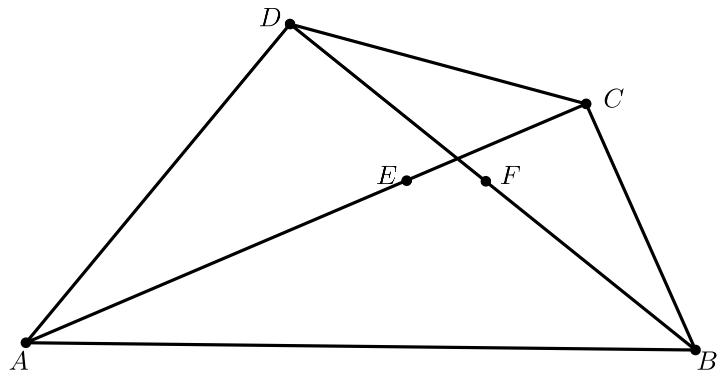
Ulusal Matematik Olimpiyatı 2. Aşama
ve
Takım Seçme Sınavı Soruları

İçindekiler

30. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Hazırlık Ekibi Seçme Sınavı - 1988[1]

1. Ardışık üç pozitif tamsayının çarpımının hiçbir zaman bir tamsayının birden büyük bir kuvvetine eşit olamayacağını gösteriniz.

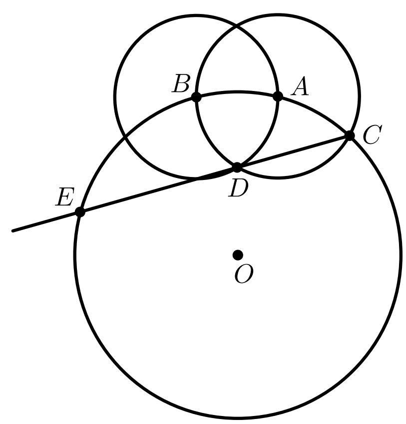
2. $ABCD$ kirişler dörtgeni ve
$|AE| = |AD|$
$|BC| = |BE|$ dir.
Buna göre,
$EF \parallel AB$
olduğunu gösteriniz.



3. $0 < q < 200$ ve $\dfrac{59}{80} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{45}{61}$ koşullarını sağlayan bir (p, q) tamsayı çifti bulunuz ve böyle tek bir (p, q) tamsayı çifti olduğunu gösteriniz.

4. 7 arkadaşı olan bir kimse, bir hafta boyunca her akşam 3 arkadaşını yemeğe çağırır. Farklı iki akşam yemeğe çağrılan gruplar birbirlerinden farklı olup; 7 arkadaştan her biri en az bir akşam yemeğe çağrılmaktadır. Bu koşulları sağlayan kaç değişik çağrı programı yapılabileceğini bulunuz.

5. O merkezli çemberin yarıçapı R'dir. A merkezli $|AB|$ yarıçaplı çember ile B merkezli $|BA|$ yarıçaplı çemberin D kesim noktası alınıyor. CD doğrusu, O merkezli çemberi E noktasında kestiğine göre $|ED|$ uzunluğunu R cinsinden hesaplayınız.



6.
$$\sqrt{x - \frac{1987}{14}} + \sqrt{x - \frac{1988}{13}} + \sqrt{x - \frac{1989}{12}} = \sqrt{x - \frac{14}{1987}} + \sqrt{x - \frac{13}{1988}} + \sqrt{x - \frac{12}{1989}}$$
denkleminin tüm reel çözümlerini bulunuz.

7. İki kişinin bir keki paylaşmasının her iki tarafı da hoşnut eden ve adil bir yöntemi şudur: Biri keki iki parçaya ayırır, diğeri parçalardan birini kendine seçer. Diğer bir deyişle keki $[0, 1]$ aralığı gibi düşünürsek, birinci kişi $x_1 \in [0, 1]$ seçer; ikinci kişi ise x_1 ve $1 - x_1$ sayılarından birini seçer. (Burada her iki tarafın da "keksever" olduğu varsayıldığından, ikinci kişinin x_1 ve $1 - x_1$ sayılarından daha büyük olanını seçeceği ve dolayısıyla birincinin de $x_1 = \dfrac{1}{2}$ seçimini yapacağı kolaylıkla görülür.) Üç keksever kişi için benzer bir paylaşma yöntemi bulabilir misiniz?

[1] 18 Aralık 1988, Süre: 3 saat

30. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1989[1]

1. $\mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayılar kümesini göstersin. Her $m, k \in \mathbb{Z}^+$ için,

   i. $f(m,m) = m$
   ii. $f(m,k) = f(k,m)$
   iii. $f(m, m+k) = f(m,k)$

   koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

2. Sıfırdan farklı bir rakamla başlayan bir rakam blokunun art arda iki kez tekrarından oluşan pozitif tamsayılara "çift tekrarlı sayı" diyeceğiz (Örneğin 360360 "çift tekrarlı" bir sayı olup, 36036 değildir). Bir tamsayının karesine eşit olan sonsuz sayıda "çift tekrarlı" sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

3. C_1, C_2 verilen iki çember, A_1 noktası C_1 üzerinde ve A_2 noktası da C_2 üzerinde bulunan sabit noktalardır. C_1'in A_1P_1 kirişi, C_2'nin A_2P_2 kirişine paralel olduğuna göre P_1P_2'nin orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

4. $n \times n$ bir satranç tahtasının her karesinde bir taş duruyor. n^2 taş toplanarak yine her kareye bir taş düşecek şekilde tekrar dağıtılıyor, öyle ki başlangıçta komşu olan taşlar yine komşu kalıyorlar. En az bir köşedeki taş yerini koruyorsa olabilecek tüm dağıtımları bulunuz (Not: Aralarında ortak kenar bulunan karelerdeki taşlara "komşu" diyoruz.).

5. Elimizde her biri pozitif bir tamsayı ağırlığından n ($n > 2$) tane ağırlık vardır. Bunlardan her birinin ağırlığı n'den küçük olduğu gibi, toplam ağırlıkları da $2n$'den küçüktür. Bu ağırlıkların, toplam ağırlığı n'ye eşit bir altkümesinin bulunduğunu kanıtlayınız.

6. ABC ($AB = AC$) ikizkenar üçgeninin çevrel çemberine dıştan teğet olan çember AB ve AC doğrularına P ve Q noktalarında teğettir. PQ doğru parçasının I orta noktasının, üçgenin BC'ye dıştan teğet olan çemberinin (dış teğet çember) merkezi olduğunu ispat ediniz.

[1] 2 Nisan 1989, Süre: $3 + 3 = 6$ saat

31. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1990[1]

1. Bir d doğrusuna sıra ile A, B, C noktalarında teğet olan $(a > c > b)$ a, b, c yarıçaplı k_1, k_2, k_3 çemberleri veriliyor. k_1 çemberi k_2 ye ve k_2 çemberi de k_3 çemberine teğettir. k_3 çemberine E noktasında değen ve d ye paralel olan teğet, k_1 çemberini D noktasında kesiyor. EB doğrusu, d doğrusuna A da dik olan doğruyu F noktasında kestiğine göre, $AD = AF$ olduğunu ispat ediniz.

2. x_i reel sayıları için
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ ise } x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq 0$$
eşitsizliği her zaman doğrudur; (Kanıtlayınız.)

   Hangi $n \geq 4$ tam sayıları için
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \text{ ise } x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \geq 0$$
eşitsizliği her zaman doğru olur? Yanıtınızı kanıtlayınız.

3. n, 11'den büyük ve eşit olan bir tek, tam sayı olsun; $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 6$, $n = 2k - 1$.
$T = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ ve $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in T$ için
$$d(x, y) = \left|\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid x_i \neq y_i\}\right|$$
diyelim. T nin aşağıdaki şartları sağlayan bir S alt kümesi varsa $n = 23$ olduğunu gösteriniz.

   (i) $|S| = 2^k$

   (ii) Her $x \in T$ için $d(x, y) \leq 3$ olacak şekilde tam bir tane $y \in S$ vardır.

4. $ABCD$ konveks dörtgen ve
$$\begin{array}{rl} E, F \in [AB], & AE = EF = FB \\ G, H \in [BC], & BG = GH = HC \\ K, L \in [CD], & CK = KL = LD \\ M, N \in [DA], & DM = MN = NA \end{array}$$
dır.
$$\begin{array}{ll} [NG] \cap [LE] = \{P\}, & [NG] \cap [KF] = \{Q\} \\ [MH] \cap [KF] = \{R\}, & [MH] \cap [LE] = \{S\} \end{array}$$
noktaları göz önüne alınıyor. Buna göre,

   a) $Alan(ABCD) = 9 \cdot Alan(PQRS)$

   b) $NR = PQ = QG$

   olduğunu ispat ediniz.

5. m pozitif tam sayısı için $(m!)$ sayısındaki 2 çarpanlarının sayısını b_m ile gösterelim. (Yani $2^{b_m} | m!$ ve $2^{b_m+1} \nmid m!$). $m - b_m = 1990$ koşulunu sağlayan en küçük m sayısını bulunuz.

6. $k \geq 2$ ve $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}^+$ olsun. Eğer $n_2 | (2^{n_1} - 1)$, $n_3 | (2^{n_2} - 1)$, $\ldots$, $n_k | (2^{n_{k-1}} - 1)$, $n_1 | (2^{n_k} - 1)$ ise, $n_1 = \cdots = n_k = 1$ olduğunu gösteriniz.

[1] 6 Mayıs 1990, Süre: $3 + 3 = 6$ saat

32. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1991[1]

1. Bir ABC üçgeninin AB, AC ve BC kenarları üzerinde sırası ile C', B' ve A' noktaları işaretleniyor.

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{BC'}{C'A} = \frac{CA'}{A'B} = k$$

olduğu bilindiğine göre, AA', BB' ve CC' doğrularının sınırladığı üçgenin alanının, ABC üçgeni alanına oranının

$$\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$$

olduğunu gösteriniz.

2. $a^2+b^2+c^2+d^2 = a^2b^2c^2d^2$ denklemini sağlayacak şekilde a, b, c, d pozitif tam sayılarının bulunamayacağını gösterin.

