

X. MERSİN MATEMATİK OLİMPİYATLARI

7-8. SINIFLAR

1. 4 kişilik bir ailede sadece torunun bursu iki katına çıkarılırsa ailenin bütçesi %5, sadece annenin geliri iki katına çıkarılırsa bütçe %25, sadece babanın geliri iki katına çıkarılırsa bütçe %40 artmaktadır. Büyükbabanın emeklilik maaşı iki katına çıkarılırsa ailenin toplam bütçesi yüzde kaç artar?

- a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

2. a, b, c sıfırdan ve birbirinden farklı rakamlar olmak üzere

$$1 : (a + 2013 : (b + 1 : c))$$

ifadesinin en büyük değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{1}{201}$ b) $\frac{10}{2033}$ c) $\frac{11}{2035}$ d) $\frac{19}{4045}$ e) Hiçbiri

3. Tahtada 1,2,3,4,5,6,7,8,9 sayıları yazılıdır. Bu sayılardan bazıları silinmiş, kalan sayıların (birbirinden farklı) ikiye çarpımı yazılmıştır. Tahtada bulunan sayıların birler basamağında 0'dan 9'a kadar bütün rakamlar bulunduğu göre en fazla kaç sayı silinmiş olabilir?

- a) 5 b) 3 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

4. Piyango biletleri üzerindeki numaralar 000000'dan 999999'a kadar olan sayılardır. Ardışık iki basamak arasındaki farkın 5 olduğu numaraya sahip bilete "mutlu bilet" adı veriliyor. Mutlu biletlerin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $10^6 - 10 \cdot 9^5$ b) $10^6 - 9^6$ c) $10^6 - 8 \cdot 9^5$ d) $10^6 - 7 \cdot 9^5$ e) Hiçbiri

5. 1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak rakamları farklı 5 basamaklı bütün sayılar oluşturulmuştur. Bu sayılar artan sırada dizildiğinde 43521 sayısı kaçınıcı sırada bulunur?

- a) 90 b) 89 c) 85 d) 80 e) Hiçbiri

6. m ve n aralarında asal olan doğal sayılardır. $m + 2013n$ ve $n + 2013m$ sayılarının mümkün en büyük ortak böleni aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $2012^2 - 1$ b) $2013^2 + 1$ c) $2013^2 - 1$ d) $2012^2 + 1$ e) Hiçbiri

7.
$$a^2b^2 + a^2 + b^2 = 504$$

denklemini sağlayan (a, b) tamsayı ikililerinin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 8 b) 7 c) 5 d) 2 e) 0

8. İki basamaklı A doğal sayısının rakamlarının kareleri toplamı, A^2 sayısının rakamları toplamına eşittir. Bu özelliğe sahip kaç tane A sayısı vardır?

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) Hiçbiri

9. Bir küpün yüzleri boyandıktan sonra eşit küplere bölünmüştür. Yalnız bir yüzü boyalı olan küplerin sayısı ile hiçbir yüzü boyalı olmayan küplerin sayısı eşit olduğuna göre boyalı küp kaç küpe bölünmüştür?

- a) 8 veya 512 b) 32 veya 512 c) 8 veya 128 d) 32 veya 128 e) 8 veya 1024

10. Alanı 2 olan bir üçgende herhangi üçü doğrusal olmayan 15 nokta verilmiştir. Köşeleri bu noktalar üzerinde ve alanı $\frac{2}{7}$ 'den küçük olan bir üçgen vardır. İspatlayınız.

11. $2013^{2013} + 2011^{2011}$ ve $2013^{2011} + 2011^{2013}$ sayılarından hangisi daha büyüktür? Açıklayınız.

12. a, b, c sıfırdan farklı sayılar olmak üzere

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{ve} \quad bx^2 + cx + a = 0$$

denklemleri ortak köke sahip olduğuna göre bu kökü bulunuz.

X. MERSİN MATEMATİK OLİMPİYATLARI

13. Bir ABC üçgeninin AC ve BC kenarları üzerindeki X ve Y noktaları $m(\widehat{ABX}) = m(\widehat{YAC})$, $m(\widehat{AYB}) = m(\widehat{BXC})$ ve $|XC| = |YB|$ olacak şekilde seçilmiştir. ABC üçgeninin iç açı ölçülerini bulunuz.

