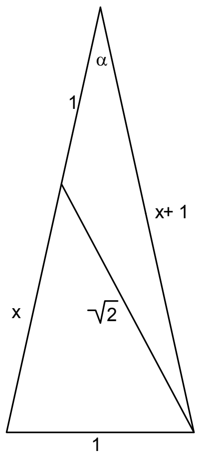
Şimdi şekil çok karışık olmasın diye sağdaki şekle geçiyoruz:

CBF ikizkenar olacak şekilde $[BF]$'yi çiziyoruz. CBF ile DAE üçgenlerinin eşliğine dikkat ediniz. O halde $|FC| = m$. ABF açısının açıortayını çizelim. BCK ikizkenar üçgen olur ki $|KF| = 1 - m$ ve $|AK| = n$ olur. BKC üçgeninde Stewart Teoremi uygulanırsa $|BK| = \sqrt{2-m}$ yani $|BK| = n$ çıkar. BKA üçgenini ikizkenar bulduğumuzdan $\alpha = \theta$ olur ki, herhangi bir üçgenin iç açı ölçülerini toplarsak $\alpha = \frac{180^o}{7}$ olduğunu görürüz.

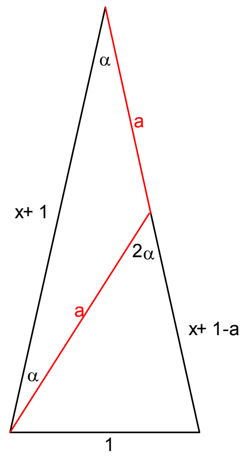
Mustafa YAĞCI

[1] Kiriş dörtgenlerinde karşılıklı kenarların çarpımlarının toplamı, köşegenler çarpımına eşittir.
[2] ADE üçgeninde üçgen eşitsizliği gereği $m < 2$ olduğundan $n^2 = 2 - m$ eşitliğini sağlayan n bir reel sayıdır.

Çözüm 3 [Eyüp Kamil Yeşilyurt]:
Çözüm 4 [İbrahim Kuşçuoğlu]:



şekil 1



şekil 2

Önce Şekil 1'de Stewart Teoremi'ni uygulayalım:

$$\frac{(x+1)^2.x+1}{x+1}-x=(\sqrt{2})^2$$

denkleminden

$$x^3+x^2-2x-1=0 \qquad (*)$$

elde edilir.

Şekil 2'de Stewart Teoremi'ni uygulayalım:

$$\frac{(x+1)^2.(x+1-a)+a}{x+1}-a(x+1-a)=a^2$$

çıkar ki, denklemi düzenlersek,

$$(x+1)^3-2a(x+1)^2+a=0.$$

a'yı çekersek,

$$a=\frac{(x+1)^3}{2.(x+1)^2-1}$$

olur. a'yı x cinsinden yazalım:

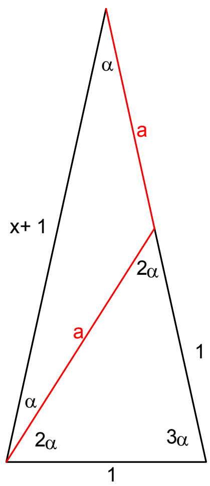
$$a=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{2.x^2+4x+1}$$

Şimdi pay kısmındaki 1 yerine (*) eşitliğinden dolayı x^3+x^2-2x yerine yazalım.

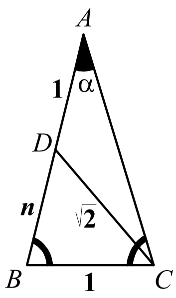
$$a=\frac{x^3+3x^2+3x+x^3+x^2-2x}{2.x^2+4x+1}=\frac{2x^3+4x^2+x}{2.x^2+4x+1}=\frac{x(2.x^2+4x+1)}{2.x^2+4x+1}$$

eşitliğinden $a=x$ bulunur.

Buradan Şekil 3 elde edilir ki $7\alpha=180^o$ ve dolayısıyla da $\alpha=\frac{180}{7}$ bulunur.



şekil 3



Trigonometrik Çözüm [Alper Çay]: $m(B)=m(C)=x$ ve $|BD|=n$ diyelim.

ABC üçgeninde Stewart Teoremi uygulanırsa

$$|CD|^2=\frac{|AC|^2\cdot|DB|+|CB|^2\cdot|DA|}{|AB|}-|DA|\cdot|DB|$$

olduğundan, değerler yerlerine yazılırsa,

$$n^3+n^2-2n-1=0 \qquad (1)$$

bulunur. BCD üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$$|CD|^2=|BC|^2+|BD|^2-2\cdot|BC|\cdot|BD|\cdot\cos x$$

olur ki, bu da

$$n^2-2n\cdot\cos x-1=0 \qquad (2)$$

demektir.