3. a_i katsayıları $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinden olmak üzere $|x| < 1$ için tanımlı $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ fonksiyonu için $f\left(\frac{1}{10}\right)$ bir rasyonel sayıdır. Tamsayı katsayılı uygun $p(x)$ ve $q(x)$ polinomları ile fonksiyonun ($|x| < 1$ için)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

şeklinde yazılabileceğini kanıtlayınız.

4. Bir havuzun ortasında yanyana sıralanmış N-tane taşın üzerinde bir kurbağa sıçrıyor. Kurbağa bulunduğu taştan p olasılıkla soldaki, $1-p$ olasılıkla ise sağdaki taşa sıçrıyor. En soldaki taştan sola, ya da en sağdaki taştan sağa sıçrayan kurbağa suya düşüyor. Sol baştan k-ıncı taşta bulunan kurbağanın ilk olarak sağ uçtan suya düşme olasılığını p_k ile gösterirsek; $p < \frac{1}{3}$ için $p_1 > \frac{1}{2}$ olduğunu kanıtlayınız.

5. p yolcu, n vagondan oluşan bir trene içinde yolculuk edecekleri vagonu rastgele seçerek binerler. Her vagonda en az bir yolcu bulunması olasılığını hesap ediniz.

6. Köşeleri O, A, B, C olabir bir dörtyüzlünün (üçgen piramidin) kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden (dışbükey) cismin hacmi V ve bütün kenarlarının uzunlukları toplamı U ise

$$V \leq \frac{(U-|OA|-|BC|)(U-|OB|-|AC|)(U-|OC|-|AB|)}{2^7 \cdot 3}$$

olacağını gösteriniz.

[1] 28 Nisan 1991, Süre: $3+3=6$ saat

33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Hazırlık Ekibi Seçme Sınavı - 1991[1]

1. Beş ardışık tamsayının karelerinin toplamının bir tam kare olamayacağını gösteriniz.

2. Her terimi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin bir altkümesine eşit olan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $B_1, \ldots B_K$ dizisi oluşturuyoruz.

   (1) $i \neq j$ ise $B_i \neq B_j$

   (2) Her $i, j \in \{1, \ldots, K\}$ için $B_i \cap B_j \neq \phi$

   K'nın alabileceği en büyük değeri bulunuz.

3. x, y, z reel sayıları,
$$x + y = z - 1$$
$$xy = z^2 - 7z + 14$$
   denklemlerini sağlıyorsa
   $x^2 + y^2 \leq 8$ olduğunu gösteriniz.

4. a_i, b_i sayıları pozitif ve
$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_n}{b_n}$$
   ise;
$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$
   eşitsizliklerini kanıtlayınız.

5. A, B ve C yarıçapı R olan bir çember üzerinde bulunan üç noktadır. ABC üçgeninin A açısına ait iç açıortay uzunluğu ile dış açıortay uzunluğu aynı ise
$$|AB|^2 + |AC|^2 = 4R^2$$
   olacağını gösteriniz.

6. ABC üçgeni A tepe açısı $80°$ olan bir ikizkenar üçgendir. $[BC]$ tabanı üzerinde bir D noktası ve $[AC]$ yan kenarı üzerinde bir E noktası o şekilde alınıyor ki $m(\widehat{ADB}) = 80°$ ve $m(\widehat{AEB}) = 70°$ oluyor. $m(\widehat{BED})$ açısı kaç derece olur?

[1] 8 Aralık 1991, Süre: 3 saat

33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1992[1]

1. Her terimi, $2 \leq p \leq 11$ koşulunu sağlayan p asal sayılarından en az biri ile bölünen 14 ardışık pozitif tamsayı bulunup bulunmadığını saptayınız.

2. ABC üçgeninin B köşesinden geçerek AC kenarına E noktasında dik olan doğru, bu üçgenin O merkezli çevrel çemberini D noktasında kesiyor. D den BC kenarına inilen dikmenin ayağı F noktası olduğuna göre BO doğrusunun EF doğrusuna dik olduğunu ispatlayınız.

3. $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ pozitif reel sayıları
$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n+1}} = 1$$
koşulunu sağlıyorsa
$$x_1 x_2 \ldots x_{n+1} \geq n^{n+1}$$
olduğunu gösteriniz.

4. $ABCD$ konveks kirişler dörtgeninin köşegenlerinin kesim noktasından AB, BC, CD, DA kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sıra ile P, Q, R, S noktaları olduğuna göre,
$$PQ + RS = QR + SP$$
eşitliğini ispatlayınız.

5. 1 den n ye kadar numaralanmış n kutudan 1 numaralı olanın kapağı açık; diğerlerinin kapakları kapalı bulunmaktadır. Birbirinin eşi m toptan $(m \geq n)$ bir tanesi bu açık kutuya koyulunca 2 numaralı kutunun kapağı açılıyor. Şimdi açık bulunan iki kutudan rastgele birine top koyulunca üçüncü kutu açılıyor. Bu şekilde devam edilerek son kutu da açıldıktan sonra geriye kalan top(lar) kutulara rastgele dağıtılıyor. Bu şartlar altında topların kutulara dağıtımı kaç farklı şekilde yapılabilir?

6. Yarıçapı 4 birim olan bir dairenin içinde 251 tane farklı nokta veriliyor. Bu noktalardan en az 11 tanesini içeren, yarıçapı bir birim olan bir daire çizilebileceğini gösteriniz.

[1] 26 Nisan 1992, Süre $3 + 3 = 6$ saat

34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Hazırlık Ekibi Seçme Sınavı - 1992[1,2]

1. Beş çiftin katıldığı bir partide, katılanların bir bölümü birbirleriyle el sıkışırlar. Hiç kimse doğal olarak ne kendi kendisiyle ne de eşiyle el sıkışır. Partiye katılanlardan biri, kendi dışındaki (eşi de dahil olmak üzere) dokuz kişiye kaç kişiyle el sıkışmış olduklarını sorar. Aldığı yanıtlara bakınca, bu dokuz kişi içinde eşit sayıda kişiyle el sıkışmış herhangi iki kişinin bulunmadığını görür. Diğerlerine kaç kişiyle sıkıştıklarını soran kişinin eşinin kaç kişiyle el sıkışmış olduğunu bulunuz.

2. a, b, c, d pozitif reel sayıları için
$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$
eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

3. $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 361 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0 \\ x - y + z &= 11 \end{aligned}$$
denklemlerinin tüm (x, y, z) reel çözümlerini bulunuz.

4. Bir ABC üçgeninin B açısının iç açıortayına CE dikmesi, C açısının içaçıortayına da BD dikmesi indiriliyor. DE doğrusu, $[AB]$ kenarını P noktasında ve $[AC]$ kenarını Q noktasında kestiğine göre
$$|AP| = |AQ|$$
olduğunu ispatlayınız.

5. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarına paralel olan d doğrusu, AB ve AC doğrularını sıra ile D ve E noktalarında kesiyor. BE doğrusu ile CD doğrusunun kesim noktası P olduğuna göre, P noktasının geometrik yerini bulunuz.

6. Hiçbir n pozitif tam sayısı için
$$n^4 + 3n^2 + 1$$
sayısının bir tam kare olmadığını gösteriniz.

[1]Kaynak: Matematik Dünyası 1992-IV
[2]19 Aralık 1992, Süre: 3 saat

34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1993[1][2]

1. İlk terimi 16 olan ve her teriminin pozitif bölenleri sayısı 5 ile bölünebilen sonsuz bir aritmetik dizinin var olduğunu gösteriniz. Bu tarzdaki diziler arasından en küçük ortak farka sahip olanı bulunuz.

2. Dar açılı ABC üçgeninin çevrel merkezi M olsun. BMA üçgeninin çevrel çemberi BC'yi P'de, AC'yi de Q'da kestiğine göre, CM olduğunu gösteriniz.

3. Her $n \geq 1$ için $b_n \geq 0$ ve
$$b_{n+1}^2 \geq \frac{b_1^2}{1^3} + \ldots + \frac{b_n^2}{n^3}$$
olmak üzere (b_n) dizisi tanımlanıyor.
$$\sum_{n=1}^{K} \frac{b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} > \frac{1993}{1000}$$
eşitsizliğini sağlayan bir K doğal sayısının var olduğunu gösteriniz.

4. İki şehir arasında en fazla bir yol bulunmak şartı ile, v adet şehrin kimileri bir yol ile birbirine bağlanmıştır. e, bu yolların sayısını göstermek üzere

   a) $e < v - 1$ olması halinde birinden diğerine seyahat edemeyeceğimiz en az bir çift şehrin bulunduğunu;

   b) $2e > (v-1)(v-2)$ olması hakinde herhangi iki şehir arasında bir seyahatın mümkün olduğunu gösteriniz.

5. AB çaplı, O merkezli yarım çemberin $OE \perp AB$ olmak üzere çizilen OE yarıçapı bir AC kirişini yarı çemberin iç bölgesinde D noktasında kesmektedir.$OBCD$ dörtgeninin teğetler dörtgeni olabilmesi için $\widehat{CAB}$ açısının alabileceği bütün değerleri belirleyiniz.

6. Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için,
$$f(x + \frac{y}{x}) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y$$
koşulunu gerçekleyen tüm $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

[1] Kaynak: İlk 3 soru AoPS sitesindeki İngilizce sorulardan çevirildi.
[2] 4 Nisan 1993, Süre: $3 + 3 = 6$ saat

1. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1993[1]

1. On tabanına göre yazılışı 1994 ile biten ve bir $n \geq 1$ tamsayısı için $1994 \cdot 1993^n$ şeklinde olan bir tamsayının varlığını gösteriniz.

2. Bir ABC $(m(\widehat{B}) = 90°)$ üçgeninin I merkezli iç teğet çemberi, $[BC], [CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına sırası ile D, E ve F noktalarında değiyor. $[CI \cap [EF] = L$ ve $[DL \cap [AB] = N$ olduğuna göre $|AI| = |ND|$ olduğunu gösteriniz.

