TÜBİTAK

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

# 21. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI - 2013
## BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

**Soru kitapçığı türü**

# A

**14 Nisan 2013 Pazar, 13.00-15.30**

**ÖĞRENCİNİN ADI SOYADI :**
**T.C. KİMLİK NO. :**
**OKULU / SINIFI :**
**SINAVA GİRDİĞİ İL :**

SINAVLA İLGİLİ UYARILAR:

- Bu sınav çoktan seçmeli 36 sorudan oluşmaktadır.
- Cevap kâğıdınıza size verilen soru kitapçığının türünü gösteren harfi işaretlemeyi unutmayınız
- Her sorunun sadece bir doğru cevabı vardır. Doğru cevabınızı cevap kâğıdınızdaki ilgili kutucuğu tamamen karalayarak işaretleyiniz
- **Her soru eşit değerde olup, dört yanlış cevap bir doğru cevabı götürecektir.**
- Sınavda herhangi bir yardımcı materyal ya da karalama kâğıdı kullanılması yasaktır. Soru kitapçığındaki boşlukları karalama yapmak için kullanabilirsiniz.
- Sınav süresince görevlilerle konuşulması ve soru sorulması, öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
- Sorularda bir yanlışın olması düşük bir olasılıktır. Böyle bir şeyin olması durumunda sınav akademik kurulu gerekeni yapacaktır. Bu durumda size düşen en doğru olduğuna karar verdiğiniz seçeneği işaretlemenizdir. Ancak, sınava giren aday bir sorunun yanlış olduğundan emin ise, itiraz için sınav soruları ve cevap anahtarı TÜBİTAK'ın internet sayfasında (http://www.tubitak.gov.tr) yayınlandıktan sonra 5 iş günü içerisinde kanıtları ile birlikte, TÜBİTAK'a başvurmalıdır. Bu tarihten sonra yapılacak başvurular işleme konmayacaktır. Sadece sınava giren adayların sorulara itiraz hakkı vardır, üçüncü kişilerin sınav sorularına itirazı işleme alınmayacaktır.
- Ulusal Matematik Olimpiyatı - 2013 Birinci Aşama Sınavı'nda sorulan soruların üçüncü kişiler tarafından kullanılması sonucunda doğacak olan hukukî sorunlardan TÜBİTAK ve Olimpiyat Komitesi sorumlu tutulamaz. Olimpiyat komitesi bu tür durumlarda sorular ile ilgili görüş bildirmek zorunda değildir.
- Sınav sırasında kopya çeken, çekmeye teşebbüs eden ve kopya verenlerin kimlikleri sınav tutanağına yazılacak ve bu kişilerin sınavları geçersiz sayılacaktır.
- Sınav başladıktan sonraki ilk yarım saat içinde sınav salonundan ayrılmak yasaktır
- Sınav süresince sınava giriş belgenizi ve resimli bir kimlik belgesini masanızın üzerinde bulundurunuz.
- Sınav salonundan ayrılmadan önce cevap kâğıdınızı görevlilere teslim etmeyi unutmayınız.

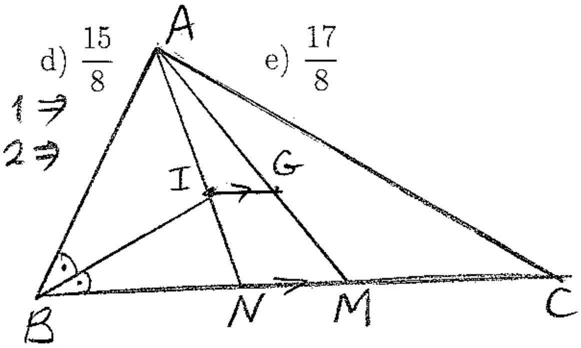
BAŞARILAR DİLERİZ.

NOT: Metin içinde kullanılan bazı gösterimlerin anlamları aşağıda verilmiştir

| | |
|---|---|
| $AB$ | $A$ ve $B$ noktalarından geçen doğru |
| $[AB]$ | $A$ ve $B$ noktalarını birleştiren doğru parçası |
| $\|AB\|$ | $[AB]$ nin uzunluğu |
| $m(\widehat{ABC})$ | $ABC$ açısının ölçüsü |

**1.** $|AC| > |AB|$ olan bir $ABC$ üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi $I$ ve ağırlık merkezi $G$ olmak üzere, $IG$ ve $BC$ doğruları birbirine paralel, $|BC| = 2$, ve Alan$(ABC) = 3\sqrt{5}/8$ ise, $|AB|$ nedir?

a) $\frac{9}{8}$ b) $\frac{11}{8}$ c) $\frac{13}{8}$ d) $\frac{15}{8}$ e) $\frac{17}{8}$




$IG \parallel NM \Rightarrow |AI| : |IN| = |AG| : |GM| = 2:1 \Rightarrow$
$|AB| : |BN| = |AC| : |CN| = 2:1$. $|BN| + |NC| = 2 \Rightarrow$
$|AB| + |AC| = 4$. $|AB| = x$ ise alandan
$3(3-x)(x-1)\cdot 1 = \frac{45}{64} \Rightarrow x = \frac{9}{8}$.

**2.** $p$, $q$ asal sayılar ve $n$ pozitif bir tam sayı olmak üzere, $1/p + 2013/q = n/5$ eşitliğini sağlayan kaç $(p, q, n)$ üçlüsü vardır?

a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

$5(q + 2013p) = npq \Rightarrow$ 1) $p = 5$ ; 2) $p = q \neq 5$
1) $\Rightarrow (n-1)q = 3\cdot 11\cdot 61\cdot 5 \Rightarrow q = 3; 5; 11; 61 \Rightarrow n =$.
2) $\Rightarrow 5\cdot 2014 = np \Rightarrow 5\cdot 2\cdot 19\cdot 53 = np \Rightarrow p = 2, 19, 53$
$\Rightarrow n =$

**3.** Katsayıları $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesine ait olan bir polinomun $x - 6$ ile bölümünden kalan 2013 ise, bu polinomda $x$ in katsayısı en az kaç olabilir?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. $P(6) = 2013 = (13158)_6$
$\Rightarrow (13158)_6 = P(10_6) = a_n 10^n + \dots + a_2 100 + a_1 10 + a_0$
$\Rightarrow \boxed{a_1 = 5}$

**4.** $1, 2, \ldots, 49$ sayıları $7 \times 7$ bir satranç tahtasının birim karelerine, ardışık sayılar ortak bir kenar paylaşan birim karelerde yer alacak biçimde yazıldığında bir satırda en fazla kaç asal sayı olabilir?

