

KÜP BOYAMA PROBLEMİ (L. Gökçe)

5 Mart 2015

Konuya 1993'te Ulusal Matematik Olimpiyatı'nda çıkmış bir problemle giriş yapalım.

Problem 1 (1993 UMO): Verilen altı değişik rengi kullanarak bir küpün her yüzünü farklı renge boyuyoruz. Küpün istenildiği kadar ve istenen istikametlerde döndürülmesiyle biri diğerinden elde edilen iki boyamayı aynı kabul edersek, bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?

Çözüm: Renklerimiz A, B, C, D, E, F olsun. Bütün boyama türlerinde F daima tabanda olmak zorundadır! Öyle değilse de, küpü döndürüp pekâlâ F yi tabana getirebiliriz. Bundan sonra yapacağımız tüm işlemlerde tabanda F renginin olduğunu düşüneceğiz. Şimdi F renkli yüzeye paralel olan yüzeyi boyayalım. 5 renkten birini seçeceğimiz için bu işi 5 farklı yolla yapabiliriz. Birbirine paralel olan bu boyanmış karelerin merkezinden geçen doğruyu l ile gösterelim. l doğrusu bu küp için bir dönme eksenidir. Yani küpün l etrafında döndürülmeleri özdeş durumlardır. Elimizde boyanmamış 4 yan yüzey ve 4 renk kalmıştı. Bu yüzeyleri dairesel permütasyonla $3!$ yolla boyayabiliriz. Çarpma prensibiyle, $5 \cdot 3! = 30$ farklı boyama yapabileceğimizi anlarız.

Benzer bir problem de şöyleydi:

Problem 2 (2008 UMO): Yedi renk kullanılarak her yüzeyi farklı renge boyanmış kaç küp oluşturulabilir?

Çözüm: Önce kullanılacak renkleri belirleyelim. 7 renkten 6 tanesini 7 yolla seçeriz. Şimdi bu 6 renkle küpü boyayalım. Önceki problemde 30 yolla boyayabileceğimizi hesaplamıştık. Çarpma prensinden dolayı, $7 \cdot 30 = 210$ farklı boyama yapılabileceği görülür.

Şimdi problemi zorlaştıralım ve yüzeylerin farklı renklere olma şartını kaldıralım:

Problem 3: Altı farklı renge sahibiz. Bir küpün her yüzünü bu renklerle boyuyoruz. Bazı yüzeyler aynı renkte olabilir. Küpün istenildiği kadar ve istenen yönlerde döndürülmesiyle biri diğerinden elde edilen iki boyama aynı kabul edilirse, bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?

Çözüm: **1 renk kullanılarak** 1 yolla boyama yapabiliriz. Kullanılan rengi de $C(6,1) = 6$ yolla seçebileceğimizden $6 \cdot 1 = 6$ farklı boyama vardır.

2 renk kullanalım. Bu renkler A ve B olsun. 1 yüzey A , kalan 5 yüzey B dir. Ya da bunun simetrisi olarak 1 yüzey B , 5 yüzey A dır. 2 A , 4 B durumunda: A lar ya bitişik, ya da birbirine paralel olduğundan 2 boyama vardır. A, B yer değiştirmesiyle ile $2 \cdot 2 = 4$ olur. 3 A , 3 B durumunda: ya A lardan ikisi paraleldir, ya da üç A nın ortak bir köşesi vardır. 2 durum oluşur. Toplam $2 + 4 + 2 = 8$ boyama var. 6 renkten ikisi $C(6,2) = 15$ yolla seçilebildiğinden, $15 \cdot 8 = 120$ boyama vardır.

3 renk kullanalım. Bu renkler A, B ve C olsun. 1 A , 1 B , 4 C durumunda: A ile B ya paraleldir ya da bitişiktir. 2 durum oluştu. Simetriden dolayı 3 ile çarparsak $3 \cdot 2 = 6$ olur. 1 A , 2 B , 3 C durumunda: C renkli yüzeylerden ikisi paralel ise, üçüncü C nin paraleline ya A , ya da B gelir, 2 durum var. C renkli üç yüze-

yin ortak bir köşe noktası varsa A için her yer aynıdır, 1 yolla boyanır. Kalan iki yüzey de zorunlu olarak B renkleriyle boyanır. $2+1=3$ boyama oluştu. Simetriden dolayı $3!=6$ ile çarpmalıyız. $3 \cdot 6=18$ boyama oluşur. 2 A , 2 B , 2 C durumunda: A renkli yüzeyler paralel ise, B renkli yüzeyler ya bitişiktir, ya da paraleldir, yani 2 durum var. A renkli yüzeyler bitişik ise B renkli yüzeyler ya bitişiktir (3 durum var) ya da paraleldir (1 durum), 4 durum var. Toplam $2+4=6$ durum var. Bu üç alt durumun toplamı $6+18+6=30$ dur. 6 renkten 3 tanesini $C(6,3)=20$ yolla seçebileceğimiz için, üç renkli tüm boyamalar $30 \cdot 20=600$ tanedir.