3. n pozitif bir tamsayı ve $A = \{1, \ldots, n\}$ olsun. $f : A \to A$ ve $\sigma : A \to A$ gibi iki permütasyon için, eğer $(f \circ \sigma)(1), \ldots, (f \circ \sigma)(k)$ artan ve $(f \circ \sigma)(k), \ldots, (f \circ \sigma)(n)$ azalan bir dizi olacak şekilde bir $k \in A$ var ise, f, σ 'ya göre "tek tepeli"dir diyeceğiz. S_σ ile σ'ya göre tek tepeli permütasyonların kümesinin gösterelim.

   $n \geq 4$ ise, $S_\sigma \cap S_\pi = \phi$ olacak şekilde σ ve π permütasyonlarının var olduğunu gösterelim.

4. Her $n \geq 1$ için $0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}$ koşulunu sağlayan bir (a_n) pozitif tamsayılar dizisi veriliyor. $0 < x < y < 1$ koşulunu sağlayan herhangi x, y reel sayıları için
$$x < \frac{a_k}{a_m} < y$$
   olacak şekilde a_k ve a_m terimleri bulunduğunu gösteriniz.

5. Dışbükey bir dörtgeni alanca iki eşit bölgeye ayıran ve dörtgenin bir köşesinden geçen doğrunun pergel ve cetvelle nasıl çizilebileceğini belirleyiniz.

6. Aşağıdaki koşulları sağlayan $n_1, n_2, \ldots n_k$ ve a pozitif tamsayıları veriliyor.

   i) Her $i \neq j$ için $(n_i, n_j) = 1$
   ii) Her i için $a^{n_i} \equiv 1 \pmod{n_i}$.
   iii) Her i için $n_i \nmid a - 1$

   Bu durumda $a^x \equiv 1 \pmod{x}$ denkliğinin gerçekleştiği en az $2^{k+1} - 2$ tane $x > 1$ tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

[1] 17-18 Aralık 1993

35. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1994[1]

1. Tamsayılar üzerinde tanımlı olan bir f fonksiyonu tüm x tam sayıları için $f(x) + f(x+3) = x^2$ eşitliğini sağlamaktadır. $f(19) = 94$ olduğuna göre $f(94)$ değerini hesaplayınız.

2. O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberin bu çapı üzerinde O ile B arasındaki bir E noktasından $[AB]$ çapına çıkılan dikme, çemberi D noktasında kesiyor. $[DE]$ ve $[EB]$ doğru parçalarına sıra ile K ve C noktalarında teğet olan bir çember BD yayına da F noktasında içten teğettir. Buna göre $\widehat{EDC} = \widehat{BDC}$ olduğunu ispatlayınız.

3. Bir 25-genin bütün kenarları ve köşegenleri kırmızı ve beyaza boyanırsa, köşeleri 25-genin köşelerinde bulunup bütün kenarları aynı renk olan en az 500 üçgen bulunacağını gösteriniz.

4. ABC üçgeninin kenarları üzerinde $P \in [AB], Q \in [BC], R \in [CA]$ ve

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|BQ|}{|BC|} = \frac{|CR|}{|CA|} = k \qquad (k < \frac{1}{2})$$

olacak biçimde P, Q, R noktaları alınıyor. G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğuna göre

$$\frac{Alan(PQG)}{Alan(PQR)}$$

değerini bulunuz.

5. $\lim_{i\to\infty} \dfrac{2^{n_i}}{3^{m_i}} = 1$ olacak şekilde n_i, m_i $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ pozitif tamsayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

6. $a^2 + b^2 + 3$ sayısının $a \cdot b$ ile bölünebilmesini sağlayan tüm (a, b) tamsayı ikililerini bulunuz.

[1] 30 Nisan - 1 Mayıs 1994

2. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1994[1,2]

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{n}$ sayısına en yakın tam sayıya a_n diyelim. Buna göre
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^3}$$
toplamını hesaplayınız.

2. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde, $m(\widehat{BAD}) < 90°$, $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{DCA})$ dır. $[DA]$ üzerinde $|BD| = 2|DE|$ koşulunu sağlayan E noktasından geçen ve $[CD]$ kenarına paralel olan doğru $[AC]$ köşegenini F noktasında kestiğine göre,
$$\frac{|AC| \cdot |BD|}{|AB| \cdot |FC|} = 2$$
olduğunu gösteriniz.

3. Düzlemde ikişer kesişen ve herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen n tane mavi doğru çiziliyor. Bu doğruların kesiştiği noktalara "mavi nokta" dersek, $\binom{n}{2}$ tane mavi noktamız olur. Daha sonra bir mavi doğru ile birleştirilmemiş olan bütün mavi nokta çiftlerinden geçen kırmızı doğrular çiziliyor. İki kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya "kırmızı nokta"; bir mavi ve bir kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya da "mor nokta" diyelim. Bu işlemden sonra en fazla kaç tane mavi, kırmızı ve mor nokta olur?

4. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ artan bir fonksiyon olsun. Her $u \in \mathbb{R}^+$ için $\{f(t) + \frac{u}{t} : t > 0\}$ kümesinin en büyük alt sınırına $g(u)$ diyelim.
   (a) $x \leq g(xy)$ ise $x \leq 2f(2y)$
   (b) $x \leq f(y)$ ise $x \leq g(xy)$

5. $s \geq 1$ ve $t \geq 1$ olmak üzere
$$t^2 + 1 = s(s+1)$$
eşitliğini sağlayan tüm (s, t) sıralı tam sayı ikililerini bulunuz.

6. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarına sıra ile D ve E noktalarında değmektedir. $[CB]$ üzerine $|CK| = |BD|$, $[CA]$ üzerinde $|AE| = |CL|$ koşulunu sağlayan K ve L noktaları için $AK \cap BL = \{P\}$ dir. İç teğet çemberin merkezi I, $[BC]$ nin orta noktası Q ve ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olduğuna göre
   (a) $IQ \parallel AK$,
   (b) $Alan(AIG) = Alan(QPG)$

   olduğunu ispatlayınız.

[1] 2. gün soruları Matematik Dünyası 1995-I dergisinden alındı.
[2] 23-24 Aralık 1994

36. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1995[1,2]

1. $b \geq a$ olmak üzere verilen a, b gerçel sayıları için aşağıdaki sistemin tüm çözümlerini bulunuz.

$$\begin{array}{rcl} x_1^2 + 2ax_1 + b^2 & = & x_2 \\ x_2^2 + 2ax_2 + b^2 & = & x_3 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}^2 + 2ax_{n-1} + b^2 & = & x_n \\ x_n^2 + 2ax_n + b^2 & = & x_1 \end{array}$$

2. n pozitif bir tamsayı olmak üzere $\sigma(j) \geq j$ koşulunu sağlayan tam olarak iki j'nin bulunduğu $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ permütasyonlarının sayısını bulunuz.

3. Bir ABC eşkenar üçgeni veriliyor. Bu üçgenin O merkezli çevrel çemberinin $\overset{\frown}{AC}$ (küçük) yayı üzerinde A ve C'den farklı bir D noktası alınıyor. D'den BC ve AC doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla E ve F olmak üzere, EF ile OD'nin kesim noktasının geometrik yeri nedir?

4. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $m(\widehat{CAB}) = 40°$, $m(\widehat{CAD}) = 30°$, $m(\widehat{DBA}) = 75°$ ve $m(\widehat{DBC}) = 25°$dir. $m(\widehat{BDC})$ yi bulunuz.

5. Aşağıdaki önermeyi ispatlayınız: Her a pozitif tamsayısı için $n | a^n - n \Leftrightarrow n$'nin her p asal böleni için $p^2 \nmid n$ ve $p - 1 | n - 1$.

6. $\{x_n\}$ gerçel sayı dizisi

$$x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + x_n^{1/3} \qquad (n \geq 1)$$

biçiminde tanımlanıyor.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{an^b} = 1$$

olacak şekilde a ve b gerçel sayılarının varlığını gösteriniz.

[1] Kaynak: Matematik Dünyası 1995-III
[2] 15-16 Nisan 1995

3. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1995[1]

1. $m_1, m_2, \ldots, m_k$, $2 \leq m_1$ ve $2m_i \leq m_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. Bu durumda, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tamsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

bağıntılarından hiçbirini gerçeklemeyen sonsuz sayıda x tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

2. Dar açılı bir ABC üçgeni ile bu üçgenin düzleminde, üçgenin $[BC], [CA], [AB]$ kenarlarını sırasıyla çap kabul eden k_1, k_2, k_3 çemberleri çiziliyor. Çemberlerin kuvvet merkezi K, $[AK] \cap k_1 = \{D\}$, $[BK] \cap k_2 = \{E\}$ ve $[CK] \cap k_3 = \{F\}$ olmak üzere, $Alan(\overset{\triangle}{ABC}) = u$, $Alan(\overset{\triangle}{DBC}) = x$, $Alan(\overset{\triangle}{ECA}) = y$ ve $Alan(\overset{\triangle}{FAB}) = z$ ise,

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

olduğunu ispatlayınız.

3. $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesini gösterelim. Bir A gerçel sayısı ile $a_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq A$$

koşulunu sağlayan, üstten sınırlı olmayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi verliyor.

   (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için

   $$1 < \frac{A^{k(n)}}{a_n} \leq A$$

   eşitsizliklerini sağlayan tek bir $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun bulunduğunu ve k'nin azalmayan ve örten bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

   (b) Yukarıdaki k fonksiyonu her değeri en fazla m kez alıyorsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $C^n \leq Aa_n$ olacak şekilde bir $C > 1$ gerçel sayısının var olduğunu gösteriniz.

4. Bir ABC $(|AB| \neq |AC|)$ üçgeninin A açısının iç ve dış açıortayları BC doğrusunu sırayla D ve E noktalarında kesiyor. $[DE]$ çaplı (ve üçgenin düzleminde bulunan) çemberin herhangi bir F noktasından BC, CA, AB doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla K, L, M ise, $|KL| = |KM|$ olduğunu ispatlayınız.