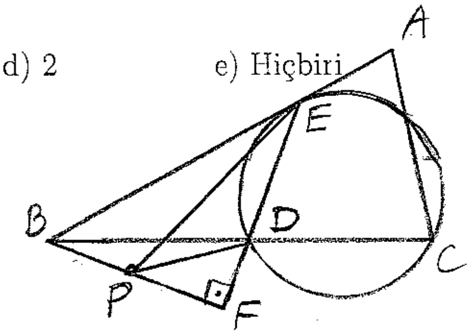
a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

Satranç tahtası şeklinde boyarsak iki tek sayının yan yana gelemeyeceğini görürüz. $\Rightarrow$ 2 de olursa bir satırda en fazla 5 asal sayı olabilir. Şekildeki örneğin 3. satırında 5 asal sayı vardır.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 9 | 16 | 17 | 46 | 45 |
| 6 | 1 | 10 | 15 | 18 | 47 | 44 |
| 5 | 2 | 11 | 14 | 19 | 48 | 43 |
| 4 | 3 | 12 | 13 | 20 | 49 | 42 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 40 | 41 |
| 26 | 29 | 30 | 33 | 34 | 39 | 38 |
| 27 | 28 | 31 | 32 | 35 | 36 | 37 |

5. $[BC]$ kenarının uzunluğu 11 olan $ABC$ üçgeninin bu kenarı üstünde bir $D$ noktası $|BD| = 8$ olacak biçimde alınıyor. $C$ ve $D$ noktalarından geçen çember $AB$ doğrusuna bir $E$ noktasında teğettir. $B$ den geçen ve $DE$ doğrusuna dik olan doğru üzerinde bulunan bir $P$ noktası için $|PE| = 7$ ise, $|DP|$ kaçtır?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) Hiçbiri




$|BE|^2=8\cdot 11=88.$ $|BE|^2+|PD|^2=$
$=(|BF|^2+|FE|^2)+(|PF|^2+|FD|^2)=$
$=(|PF|^2+|FE|^2)+(|BF|^2+|FD|^2)=$
$=|PE|^2+|BD|^2 \Rightarrow |PD|=\sqrt{49+64-88}=5$

6. 5 tabanına göre yazılımında 3 ve 4 rakamları geçmeyen en küçük 111 pozitif tam sayı nedir?

a) 760 b) 756 c) 755 d) 752 e) 750

$111 \mid 3$, $37 \mid 3$, $12 \mid 3$, $4 \mid 3$, $1$ — $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$111=(11010)_3$

$(11010)_5=625+125+5=755$

7. $x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 24x + 9 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

$(x^2-7x+3)(x^2-x+3)=0 \Rightarrow$ iki kök

$\Delta>0$ $\quad$ $\Delta<0$

$x_1+x_2=7$

8. Köşeleri, verilen bir düzgün yirmigenin köşelerinden dördünde yer alan kaç deltoid vardır?

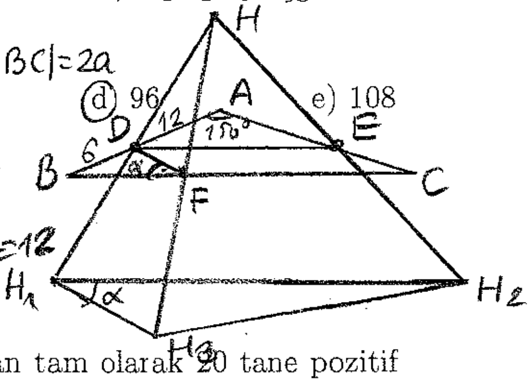
a) 105 b) 100 c) 95 d) 90 e) 85

$A_1A_2\ldots A_{20}$. Deltoidi ikizkenar üçgenlerin tabanı olan kösegen tektürlü belirler. Bu kösegen ya iki tek numaralı, ya da iki çift numaralı köseyi birlestirir $\Rightarrow$ Bu ikililerin sayısı $2\cdot\binom{10}{2}=90$'dır. Fakat eskenar dörtgenleri ikiser kare saydır. Bunlardan 5 tane var $\Rightarrow 90-5=85$

9. $ABC$ üçgeninde $|AB| = 18$, $|AC| = 24$ ve $m(\widehat{BAC}) = 150°$ dir. $D$ noktası $[AB]$, $E$ noktası $[AC]$ ve $F$ noktası $[BC]$ kenarları üstünde olmak üzere, $|BD| = 6$, $|CE| = 8$ ve $|CF| = 2|BF|$ dir. $ABC$ üçgeninin diklik merkezi $H$ noktasının $D$, $E$ ve $F$ noktalarına göre simetrikleri sırasıyla, $H_1$, $H_2$ ve $H_3$ noktaları ise, $H_1H_2H_3$ üçgeninin alanı nedir?

$|BF| = a$ olsun $\Rightarrow |CF| = 2a \Rightarrow |DE| = \frac{2}{3}|BC| = 2a$

a) 70 b) 72 c) 84 d) 96 e) 108




$\Rightarrow |H_1H_2| = 4a$. $BF \parallel H_1H_2$, $DF \parallel H_1H_2$

$\Rightarrow m(\widehat{BFD}) = m(H_2H_1H_3) = \alpha$.