14. Aşağıdaki özelliğe sahip bir n doğal sayısı bulunuz:

“ $n, n+1, n+2, \dots, n+20$ sayılarının her biri ile $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ sayısının 1’den büyük ortak böleni vardır.”

9. SINIF

1. a, b, c sıfırdan ve birbirinden farklı rakamlar olmak üzere

$$1 : (a + 2013 : (b + 1 : c))$$

ifadesinin en büyük değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{1}{201}$ b) $\frac{10}{2033}$ c) $\frac{11}{2035}$ d) $\frac{19}{4045}$ e) Hiçbiri

2. Tahtada 1,2,3,4,5,6,7,8,9 sayıları yazılıdır. Bu sayılardan bazıları silinmiş, kalan sayıların (birbirinden farklı) ikişer çarpımı yazılmıştır. Tahtada bulunan sayıların birler basamağında 0’dan 9’a kadar bütün rakamlar bulunduğu göre en fazla kaç sayı silinmiş olabilir?

- a) 5 b) 3 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

3. m ve n aralarında asal olan doğal sayılardır. $m + 2013n$ ve $n + 2013m$ sayılarının mümkün en büyük ortak böleni aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $2012^2 - 1$ b) $2013^2 + 1$ c) $2013^2 - 1$ d) $2012^2 + 1$ e) Hiçbiri

4. t, m doğal sayılar, q ise bir asal sayıdır.

$$q^t = 2^m + 1$$

olduğuna göre t ’nin muhtemel bütün değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 3 b) 4 c) 6 d) 7 e) Hiçbiri

5. Piyango biletleri üzerindeki numaralar 000000’dan 999999’ya kadar olan sayılardır. Ardışık iki basamak arasındaki farkın 5 olduğu numaraya sahip bilete “mutlu bilet” adı veriliyor. Mutlu biletlerin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $10^6 - 10 \cdot 9^5$ b) $10^6 - 9^6$ c) $10^6 - 8 \cdot 9^5$ d) $10^6 - 7 \cdot 9^5$ e) Hiçbiri

6. $(x+1)^{63} + (x+1)^{62}(x-1) + (x+1)^{61}(x-1)^2 + \dots + (x-1)^{63} = 0$ denkleminin reel köklerinin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 0 b) 1 c) 3 d) 63 e) Hiçbiri

7. Bir küpün yüzleri boyandıktan sonra eşit küplere bölünmüştür. Yalnız bir yüzü boyalı olan küplerin sayısı ile hiçbir yüzü boyalı olmayan küplerin sayısı eşit olduğuna göre boyalı küp kaç küpe bölünmüştür?

- a) 8 veya 512 b) 32 veya 512 c) 8 veya 128 d) 32 veya 128 e) 8 veya 1024

8. Ayşe tahtaya beş tane tamsayı yazmıştır. Bu beş sayı ikinci dereceden bir polinomun katsayıları ve kökleridir. Aras bu sayılardan birini sildiğinde, artan sırada, -5, 2, 3 ve 4 sayıları kalmıştır. Aras’ın sildiği sayı aşağıdakilerden hangisidir?

X. MERSİN MATEMATİK OLİMPİYATLARI

- a) 6 b) 12 c) -12 d) -30 e) -60

9. Köşe noktaları bir çember üzerinde olan $ABCD$ dörtgeni verilmiştir. M bu dörtgenin köşegenlerinin kesişim noktası, O_1 ve O_2 ise, sırasıyla, ABM ve CMD üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin merkezleridir. B ve C noktalarını içermeyen \widehat{AD} çember yayının orta noktası K olsun. $m(\widehat{O_1KO_2}) = 60^\circ$ ve $|KO_1| = 10$ olduğuna göre $|O_1O_2|$ uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

10. Alanı 2 olan bir üçgende herhangi üçü doğrusal olmayan 15 nokta verilmiştir. Köşeleri bu noktalar üzerinde ve alanı $2/7$ 'den küçük olan bir üçgen vardır. İspatlayınız.

11. a, b reel sayılar olmak üzere

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

12. x, y doğal sayılar olmak üzere $x^2 + x + 1$ sayısı y sayısının bir tam kuvvetine, $y^2 + y + 1$ sayısı ise x sayısının bir tam kuvvetine eşittir. (x, y) ikililerinin sayısını bulunuz.

13. a, b, c sıfırdan farklı sayılar olmak üzere

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{ve} \quad bx^2 + cx + a = 0$$

denklemleri ortak köke sahip olduğuna göre bu kökü bulunuz.

