$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}=1$$ DİYAFONT DENKLEMİNE BİR BAKIŞ

Bu çalışma hazırlanırken Japonya Matsuyama Universitesinde çalışan Yuya Dan ın çalışmalarından faydalanılmıştır.Kendisiyle yaptığım yazışmaların bayağı faydasını gördüğümü bu vesileyle tekrar belirtmek isterim.Gördüğünüz eksiklikleri ya da olumlu olumsuz düşüncelerinizi emreorhan44@gmail.com adresinden ulaştırabilirsiniz.

Bu çalışma da çarpımsal terslerinin toplamı 1 olan tam sayılarla ilgileneceğiz.Bir diğer ifadeyle 1 sayısını birim kesirlerin toplamı şeklinde yazacağız.Bu işlem için genel bir methodu sizlerle paylaşacağım.Bu method Diyafont Denklemlerde işimize yarayacak.Artık başlayalım.

2,3 ve 6 sayılarını ele alalım.Bu sayıların çarpımsal terslerini alıp toplarsak,

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ olur.

Aynı durumu 3,4,4,8 ve 24 sayıları için yazarsak,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=1$$

Bu şekilde herhangi bir pozitif rasyonel sayıyı birim kesirlerin toplamı şeklinde yazabiliriz.Yukarıdaki ifadelerde yazdığımız birim kesirleri rastgele bulmadık bunun bir methodu var.Aslında bu yazıyı yazmanın asıl amacı da bunu sizlerle paylaşmak.

Şimdi bununla ilgili bir teorem verip örneklerimizi genişletelim.

Theorem. *For any positive integer n,*

$$\sum_{\alpha \in S_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j! j^{\alpha_j}} = 1,$$

where the summation about S_n runs through all possible $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ in $\mathbb{N}^n$ such that

$$\sum_{j=1}^{n} j\alpha_j = n.$$

Teoremi anlamak için çok fazla İngilizce gerekmiyor☺

Örneklerimize başlayabiliriz artık.

<u>Örnek 1:</u>

n=2 durumu ile başlayalım.Gerçi çözüm aşikar ama formülün uygulanması bakımından inceleyelim.

$a_1 + 2a_2 = 2$ olur.

Burada $a_1 = 2, a_2 = 0$ (1.durum)ve $a_1 = 0,\ a_2 = 1$(2.durum)

1.duruma göre,

$2!.1^2.0!.2^0 = 2$

2.duruma göre,

$0!.1^0.1!.2^1 = 1$ olur.Buradan, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

<u>Örnek 2:</u>

n=3 için inceleyelim.

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 3$ olur.

Burada $a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = 0$ (1.durum), $a_1 = 1,\ a_2 = 1, a_3 = 0$(2.durum)

$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$(3.durum)

1.duruma göre,

$3!.1^3.0!.2^0.0!.3^0 = 6$

2.duruma göre,

$1!.1^1.1!.2^1.0!.3^0 = 2$

3.duruma göre,

$0!.1^0.0!.2^0.1!.3^1 = 3$ olur.Buradan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

Örnek 3:

n=4 için inceleyelim.

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 4$ olur.

Burada $a_1 = 4, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$ (1.durum), $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0$ (2.durum)

$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0$ (3.durum), $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 0$ (4.durum)

$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1$ (5.durum)

1.duruma göre,

$4!.1^4.0!.2^0.0!.3^0.0!.4^0 = 24$

2.duruma göre,

$2!.1^2.1!.2^1.0!.3^0.0!.4^0 = 4$

3.duruma göre,

$1!.1^1.0!.2^0.1!.3^1.0!.4^0 = 3$

4.duruma göre,

$0!.1^0.2!.2^2.0!.3^0.0!.4^0 = 8$

5.duruma göre,

$0!.1^0.0!.2^0.0!.3^0.1!.4^1 = 4$ olur.Buradan $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = 1$

Örnek 4:

n=5 için inceleme okuyucu bırakılmıştır☺☺☺☺☺

Örnek 5:

n=6 için inceleyelim.

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 6\alpha_6 = 6,$$

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	payda
6	0	0	0	0	0	$6! = 720$
4	1	0	0	0	0	$4! \cdot 2 = 48$
3	0	1	0	0	0	$3! \cdot 3 = 18$
2	2	0	0	0	0	$2! \cdot 2! \cdot 2^2 = 16$
2	0	0	1	0	0	$2! \cdot 4 = 8$
1	1	1	0	0	0	$2 \cdot 3 = 6$
1	0	0	0	1	0	5
0	3	0	0	0	0	$3! \cdot 2^3 = 48$
0	1	0	1	0	0	$2 \cdot 4 = 8$
0	0	2	0	0	0	$2! \cdot 3^2 = 18$
0	0	0	0	0	1	6

$$\frac{1}{720} + \frac{1}{48} + \frac{1}{18} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{48} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} \quad =1$$

Burada paylaştığımız yöntem $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n} = 1$ $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n \in Z)$ diaphont denklemlerinin çözümüne bir fikir oluşturabilir.Fikir oluşturmasından öte çözümü bulmak için kullanılan bir yöntemlerden biridir.Çalışmayı daha ileri taşımak isteyen arkadaşlar olursa arkaya yararlanılabilecek kaynakların listesini ekliyorum.Faydalı olması dileğiyle herkese iyi çalışmalar dilerim.

EMRE ORHAN

Kısaca e44

[1] L. Brenton and R. Bruner, "On Recursive Solutions of a Unit Fraction Equation," J. Austral. Math. Soc. Ser. A 57, No. 3, pp.341–356 (1994).

[2] L. Brenton and R. Hill, "On the Diophantine Equation $1 = \Sigma 1/n_i + 1/\Pi n_i$ and a Class of Homologically Trivial Complex Surface Singularities," Pacific J. Math. Vol. 133, No. 1, pp.41–67 (1988).

[3] N. Burshtein, "On Distinct Unit Fractions Whose Sum Equals 1," Discrete Mathematics, Vol. 300, No. 1–3, pp.213–217 (2005).

[4] P. Erdös and R. Graham, "Unit Fractions," *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory*, Monographie No. 28, L'Enseign. Math. Univ. de Genevé, pp.30–44 (1980).

[5] P. Erdös and S. Stein, "Sums of Distinct Unit Fractions," Proc. Amer. Math. Soc. 14, pp.126–131 (1963).

[6] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, New York (1981).

[7] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Inrtoduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press (2008).

[8] T. Salat and J. Tomanova, "On the Class of all Reciprocal Bases for Integers," Acta Mathematica Universitatis Comenianae, Vol. LXXVI, No. 2, pp.257–261 (2007).