Problem. *a*, *b*, *c* negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $a+b+c=3$ ise,

$$a\sqrt{1+b^3}+b\sqrt{1+c^3}+c\sqrt{1+a^3}\le 5$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Eşitsizlik sorularında başlangıcımızın çok önemli olduğunu unutmamalıyız. Bu nedenle soruya bu haliyle bir eşitsizlik uygulamak çok zor görünüyor gibi.. Özellikle sorudaki $\sqrt{1+b^3}$ ifadesini çok iyi yorumlayarak devam etmemiz gerekmektedir. Basit bir düşünce olarak bu ifadeyi birkaç denemeden sonra $\sqrt{(1+b)\cdot(1-b+b^2)}$ olarak yazmaktan başka çaremiz kalmadığını görebilirsiniz. Burada bazılarımızın gözüne hemencecik $(1+b)$ ve $(1-b+b^2)$ çarpanlarına A.G.O. eşitsizliği uygulamak gelebilir. Düşündüğümüzü kağıda yansıtırsak,

$$\sum_{cyc} a\sqrt{1+b^3}=\sum_{cyc} a\sqrt{(1+b)\cdot(1-b+b^2)}$$

burada A.G.O. uygulanırsa,

$$\frac{(1+b)+(1-b+b^2)}{2}\ge\sqrt{(1+b)\cdot(1-b+b^2)}$$

bu ifadeyi sorumuzdaki ifadeye benzetirsek,

$$\sum_{cyc} a\sqrt{(1+b)\cdot(1-b+b^2)}\le\sum_{cyc} a\left(\frac{2+b^2}{2}\right)=\sum_{cyc} a\left(1+\frac{b^2}{2}\right)$$

buluruz. Son durumdaki ifadede $ab^2+bc^2+ca^2=k$ olarak belirtirsek

$$\sum_{cyc} a\left(1+\frac{b^2}{2}\right)=\left(a+b+c+\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{2}\right)=\left(3+\frac{k}{2}\right)=5$$

bulunur. Buradan *k* = 4 bulunur. İşte şimdi $ab^2+bc^2+ca^2\le 4$ ...(1) durumunu ispatlamamız gerekmektedir. İşlemlerimizin son basamağında bir kestirimden yola çıkarak yukarıdaki eşitsizliği yazdık. Şimdi (1) ifadesini ispatlamaya çalışalım. *a*, *b*, *c* sayılarının ortancası b olduğunu kabul edelim. En basit şekliyle $(b-a)(b-c)\le 0$ durumu barizdir. Şimdi burada her iki tarafı a,b,c den hangisiyle çarparsak işimize yarayacak bir eşitsizlik çıkabilir? İspatlayacağımız ifade ab^2 ile devam ettiğinden a çarpanı ile çarparak düzenlersek,

$a(b-a)(b-c)\le 0 \Leftrightarrow ab^2+ca^2\le abc+a^2b$ bulunur. Burada da gerekli düzenlemeler yapılarak (1) ifadesine benzetilmeye çalışılırsa,

$$ab^2+ca^2+bc^2\le abc+a^2b+bc^2$$

bulunur.

$$abc+a^2b+bc^2=b\left(a^2+ac+c^2\right)\le b(a+c)^2$$

bulunur. Bu bulduğumuz ifadeye A.G.O. eşitsizliğini uygulamaya çalışacağız ama nasıl?

$$b(a+c)^2=4b\cdot\left(\frac{a+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+c}{2}\right)=4\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a+c}{6}\right)\left(\frac{a+c}{6}\right)3^3\ \ldots(2)$$

olarak yazarsak,

$$\left(\frac{b}{3}\right)+\left(\frac{a+c}{6}\right)+\left(\frac{a+c}{6}\right)\ge 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a+c}{6}\right)\left(\frac{a+c}{6}\right)}$$

buradan,

$$\left(\frac{2(a+b+c)}{6}\right)^3\ge\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a+c}{6}\right)^2 3^3$$

Son ifadeyi (2)'ye benzetmek için eşitsizliğin her tarafını 4 ile çarparsak,

$$ab^2+bc^2+ca^2\le abc+a^2b+bc^2\le 4\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a+c}{6}\right)^2 3^3\le 4\left(\frac{2(a+b+c)}{6}\right)^3$$

bulunur. Burada,

$ab^2+bc^2+ca^2\le 4$ ifadesi ispatlanmış olur. Eşitlik durumu ise, $\frac{b}{3}=\frac{a+c}{6}$ dan

$$2b=a+c\Rightarrow 3b=3\Rightarrow (a,b,c)=(0,1,2)$$

bulunur. Ve ispatımız tamamlanmış olur. □

Çözümü Hazırlayan *İhsan Yücel*'e Teşekkürler…