4 renk kullanalım. 1 A , 1 B , 1 C , 3 D durumunda: D lerden ikisi paralel ise, üçüncü D nin paralelini 3 yolla, kalan yerleri tek yolla boyarız. D lerin ortak bir köşesi varsa A için her yer aynıdır. A yı yerleştirdikten sonra B için 2 yer vardır. $3+2=5$ boyama olur. Simetriden dolayı 4 ile çarpabiliriz: $5 \cdot 4=20$ farklı boyama olur. 1 A , 1 B , 2 C , 2 D durumunda: D ler paralel ise, C ler paralel (2 durum) veya bitişik (1 durum) olabildiğinden $2+1=3$ durum vardır. D ler bitişik ise, C lerin paralel olması 2 yolla, C lerin bitişik olması 3 yolla olur. (Rahat anlaşılabilirlik için, okuyucunun bu kısmı biraz daha irdelemesinde fayda var). Toplam $3+2+3=8$ boyama oldu. 4 renkten ikişer kez kullanılacak olanları $C(4,2)=6$ yolla belirleriz. $8 \cdot 6=48$ olup toplam $20+48=68$ boyama elde edilir. 6 renkten 4 tanesini $C(6,4)=15$ yolla seçebileceğimiz için, dört renkli tüm boyamalar $68 \cdot 15=1020$ tanedir.

5 renk kullanalım. 1 A , 1 B , 1 C , 1 D , 2 E durumu vardır. E ler paralel ise kalan renkler, (halkaya farklı boncukları dizme problemlerinde olduğu gibi) $3!/2=3$ yolla boyanır. E ler bitişik ise, E lerden birini tabana getirelim. Buna paralel olan yüzeyi 4 yolla boyayabiliriz. Yandaki 4 yerden birini E ile boyayalım. Kalan 3 yüzey $3!/2=3$ yolla boyanır. Çarpma ile $4 \cdot 3=12$ olur. Toplarsak $3+12=15$ boyama olur. İki kez kullanılan rengi 5 yolla belirleyebiliriz. Çarparsak $15 \cdot 5=75$ tir. Şimdi de 6 renkten kullanılacak 5 tanesini 6 yolla seçelim. $75 \cdot 6=450$ boyama vardır.

6 renk kullanalım. Her bir yüzey farklı renkte boyanmalıdır. Problem 1’de bu sorunun cevabını 30 olarak bulmuştuk.

Nihayet problemi tamamlayabiliriz. Tüm alt durumları toplarsak $6+120+600+1020+450+30=2226$ tane farklı boyama elde edilir.

Şimdi problemi tekrar kolaylaştıralım!

Problem 4: Beş farklı renge sahibiz. Bir küpün her yüzünü bu renklerle boyuyoruz. Bazı yüzeyler aynı renkte olabilir. Küpün istenildiği kadar ve istenen yönlerde döndürülmesiyle biri diğerinden elde edilen iki boyama aynı kabul edilirse, bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?

Çözüm: Problem 3’teki katsayıları kullanacağız. Elbette Problem 3’teki son durumu oluşturan 6 rengi kullanma kısmını burada hesaba katmayacağız.

$1 \cdot C(5,1) + 8 \cdot C(5,2) + 30 \cdot C(5,3) + 68 \cdot C(5,4) + 75 \cdot C(5,5) = 5 + 80 + 300 + 340 + 75 = 800$ bulunur.

Artık problemi en genel halde çözebiliriz.

Problem 5: n farklı renge sahibiz. Bir küpün her yüzünü bu renklerle boyuyoruz. Bazı yüzeyler aynı renkte olabilir. Küpün istenildiği kadar ve istenen yönlerde döndürülmesiyle biri diğerinden elde edilen iki boyama aynı kabul edilirse, bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?

Çözüm: Problem 3'te elde ettiğimiz 1, 8, 30, 68, 75, 30 katsayılarını kullanarak bu soruya rahatlıkla cevap verebiliriz!

$$1 \cdot C(n,1) + 8 \cdot C(n,2) + 30 \cdot C(n,3) + 68 \cdot C(n,4) + 75 \cdot C(n,5) + 30 \cdot C(n,6) \dots (1)$$

farklı boyama yapılabilir.

Uyarı 1: Burada $C(n,6)$ ifadesini altıncı dereceden bir polinom olarak düşünmek faydalıdır. Ya da $C(n,3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ ifadesine üçüncü dereceden bir polinom olarak bakılmalıdır. Ayrıca bu ifadeler $n \geq 6$ için bildiğimiz kombinyondur. Ancak $1 \leq n < 6$ için $C(n,6) = 0$ dır. Örneğin $n = 4$ için hesaplama yaparken bu formülde $C(4,6) = 0$ ve $C(4,5) = 0$ olarak yazmalısınız. Buna göre (1) bağıntısı bir polinom olarak düzenlenirse

$$\frac{n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2}{24} \dots (2)$$

şeklinde yazılabilir.

Problem 6: Küpün yüzeyleri 1'den 6'ya kadar numaralandırılarak bir zar yapılmış olsun. Beş farklı renge sahibiz. Bu zarın her yüzünü bu renklerle boyuyoruz. Bazı yüzeyler aynı renkte olabilir. Zarın istenildiği kadar ve istenen yönlerde döndürülmesiyle biri diğerinden elde edilen iki boyama aynı kabul edilirse, bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?

Çözüm: Artık numaralanmış küpün (zarın) yüzeyleri ayırt edilebilir olduğu için problem çok basittir. 1 numaralı yüzeyi 5 renkten istediğimiz herhangi biriyle boyayabiliriz. 2 numaralı yüzey için de 5 farklı renk seçimi yapabiliriz. Diğer yüzeyler için de ... Çarpma prensibiyle 5^6 elde ederiz.

Uyarı 2: Bu problemde 'döndürmeler sonucu biri diğerinden elde edilen durumların aynı olduğunu' söylememize de gerek yoktu aslında. Zaten numaralanmış yüzeyler için özdeşlik söz konusu olamaz.