5. A, boş olmayan sonlu bir tamsayı kümesi ise, A'ya ait elemanları toplamını $t(A)$ ile gösterelim ve $t(\phi) = 0$ olarak tanımlayalım. Pozitif tamsayılardan oluşan öyle bir X kümesi bulunuz ki, her k tamsayısı için, A_k ve B_k, X'in sonlu altkümeleri olmak üzere, $A_k \cap B_k = \phi$ ve $t(A_k) - t(B_k) = k$ koşullarını sağlayan tek bir (A_k, B_k) sıralı ikilisi bulunsun.

6. $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesini gösterelim. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$m | n \Longleftrightarrow f(m) | f(n)$$

koşulunu sağlayan ve örten olan tüm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz.

[1] 8-9 Aralık 1995

37. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1996[1]

1. $\prod_{n=1}^{1996}(1+nx^{3n})$ çarpımının, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sıfırdan farklı ve $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ olacak şekilde açılımını $1 + a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \ldots + a_mx^{k_m}$ ile gösterelim. a_{1996} katsayısını hesaplayınız.

2. Bir $ABCD$ paralelkenarında $\widehat{A}$ açısı dar açı olup, $[AC]$ köşegeni çap alınarak çizilen çember CB ve CD doğrularını E ve F noktalarında kesmektedir. Bu çemberin A noktasındaki teğeti, BD doğrusunu P noktasında kesiyorsa; P, F, E noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

3. $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$ olacak şekilde x_i gerçel sayıları veriliyor. Her $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ için $x_{i+1} - x_i \leq h$ ise,
$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1})$$
toplamının
$$\left(\frac{1-h}{2}, \frac{1+h}{2}\right)$$
aralığında olduğunu kanıtlayınız.

4. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $Alan(ABC) = Alan(ADC)$ olup, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin kesim noktası E'dir. E noktasından $[AD], [DC], [BC], [AB]$ kenarlarına çizilen paralel doğrular $[AB], [BC], [CD], [DA]$ kenarlarını sıra ile K, L, M, N noktalarında kestiğine göre,
$$\frac{Alan(KLMN)}{Alan(ABCD)}$$
oranını hesaplayınız.

5. Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $S_{a,b} = \{n^2 + an + b : n \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde tanımlanan kümelerin en çok kaç tanesinin ikişer ikişer ayrık olduğunu belirleyiniz.

6. Hangi a, b pozitif gerçel sayıları için,
$$\lim_{n\to\infty}(ax_{n+1} - bx_n) = 0$$
eşitliğini sağlayan her $\{x_n\}$ dizisinin limiti 0 olur?

[1] 23-24 Mart 1996

4. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1996[1]

1. $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ve $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ birer pozitif tam sayı dizisi olsun. Eğer her x pozitif tam sayısı için

$$x = \sum_{n=1}^{N} x_n A_n, \quad 0 \leq x_n \leq a_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N) \text{ ve } x_N \neq 0$$

   olacak şekilde tek bir N pozitif tam sayısı ve tek bir $(x_1, x_2, \ldots x_N)$ tam sayı sıralı N lisi varsa, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin aşağıdaki koşulları sağladığını gösteriniz:

   i) Bir n_0 için, $A_{n_0} = 1$ dir.

   ii) $k \neq j$ ise, A_{kj} dir.

   iii) $A_k \leq A_j$ ise, A_k, A_j yi böler.

2. Kenar uzunluğu 2 olan $ABCD$ karesinin, AB ve CD kenarları üzerinde sırasıyla M ve N noktaları alınıyor. CM ve BN doğruları P noktasında, AN ve MD doğruları Q noktasında kesişiyor. $|PQ| \geq 1$ olduğunu gösteriniz.

3. Gerçel eksen üzerinde n tane tam sayıyı boyuyoruz. k nin hangi pozitif tamsayı değerleri için aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathcal{K}$ kapalı aralıklar kümesinin bulunduğunu belirleyiniz:

   i) $\mathcal{K}$ ya ait kapalı aralıkların birleşimi tüm boyalı tam sayıları içerir.

   ii) $\mathcal{K}$ ya ait farklı iki kapalı aralığın kesişimi boştur.

   iii) Her $I \in \mathcal{K}$ için a_I ile I ya ait tüm tam sayıların sayısını, b_I ile de boyalı olanları gösterirsek, $\dfrac{b_I}{a_I} = \dfrac{1}{k}$ olur.

4. Bir $ABCD$ dörtgeninin $[AD]$, $[DC]$ ve $[CB]$ kenarlarına teğet olan çemberin değme noktaları sırasıyla K, L, M ile gösteriliyor. L noktasından geçen ve AD doğrusuna paralel olan doğrunun; $[KM]$ nı kestiği nokta N ve $[LN]$ ile $[KC]$ nın kesiştiği nokta P ise,

$$|PL| = |PN|$$

   olduğunu ispatlayınız.

5. Her n pozitif tam sayısı için

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k)$$

   sayısının $n!$ ile bölündüğünü gösteriniz.

6. $\mathbb{R}$ ile gerçel sayılar kümesini gösterelim. Tüm x, y pozitif gerçel sayıları için

$$f(x+y) > f(x)\,(1 + y f(x))$$

   eşitsizliğini sağlayan bir $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun bulunmadığını gösteriniz.

[1] 6-7 Aralık 1996

38. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1997[1]

1. A açısı dik açı olan ABC üçgeninin hipotenüsüne ait yükseklik ayağı H dir. ABC, ABH ve AHC üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları toplamının $|AH|$ uzunluğuna eşit olduğunu gösteriniz.

2. $a_1 = \alpha, b_1 = \beta$ ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n \ , \ b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n$$

şeklinde tanımlanan (a_n) ve (b_n) dizilerinde $a_{1997} = b_1$ ve $b_{1997} = a_1$ olacak biçimde kaç (α, β) gerçel sayı sıralı ikilisi vardır?

3. Bir futbol liginde x tane oyuncusu olan bir X takımından y tane oyuncusu olan bir Y takımına bir futbolcu transfer olduğunda, $y \geq x$ ise federasyon Y takımından $y - x$ milyar lira alıyor, $x > y$ ise federasyon X takımına $x - y$ milyar lira ödüyor. Bir sezon boyunca bir futbolcu istediği kadar takım değiştirebiliyor. 18 takımlık ligde sezona tüm takımlar 20 şer futbolcu ile başlar ve sezon sonunda bu takımlardan 12 sinde 20 şer, geri kalan 6 takımda ise sırasıyla $16, 16, 21, 22, 22, 23$ futbolcu bulunursa, federasyon bu sezon süresince en çok kaç milyar lira kazanmış olabilir?

4. Köşeleri birim çember üzerinde bulunan bir $ABCDE$ dışbükey beşgeninin $[AE]$ kenarı bu çemberin merkezinden geçmektedir. $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DE| = d$ ve $ab = cd = \dfrac{1}{4}$ ise, $|AC| + |CE|$ toplamının a, b, c, d türünden değeri ne olur?

5. Her $p \geq 7$ asal sayısı için,

$$\begin{aligned}
x_1^2 + y_1^2 &\equiv x_2^2 \pmod{p} \\
x_2^2 + y_2^2 &\equiv x_3^2 \pmod{p} \\
&\dots \\
x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 &\equiv x_n^2 \pmod{p} \\
x_n^2 + y_n^2 &\equiv x_1^2 \pmod{p}
\end{aligned}$$

denklik sistemi sağlanacak biçimde bir n pozitif tam sayısı ile p ye bölünmeyen $x_1, x_2, \dots, x_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ tam sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

6. $n \geq 2$ verilmiş bir tam sayı olsun. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ koşulunu sağlayan $x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitif sayıları için,

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \ldots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + \ldots + x_n} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}$$

toplamının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

[1] 12-13 Nisan 1997

5. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1997[1]

1. $5x^2 - 6xy + 7y^2 = 383$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) tam sayı çiftlerini bulunuz.

2. Bir dışbükey $ABCDE$ beşgeninin iç bölgesindeki herhangi bir F noktasının AB, BC, CD, DE ve EA doğrularına uzaklığı sırasıyla a_1, a_2, a_3, a_4 ve a_5 ile gösteriliyor. Bu beşgenin A, B, C, D ve E açılarının içaçıortayları üzerinde, $|AF_1| = |AF|$, $|BF_2| = |BF|$, $|CF_3| = |CF|$, $|DF_4| = |DF|$ ve $|EF_5| = |EF|$ eşitlikleri sağlanacak F_1, F_2, F_3, F_4 ve F_5 noktaları alınıyor. F_1 in EA, F_2 nin AB, F_3 ün BC, F_4 ün CD ve F_5 in DE doğrusuna uzaklığı sırasıyla b_1, b_2, b_3, b_4 ve b_5 ise

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

olduğunu ispatlayınız.

3. $n > 1$ tek, k de pozitif bir tam sayı olsun. n seçmen, k adaydan oluşan A kümesine ait bir üyeyi seçerken aşağıda tanımlanan "çoğunlukçu uzlaşı" sistemini kullanmaktadır. Buna göre, her seçmen, adayları kendi tercihine göre bir sütun halinde yukarıdan aşağıya doğru sıralar. Bu "oy sütunları" (herhangi bir sırayla) yan yana yazılarak $k \times n$ bir "oy matrisi" elde edilir.

   $a \in A$ adayının oy matrisinin i. sırasında kaç kez geçtiğini a_i sayısı ile gösterelim; l_a tam sayısı da $\sum\limits_{i=1}^{l} a_i > \dfrac{n}{2}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük l sayısı olsun. $\bar{l} = \min\limits_{a \in A} l_a$ olmak üzere; $\{a \in A | l_a = \bar{l}\}$ kümesinin tek elemanlı olmasına yol açan oy matrislerine geçerli oy matrisleri diyeceğiz ve böyle her matris için, çoğunlukçu uzlaşıya göre yukarıdaki kümeye ait tek aday seçilmiş olacaktır.
   Öte yandan, $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \ldots \geq \omega_k \geq 0$ koşulunu sağlayan $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ gerçel sayılarına bir ağırlık sistemi; her geçerli oy matrisi için de, $\sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i a_i$ sayısına a adayının toplam ağırlıklı puanı diyelim. Bir $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ ağırlık sistemi, tüm geçerli oy matrisleri için, çoğunlukçu uzlaşıya göre seçilen adayın toplam ağırlıklı puanının diğer bütün adaylarınkinden büyük olmasına yol açıyorsa, bu ağırlık sistemi çoğunlukçu uzlaşıyı temsil ediyor diyeceğiz.

