36. En az 10, en çok 50 üyesi olan bir satranç kulübü, $K > E$ olmak üzere, K kız ve E erkekten oluşuyor. Herhangi iki üyenin kendi aralarında tam olarak bir maç yaptığı bir satranç turnuvasında her galibiyete 1, her beraberliğe 1/2 ve her yenilgiye 0 puan veriliyor. Turnuva bittiğinde, her üyenin topladığı puanların tam olarak yarısını erkek üyelerle yaptığı maçlardan aldığı gözleniyorsa, E sayısı kaç farklı değer alabilir?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

ÇÖZÜM:

Erkeklerin sayısı: E Kızların sayısı: K diyelim E+K=n

İlk olarak her maçtan iki tarafın kazandığı toplam puan her zaman 1 olduğundan herkesin toplam puanı $\binom{n}{2}$ dir. Erkekler kendi arasında $\binom{E}{2}$ maç yapmıştır. Yani erkekler erkeklerle yaptıkları maçlarda toplam $\binom{E}{2}$ puan kazanmıştır. O zaman kızlarla yaptıkları maçlarda $\binom{E}{2}$ puan kazanırlar (toplam $2\binom{E}{2}$) . Kızlar-erkekler toplam $\binom{E}{1}\binom{K}{1}$ maç yapmıştır. Erkekler $\binom{E}{2}$ puan kazandığından kızlar erkeklerle yaptığı maçlardan $\binom{E}{1}\binom{K}{1} - \binom{E}{2}$ puan kazanmıştır. O zaman kızlar toplam $2\binom{E}{1}\binom{K}{1} - 2\binom{E}{2}$ ve herkes toplam

$$2\binom{E}{1}\binom{K}{1} - 2\binom{E}{2} + 2\binom{E}{2} = \binom{n}{2} = \binom{E+K}{2}$$

$$4EK = E^2 + K^2 + 2EK - E - K$$

$E + K = (E - K)^2$ $\qquad 10 \leq E + K \leq 50$ ***olduğundan***

$E + K \in \{16, 25, 36, 49\}$ ***. E<K olduğundan her birinden bir E değeri gelir ve toplam 4 tane E değeri vardı.***