2012 UMO 2.aşama P6 : Sırasıyla [AE] ve [AF] doğru parçaları üstünde yer alan B ve D noktaları için ABF ve ADE üçgenlerinin A köşelerine ait dış teğet çemberleri aynıdır. Bu çemberin merkezi I , $[BF]\cap[DE] = \{C\}$ ve IAB, IBC, ICD, IDA, IAE, IEC, ICF, IFA üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla, P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 olsun.

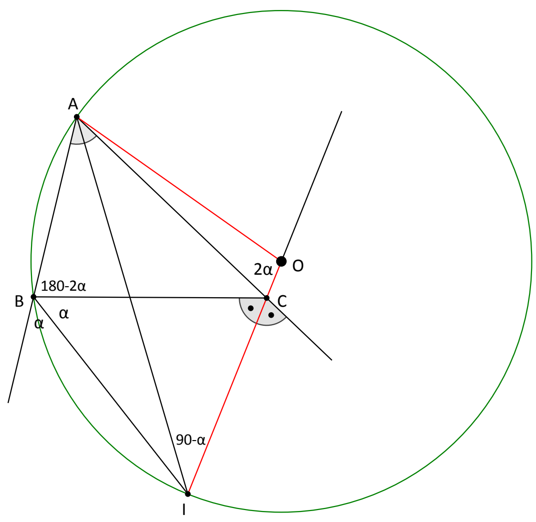
a. P_1, P_2, P_3, P_4 ve Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

b. Bu çemberlerin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olmak üzere , O_1 , O_2 , I noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

Çözüm (***E.Erdoğan*****) :**

a. Çözümün daha anlaşılır olması için bahsi geçen üçgenlerin çevrel çember merkezlerinin bulunuşunu ayrıca irdeleyelim.

ABC bir üçgen ve I , A köşesine ait dış teğet çemberin merkezi olmak üzere; ABI üçgeninin çevrel çember merkezi IC üzerinde ve benzer şekilde, ACI ve BCI üçgenlerinin de sırasıyla IB ve IA üzerinde olacaktır. Bunu aşağıdaki örnek şekilde açılar arasındaki ilişkileri inceleyerek görebiliriz.



Bu açıklama yardımıyla IAB ile ICD üçgenlerinin merkezleri olan P_1 ve P_3, IF üzerinde, IBC ile IDA üçgenlerinin merkezleri olan P_2 ve P_4 , IE üzerinde olacaktır.

Benzer şekilde IAE ile ICF üçgenlerinin merkezleri olan Q_1 ve Q_3, ID üzerinde, IEC ile IFA üçgenlerinin merkezleri olan Q_2 ve Q_4, IB üzerinde olacaktır.

Ayrıca açıortayın açısal özelliklerinden,

$$\angle BIA = \angle CID = \frac{\angle BFA}{2} = \alpha \quad \text{ve} \quad \angle EIB = \frac{\angle BCE}{2} = \frac{\angle DCF}{2} = \angle FID = \beta \quad \text{olur.}$$

Buraya kadar bulunanlar ile

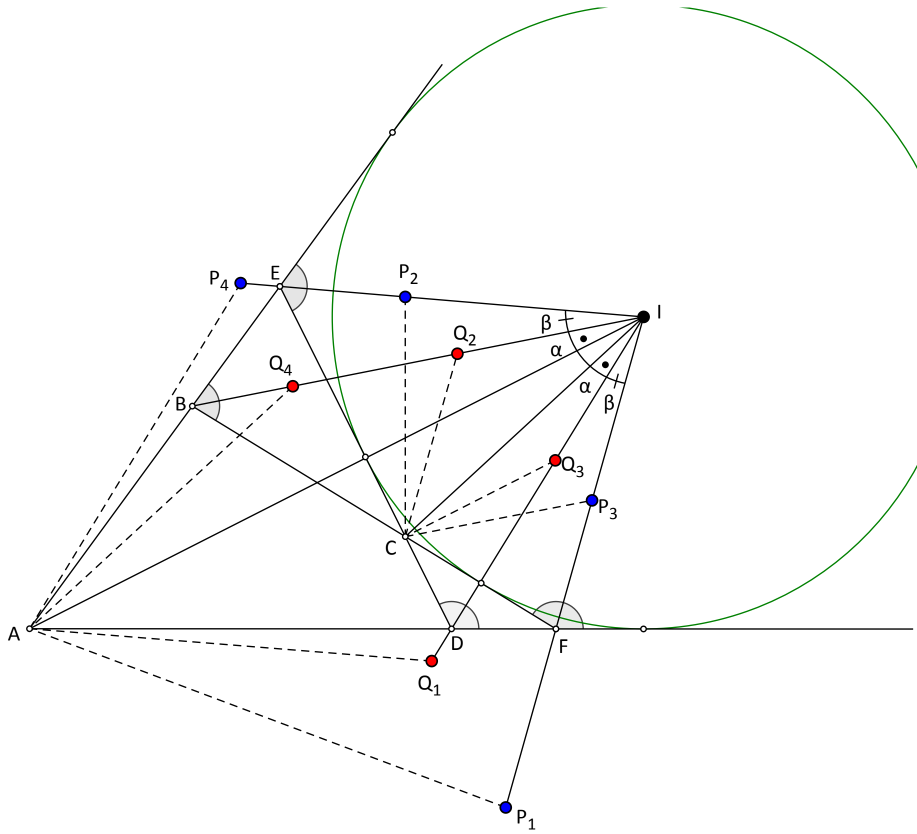
$$\triangle P_1AI \sim \triangle P_2CI \quad , \quad \triangle P_4AI \sim \triangle P_3CI \quad , \triangle Q_1AI \sim \triangle Q_2CI \quad , \quad \triangle Q_4AI \sim \triangle Q_3CI$$