   (a) $k = 3$ için, çoğunlukçu uzlaşıyı temsil eden bir ağırlık sisteminin bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

   (b) $k > 3$ ise, böyle bir ağırlık sisteminin bulunmadığını gösteriniz.

4. Tüm a, b, c, d ve pozitif e gerçel sayıları için

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \leq e^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + f(e)(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$$

   eşitsizliğini doğru kılan en küçük $f(e)$ değerini e cinsinden bulunuz.

5. Bir ABC üçgeninin A açısının iç ve dış açıortaylarının BC doğrusunu kestiği noktalar D ve E ile gösterilmek üzere, $[DE]$ çaplı F merkezli çember ile ABC üçgeninin O merkezli çevrel çemberi ve bu iki çembere dıştam teğet olan bir d doğrusu çiziliyor. d doğrusunun çembere değdiği noktalardan FO doğrusuna indirilen dikmelerin ayakları P, Q ve bu iki çemberin ortak kirişinin uzunluğu m ise, $|PQ| = m$ olduğunu ispatlayınız.

6. Üç boyutlu uzayda, her biri, kenarları x, y ve z eksenlerine paralel bir dikdörtgenler prizması biçiminde olan $D_1, D_2, \ldots, D_n$ bölgeleri verilmiş olsun. Her D_i bölgesinin x eksenine, y eksenine ve z eksenine paralel olan kenarlarının uzunluklarını sırasıyla x_i, y_i ve z_i ile gösterelim. Tüm D_i ve D_j bölgeleri için, $x_i < x_j$ veya $y_i < y_j$ veya $z_i < z_j$ ise, $x_i \leq x_j$ ve $y_i \leq y_j$ ve $z_i \leq z_j$ dir. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ bölgesinin hacmi 1997 ise, $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir bir $\{D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_m}\}$ altkümesinin bulunduğunu gösteriniz.

   (i) $k \neq l \Rightarrow D_{i_k} \cap D_{i_l} \neq \emptyset$

   (ii) Hacim $(\bigcup\limits_{k=1}^{m} D_{i_k}) \geq 73$.

[1] 12-13 Aralık 1997

39. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1998[1]

1. $|AB| = |AC|$ olmak üzere bir ABC ikizkenar üçgeninin eşit kenarları üzerine, üçgenin dış bölgesinde kalacak şekilde $BAXX'$ ve $CAYY'$ kareleri çiziliyor. $[BC]$ nın herhangi bir K noktasından BY ve CX doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla E ve F, $[BC]$ nın orta noktası D ile gösterilmek üzere,

   a. $|DE| = |DF|$ olduğunu ispatlayınız.

   b. $[EF]$ nın orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

2. $a_1 = t$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$ şeklinde tanımlanan gerçel sayılar dizisinde $a_{1998} = 0$ olmasını sağlayan kaç t değeri olduğunu bulunuz.

3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun. Tüm $B, C \subset A$ kümeleri için $f(B) \in B$ ve $f(B \cup C) \in \{f(B), f(C)\}$ koşullarını sağlayan bütün $f : 2^A \setminus \{\phi\} \to A$ fonksiyonlarının sayısını bulunuz.

4. n değişik lojman n kişiye dağıtılacaktır. Herkesin lojmanlara ilişkin bir tercih sıralaması vardır ve hiç kimse farkı iki lojman arasında kayıtsız değildir. Dağıtım yapıldıktan sonra, herkesi en az bu dağıtım kadar hoşnut edecek ve en az bir kişiyi de bu dağıtımda kendisine düşen lojmana tercih ettiği bir lojmana kavuşturacak başka bir dağtımın bulunmadığı anlaşılır. Yapılan dağıtımda, en az bir kişiye n lojman arasında en çok tercih ettiği lojmanın düşmüş olduğunu kanıtlayınız.

5. Bir ABC üçgeninin $[AB]$ kenarına A noktasında teğet olan ve C noktasından geçen çember ile $[AC]$ kenarına yine A noktasında teğet olan ve B noktasından geçen çemberin yarıçapları farklı olup bu iki çember A dan farklı bir D noktasında kesişiyor. E noktası $[AB$ ışını üzerinde bulunan ve $|AB| = |BE|$ koşulunu gerçekleyen nokta olma üzere; A, D, E noktalarından geçen çember ile $[CA$ ışının A dan farklı olan kesişim noktası F ise, $|AF| = |AC|$ olduğunu ispatlayınız.

6. $f(x_1, \ldots, x_n)$ katsayıları tam sayılar ve derecesi n den küçük olan bir polinom olsun. N, $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{13}$ denkliğini ve $1 \leq i \leq n$ için $0 \leq x_i < 13$ koşulunu sağlayan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sıralı n lilerinin sayısı ise, $13|N$ olduğunu gösteriniz.

[1] 18-19 Nisan 1998

6. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1998[1]

1. İkizkenar ABC üçgenin ($|AB| = |AC|$) $[BC]$ tabanı üzerinde $|BD| : |DC| = 2 : 1$ olacak biçimde bir D noktası, $[AD]$ üzerinde ise $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BPD})$ olacak biçimde bir P noktası alınıyor. $m(\widehat{DPC}) = m(\widehat{BAC})/2$ olduğunu gösteriniz.

2. Tüm $0 \leq a \leq b \leq c$ gerçel sayıları için
$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc$$
olduğunu gösteriniz.

3. Bir çemberin üstündeki noktalar üç renge boyanıyorlar. Köşelerini çember üstünde aynı renge boyanmış noktaların oluşturduğu sonsuz sayıda ikizkenar üçgenin bulunduğunu gösteriniz.

4. $x^3 + 3367 = 2^n$ eşitliğini sağlayan tüm x ve n pozitif tamsayılarını bulunuz.

5. XOY açısının $[OX$ ve $[OY$ ışınları üzerinde sırasıyla M ve N değişken noktaları alındığında $|OM| + |ON|$ sabit ise, $[MN]$ nın orta noktasının geometrik yerini belirleyiniz.

6. $n \times n$ bir satranç tahtasındaki karelerin köşelerinden bazıları, bu satranç tahtasının karelerinden oluşan her $k \times k$ ($1 \leq k \leq n$) karenin en az bir kenarının üstünde boyanmış bir nokta olacak biçimde boyanıyor. Eğer bu koşulu sağlamak için boyanması gereken en az nokta sayısını $\ell(n)$ ile gösterirsek,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ell(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$$
olduğunu kanıtlayınız.

[1] 11-12 Aralık 1998

40. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1999[1][2]

1. $m \leq n$ şeklinde pozitif sayılar ve p asal sayısı verilmiş olsun. $a_r, b_s \neq 0$ ve her i, j için $0 \leq a_i, b_j < p$ olmak üzere
$$\begin{array}{rcl} m & = & a_0 + a_1 p + \ldots + a_r p^r \\ n & = & b_0 + b_1 p + \ldots + b_s p^s \end{array}$$
olsun. Her $i = 0, 1, \ldots r$ için $a_i \leq b_i$ ise $m \prec_p n$ diyeceğiz. $p \nmid \binom{n}{m}$ olması için gerek ve yeter koşulun $m \prec_p n$ olduğunu gösteriniz.

2. $ABCD$ kirişler dörtgeninde L ve N sırasıyla AC ve BD köşegenlerinin orta noktaları olsun. ANC açısının açıortayı BD ise, AC'nin BLD açısının açıortayı olduğunu gösteriniz.

3. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - x - 1$ şartını sağlayan ve
$$\left\{ \frac{f(x)}{x} : x \neq 0 \right\}$$
kümesinin sonlu olduğu tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

4. Çevresi $Ç_K$, alanı A_K olan bir kirişler dörtgeninin çevrel çemberine bu dörtgenin köşelerinde teğet olan teğetler dörtgeninin alanı A_T ve çevresi de $Ç_T$ olmak üzere $\dfrac{A_K}{A_T} \geq \left(\dfrac{Ç_K}{Ç_T}\right)^2$ olduğunu ispatlayınız.

5. Başlangıçta her biri farklı bir parça bilgiye sahip olan A, B, C, D, E ve F, ikişer ikişer telefonla görüşürler. Konuşmalar aynı santral üzerinden yapıldığı için, her seferinde ancak iki kişi görüşebilmektedir. Her konuşmada, iki taraf da, o ana kadar edinmiş olduğu tüm bilgileri karşı tarafa aktarır. Herkesin altı parça bilginin tümünü edinmesi için en az kaç konuşma yapılması gerektiğini belirleyiniz.

6. Düzlemin sonlu sayıda parabolün iç bölgelerinin birleşimi olmadığını gösteriniz. (Bir parabolün dış bölgesi, parabolü kesmeyen doğruların birleşimidir. Bir parabolün iç bölgesi ise, parabolün dış bölgesinde olmayan noktaların oluşturduğu kümedir.)

[1] Kaynak: İlk gün soruları, AoPS sitesinden alındı.
[2] 20-21 Mart 1999

7. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1999[1]

1. $0 \leq x, y, z, w \leq 36$ olmak üzere,
$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}$$
denkliğini sağlayan (x, y, z, w) sıralı tamsayı dörtlülerinin sayısını bulunuz.

2. O merkezli bir çembere, dışındaki bir S noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları P ve Q; SO doğrusunun çemberle kesişim noktaları A ve B; PB (küçük) yayının herhangi bir iç noktası X; QX ve PX doğrularının OS doğrusu ile kesişim noktaları C ve D ile gösterilmek üzere,
$$\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|} = \frac{2}{|AB|}$$
olduğunu ispatlayınız.