$A(ABC) = \frac{18\cdot 24\cdot \sin 150°}{2} = 108$, $A(BFD) = \frac{108}{9} = 12$

$|DF| = b \Rightarrow a\cdot b\cdot \sin\alpha = 24 \Rightarrow$

$A(H_1\widehat{H_2}H_3) = \frac{1}{2}\, 2b \cdot 4a \sin\alpha = 96$

10. $n$ den küçük ve $n$ ile aralarında asal olan tam olarak 20 tane pozitif tek tam sayı bulunmasını sağlayan kaç $n$ pozitif tam sayısı vardır?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) Hiçbiri

$1 \le k \le n$ tek sayısı için $(2n-k, n) = (-k, n) = (k, n)$ olduğundan $(k, n) = 1$ sağlayan $k$ sayısına $k$ ve $2n-k$ sayılarını karşılık getirirsek aradığımız $n$ sayılarının tam olarak $\phi(2n) = 40$ koşulunu sağlayan sayılar old. görürüz.
$2n = 82, 110, 88, 132, 100, 150 \Rightarrow 6$ sayı var.

11. $x^4 + y^4 + 2x^2y + 2xy^2 + 2 = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ eşitliğini sağlayan kaç $(x, y)$ gerçel sayı ikilisi vardır?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

$(x^2+y-1)^2 + (y^2+x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2+y = y^2+x = 1 \Rightarrow$

$(x-y)(x+y-1) = 0 \Rightarrow$ 1) $x = y \Rightarrow x = y = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$

2) $x+y = 1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow$ $x = 0 \Rightarrow y = 1$, $x = 1 \Rightarrow y = 0$ $\Rightarrow$ 4 çözüm

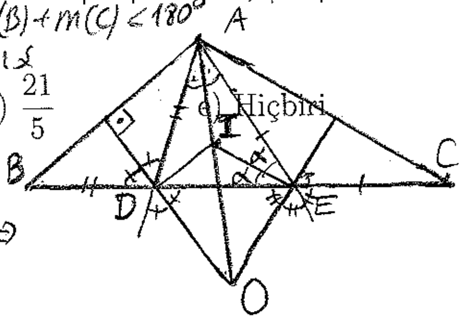
12. 100 öğrenci, öğleden önce 50 tane ikili grup halinde ve öğleden sonra da, yine 50 tane ikili grup halinde ders çalışıyorlar. Öğleden önceki ve sonraki gruplar nasıl oluşturulursa oluşturulsun, herhangi ikisi gün boyunca hiç birlikte çalışmamış $n$ öğrenci bulunabiliyorsa, $n$ sayısı en çok kaç olabilir?

a) 42 b) 38 c) 34 d) 25 e) Hiçbiri

Köşeleri $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ olan çizgede $A_i$ ile $A_j$ sabah beraber çalışmışsa kırmızı, akşam çalışmışsa mavi kenarla bağlansın. Her köşeden tam 2 kenar çıktığı için çizge çevrimlere bölünecek. Her çevrimde kenarlar k, m, k, m, ... şeklinde sıralandığı için, çevrim çift sayıda köşeden oluşacak. O halde her çevrimdeki köşelerin yarısını alabiliriz $\Rightarrow$ 50 kişi

**13.** Çevrel çemberinin merkezi $O$ olan bir $ABC$ üçgeninin $[BC]$ kenarı üstündeki $D$ ve $E$ noktaları $D$, $B$ ile $E$ arasında yer almak üzere, $|AD| = |DB| = 6$ ve $|AE| = |EC| = 8$ koşullarını sağlıyor. $ADE$ üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi $I$ noktası ve $|AI| = 5$ ise, $|IO|$ nedir? $m(\hat{A}) \leq 90°$ olsaydı, $m(A)+m(B)+m(C) < 180°$ olurdu $\Rightarrow m(\hat{A}) > 90°$. O noktası $A\hat{D}E$'nin dış

a) $\dfrac{26}{5}$ b) 5 c) $\dfrac{23}{5}$ d) $\dfrac{21}{5}$ e) Hiçbiri




açıortaylarının kesişim noktasıdır $\Rightarrow A, I, O$ doğrusaldır. $m(DIA) = 90° + \alpha =$
$= m(O\hat{E}I) + m(IEA) = m(OEA) \Rightarrow A\hat{D}I \sim A\hat{O}E \Rightarrow$
$\dfrac{6}{5+|IO|} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow |IO| = \dfrac{23}{5}$

**14.** $n$ tam sayısını bölen pozitif tam sayıların sayısı $d(n)$ ile gösterilmek üzere; 64800 sayısının tüm $k$ pozitif tam sayı bölenleri için, $d(k)$ sayılarının toplamı nedir?

a) 1440 b) 1650 c) 1890 d) 2010 e) Hiçbiri

$64800 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2$. Bu sayının bir böleni, $0 \leq x \leq 5$; $0 \leq y \leq 4$ ve $0 \leq z \leq 2$ olmak üzere $k = 2^x 3^y . 5^z$ şeklindedir ve $d(k) = (x+1)(y+1)(z+1)$
$\Rightarrow \sum d(k) = \sum_{\substack{0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 2}} (x+1)(y+1)(z+1) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq 6 \\ 1 \leq b \leq 5 \\ 1 \leq c \leq 3}} a\, b\, c = (1+2+\ldots+6)(1+\ldots+5)(1+2+3) =$
$= 21 \cdot 15 \cdot 6 = 1890$

**15.** $[1, 2013]$ aralığında yer alan $n$ gerçel sayı nasıl seçilirse seçilsin, kenar uzunlukları birbirinden farklı olup bu sayılardan bazılarına eşit olan bir çokgen bulunuyorsa, $n$ en az kaç olabilir?

a) 14 b) 13 c) 12 d) 11 e) 10

$n = 12$ ise $\{1, 1, 2, 4, 8, \ldots, 1024\}$ kümesinin bir alt kümesi koşulu sağlamıyor: en büyük sayı diğerlerinin toplamından $\geq$.tır. $n \leq 12$ ise aynı şekilde.
$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{13}$ koşulu sağlamasaydı $a_2 \geq a_1 \geq 1$; $a_3 \geq a_1 + a_2 \geq 2$;
$a_4 \geq a_1 + a_2 + a_3 \geq 4$; $\ldots$, $a_{13} \geq 10^{11} > 2013$ olurdu.