benzerliklerinin varlığını görebiliyoruz. Şimdi bu benzerliklerin getirdiği oranları yazalım.

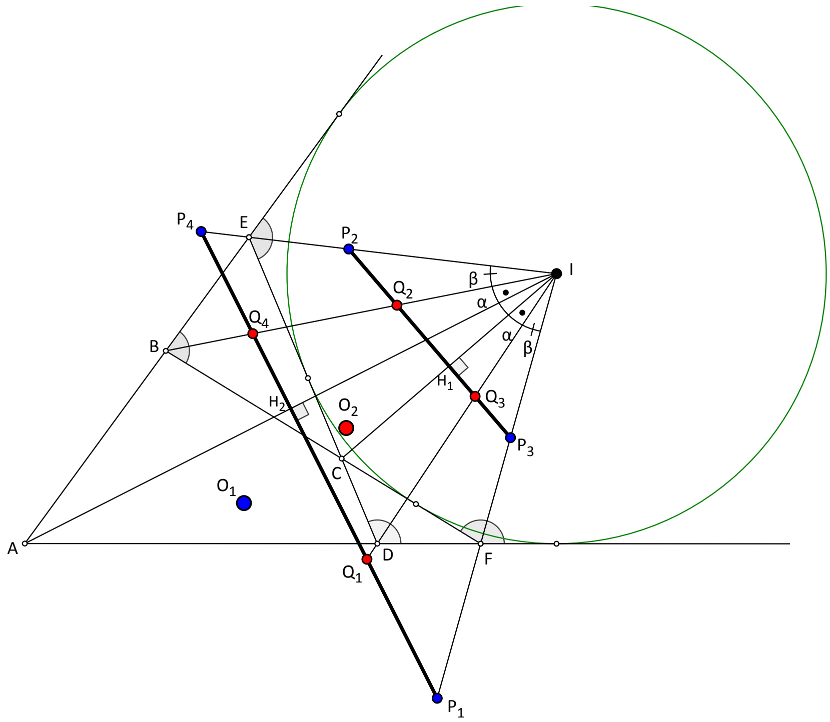
$$\triangle P_1AI \sim \triangle P_2CI \ , \ \triangle P_4AI \sim \triangle P_3CI \quad \Rightarrow \frac{|AI|}{|CI|} = \frac{|IP_1|}{|IP_2|} = \frac{|IP_4|}{|IP_3|} \ \Rightarrow |IP_3|.|IP_1| = |IP_2|.|IP_4| \quad \textbf{......(1)}$$

$$\triangle Q_1AI \sim \triangle Q_2CI \ , \ \triangle Q_4AI \sim \triangle Q_3CI \Rightarrow \frac{|AI|}{|CI|} = \frac{|IQ_1|}{|IQ_2|} = \frac{|IQ_4|}{|IQ_3|} \ \Rightarrow |IQ_3|.|IQ_1| = |IQ_2|.|IQ_4| \quad \textbf{......(2)}$$

(1) ve **(2)** ‘de bulunan eşitlikler bizden istenenin doğruluğunu göstermektedir.



b. P_2, P_3, Q_2, Q_3 noktaları [IC] ‘nın , P_1, P_4, Q_1, Q_4 noktaları [IA] ‘nın orta dikme doğrusu üzerinde bulunurlar. Orta dikmelerin [IC] ve [IA] yı kestiği noktaları sırasıyla H_1 ve H_2 ile gösterelim.



$\triangle IQ_2Q_3 \sim \triangle IQ_1Q_4$ **….(3)** ve $\triangle IP_2P_3 \sim \triangle IP_1P_4$ **…..(4)** benzerliklerini inceleyeceğiz.