3. n ve p pozitif tamsayılar olmak üzere, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $|f(i) - f(j)| \leq p$ şartını sağlayan
$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{-p, -p+1, \ldots, p-1, p\}$$
fonksiyonlarının sayısının $(p+1)^{n+1} - p^{n+1}$ olduğunu gösteriniz.

4. Her $n > 1$ için $a_n = a_{n-1}(2 - a_{n-1})$, $\dfrac{1}{2} < a_1 < 1$ ve $\sum\limits_{n=1}^{2000} a_n = 1999$ koşullarını sağlayan tüm (a_n) gerçel sayı dizilerini bulunuz.

5. Çevrel çemberinin yarıçapı R olan dar açılı bir $A_1A_2A_3$ üçgeninde, A_1, A_2 ve A_3 noktalarından geçen yüksekliklerin ayakları sırasıyla Y_1, Y_2 veY_3, $|A_1Y_1| = h_1$, $|A_2Y_2| = h_2$, $|A_3Y_3| = h_3$; A_1 , A_2 ve A_3 noktalarından $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine çizilen teğetlerin uzunlukları da sırasıyla t_1, t_2 ve t_3 ile gösterilmek üzere,
$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}} \right)^2 \leq \frac{3}{2} R$$
olduğunu ispatlayınız.

6. 40 sayının toplamını, 8 "işlemci" kullanarak bulmak istiyoruz. Başlangıçta, her işlemcinin ekranında 0 sayısı bulunuyor. Herhangi bir işlemci, kendisine dışarıdan verilen ya da başka bir işlemciden aktarılan sayıyı, ekranındaki mevcut sayıyla bir birim zamanda toplayarak, elde ettiği sonucu ekranına yazıyor. Ekranındaki sayıyı başka bir işlemciye aktaran bir işlemcinin ekranı kararıyor. Verilen 40 sayıdan istediklerimizi istediğimiz işlemciye girerek ve işlemcilerin elde ettiği kısmi toplamları da istediğimiz işlemciye aktararak, bu 40 sayıyı en az kaç birim zamanda toplayabiliriz?

[1] 3-4 Aralık 1999

41. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2000[1,2]

1. (a) Her n pozitif sayısı için, $x^2 - xy + y^2 = n$ denklemini sağlayan (x, y) sıralı tamsayı ikililerinin sayısının 3 ile bölünebileceğini gösteriniz.

   (b) $x^2 - xy + y^2 = 727$ denklemini sağlayan tüm sıralı tamsayı ikililerini bulunuz.

2. ABC üçgeninde A köşesine ait iç ve dış açıortaylar BC yi sırasıyla D ve E de kesiyor. DE çaplı çember ile AC, ikinci kez F de kesişiyor. ABF üçgeninin çevrel çemberine A da teğet olan doğru DE çaplı çember ile ikinci kez G de kesişiyor. $|AF| = |AG|$ olduğunu gösteriniz.

3. $P(x) = x + 1$ ve $Q(x) = x^2 + 1$ olmak üzere; $(x_1, y_1) = (1, 3)$ ve her k için, (x_{k+1}, y_{k+1})'in ya $(P(x_k), Q(y_k))$ ya ya da $(Q(x_k), P(y_k))$ ya eşit olduğu $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ dizilerini ele alalım.
   Bu dizililerden en az biri için $x_n = y_n$ ise n ye iyi sayı diyeceğiz. Tüm iyi sayıları bulunuz.

4. Herhangi bir sonsuz uzunluktaki üçgen prizmanın kesişimleri eşkenar üçgen olacak şekilde bir düzlemle kesilebileceğini gösteriniz.

5. $ABCD$ eşkenar dörtgeninin AB, BC, CD, DA kenarları üzerinde $MN \parallel LK$ ve MN ile KL arasındaki uzaklık $ABCD$ nin yüksekliğine eşit olacak şekilde sırasıyla M, N, K, L noktaları alınıyor. ALM üçgeni ile NCK üçgeninin çevrel çemberleri kesişirken, LDK üçgeni ile MBN üçgeninin çevrel çemberlerinin kesişmediğini gösteriniz.

6. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için
   $$|f(x + y) - f(x) - f(y)| \leq 1$$
   olacak şekilde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanıyor. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|f(x)-g(x)| \leq 1$ ve $g(x+y) = g(x)+g(y)$ olacak şekilde bir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonun var olduğunu gösteriniz.

[1]Kaynak: AoPS sitesindeki İngilizce soruların çevirisi
[2]1-2 Nisan 2000

8. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2000[1]

1. Merkezi O ile gösterilen bir çember ve bu çemberin iç bölgesinde bir A noktası alınıyor. B noktası çemberin üzerinde ve OA doğrusunun dışında olmak üzere, AOB açısının iç açıortayı ile $[AB]$ nın kesişiminin geometrik yerini bulunuz.

2. Her n pozitif tamsayısı için
$$P_n(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1$$
şeklinde tanımlanıyor. Her a pozitif tamsayısı için,
$$P_n(x) = (1 + ax + x^2 R(x))Q(x)$$
olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı ile, katsayıları tam sayılar olan $R(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının bulunduğunu gösteriniz.

3. Tüm $x, y \in \{1, 2, \ldots, 2000\}$ için tanımlanmış ve en çok n sıralı (x, y) ikilisinde farklı değerler alan her $f(x, y)$, $g(x, y)$ fonksiyon çifti için $x \notin X$ ve $y \notin Y$ iken $f(x, y) = g(x, y)$ olmasını sağlayacak biçimde, her biri 1000 elemanlı $X, Y \subset \{1, 2, \ldots, 2000\}$ kümeleri bulunabiliyorsa, n tamsayısının en çok kaç olabileceğini belirleyiniz.

4. p asal bir sayı olsun. Derecesi p'den küçük olan, katsayıları $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ kümesinde yer alan ve tüm m, n tam sayıları için
$$T(n) \equiv T(m) \pmod{p} \Rightarrow n \equiv m \pmod{p}$$
koşulunu sağlayan bir $T(x)$ polinomunun derecesinin en çok kaç olabileceğini belirleyiniz.

5. Bir a pozitif gerçel sayısı ve tepesi A noktasında bulunan bir açı verilmiş olsun. A dan geçen ve bu açının kenarlarını $|AB| + |AC| = a$ koşulunu sağlayan B ve C noktalarında kesen tüm çemberlerin A nın dışında bir ortak noktasının daha bulunduğunu gösteriniz.

6. Her $x \in [0, 1]$ için $f^n(x) = x$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayının bulunmasını olanaklı kılan tüm $f : [0, 1] \to [0, 1]$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.
($x \in [0, 1]$ olmak üzere, $f^n(x)$; $f^1(x) = x$ ve her k pozitif tam sayısı için $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right)$ bağıntıları aracılığıyla tanımlanıyor.)

[1] 8-9 Aralık 2000

42. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2001[1]

1. 2001 çocuktan her biri pozitif bir tam sayı tutuyor ve tuttuğu sayı ile kendi dışındaki 2000 çocuktan istediklerinin isimlerini defterine yazıyor. Defterler toplanıp, her çocuğa, defterine isimlerini yazmış olduğu çocukların tuttuğu sayıların toplamından, kendisini listelerine dahil etmiş olan çocukların tuttuğu sayıların toplamı çıkartılarak elde edilen yeni bir sayı veriliyor. Çocuklara verilen yeni sayıların hepsinin birden pozitif olup olamayacağını belirleyiniz.

2. O merkezli birim çemberin AB çapına, $|OT| > 1$ olacak şekilde seçilen bir T noktasında teğet olan bir çember, birim çemberi C ve D ile gösterilen farklı iki noktada kesiyor. O, D ve C noktalarından geçen çemberin AB doğrusunu O dışında kestiği nokta P olmak üzere,
$$|PA| \cdot |PB| = \frac{|PT|^2}{|OT|^2}$$
olduğunu gösteriniz.

3. Tüm x, y, z tam sayıları için,
$$S(x,y,z) = (xy - xz, yz - yx, zx - zy)$$
olsun. a, b ve c, $abc > 1$ koşulunu sağlayan tam sayılar olmak üzere, $0 < k \leq abc$ ve her $n \geq n_0$ tam sayısı için
$$S^{n+k}(a,b,c) \equiv S^n(a,b,c) \pmod{abc}$$
koşullarını sağlayan n_0 ve k tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz.
($S^1 = S$ ve her $m \geq 1$ tam sayısı için, $S^{m+1} = S \circ S^m$.
$(u_1, u_2, u_3) \equiv (v_1, v_2, v_3) \pmod{M} \iff u_i \equiv v_i \pmod{M} (i = 1, 2, 3)$.)

4. $5^x = 1 + 4y + y^4$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) sıralı tam sayı ikililerini bulunuz.

5. Dar açılı bir ABC üçgeninin yüksekliklerinin kesişim noktası H, $[AC]$ kenarının orta noktası da D olsun. DH doğrusunun, ABC üçgeninin çevrel çemberi ile $[BH]$ çaplı çemberin bir kesişim noktasından geçtiğini gösteriniz.

6. Her x gerçel sayısı için,
$$f(x - f(x)) = \frac{x}{2}$$
koşulunu sağlayan sürekli bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bulunmadığını gösteriniz.

[1] 31 Mart-1 Nisan 2001

9. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2001[1]

1. Konveks bir $ABCD$ dörtgeninin $[AD]$ ve $[BC]$ kenarlarının orta dikmeleri bu dörtgenin iç bölgesindeki bir P noktasında; $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta dikmeleri de dörtgenin iç bölgesindeki bir Q noktasında kesişiyor. $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$ ise, $\widehat{AQB} = \widehat{CQD}$ olduğunu gösteriniz.

2. Bir $(x_n)_{-\infty<n<\infty}$ gerçel sayı dizisi, her n tam sayısı için,
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 10}{7}$$
şeklinde bağıntısını sağlıyor. Bütün n tam sayıları için $x_n < M$ olmasını sağlayan bir M gerçel sayısı varsa, x_0 teriminin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

3. Aynı büyüklükteki n parçadan oluşan bir keki, her parçayı en çok bir kez keserek, k kişi arasında eşit olarak paylaştırmak istiyoruz. n nin pozitif bölenlerinin sayısı $d(n)$ ile gösterilmek üzere; k nin böyle bir paylaşımı olanaklı kılan değerlerinin sayısının $n + d(n)$ olduğunu gösteriniz.

