www.mustafayagci.com, **Aralık 2005**

Geometri Köşesi

Alper ÇAY, *alpercay@hotmail.com*

Fermat'nın Son Üçgeni

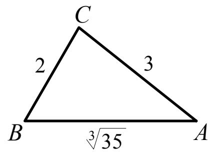
Fermat'nın Son Teoremi'ni duymuşsunuzdur. Herkes bilir. İlk iddia edilişinden 350 yıl sonra, yani ancak birkaç yıl önce Andrew Wiles tarafından bulunan kanıtını yeryüzünde üç beş kişi ya bilir ya bilmez. Kanıtı değil de teoremi bilmeyen üç beş kişiden biriyseniz, hatırlatalım: n, 2'den büyük bir doğal sayı olduğunda $a^n + b^n = c^n$ eşitliğini sağlayan a, b, c tamsayıları bulmak mümkün değildir.

Hayatını bir üçgenin kenarları olan a, b, c'ye adamış bir geometrisever olarak bu teorem aklıma hep ''Acaba bunu sağlayan üçgenler bulabilir miyiz?'' sorusunu getirmiştir. Yazının başlığının Fermat'nın Son Üçgeni olduğuna bakmayın, bunlar benim üçgenim!
Bu yazıda a, b, c değerlerinin tamsayı olma şartını kaldırarak, eşitliği sağlayan üçgenlerin türlerini araştıracağız. Hatta bazen n'nin de doğal olma şartını kaldıracağız. Böylelikle, n değiştikçe üçgenlerin nasıl değiştiğini sınıflandırmaya çalışacağız.[1] Başlıyoruz.

Yukarıdaki denklemde $n = 2$ ise her seviyedeki öğrencinin pek iyi bildiği Pisagor Teoremi ile karşılaşırız. Bu teoremin karşıtının da doğru olduğunu kanıtlamıştık. İşte bu karşıt teorem gereği, üçgenimiz bir dik üçgen olur.

Sıra $n = 3$'e geldi. Eğer $a^3 + b^3 = c^3$ ise karşımızda ne tür bir üçgen vardır? n'nin diğer sıralarında da $a^n + b^n = c^n$ ise üçgende neler olup bittiğini anlamak için kosinüs teoremini kullanacağız.

Önce $a^3 + b^3 = c^3$ denklemini sağlayan üçgenlerin mevcut olduğunu gösteren bir örnek verelim. Kenarları $a = 2$, $b = 3$ ve $c = \sqrt[3]{35} \approx 3{,}271$ olan bir üçgeni çizer ve üçgenin üç açısını da ölçersek, hepsinin 90 dereceden küçük olduğunu görürüz.



Hesap makinesi yalan söylemiyorsa;

$m(ACB) = 78{,}95\ldots$
$m(CBA) = 64{,}10\ldots$
$m(BAC) = 36{,}95\ldots$

İnanmayan, üç kere kosinüs teoremi uygulayarak üç iç açı ölçüsünün de kosinüsünün pozitif olduğunu görebilir. O halde üçü de dardır. Bu örnek ABC üçgeninin var olduğunu, kenarlarının $a^3 + b^3 = c^3$ denklemini sağladığını ve üçgenin dar açılı olduğunu söyler. Ama bu şartı sağlayan her üçgenin dar açılı olduğunu söylemez. Bunu kanıtlamak gerekir.

$a^3 + b^3 = c^3$ denkleminde $c > a$ ve $c > b$ olduğu açıktır ve kosinüs teoreminden

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos C$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $a^3 + b^3 = c^3$ eşitliğinde yerine yazarsak,

$$a^3 + b^3 = c\cdot c^2 = c\cdot(a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos C)$$

elde ederiz. Buradan $\cos C$'yi çekersek,

$$\cos C = \frac{a^2\cdot(c-a) + b^2\cdot(c-b)}{2\cdot a\cdot b\cdot c}$$

buluruz. $c > a$ ve $c > b$ olduğundan kesrin payı pozitiftir, paydanın pozitif olduğu zaten belli. O halde $\cos C > 0$ yani C açısı dar.
Diğer yandan $c > a$ ve $c > b$ eşitsizliklerinden üçgenin en büyük kenarının c olduğunu, dolayısıyla en büyük iç açısının C olduğunu biliyoruz. C açısı dar ise diğerleri mecburen dardır. Artık gönül rahatlığıyla diyebiliriz ki, bir üçgenin kenarları $a^3 + b^3 = c^3$ denklemini sağlıyorsa, üçgen dar açılıdır.

Burada şöyle bir yorum da yapabiliriz:
Pisagor Teoreminin karşıtına göre, herhangi bir üçgenin kenarları üzerine üç kare çizilirse büyük karenin alanı diğer iki karenin alanları toplamına

[1] The Pythagorean Theorem and Beyond: a classification of shapes of triangles, Guanshen Ren, The College Math Journal, September 2004

eşitse üçgen dik üçgendir. Bunu $a^3 + b^3 = c^3$ denklemine uyarlarsak şöyle dememiz gerekir: Üçgenin kenarları kullanılarak bir küp yapılsa büyük küpün hacmi diğer iki küpün hacimleri toplamına eşit olduğunda üçgen dar açılıdır.