14. Aşağıdaki özelliğe sahip bir n doğal sayısı bulunuz:

“ $n, n+1, n+2, \dots, n+20$ sayılarının her biri ile $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ sayısının 1'den büyük ortak böleni vardır.”

10. SINIF

1. 1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak rakamları farklı 5 basamaklı bütün sayılar oluşturulmuştur. Bu sayılar artan sırada dizildiğinde 43521 sayısı kaçınıcı sırada bulunur?

- a) 90 b) 89 c) 85 d) 80 e) Hiçbiri

2. $a^2b^2 + a^2 + b^2 = 504$

denklemini sağlayan (a, b) tamsayı ikililerinin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 8 b) 7 c) 5 d) 2 e) 0

3. n bir doğal sayı olmak üzere

$$\left\lfloor \frac{10^n}{x} \right\rfloor = 2013$$

denkleminin tamsayı çözümü olduğuna göre n sayısının en küçük değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) Hiçbiri

4. Ayşe tahtaya beş tane tamsayı yazmıştır. Bu beş sayı ikinci dereceden bir polinomun katsayıları ve kökleridir. Aras bu sayılardan birini sildiğinde, artan sırada, -5, 2, 3 ve 4 sayıları kalmıştır. Aras'ın sildiği sayı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 6 b) 12 c) -12 d) -30 e) -60

5. Bir üçgenin her bir iç açısının tanjantı bir doğal sayıdır. Bu sayıların çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

X. MERSİN MATEMATİK OLİMPİYATLARI

a) 2

b) 3

c) 6

d) 8

e) 12

6. m ve n aralarında asal olan doğal sayılardır. $m + 2013n$ ve $n + 2013m$ sayılarının mümkün en büyük ortak böleni aşağıdakilerden hangisidir?

a) $2012^2 - 1$

b) $2013^2 + 1$

c) $2013^2 - 1$

d) $2012^2 + 1$

e) Hiçbiri

7. $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{1+4x} + \sqrt{x^2+y^2-2y-3} = \sqrt[4]{x^4-16} - y + 5$

ise $x + y$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) 2

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{2}$

d) $\frac{7}{2}$

e) 4

8. x, y doğal sayılar olmak üzere $x^2 + x + 1$ sayısı y sayısının bir tam kuvvetine, $y^2 + y + 1$ sayısı ise x sayısının bir tam kuvvetine eşittir. (x, y) ikililerinin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a) ∞

b) 5

c) 3

d) 1

e) 0

9. Konveks $ABCD$ dörtgeninde E ve F , sırasıyla, BC ve CD kenarlarının orta noktalarıdır. AE , AF ve BF doğru parçaları dörtgeni, alanları ardışık doğal sayılar olan dört üçgene bölüyor. ABD üçgeninin alanı en çok kaç olabilir?

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

10. $P(x)$ katsayıları negatif olmayan, ikinci dereceden bir polinomdur. Her x, y gerçel sayıları için

$$(P(xy))^2 \leq P(x^2)P(y^2)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

11. p_1, p_2, \dots, p_n ($n \geq 2$) farklı asal sayılar olmak üzere $N = p_1 p_2 \dots p_n$ olsun. N sayısı $p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_n - 1$ sayılarının her birine bölünebilir. Bu durumda N sayısının mümkün olan bütün değerlerini bulunuz.

12. a, b, c sıfırdan farklı sayılar olmak üzere

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{ve} \quad bx^2 + cx + a = 0$$

denklemleri ortak köke sahip olduğuna göre bu kökü bulunuz.

13. ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi O olsun. O noktasından çıkan ve AO doğrusuna dik olan ışın BC doğrusunu M noktasında kesiyor. Daha sonra O noktasından MA doğrusuna OD dikmesi çiziliyor. Bu durumda A, B, C ve D noktalarının aynı çember üzerinde olduğunu ispatlayınız.

14. \sqrt{n} sayısına en yakın tamsayı a_n ise

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2012}} + \frac{1}{a_{2013}}$$

toplamını bulunuz.