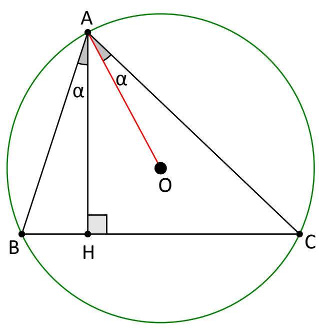
(3) benzerliği için üçgenlerin çevrel çember yarıçapları sırasıyla r_1 ve r_2 olsun. Buna göre;

$$\frac{AH_1}{AH_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \textbf{……(5)}$$

(4) benzerliği için üçgenlerin çevrel çember yarıçapları sırasıyla R_1 ve R_2 olsun. Buna göre;

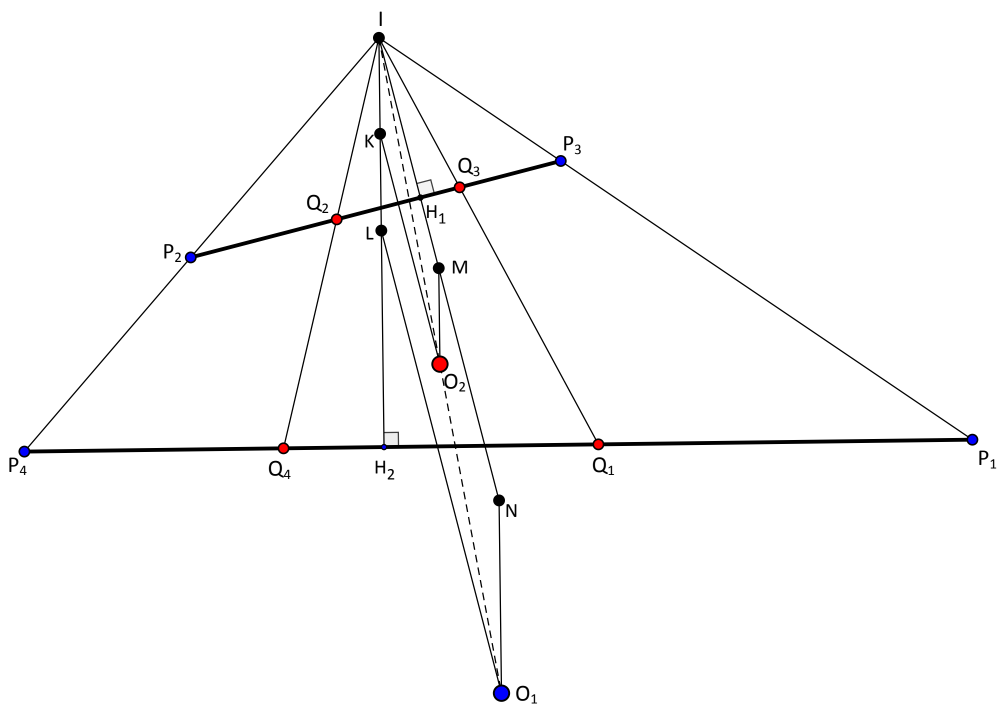
$$\frac{AH_1}{AH_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \textbf{……(6)}$$

‘’Bir üçgende yüksekliğin izogonal eşleniği olan doğru, üçgenin çevrel merkezinden geçmektedir’’. Aşağıda verilen şekilde *AH* ile *AO* izogonal eşleniktir yani; $\angle BAH = \angle CAO$



Buna göre $\triangle IQ_2Q_3$ ve $\triangle IP_2P_3$ ün çevrel merkezleri bu üçgenlerin yüksekliği olan AH_1 in izogonal eşleniği olan AH_2 üzerinde bulunurlar.

Benzer şekilde $\triangle IQ_1Q_4$ ve $\triangle IP_1P_4$ ün çevrel merkezleri de bu üçgenlerin yükseklikleri olan AH_2 nin izogonal eşleniği olan AH_1 üzerindedir.



IQ_2Q_3 , IP_2P_3 , IQ_1Q_4 , IP_1P_4 üçgenlerinin çevrel çember merkezleri sırasıyla K,L,M,N olsun $MO_2 \perp P_1P_4$, $NO_1 \perp P_1P_4$ olduğundan $AH_2 // MO_2 // NO_1$ olur. $LO_1 \perp P_2P_3$, $KO_2 \perp P_2P_3$ olduğundan $AH_1 // KO_2 // LO_1$ olur. Buradan AKO_2M ile ALO_1N nin birer paralelkenar olduğunu görüyoruz.

$|IK| = r_1$, $|IL| = R_1$, $|IM| = r_2$, $|IN| = R_2$

(5) ve **(6)** yı da göz önüne alarak O_1 , O_2 , I noktalarının doğrusal olduğunu görebiliriz.