



XVIII. ULUSAL ANTALYA
MATEMATİK OLİMPİYATI
İKİNCİ AŞAMA SINAV SORULARI



LİSE 2-3

11 Mayıs 2013

LİSE 2-3

1. p bir asal sayı ve $n \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere, n sayısı $(p - 1)$ 'i ve p sayısı da $(n^3 - 1)$ 'i bölüyor. p sayısının, n cinsinden ifadesini bulunuz.

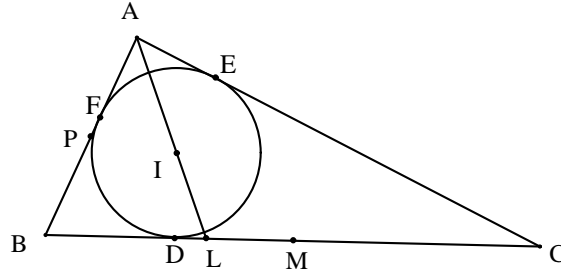
2. Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan pozitif x, y ve z sayılarının hepsini bulunuz:

$$4\sqrt[3]{x} - y\sqrt[3]{z} \geq 3; \quad 4\sqrt[3]{y} - z\sqrt[3]{x} \geq 3; \quad 4\sqrt[3]{z} - x\sqrt[3]{y} \geq 3$$

3. Bir ABC üçgeninde $|AC| > |AB|$ ve ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I , iç teğet çemberin $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarına değme noktaları sırasıyla, F , D , E olsun. P ve M noktaları sırasıyla, $[AB]$ ve $[BC]$ kenarlarının orta noktaları ve $[AL]$, A açısının açıortayı olsun.

a) $[DE] \cap [AL] = \{X_1\}$ ve $[MP] \cap [AL] = \{X_2\}$ ise, X_1 ve X_2 noktalarının çakıştığını, dolayısıyla, $[DE] \cap [PM] \in [AL]$ olduğunu gösteriniz.

b) $[DE] \cap [PM] = \{X\}$ ise, $[BX] \perp [AL]$ olduğunu kanıtlayınız.



4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x < y$ reel sayıları için $f(x) < f(y)$ eşitsizliğini sağlarsa, kesin artan; $f(x) > f(y)$ eşitsizliğini sağlarsa, kesin azalan fonksiyon olarak adlandırılır. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) - f(y) = f(x - y)g(y)$$

fonksiyonel denkleminin kesin artan veya kesin azalan f çözümünün varlığını garanti eden tüm $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

5. Koordinat düzleminde iki dörtgen verilsin: $A_1A_2A_3A_4$ ve $B_1B_2B_3B_4$.

A_i ve B_i noktalarının koordinatları, sırasıyla, (a_i, \tilde{a}_i) ($i = 1, 2, 3, 4$) ve (b_i, \tilde{b}_i) ($i = 1, 2, 3, 4$)

olsun. Eğer $\sum_{i=1}^4 a_i \neq \sum_{i=1}^4 b_i$, veya $\sum_{i=1}^4 \tilde{a}_i \neq \sum_{i=1}^4 \tilde{b}_i$ ise, o halde düzlem üzerinde öyle bir C noktası

vardır ki, $\sum_{i=1}^4 |CA_i| = \sum_{i=1}^4 |CB_i|$ eşitliği sağlanır; kanıtlayınız.

NOT : i) Size asıl çözümlerin olacağı 5 kağıt ve karalamaları yapacağımız 5 kağıt verilmiştir. Karalamalar sizde kalacaktır. Lütfen, asıl çözümü yapacağımız kağıtların üzerine adınızı, soyadınızı ve sınıfınızı yazınız.

ii) Asıl çözümlerinizi anlaşılır ve açıklayıcı bir biçimde yazınız. Bir kağıtta, 1'den fazla çözüm yapmayınız. Ek kağıt isteyebilirsiniz.

iii) Sınav süresi 3.5 saattir.

BAŞARILAR