**16.** 16 beyaz ve 4 kırmızı top her biri 5 top alabilen 4 kutuya rastgele dağıtılıyor. Her kutuda tam olarak 1 kırmızı top olma olasılığı nedir?

a) $\dfrac{5}{64}$ b) $\dfrac{1}{8}$ c) $\dfrac{4^4}{\binom{16}{4}}$ d) $\dfrac{5^4}{\binom{20}{4}}$ e) $\dfrac{3}{32}$

20 top her biri 5 top alabilen 4 kutuya $\dfrac{20!}{5!\,5!\cdot 5!\;5!}$ yolla
16 beyaz top her kutuya 4'er olarak $\dfrac{16!}{4!\;4!\cdot 4!\cdot 4!}$ yolla
4 kırmızı top da her kutuya birer olarak $4!$ yolla dağıtılır.
$\Rightarrow \dfrac{\dfrac{16!}{4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!} \cdot 4!}{\dfrac{20!}{5!\,5!\,5!\cdot 5!}} = \dfrac{5^4}{\binom{20}{4}}$

**17.** Kenar uzunluğu 10 olan bir $ABC$ eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir $P$ noktası için $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 128$ ise, kenar uzunlukları $|PA|, |PB|, |PC|$ olan bir üçgenin alanı nedir?

$\triangle APB = AP_BC$, $CPA = CP_AB$; $BPC = BP_CA$ şeklinde $P_B, P_A, P_C$ alalım $\Rightarrow$

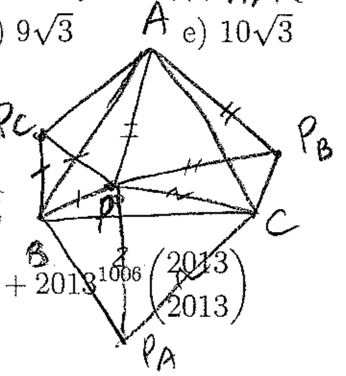
a) $6\sqrt{3}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $8\sqrt{3}$ d) $9\sqrt{3}$ e) $10\sqrt{3}$

$APP_B, CPP_A, P_CBP$ eşkenar üçgenlerdir.

Bunların alanları toplamı $128 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}$

Altıgenin alanı $= 2 \cdot A(ABC) = 50\sqrt{3} \Rightarrow$

$A(P_BPC) = A(BP_AC) = A(AP_CP) = \frac{50\sqrt{3} - 32\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$




**18.** $A = \binom{2013}{1} + 2013\binom{2013}{3} + 2013^2\binom{2013}{5} + \cdots + 2013^{1006}\binom{2013}{2013}$

toplamının 41 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 20 b) 14 c) 7 d) 1 e) Hiçbiri

$2013 \equiv 4 \pmod{41} \Rightarrow A \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1006} 2^{2k+1} \binom{2013}{2k+1} \equiv \frac{1}{4}\left[(2+1)^{2013} + (2-1)^{2013}\right] \equiv$

$\equiv \frac{1}{4}(3^{2013}+1) \pmod{41}$. $3^4 \equiv -1 \pmod{41} \Rightarrow 3^8 \equiv 1 \pmod{41}$

$2013 \equiv 5 \pmod 8 \Rightarrow A \equiv \frac{3^5+1}{4} \equiv 61 \equiv 20 \pmod{41}$

**19.** $x$ bir gerçel sayı olmak üzere,

$$S = \sqrt{x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{x^2 - 8x + 27 - 6\sqrt{2}}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 2 b) $3\sqrt{2}$ ~~c) $1 + \sqrt{2}$~~ d) $2\sqrt{2}$ e) Hiçbiri

$S = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{2}-3)^2} \Rightarrow A = (x, \sqrt{2})$, $B(2,1)$, $C = (4,3)$ alınırsa $S = |AB| + |AC|$. $\sqrt{2} \in (1,3) \Rightarrow \min S$ olması için $A$'nın $[BC]$ üzerinde olması gerekir. $\Rightarrow \min S = |BC| = 2\sqrt{2}$

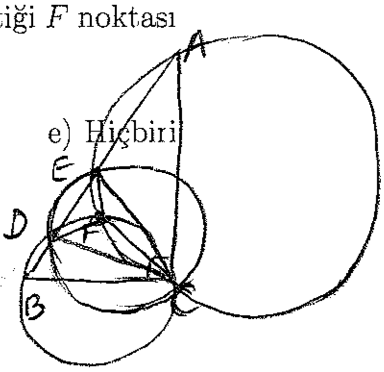
**20.** Ağırlıkları $1, 2, \ldots, 2013$ gram olan 2013 taşın her birinin üstüne $1, 2, \ldots, 2013$ sayılarından biri, her sayı tam olarak bir kez kullanılarak yazılıyor. Sayılar nasıl yazılırsa yazılsın, tüm taşların üstünde kendi ağırlıklarının yazılıp yazılmadığı, sol kefesindeki ağırlıktan sağ kefesindeki ağırlığın çıkarılmasının sonucunu gösteren iki kefeli bir tartı $k$ kez kullanılarak kontrol edilebiliyorsa, $k$ en az kaç olabilir?

0 ağırlıklı taşlar "ekleyerek" $3^7 = 2187$ taş oluşturalım. Taşları

a) 15 b) 12 c) 10 d) 7 e) Hiçbiri

hafif, orta ve ağır olarak sayca eşit 3 gruba bölelim, sonra hafif ve ağır grupları tartalım. Sorun yoksa bu üç grubu aynı kuralla üç gruba ayıralım, 3 gruptaki hafiflerle ağırları tartalım. 7 tartı sonucu tek elemanlı kümeler oluşacak. 7'den az olamaz, çünkü 1. tartıda tartılan 2 ve tartılmayan 1 grupların birinde $\geq \frac{2013}{3}$ taş olacak ki, bunlar ayırt edilmemiş olacak, 2. tartıda $\frac{2013}{3^2}$ v.s. 6. tartıda 3 taş ayırt edilemeyecek.

