UMO-2013/1

Soru 10
n den küçük ve n ile aralarında asal olan tam olarak 20 tane pozitif tek tam sayı bulunmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

Çözüm (B.DEMİR)

Asal çarpanları $p_1, p_2, \cdots, p_n$ olan bir $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n}$ sayısından küçük ve n ile aralarında asal olan pozitif tam sayı adedi

$$\varphi(n) = (p_1^{r_1} - p_1^{r_1-1}) \cdot (p_2^{r_2} - p_2^{r_2-1}) \cdots (p_n^{r_n} - p_n^{r_n-1})$$

formülü (*Euler Totient fonksiyonu*) ile bulunur.

Durum 1:

Varsayalım n çift bir pozitif tam sayı olsun. O halde bir asal çarpanı 2 dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= (2^{r_1} - 2^{r_1-1}) \cdot (p_2^{r_2} - p_2^{r_2-1}) \cdots (p_n^{r_n} - p_n^{r_n-1}) \\ &= 2^{r_1-1} \cdot (p_2^{r_2} - p_2^{r_2-1}) \cdots (p_n^{r_n} - p_n^{r_n-1})\end{aligned}$$

olur. Ayrıca n çift olduğundan, n den küçük ve n ile aralarında asal olan sayıların **tamamı** tek tam sayıdır. O halde

$$\begin{aligned}&\varphi(n) = 20 \\ &\Rightarrow 2^{r_1-1} \cdot (p_2^{r_2} - p_2^{r_2-1}) \cdots (p_n^{r_n} - p_n^{r_n-1}) = 20 \\ &\Rightarrow 2^{r_1-1} \cdot (p_2^{r_2} - p_2^{r_2-1}) \cdots (p_n^{r_n} - p_n^{r_n-1}) = 2^2 \cdot 5\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliklerden $n = 2 \cdot 5^2 = 50$, $n = 2^2 \cdot 11 = 44$ ve $n = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$ olur.

Durum 2:

Varsayalım n tek bir pozitif tam sayı olsun. Euler formülünün nasıl elde edildiği araştırılırsa, n tek pozitik tam sayısı için, n den küçük ve n ile aralarında asal pozitif **tek** tamsayı adedinin

$$\varphi_T(n) = \frac{(p_1^{r_1} - p_1^{r_1-1}) \cdot (p_2^{r_2} - p_2^{r_2-1}) \cdots (p_n^{r_n} - p_n^{r_n-1})}{2}$$

formülü ile elde edileceği kanıtlanabilir.
Bu durumda

$$20 = \frac{(p_1^{r_1} - p_1^{r_1-1}) \cdot (p_2^{r_2} - p_2^{r_2-1}) \cdots (p_n^{r_n} - p_n^{r_n-1})}{2}$$

olmalıdır. Yani

$$\begin{aligned}2 \cdot 20 &= (p_1^{r_1} - p_1^{r_1-1}) \cdot (p_2^{r_2} - p_2^{r_2-1}) \cdots (p_n^{r_n} - p_n^{r_n-1}) \\ 2^3 \cdot 5 &= p_1^{r_1-1}\left(p_1 - 1\right) \cdot p_2^{r_2-1}\left(p_2 - 1\right) \cdots p_n^{r_n-1}\left(p_n - 1\right)\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikten de $n = 41$, $n = 5 \cdot 11 = 55$ ve $n = 3 \cdot 5^2 = 75$ olur.

Böylece 6 farklı n değeri bulunur.