(1) ve (2) eşitliklerinden n yok edilirse,

$$8\cdot\cos^3x-4\cdot\cos^2x-4\cdot\cos x+1=0,$$
$$\sin x\cdot(8\cdot\cos^3x-4\cdot\cos^2x-4\cdot\cos x+1)=0,$$
$$4\cdot\cos^2x\cdot\sin 2x-2\cdot\cos x\cdot\sin 2x-2\cdot\sin 2x+\sin x=0,$$
$$2\cdot\cos x\cdot(\sin 3x+\sin x)-\sin 3x-\sin x-2\cdot\sin 2x+\sin x=0,$$
$$\sin 4x+\sin 2x+\sin 2x-\sin 3x-\sin x-2\cdot\sin 2x+\sin x=0,$$
$$\sin 4x=\sin 3x$$
$$x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{7},\ k\in\mathbb{Z}$$

bulunur. O halde

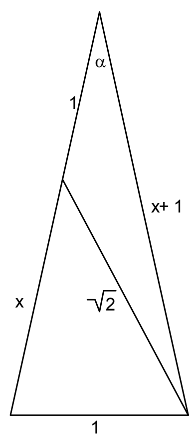
$$x=\frac{\pi}{7} \text{ veya } x=\frac{3\pi}{7}$$

olur. $|BC|<|AB|$ olduğundan $x=\frac{3\pi}{7}$ olacağından

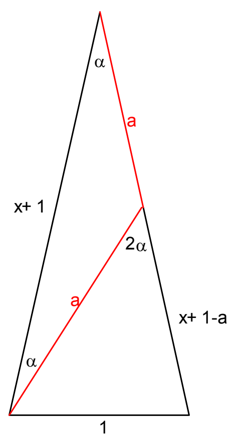
$$m(A)=\frac{\pi}{7}$$

bulunur.

Çözüm [İbrahim Kuşçuoğlu]:



şekil 1



şekil 2

Önce Şekil 1'de Stewart Teoremi'ni uygulayalım:

$$\frac{(x+1)^2.x+1}{x+1}-x=(\sqrt{2})^2$$

denkleminden

$$x^3+x^2-2x-1=0 \qquad (*)$$

elde edilir.

Şekil 2'de Stewart Teoremi'ni uygulayalım:

$$\frac{(x+1)^2.(x+1-a)+a}{x+1}-a(x+1-a)=a^2$$

çıkar ki, denklemi düzenlersek,

$$(x+1)^3-2a(x+1)^2+a=0.$$

a'yı çekersek,

$$a=\frac{(x+1)^3}{2.(x+1)^2-1}$$

olur. a'yı x cinsinden yazalım:

$$a=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{2.x^2+4x+1}$$

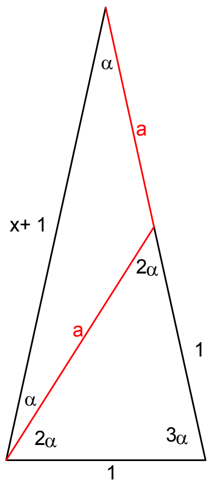
Şimdi pay kısmındaki 1 yerine (*) eşitliğinden dolayı x^3+x^2-2x yerine yazalım.

$$a=\frac{x^3+3x^2+3x+x^3+x^2-2x}{2.x^2+4x+1}$$

$$=\frac{2x^3+4x^2+x}{2.x^2+4x+1}$$

$$=\frac{x(2.x^2+4x+1)}{2.x^2+4x+1}$$

eşitliğinden $a=x$ bulunur.

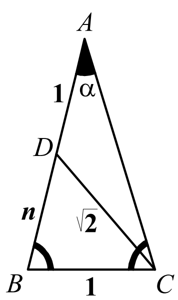


şekil 3

Buradan Şekil 3 elde edilir ki $7\alpha=180^o$ ve dolayısıyla da $\alpha=\frac{180}{7}$ bulunur.

Trigonometrik Çözüm [Alper Çay]: $m(B)=m(C)=x$ ve $|BD|=n$ diyelim.

ABC üçgeninde Stewart Teoremi uygulanırsa



$$|CD|^2=\frac{|AC|^2\cdot|DB|+|CB|^2\cdot|DA|}{|AB|}-|DA|\cdot|DB|$$

olduğundan, değerler yerlerine yazılırsa,

$$n^3+n^2-2n-1=0 \qquad (1)$$

bulunur. BCD üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$$|CD|^2=|BC|^2+|BD|^2-2\cdot|BC|\cdot|BD|\cdot\cos x$$

olur ki, bu da

$$n^2-2n\cdot\cos x-1=0 \qquad (2)$$

demektir.

(1) ve (2) eşitliklerinden n yok edilirse,

$$8\cdot\cos^3x-4\cdot\cos^2x-4\cdot\cos x+1=0,$$
$$\sin x\cdot(8\cdot\cos^3x-4\cdot\cos^2x-4\cdot\cos x+1)=0,$$
$$4\cdot\cos^2x\cdot\sin 2x-2\cdot\cos x\cdot\sin 2x-2\cdot\sin 2x+\sin x=0,$$
$$2\cdot\cos x\cdot(\sin 3x+\sin x)-\sin 3x-\sin x-2\cdot\sin 2x+\sin x=0,$$
$$\sin 4x+\sin 2x+\sin 2x-\sin 3x-\sin x-2\cdot\sin 2x+\sin x=0,$$
$$\sin 4x=\sin 3x$$

$$x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{7},\ \ k\in\mathbb{Z}$$

bulunur. O halde

$$x=\frac{\pi}{7} \text{ veya } x=\frac{3\pi}{7}$$

olur. $|BC|<|AB|$ olduğundan $x=\frac{3\pi}{7}$ olacağından

$$m(A)=\frac{\pi}{7}$$

bulunur.