**21.** $m(\widehat{C}) = 90°$ olan bir $ABC$ dik üçgeninin $[AB]$ kenarı üstündeki $D$ ve $E$ noktaları $|AD| = |AC|$ ve $|BE| = |BC|$ koşullarını sağlıyor $AEC$ ve $BDC$ üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kez kesiştiği $F$ noktası için $|CF| = 2$ ise, $|ED|$ nedir?



a) $\sqrt{2}$ b) $1+\sqrt{2}$ c) 2 d) $2\sqrt{2}$ e) Hiçbiri

$m(EFC) = 180° - m(A)$, $m(DFC) = 180° - m(B) \Rightarrow m(EFD) = 90°$

$m(EFC) = 180° - m(A) = 2m(EDC)$; $m(DFC) = 2m(DEC)$

$\Rightarrow$ F noktası CED'nin çevrel çemberinin merkezidir $\Rightarrow |DF| = |EF| = |FC| = 2 \Rightarrow |DE| = 2\sqrt{2}$

**22.** $n^4 + 2n^3 - 20n^2 + 2n - 21$ sayısı, $0 \le n < 2013$ koşulunu sağlayan kaç $n$ tam sayısı için, 2013 ile bölünür?

A =

a) 6 b) 8 c) 12 d) 16 e) Hiçbiri

$A = (n^2+1)(n^2+2n-21)$; $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61 \Rightarrow n \equiv 0, 1 \pmod 3$

$n^2 \not\equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow (n+1)^2 \equiv n^2+2n-21 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow n \equiv 10 \pmod{11}$

$n^2+1 \equiv 0 \pmod{61} \Rightarrow n \equiv 11, -11 \pmod{61}$; $n^2+2n-11 \equiv 0 \pmod{61} \Rightarrow$

$n \equiv 11, -13 \pmod{61} \Rightarrow n \equiv 11, 50, 48 \pmod{61} \xrightarrow{\text{Çin Kalan T}} 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$

**23.** $f$ ve $g$ fonksiyonları tüm $x \neq -1$ gerçel sayıları için,

$$f(2x+1) + g(3-x) = x$$

$$f((3x+5)/(x+1)) + 2g((2x+1)/(x+1)) = x/(x+1)$$

koşullarını sağlıyorsa, $f(2013)$ nedir?

g'leri götürmek için $3 - y = \frac{2x+1}{x+1} \Rightarrow y = \frac{x+2}{x+1} \Rightarrow$ 1. denklemde x yerine $\frac{x+2}{x+1} \Rightarrow$

a) 1007 b) $\frac{4021}{3}$ c) $\frac{6037}{7}$ d) $\frac{4029}{5}$ e) 3016

$f\left(\frac{3x+5}{x+1}\right) + g\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \frac{x+2}{x+1}$. $2 \times I - II \Rightarrow f\left(\frac{3x+5}{x+1}\right) = \frac{x+4}{x+1}$

x yerine $\frac{-x+5}{x-3} \Rightarrow f(x) = \frac{3x-7}{2} \Rightarrow f(2013) = 3016$

**24.** Ağırlıkları 1, 2, , 77 gram olan 77 taş ağırlıkları birbirinden farklı olan $k$ gruba, her grup kendinden daha hafif gruptan daha az taş içerecek biçimde dağıtılabiliyorsa, $k$ sayısı $\{9, 10, 11, 12\}$ değerlerinden kaçını alabilir?

$1+2+\ldots+12 = 78 > 77 \Rightarrow k \neq 12$. Toplam ağırlık $= 1+\ldots+77 = 3003$

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

$k=11$ olursa, en ağır grubun ağırlığı $\geq \frac{3003}{11} = 273 \Rightarrow$ bu grup en az 4 taş içerecek $\Rightarrow 4+5+\ldots+14 = 99 > 77$

$k=10$ olursa, en ağır grubun ağırlığı $\geq \frac{3003}{10} = 300{,}3 \Rightarrow$ bu grup en az 4 taş içerecek $\Rightarrow 4+5+\ldots+13 = 85 > 77$

$k=9$ olursa, en ağır grubun ağırlığı en az $\frac{3003}{9} = 333{,}66 \Rightarrow$ bu grup en az 5 taş içerecek $\Rightarrow 5+6+\ldots+13 = 81 > 77$

**25.** $|AB| = |AC|$ olan bir $ABC$ üçgeninde $D$ noktası $[AB]$ kenarı üstünde yer almak üzere, $[CD]$ iç açıortay ve $m(\widehat{ABC}) = 40°$ dır. $[AB]$ kenarının uzantısı üstünde ve $B$ den sonra yer alan bir $F$ noktası için, $|BC| = |AF|$ dir. $[CF]$ nin orta noktası $E$ olmak üzere, $ED$ ve $AC$ doğrularının kesişim noktası $G$ ise, $m(\widehat{FBG})$ nedir? Çözüm arkada.

a) 150° b) 135° c) 120° d) 105° e) Hiçbiri

**26.** $n$ pozitif bir tam sayı olmak üzere, $n^3 + 2$ ve $(n+1)^3 + 2$ sayılarının her ikisini de bölen asal sayıların sayısı en çok kaç olabilir?

$(n^3+2,\ n^3+3n^2+3n+3) = (n^3+2,\ 3n^2+3n+3) = (n^3+2,\ 3n^2+3n+1) =$

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

$= (3n^3+6,\ 3n^2+3n+1) = (-3n^2-n+6,\ 3n^2+3n+1) = (2n+7,\ 3n^2+3n+1) =$ $\quad 6n^2+21n \quad 6n^2+6n+2$

$= (2n+7,\ 15n-2) = (2n+7,\ n-51) = (109,\ n-51) = \begin{cases} 109 \\ 1 \end{cases}$

$14n+49 \qquad 2n-102$

**27.** $(a,b)$ ikilisinin $(1,2)$, $(3,5)$, $(5,7)$, $(7,11)$ değerlerinden kaçı için $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1$ polinomunun tam olarak bir gerçel kökü vardır?

