

27. (a, b) ikilisinin $(1, 2), (3, 5), (5, 7), (7, 11)$ değerlerinden kaçını için $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1$ polinomunun tam olarak bir gerçel kökü vardır?

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

e) 0

Çözüm:

$$x^5 + 1 + ax(x^3 + 1) + bx^2(x + 1)$$

$$= (x + 1)[x^4 + (a - 1)x^3 + (b - a + 1)x^2 + (a - 1)x + 1]$$

-1 denklemin her zaman köküdür. yani bizden istenen sağ taraftaki

4. dereceden denklemin kökünün olmaması. Şimdi değerleri deneyebiliriz.

$$(a, b) = (1, 2) \text{ ise denklem } x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 = 0 \text{ ve } x^2 = (-1)$$

olur. Kök çıkmaz yani bu ikili bizden istenen koşulu sağlar.

$$(a, b) = (3, 5) \text{ ise denklem } x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2 = 0$$

kök gelmez. bu da sağlar.

$$(a, b) = (5, 7) \text{ için } x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = (x^2 + 2x + 1)^2 - 3x^2 = 0$$

$$(x^2 + (2 + \sqrt{3})x + 1)(x^2 + (2 - \sqrt{3})x + 1) = 0 \text{ olur sol taraftan iki}$$

kök gelir. bu ikili sağlamaz.

$$(a, b) = (7, 11) \text{ için } x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 6x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 - 6x^2 = 0$$

$$(x^2 + (3 + \sqrt{6})x + 1)(x^2 + (3 - \sqrt{6})x + 1) = 0 \text{ olur sol taraftan iki}$$

kök gelir bu ikili de sağlamaz. iki tanesi sağladığından cevap C