11-12. SINIFLAR

1. t, m doğal sayılar, q ise bir asal sayıdır.

$$q^t = 2^m + 1$$

olduğuna göre t 'nin muhtemel bütün değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

e) Hiçbiri

X. MERSİN MATEMATİK OLİMPİYATLARI

2. 1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak rakamları farklı 5 basamaklı bütün sayılar oluşturulmuştur. Bu sayılar artan sırada dizildiğinde 43521 sayısı kaçınıcı sırada bulunur?
- a) 90 b) 89 c) 85 d) 80 e) Hiçbiri

3. Ayşe tahtaya beş tane tamsayı yazmıştır. Bu beş sayı ikinci dereceden bir polinomun katsayıları ve kökleridir. Aras bu sayılardan birini sildiğinde, artan sırada, -5, 2, 3 ve 4 sayıları kalmıştır. Aras'ın sildiği sayı aşağıdakilerden hangisidir?
- a) 6 b) 12 c) -12 d) -30 e) -60

4.
$$\left\lfloor \frac{x}{1!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2!} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x}{10!} \right\rfloor = 1001$$
 denkleminin tamsayı çözümünün rakamları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?
- a) 8 b) 15 c) 17 d) 21 e) 23

5. x, y pozitif sayılardır. s sayısı $x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ sayılarının en küçüğüdür. Buna göre s sayısının mümkün olan en büyük değeri aşağıdakilerden hangisidir?
- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 3 e) Hiçbiri

6. $f(x) = x^2 + 12x + 30$ olmak üzere
- $$f(f(f(f(f(x)))))) = 0$$
- denkleminin en büyük kökü a ise $(a+6)^{32}$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?
- a) 2 b) 6 c) 12 d) 18 e) Hiçbiri

7. a 'nın belli bir değeri için $4^x - 4^{-x} = 2 \cos ax$ denkleminin 2013 kökü vardır. a 'nın aynı değeri için $4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4$ denkleminin kaç kökü vardır?
- a) 2013 b) 2014 c) 4026 d) 4028 e) Hiçbiri

8. Artan aritmetik dizinin ardışık beş terimi asal sayılardır. Bu dizinin ortak farkı en az kaç olabilir?
- a) 4 b) 6 c) 8 d) 12 e) Hiçbiri

9. Konveks $ABCD$ dörtgeninde E ve F sırasıyla BC ve CD kenarlarının orta noktalarıdır. AE, AF ve BF doğru parçaları dörtgeni, alanları ardışık tamsayılar olan dört üçgene bölüyor. ABD üçgeninin alanı en çok kaç olabilir?
- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

10. $P(x)$ katsayıları negatif olmayan, ikinci dereceden bir polinomdur. Her x, y gerçel sayıları için

$$(P(xy))^2 \leq P(x^2)P(y^2)$$

eşitsizliğin doğru olduğunu gösteriniz.

11. a, b reel sayılar olmak üzere

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

12. ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi O olsun. O noktasından çıkan ve AO doğrusuna dik olan ışın BC doğrusunu M noktasında kesiyor. Daha sonra O noktasından MA doğrusuna OD dikmesi çiziliyor. Bu durumda A, B, C ve D noktalarının aynı çember üzerinde olduğunu ispatlayınız.

X. MERSİN MATEMATİK OLİMPİYATLARI

13. p_1, p_2, \dots, p_n ($n \geq 2$) farklı asal sayılar olmak üzere $N = p_1 p_2 \dots p_n$ olsun. N sayısı $p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_n - 1$ sayılarının her birine bölünebilir. Bu durumda N sayısının mümkün olan bütün değerlerini bulunuz.

14. \sqrt{n} sayısına en yakın tamsayı a_n ise

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2012}} + \frac{1}{a_{2013}}$$

toplamını bulunuz.

CEVAP ANAHTARLARI

7-8. SINIFLAR

1 c

2 b

3 b

4 a

5 a

6 c

7 a

8 d

9 a

10 -

11 (birincisi)

12 (1)

13 ($60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$)

14 (9440)

9. SINIF

1 b

2 b

3 c

4 a

5 a

6 b

7 a

8 d

9 e

10 -

11 -

12 (0)

13 (1)

14 (9440)

10. SINIF

1 a

2 a

3 c

4 d

5 b

6 c

7 d

8 e

9 d

10 -

11 (6,42,1806)

12 (1)

13 -

14 (1331/15)

11-12. SINIFLAR

1 a

2 a

3 d

4 c

5 b

6 b

7 c

8 b

9 d

10 -

11 -

12 -

13 (6,42,1806)

14 (1331/15)