$P(-1) = 0 \Rightarrow P(x) = (x+1)Q(x),\ Q(x) = x^4 + (a-1)x^3 + (b-a+1)x^2 + (a-1)x + 1 =$

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

$= (x^2+1)^2 [x^2 + (a-1)x + 1] + (b-a-1)x^2$

$a=1,\ b=2$ ise, $Q(x) > 0 \Rightarrow$ tek kök

$a=3,\ b=5$ ise, $Q(x) > 0 \Rightarrow$ tek kök

$a=5,\ b=7$ veya $a=7,\ b=11$ ise, $Q(0)=1$ ve $Q(-1) > 0$.
Aradeğer teoreminden dolayı başka gerçek kök de var.

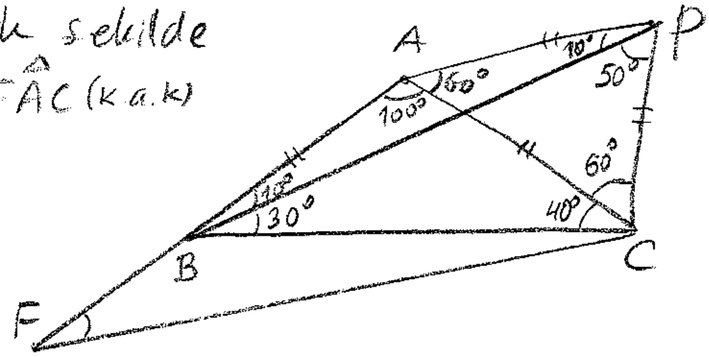
**28.** Başlangıçta tahtaya bir $(m,n)$ pozitif tam sayı ikilisi yazılmıştır. Ayşe ve Burak sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu sayılardan birini seçip silerek, yerine bu sayının yarısından küçük olmayan bir tam sayı yazıyor. Hamle yapamayan oyunu kaybediyor. Oyuna her sefer Ayşe başlamak üzere, oyun $(m,n) = (7,79), (17,71), (10,101), (21,251), (50,405)$ için birer kez oynanırsa, Ayşe bunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Kaybettiren ikililer: $(n,n)$ (her hamlede simetrik işlem

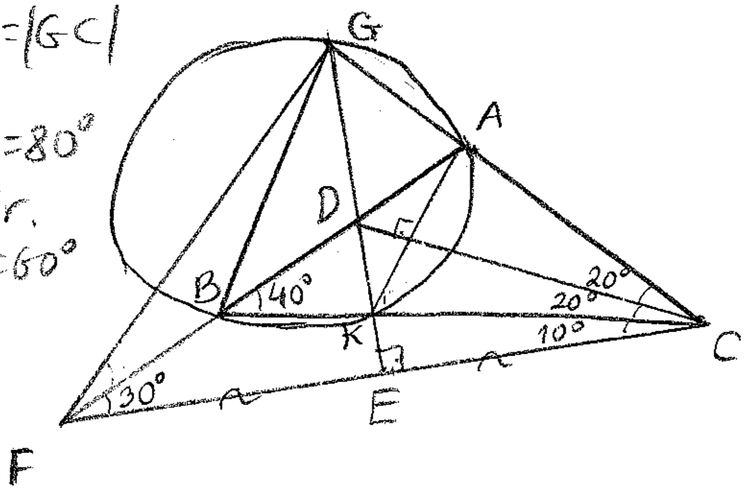
a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

yapılır); $(2n+1, n)$ ($2n+1$ silinip $n+1 \le k \le 2n$ yazılırsa, $k$'nın yerine $n$ yazılır: $(n,n)$; $n$ silinip $s$ yazılırsa, $2n+1$ silinip $2s+1$ yazılır); $(4n+3, n)$ (yine bir sonraki hamleyle $(2n+1,n)$ veya $(4s+3, s)$ elde edilir); $(8n+7, n)$; $(16n+15, n)$ v.s. Geriye kalan durumlarda Ayşe bu durumlardan birine gelerek oyunu kazanır $\Rightarrow$ sadece $(17,71)$ durumunda Ayşe kaybeder.

(25) $m(CAP)=60°$; $|AC|=|AP|$ olacak şekilde P noktası alalım. $\Rightarrow \overset{\triangle}{BCP} = \overset{\triangle}{FAC}$ (K.A.K) $\Rightarrow m(\widehat{AFC})=30°$



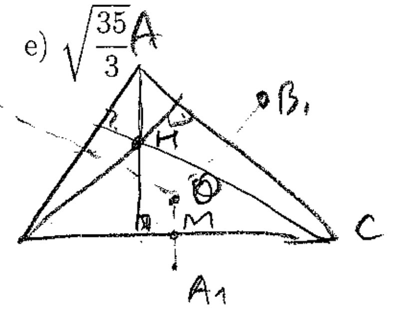

$DE \perp FC \Rightarrow |DF|=|DC|, |GF|=|GC|$
$\Rightarrow m(GFD)=20°$.
$m(\widehat{GKB})=m(\widehat{EKC})=80°, m(\widehat{FAG})=80°$
$\Rightarrow$ GBKA kirişler dörtgenidir.
$m(\widehat{FDE})=m(\widehat{EDC})=60° \Rightarrow m(\widehat{ADC})=60°$
$\Rightarrow \overset{\triangle}{DAC} \cong \overset{\triangle}{DKC}$ (A.K.A) $\Rightarrow$
$|DA|=|DK|, |AC|=|KC| \Rightarrow$
$DC \perp AK \Rightarrow m(\widehat{DAK})=30°$
$\Rightarrow m(\widehat{BGK})=30° \Rightarrow$
$m(\widehat{GBA}) = 60°-30°=30° \Rightarrow$
$m(\widehat{GBF})=150°$.