Şimdi $n > 3$ iken $a^n + b^n = c^n$ denklemini sağlayan üçgenin neye benzediğini bulalım.

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= c^n \\ &= c^{n-2} \cdot c^2 \\ &= c^{n-2} \cdot (a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C) \end{aligned}$$

olur. Buradan cos C çekilirse,

$$\cos C = \frac{a^2 \cdot (c^{n-2} - a^{n-2}) + b^2 \cdot (c^{n-2} - b^{n-2})}{2 \cdot a \cdot b \cdot c^{n-2}}$$

elde edilir. Yine verilen eşitlik gereği, $c > a$ ve $c > b$ olduğunu bildiğimizden pay ve paydanın pozitif yani cos C'nin pozitif olduğu açıktır. O halde C açısı yine dar. En büyük açı dar diye diğerleri yine mecburen dar.
Böylece şunu söyleyebiliriz:
Eğer bir üçgenin kenarları $n \geq 3$ iken $a^n + b^n = c^n$ denklemini sağlıyorsa üçgen dar açılıdır.
Fakat buradan her dar açılı üçgenin $a^n + b^n = c^n$ denklemini sağlayacağı çıkartılmamalıdır. Eşkenar üçgen bunun tersine bir örnektir.

Peki, $a^n + b^n \neq c^n$ ise ne olur? Doğal olarak üçgen ya dar açılı ya da geniş açılı olur.

Yukarıdaki argümanlar n'nin 2'den büyük reel sayı değerleri için üçgenin yine dar açılı olacağını ispatlamak için kullanılabilir. Fakat n sayısı 1 ile 2 arasındaki bir reel sayı ise farklı bir sonuç elde ederiz. Böyle üçgenler gerçekten de mevcuttur, örneğin $a = 1$, $b = 4$, c = $\sqrt[3]{9^2}$ aldığımızda $n = \dfrac{3}{2}$ değerine sahiptir. Bu durumda hala $c > a$ ve $c > b$'dir. Kosinüs teoremini kullanabilmek için c^2 terimini içeren bir ifadenin denklemlerde bulunması gereklidir. Bunu sağlamak için $a^n + b^n = c^n$ denkleminin her iki tarafını c^{n-2} ile çarpar ve kosinüs teoremini uygularsak

$$(a^n + b^n) \cdot c^{n-2} = c^2,$$

$$\cos C = \frac{a^n \cdot (a^{2-n} - c^{2-n}) + b^n \cdot (b^{2-n} - c^{2-n})}{2 \cdot a \cdot b}$$

$a^{2-n} - c^{2-n} < 0$, $b^{2-n} - c^{2-n} < 0$ olduğundan cos $C < 0$ sonucunu elde ederiz. Yani C açısı geniş açıdır. Öyleyse üçgenimiz geniş açılıdır.

Şimdi n bir reel sayı ve $n \geq 1$ olmak üzere kenarları $a^n + b^n = c^n$ denklemini sağlayan üçgenleri sınıflandırabiliriz.
Eğer $1 < n < 2$ ise üçgen geniş açılı üçgendir; eğer $n = 1$ ise üçgen dejenere olarak bir doğru parçasına dönüşür; eğer $n = 2$ ise üçgen dik üçgendir; eğer $n > 2$ ise üçgen dar açılı bir üçgendir.

Burada a ve b kenar uzunluklarını sabit tutup, n'yi çok büyük bir sayı seçersek ilginç bir durum ortaya çıkıyor. En azından bana ilginç geliyor. Üçgen bir ikizkenar üçgene dönüşmeye başlıyor. Örneğin, $a = 2$, $b = 3$, $n = 10$ aldığımızda $c \approx 3{,}00516$ değerini alır. $n = 20$ seçseydik $c \approx 3{,}00005$ bulunurdu ki bu 3'e çok yakın bir değerdir. Limit durumunda, n sonsuza yaklaştığında, üçgen ikizkenar olur. Sabit a ve b sayıları ($0 < a <$ b) ve n'nin sonsuz büyük değerleri için $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ (= c) sayısının limiti b'dir.

Dikkat edersek, $n = 1$ için üçgen bir doğru parçasına dönüşüyordu. Aklımıza şöyle bir sorunun gelmesi doğaldır: Acaba $0 < n < 1$ durumunda ne olur? Daha doğrusu bu duruma uyan bir üçgen mevcut mudur? Böyle bir üçgen mevcut değildir; çünkü $0 < n \leq 1$ olması durumunda üçgen eşitsizliği sağlanmaz, yani $a + b \leq c$ olur.