

Problem (TMOZ)

a ve b pozitif birer gerçekte sayıdır.

$a^2 + 3ab + 5b^2 = 80$ olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımının en büyük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm**1. yol (Türev kavramı ile)**

$$a^2 + 3ab + 5b^2 = 80 \quad (1)$$

$\Rightarrow b = f(a)$ diyebiliriz.

Bu durumda; problem,

$$T(a) = a \cdot b = a \cdot f(a) \quad (2)$$

fonksiyonunun en büyük tam sayı değerini bulma problemine dönüşür.

$T(a)$ fonksiyonunun yerel ekstremum yaptığı noktada $T'(a) = 0$ olur.

(1) ve (2) eşitliklerinde a'ya göre türev alalım:

$$2a + 3b + 3ab' + 10bb' = 0 \quad (3)$$

$$T'(a) = b + ab' = 0 \Rightarrow b' = -\frac{b}{a} \quad (4)$$

(3)ve (4)'ten,

$$a^2 = 5b^2; \quad (5)$$

(1) ve(5)'ten,

$$b^2 = \frac{80}{10 + 3\sqrt{5}} \text{ ve } T_{\text{maks.}} = \frac{80}{3 + 2\sqrt{5}}$$

bulunur.

$T = a \cdot b$ 'nin en büyük tamsayı değeri 10 olur.

2. yol (Denklem kavramı ile)

$ab = T$ diyerek, verilen eşitlikte b yerine $b = \frac{T}{a}$ değerini koyalım:

$$a^2 + 3T + 5 \cdot \frac{T^2}{a^2} = 80$$

$$\Rightarrow a^4 + (3T - 80) \cdot a^2 + 5T^2 = 0$$

$a^2 = m$ denirse; denklem,

$$m^2 + (3T - 80) \cdot m + 5T^2 = 0 \quad (1)$$

denklemine dönüşür. (1) denkleminin pozitif köklerinin olması için,

$$T_1 + T_2 = 80 - 3T > 0 \quad (2)$$

$$\Delta = 6400 - 480T - 11T^2 \geq 0 \quad (3)$$

(2) ve (3)'ten,

$$\frac{80}{3 - 2\sqrt{5}} \leq T \leq \frac{80}{3 + 2\sqrt{5}} \text{ elde edilir.}$$

a ve b'in pozitif gerçekte sayılar olduğu dikkate alınır,

$$0 < T \leq \frac{80}{3 + 2\sqrt{5}} \text{ olduğu bulunur.}$$

3. yol (Barış Demir ile)

$$(a - \sqrt{5}b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2\sqrt{5}ab + 5b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 5b^2 \geq 2\sqrt{5}ab$$

$$\Rightarrow a^2 + 3ab + 5b^2 \geq 3ab + 2\sqrt{5}ab$$

$$\Rightarrow 80 \geq 3ab + 2\sqrt{5}ab$$

$$\Rightarrow ab \leq \frac{80}{3 + 2\sqrt{5}}$$

Uyan !

Arit. Ort. $\geq$ Geom. Ort.

$$\Rightarrow \frac{(a^2) + (3ab) + (5b^2)}{3} \geq \sqrt[3]{(a^2) \cdot (3ab) \cdot (5b^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{80}{3} \geq a \cdot b \cdot \sqrt[3]{15}$$

$$\Rightarrow ab \leq \frac{80}{3 \cdot \sqrt[3]{15}}$$

Bu çözüm hatalıdır!

$ab \leq \frac{80}{3 \cdot \sqrt[3]{15}}$ eşitsizliğindeki eşitlik,

$a^2 = 3ab = 5b^2$ iken geçerlidir.

Bu da; $a = b = 0$ olmasını gerektirir.

$a = b = 0$ değerleri de verilen eşitliği sağlamaz.