**29.** $|AB| = 5$, $|BC| = 6$ ve $|AC| = 7$ olan bir $ABC$ üçgeninin çevrel çemberinin merkezi $O$ nun $BC$, $AC$ ve $AB$ doğrularına göre simetriği sırasıyla, $A_1$, $B_1$ ve $C_1$ noktaları olsun. $A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin $A$ noktasına uzaklığı nedir?

$\overset{\triangle}{ABC}$'nin yüksekliklerinin kesişim noktası H olsun.

a) 6   b) $\sqrt{29}$   c) $\dfrac{19}{2\sqrt{6}}$   d) $\dfrac{35}{4\sqrt{6}}$   e) $\sqrt{\dfrac{35}{3}}$




$|AH| = 2|OM| = |OA_1|$, $AH \parallel OM \Rightarrow$
$AOA_1H$ paralelkenar $\Rightarrow |HA_1| = |OA| = R$. Benzer şekilde $|HB_1| = |HC_1| = R \Rightarrow A_1B_1C_1$'in çevrel çemberinin merkezi H'dir. $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sqrt{9\cdot4\cdot3\cdot2} = 6\sqrt{6}$
$\Rightarrow R = \frac{35}{24}\sqrt{6}$. Kos.Teor $\Rightarrow \cos A = \frac{19}{35} \Rightarrow |HA| = 2R\cos A = \frac{19\sqrt{6}}{12}$

**30.** 2013 den küçük kaç $n$ pozitif tam sayısı için, $n$ yi bölen en küçük asal sayı $p$ olmak üzere, $p^2 + p + 1$ sayısı $n$ yi böler?

$p^2+p+1 = a\cdot b$ ve $a, b > p$ olursa $a\cdot b \geq (p+1)^2 > p^2+p+1 \Rightarrow$ çelişki $\Rightarrow$

a) 212   b) 206   c) 191   d) 185   e) 173

$p^2+p+1$ asal. $n = p(p^2+p+1)m$ ve m'nin en küçük asal çarpanı $\geq p$.
$p=2$ ise, $p^2+p+1 = 7$. $2013 = 14\cdot143+1 \Rightarrow m \in \{1,2,\dots,143\}$
$p=3$ ise, $p^2+p+1 = 13$. $2013 = 39\cdot51+24 \Rightarrow m \in \{1,3,5,\dots,51\}$
$p=5$ ise, $p^2+p+1 = 31$. $2013 = 155\cdot12+153 \Rightarrow m \in \{1,5,7,11\}$; $p=7$ ise, $p^2+p+1 = 57$ asal değil
$p=11$ ise, $p^2+p+1 = 133$ asal değil. $p \geq 13$ ise $n \geq 13\cdot183 = 2379 > 2013 \Rightarrow 143+26+4 = 173$

**31.** Gerçel sayılardan oluşan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi her $n \geq 3$ için,

$$a_n = (n-1)\,a_1 + (n-2)\,a_2 + \cdots + 2\,a_{n-2} + a_{n-1}$$

$a_{n+1} = na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n \Rightarrow$

eşitliğini sağlamaktadır. $a_{2011} = 2011$ ve $a_{2012} = 2012$ ise, $a_{2013}$ nedir?

$a_{n+1} - a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + 2a_n$

a) 6025   b) 5555   c) 4025   d) 3456   e) 2013

$a_{n+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + 2a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + 2a_{n+1} = 3a_{n+1} - a_1$

$\Rightarrow a_{2013} = 3\cdot2012 - 2011 = 4025$

**32.** Yalnızca 1, 2, 3 rakamları kullanılarak, ilk ve son basamaklarında aynı rakam yer alan ve herhangi ardışık iki basamağında aynı rakam yer almayan kaç farklı 10 basamaklı pozitif tam sayı yazılabilir?

$f(1)=3$; $f(2)=0$; $f(3)=6$; $k \geq 4$ için $f(n) = 3\cdot2^{n-2} - f(n-1)$,

a) 768   b) 642   c) 564   d) 510   e) 456

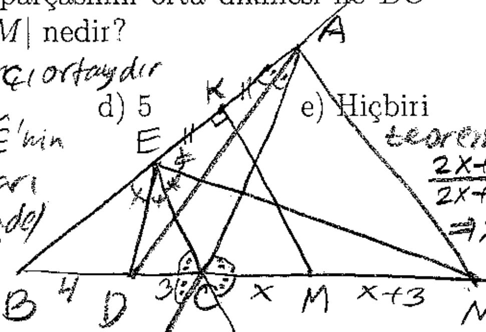
çünkü ilk rakam 3 yolla, 2., 3., ..., (n−1). rakam 2'şer yolla seçilebilir, n. rakam da tek yolla seçilir; fakat (n−1). rakam ilk rakamla aynıysa, n. rakamla ilk rakam aynı olamıyor, dolayısıyla bunları, yani $f(n-1)$'i çıkarmalıyız.
$\Rightarrow$ Adım-adım hesaplayarak $f(10) = 510$ buluruz

**33.** Bir $ABC$ üçgeninde $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = 4$ ve $|DC| = 3$ olacak biçimde yer alan $D$ noktası için, $[AD]$ iç açıortaydır. $[AB]$ kenarı üstünde yer alan ve $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{DEC})$ koşulunu sağlayan $A$ dan farklı bir $E$ noktası için, $[AE]$ doğru parçasının orta dikmesi ile $BC$ doğrusu $M$ noktasında kesişiyorsa, $|CM|$ nedir?

$\overset{\triangle}{AEC}$ için ED dış açıortay, AD de iç açıortaydır

a) 12  b) 9  c) 7  d) 5  e) Hiçbiri

⇒ CD dış açıortaydır ⇒ Yine $\overset{\triangle}{AEC}$ için $\hat{E}$'nin iç açıortayı, $\hat{A}$ ve $\hat{C}$'nin dış açıortayları bir N noktasında kesişir (⇒N, BC üzerinde) $m(D\hat{E}N)=m(D\hat{A}N)=90^\circ$ ⇒ E ve A, çapı [DN] olan çemberin üzerinde, M de bu çemberin merkezidir. Dış açıortay teoreminden $\frac{2x+3}{2x+10}=\frac{3}{4}$ ⇒ $x=9$




**34.** $a! + b^3 = 18 + c^3$ eşitliğini sağlayan kaç $(a, b, c)$ pozitif tam sayı üçlüsü vardır?

$a=1$ veya $2$ ise $b^3-c^3=17$ veya $16$. $c\geq 2$ ise, $b^3-c^3\geq (c+1)^3-c^3=3c^2+3c+1\geq 19$.

a) 4  b) 3  c) 2  d) 1  e) 0

$c=1$ için de çözüm yoktur. $a\geq 3$ ise, $3|b^3-c^3$. $b\not\equiv c \pmod 3$ ise, $3\nmid b^2+bc+c^2$

$\Rightarrow b\equiv c \pmod 3 \Rightarrow 3|b^2+bc+c^2 \Rightarrow 9|b^3-c^3 \Rightarrow a\geq 6$. $a\geq 7$ ise, $7|18+c^3-b^3$

$x^3\equiv 0,\pm 1 \pmod 7 \Rightarrow c^3-b^3\not\equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow a=6 \Rightarrow c^3-b^3=702=2\cdot 3^3\cdot 13 \Rightarrow$

$c\equiv b \pmod 3 \Rightarrow c-b=3k \Rightarrow k(3k^2+cb)=2\cdot 3\cdot 13$. $k\geq 2$ ise $3k^2+cb>26 \Rightarrow$

1) $k=1 \Rightarrow cb=78-3=3\cdot 5^2$ ve $c-b=3$ ⇒ çözüm yok

2) $k=2 \Rightarrow cb=27$ ve $c-b=6 \Rightarrow c=9;\ b=3$ ⇒ Tek çözüm: $(6,3,9)$

**35.** $f(x) = x + 1 + \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ olmak üzere, $\underbrace{f(f(\cdots(f(n))))}_{21 \text{ kere}} = 2013$ olmasını sağlayan en küçük $n$ pozitif tam sayısı nedir? (Burada $\lfloor a\rfloor$ ile, $a$ gerçel sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı gösterilmektedir.)

f artandır ⇒ 1-1 ⇒ $f^{-1}=g$ olsun. $1<k<n$ ise, $g(n^2+k)=n^2-n+k=$

a) 1214  b) 1202  c) 1186  d) 1178  e) Hiçbiri

$=(n-1)^2+n+k-1<n^2 \Rightarrow g^2(n^2+k)=g((n-1)^2+n+k-1)=(n-1)^2+n+k-1-n=$

$=(n-1)^2+(k-1)$. $2013=44^2+44+33$. $f(44^2+32)=44^2+32+1+44=2013\Rightarrow$

$g(2013)=44^2+32 \Rightarrow g^3(2013)=g^2(44^2+32)=43^2+31\Rightarrow g^5(2013)=42^2+30\Rightarrow$

$\ldots \Rightarrow g^{21}(2013)=34^2+22=1178$

**36.** En az 10, en çok 50 üyesi olan bir satranç kulübü, $K > E$ olmak üzere, $K$ kız ve $E$ erkekten oluşuyor. Herhangi iki üyenin kendi aralarında tam olarak bir maç yaptığı bir satranç turnuvasında her galibiyete 1, her beraberliğe 1/2 ve her yenilgiye 0 puan veriliyor. Turnuva bittiğinde, her üyenin topladığı puanların tam olarak yarısını erkek üyelerle yaptığı maçlardan aldığı gözleniyorsa, $E$ sayısı kaç farklı değer alabilir?

Kızlar kendi aralarında yapmış olduğu maçlardan

a) 5  b) 4  c) 3  d) 2  e) 1

toplam $\binom{K}{2}$ puan almışlar ⇒ Tüm puanları $K(K-1)$ dir. Erkekler erkeklerden $\binom{E}{2}$ puan almış ⇒ toplam puanları $E(E-1)$'dir. Maç sayısı $\binom{K+E}{2}$ olduğunda $\frac{(K+E)(K+E-1)}{2}=K(K-1)+E(E-1) \Rightarrow$ $(K-E)^2=K+E \Rightarrow K+E=16, 25, 36, 49$ olabilir.

Örnekler: Kızlar ve erkekler kendi aralarında berabere kalmışlar, her erkek kızlarda k-1 beraberlik yapmış, geriye kalanlara yenilmiş.

21. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı

Cevap Anahtarı

| A | | B | |
|---|---|---|---|
| 1 | a | 1 | d |
| 2 | a | 2 | c |
| 3 | a | 3 | d |
| 4 | c | 4 | a |
| 5 | a | 5 | e |
| 6 | c | 6 | e |
| 7 | b | 7 | e |
| 8 | e | 8 | c |
| 9 | d | 9 | b |
| 10 | ~~b~~ e | 10 | b |
| 11 | c | 11 | d |
| 12 | e | 12 | b |
| 13 | c | 13 | b |
| 14 | c | 14 | c |
| 15 | b | 15 | c |
| 16 | d | 16 | e |
| 17 | a | 17 | a |
| 18 | a | 18 | d |
| 19 | d | 19 | a |
| 20 | d | 20 | e |
| 21 | d | 21 | e |
| 22 | a | 22 | d |
| 23 | e | 23 | a |
| 24 | e | 24 | a |
| 25 | a | 25 | c |
| 26 | c | 26 | a |
| 27 | c | 27 | c |
| 28 | ~~a~~ e | 28 | b |
| 29 | c | 29 | d |
| 30 | e | 30 | b |
| 31 | c | 31 | c |
| 32 | d | 32 | d |
| 33 | b | 33 | c |
| 34 | d | 34 | b |
| 35 | d | 35 | a |
| 36 | b | 36 | d |