4. $3^x + 11^y = z^2$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y, z) sıralı pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

5. A noktasından geçen ve biribirine dik olmayan iki doğru ile bu doğrulardan birinin üstünde A dan farklı bir F noktası verilmiş olsun. A ve F noktalarından geçen ve ikinci doğruyu A dan farklı bir G noktasında daha kesen çemberin F ve G deki teğetlerinin kesişim noktası P_G ise, P_G nin geometrik yerini bulunuz.

6. $n \times n$ bir santranç tahtasının birim karelerini, her $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için i inci satır ve i inci sütundaki toplam $2n - 1$ kare farklı renklerde olacak biçimde, k renk kullanarak boyamak istiyoruz.

   a) $n = 2001$ ise, $k = 4001$ için böyle bir boyama işleminin yapılamayacağını gösteriniz.

   b) $n = 2^m - 1$ ise, $k = 2^{m+1} - 1$ için bu işlemin gerçekleştirilebileceğini kanıtlayınız.

[1] 22-23 Aralık 2001

43. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2002[1]

1. a ve b farklı tam sayılar olmak üzere, $ab(a+b)$ sayısı a^2+ab+b^2 ile bölünüyorsa,

$$|a-b| > \sqrt[3]{ab}$$

olduğunu gösteriniz.

2. Bir ABC üçgeninde $\widehat{ABC}$ nin açıortayı $[AC]$ yi D de; $\widehat{BCA}$ nın açıortayı $[AB]$ yi E de kesiyor. BD ve CE doğrularının kesişim noktası X olmak üzere, $|BX| = \sqrt{3}|XD|$ ve $|XE| = (\sqrt{3}-1)|XC|$ dir. ABC üçgenin iç açılarının ölçülerini bulunuz.

3. $a_1, \ldots, a_n$ gerçel sayıları ile n pozitif tam sayısı verildiğinde,

$$|\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i| \leq |a_k|$$

olacak biçimde m ve k pozitif tam sayıları bulunduğunu gösteriniz.

4. Tüm gerçel sayılar üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun en az iki simetri merkezi varsa, bu fonksiyonun bir doğrusal fonksiyon ile bir periyodik fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

[Her x gerçel sayısı için $f(a-x)+f(a+x) = 2f(a)$ olacak biçimde bir a gerçel sayısı varsa, $(a, f(a))$ noktasına f fonksiyonunun bir simetri merkezi denir.]

5. Bir A noktasında içten teğet iki çemberden küçük olanı üzerinde A dan farklı bir C noktası alınıyor. Büyük çember, küçük çembere C den çizilen teğeti D ve E noktalarında; AC doğrusunu da A ve P noktalarında kesiyor. PE doğrusunun A, C ve E den geçen çembere teğet olduğunu gösteriniz.

6. $n > 1$ olmak üzere, uzayda, herhangi dördü düzlemdeş olmayan $2n+1$ noktayı birbirlerine birleştiren doğru parçalarını kırmızı, beyaz ya da maviye boyuyoruz. Bu nokta kümesinin bir M altkümesine, eğer her $a, b \in M$ için $x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{l-1}x_1$ doğru parçaları aynı renkte olacak biçimde, M ye ait $a = x_0, x_1, \ldots, x_l = b$ noktaları varsa, bir *tek-renk bağlantılı* altküme diyoruz. Boyama işlemi nasıl yapılırsa yapılsın, mutlaka k elemanlı tek-renk bağlantılı bir altküme oluşuyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri bulunuz. $(l > 1)$

[1] 6-7 Nisan 2002

10. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2002[1]

1. $n \geq 2$ bir tam sayı ve $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $1, 2, \ldots, n$ sayılarının bir permütasyonu olmak üzere, gerçel eksen üstünde $1, 2, ..., n$ noktalarına sırasıyla $a_1, a_2, ..., a_n$ elma yerleştiriliyor. A, B, C isimli çocuklara sırasıyla $x_A, x_B, x_C \in \{1, 2, \ldots, n\}$ noktaları veriliyor. Her $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için, kendilerine verilen noktalar k ye en yakın olan çocuklar a_k elmayı paylaşıyor. (Elmalar istenildiği kadar küçük parçalara ayrılabiliyor.) Çocuklardan hiçbiri, diğer ikisinin noktaları aynı kalmak üzere, topladığı elma miktarı eskisine göre kesin artacak biçimde kendisine $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinde yeni bir nokta seçemiyorsa, (x_A, x_B, x_C) ye bir denge konumu diyoruz. n nin hangi değerleri için, bir denge konumunun var olmasını sağlayan uygun bir $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dağılımının bulunduğunu belirleyiniz.

2. Bir A noktasında dıştan teğet olan iki çember, bir Γ çemberine B ve C noktalarında içten teğettir. Γ çemberinin küçük çemberlere A noktasında teğet olan kirişinin orta noktası D dir. Çemberlerin merkezleri doğrudaş değilse, BCD üçgeninin içteğet çemberinin merkezinin A olduğunu gösteriniz.

3. Çizge Hava Yolları (ÇHY), Çizge Cumhuriyeti'nin bazı kentleri arasında uçak seferleri düzenlemektedir. Her kentten en az üç farklı kente sefer vardır ve yalnızca ÇHY seferlerini kullanarak, Çizge Cumhuriyeti'nin herhangi bir kentinden başka bir kentine ulaşmak mümkündür. Bunu, yalnızca ÇHY seferlerini kullanarak herhangi bir kentten bir diğerine ulaşmanın hala mümkün kalacağı, ancak kentlerin en az $\dfrac{2}{9}$ undan sadece bir seferin olacağı bir şekilde yapmanın olanaklı olduğunu kanıtlayınız.

4. $0 \leq x, y < p$ ve $y^2 \equiv x^3 - x \pmod p$ koşullarını sağlayan (x, y) sıralı tam sayı ikililerinin sayısının p olmasına yol açan tüm p asal sayılarını bulunuz.

5. Kenar uzunlukları $|BC| < |AC| < |AB|$ koşulunu sağlayan dar açlı bir ABC üçgeninin AB ve AC kenarları üzerinde sırasıyla $|BD| = |BC| = |CE|$ olacak biçimde D ve E noktaları alınıyor. ADE üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapının, ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi ile çevrel çemberinin merkezi arasındaki uzaklığa eşit olduğunu gösteriniz.

6. n pozitif bir tam sayı olsun ve $\mathbf{R}^n$ ile sıralı gerçel sayı n lilerinin kümesini gösterelim. $1, 2, \ldots, n$ sayılarının, her $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ için, $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)} \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan bir σ permütasyonunun bulunduğu $\mathbf{R}^n$ ye ait $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elemanlarının kümesini de T ile gösterelim. Aşağıdaki koşulu sağlayan bir d gerçel sayısının bulunduğunu kanıtlayınız:
Her $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ için,
$$a_i = \frac{1}{2}(b_i + c_i), \quad |a_i - b_i| \leq d, \quad |a_i - c_i| \leq d \quad (1 \leq i \leq n)$$
koşullarını yerine getiren $(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n) \in T$ vardır.

[1] 14-15 Aralık 2002

44. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2003[1]

1. $M = \{(a,b,c,d) | a,b,c,d \in \{1,2,3,4\}$ ve $abcd > 1\}$ olsun. Her $n \in \{1,2,\ldots,254\}$ için

$$|a_{n+1} - a_n| + |b_{n+1} - b_n| + |c_{n+1} - c_n| + |d_{n+1} - d_n| = 1$$

koşulunu sağlayan ve içinde M ye ait her elemanın tam olarak bir kez geçtiği bir (a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2), $\ldots$, $(a_{255}, b_{255}, c_{255}, d_{255})$ dizisinde $c_1 = d_1 = 1$ ise, (a_1, b_1) ikilisinin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

2. Köşegenleri K noktasında kesişen konveks bir $ABCD$ dörtgeninde $L \in [AD]$, $M \in [AC]$, $N \in [BC]$ noktaları, $KL \parallel AB$, $LM \parallel DC$, $MN \parallel AB$ koşullarını sağlıyorsa,

$$\frac{Alan(KLMN)}{Alan(ABCD)} < \frac{8}{27}$$

olduğunu gösteriniz.

3. Bütün terimleri doğal sayıların 1 den büyük kuvvetleri olan

   a. 2003 terimli

   b. sonsuz

   bir aritmetik dizi var mıdır?

4. $(x^2+y^2)^2 + 2tx(x^2+y^2) = t^2y^2$ denkleminin x, y pozitif tam sayılar olmak üzere bir çözümünün bulunmasını sağlayan en küçük t

   a. pozitif gerçel sayısını

   b. pozitif tam sayısını

   bulunuz.

5. A, O merkezli bir çemberin üstünde bir nokta ve B de $[OA]$ nın orta noktası olsun. C ve D, çember üstünde ve OA doğrusunun aynı tarafında, $\widehat{CBO} = \widehat{DBA}$ koşulunu sağlayan noktalar olmak üzere, $[CD]$ nin orta noktasının B ye göre simetriğinin yine çember üstünde olduğunu gösteriniz.

6. Her n pozitif tam sayısı için, $p(n)$, terimleri toplamı n ye eşit olan ve azalmayan pozitif tam sayı dizilerinin sayısını göstermek üzere

$$\frac{1 + p(1) + p(2) + \cdots + p(n-1)}{p(n)} \leq \sqrt{2n}$$

olduğunu kanıtlayınız.

[1] 5-6 Nisan 2003

11. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2003[1]

1. $n \geq 2$ arabanın katıldığı bir yarışta, 1 den n ye kadar numaralanmış arabalar, başlangıç noktasından numara sırasına göre belli aralıklarla ayrılıyor. Yarış boyunca bir araba bir başkasını en çok bir kez geçiyor ve her araba toplam olarak aynı sayıda araba tarafından geçiliyor. Ayrıca herhangi farklı iki arabanın yarış boyunca geçtikleri arabaların sayıları birbirinden farklı olup, arabalar bitiş noktasına farklı zamanlarda varıyor. n nin bu durumu olanaklı kılan tüm değerlerini bulunuz.

2. Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin AB, BC, CD ve DA kenarları üstünde sırasıyla K, L, M ve N noktaları alınıyor. $Alan(AKN) = s_1$, $Alan(BKL) = s_2$, $Alan(CLM) = s_3$, $Alan(DMN) = s_4$ ve $Alan(ABCD) = s$ olmak üzere,
$$\sqrt[3]{s_1} + \sqrt[3]{s_2} + \sqrt[3]{s_3} + \sqrt[3]{s_4} \leq 2\sqrt[3]{s}$$
olduğunu gösteriniz.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, her $t \in (0,1)$ ve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için,
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$
eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$,
$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2003} \text{ ve } a_{2004} = a_1$$
koşullarını sağlayan gerçel sayılar olmak üzere,
$$\sum_{k=1}^{2003} f(a_k)a_{k+1} \geq \sum_{k=1}^{2003} f(a_{k+1})a_k$$
olduğunu gösteriniz.

4. $2^{2n+1} + 2^n + 1$ sayınsın tam kuvvet olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

5. Bir ABC üçgeninin AB ve BC kenarlarına teğet olan bir S çemberi, ABC üçgeninin çevrel çemberine de bir T noktasında teğettir. I, ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi ise, $\widehat{ATI} = \widehat{CTI}$ olduğunu gösteriniz.

6. $m \times n$ bir satranç tahtasının her birim karesine 0 ya da 1 yazılarak elde edilen bir yazılıma, 0 ve 1 lerin sayısı eşitse, *eşit* bir yazılım diyoruz. a gerçel bir sayı olmak üzere, m satır ve n sütunun her biri için, o satır ya da sütun içindeki 1 lerin yüzdesi a dan küçük ya da $100 - a$ dan büyük olmayacak şekilde bir eşit yazılımı olanaklı kılan m ve n sayıları bulunuyorsa, a ya *güzel* sayı diyoruz. En büyük güzel sayıyı bulunuz.

[1] 13-14 Aralık 2003

45. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2004[1]

1. 11×11 satranç tahtası bir tane $\square$ ve kırk tane $\square\square\square$ ile kapatılırsa, $\square$ şeklinin tahtadaki hangi karelere gelebileceğini belirleyiniz.

2. P, ABC üçgeninin iç bölgesinde bir nokta ise,

$$\min\{|PA|, |PB|, |PC|\} + |PA| + |PB| + |PC| < |AB| + |BC| + |CA|$$

olduğunu gösteriniz.

3. n pozitif bir tam sayı olsun. Hangi $n + 1 \leq r \leq 3n + 2$ tam sayıları için,

$$a_1 b_1^k + a_2 b_2^k + \ldots + a_m b_m^k = 0 \qquad (1 \leq k \leq n)$$

koşulunu sağlayan tüm $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ tam sayılarının,

$$r | a_1 b_1^r + a_2 b_2^r + \ldots + a_m b_m^r$$

koşulunu da sağlayacağını belirleyiniz.

4. $\sin\alpha = 3/5$ ve $x = 5^{2003} \sin(2004\alpha)$ ise, $x - [\![x]\!]$ sayısının alabileceği bütün değerleri bulunuz.

5. D, dar açılı bir ABC üçgeninin O merkezli çevrel çemberinin küçük AC yayı üzerinde A ve C den farklı bir nokta olsun. $[AB]$ kenarı üzerinde $\widehat{ADP} = \widehat{OBC}$ olacak biçimde P noktası, $[BC]$ kenarı üzerinde ise $\widehat{CDQ} = \widehat{OBA}$ olacak biçimde bir Q noktası alınıyor. $\widehat{DPQ} = \widehat{DOC}$ olduğunu gösteriniz.

6. Bir sınıftaki öğrencilerin her birinin elinde 0, 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 tane şeker vardır. Öğretmen her adımda, bazı öğrencileri seçip, bu öğrencilere ve bu öğrencilerden herhangi biri ile arkadaş olan her öğrenciye birer şeker veriyor. Elindeki şeker sayısı 7 ye ulaşan öğrenci bunların hepsini yiyor. Sınıftaki herhangi iki öğrenci için bunlardan yalnızca biriyle arkadaş olan üçüncü bir öğrenci bulunuyorsa, başlangıçtaki şeker sayıları ne olursa olsun, öğretmenin sonlu sayıda adım sonucunda her öğrencinin elinde istediği sayıda şeker kalmasını sağlayabileceğini gösteriniz.

[1] 3-4 Nisan 2004

12. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2004[1]

1. $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olan bir ABC üçgeninde, A köşesine ait yükseklik, açıortay ve kenarortayın ayakları, sırasıyla, H, L ve D noktalarıdır. $m(\widehat{HAL}) = m(\widehat{DAL})$ olması için gerek ve yeter koşulun, $m(\widehat{BAC}) = 90°$ olması olduğunu gösteriniz.

2. Bir ülkedeki 80 kentten bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. Her kentten en az 7 başka kente doğrudan uçak seferi bulunmakta olup, herhangi bir kentten bir diğerine doğrudan ya da sonlu sayıda aktarma yaparak uçakla ulaşmak mümkündür. Karşılıklı uçak seferleri hangi kentler arasında düzenlenmiş olursa olsun, herhangi bir kentten bir diğerine en çok k aktarmayla ulaşılmasını olanaklı kılan en küçük k sayısını bulunuz.

3. (a) $n^2 - 1$, $n^2 - 2$ ve $n^2 - 3$ sayılarından her biri için, bu sayının pozitif bölenlerinin sayısını 10 yapan bir n tam sayısı bulunuz.

   (b) $n^2 - 4$ ün pozitif bölenlerinin sayısının, n tam sayısının hiçbir değeri için 10 olamayacağını gösteriniz.

4. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini göstermek üzere, tüm $m, n \in \mathbb{Z}$ için, $f(n) - f(n + f(m)) = m$ koşulunu sağlayan bütün $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

5. Bir ABC üçgenin, $[BC]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, BC, CA ve AB doğrularına değme noktaları, sırasıyla, A_1, B_1 ve C_1; $[CA]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, aynı doğrulara değme noktaları, yine sırasıyla, A_2, B_2 ve C_2; $[AB]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, aynı doğrulara değme noktaları, yine sırasıyla, A_3, B_3 ve C_3 olsun. $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ve $A_3B_3C_3$ üçgenlerinin çevrelerinin toplamının, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapına oranının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

6. $n, m \geq 0$ tam sayıları için, $K(n, 0) = \phi$ ve

$$K(n, m + 1) = \{k | 1 \leq k \leq n \text{ ve } K(k, m) \cap K(n - k, m) = \phi\}$$

   ise, $K(2004, 2004)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

[1] 11-12 Aralık 2004

46. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2005[1]

1. Her $x \in [0, \infty)$ için,

$$\begin{aligned} &4f(x) \geq 3x \\ &f(4f(x) - 3x) = x \\ &(f(x) + x)f(f(x)) \leq 2xf(x) \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan tüm $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonlarını bulunuz.

2. $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde $[AB]$ kenarının orta noktası N dir. $[AC$ ışını üstünde C den sonra gelecek ve $|BC| = |CD|$ olacak biçimde bir D noktası; $[DN$ ışını üstünde de, $m(\widehat{PBC}) = m(\widehat{A})$ olacak biçimde bir P noktası alınıyor. PC ile AB nin kesiştiği nokta E; BC ile DP nin kesiştiği nokta T ise,

$$\frac{|BC|}{|TC|} - \frac{|EA|}{|EB|}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

3. Başlangıçta 1 den 2005 e kadar olan bütün tam sayılar işaretleniyor. Ardışık tam sayılardan oluşan sonlu bir dizideki tüm tam sayılar işaretli olup, dizinin en küçük teriminin bir eksiği ile en büyük teriminin bir fazlası işaretsiz ise, bu diziye bir *blok* diyoruz. Her hamlede, işaretlenmiş sayıların hiçbir blokun ilk ya da son terimini içermeyen bir altkümesini seçip, bu altkümenin elemanlarının işaretlerini siliyor ve işaretli en büyük sayının iki fazlasından başlayarak, işaretini sildiğimiz sayıda tam sayıyı yeni bir blok oluşturacak şekilde işaretliyoruz. Bu hamleleri, her biri tam olarak bir tam sayıdan oluşan 2005 blok elde etmek amacıyla yaparsak, bu amaca en az kaç hamlede ulaşabiliriz?

4. $n \geq 2$ olmak üzere, tüm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayıları için, $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$ sayısının $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ sayısını böldüğünü kanıtlayınız.

5. $m(\widehat{A}) = 90°$ ve $m(\widehat{C}) > m(\widehat{B})$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninde, A noktasından bu üçgenin Γ çevrel çemberine çizilen teğet, BC doğrusunu D noktasında kesiyor. A noktasının BC doğrusuna göre simetriği E; A noktasından BE ye çizilen dikmenin ayağı X; $[AX]$ nın orta noktası Y; Γ çemberinin BY doğrusunu B dışında kestiği nokta Z olsun. BD doğrusunun ADZ üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

6. Elimizde, her renkten aynı sayıda top olacak biçimde, k farklı renkte 5040 tane top var. Topları, her torbaya farklı renkte iki top düşecek biçimde, 2520 torbaya koyuyoruz. Topların torbalara dağılımı nasıl olursa olsun, bu torbaları bir çember üstüne, herhangi ardışık iki tanesinde aynı renkte iki top olmayacak biçimde yerleştirebiliyorsak, k en az kaç olabilir?

[1] 2-3 Nisan 2005

13. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2005[1]

1. Tüm a, b, c, d pozitif gerçel sayıları için,

$$\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^4}+\sqrt{b^4+d^4}\geq 2\sqrt{2}(ad+bc)$$

olduğunu gösteriniz.

2. $|CB|>|AC|>|AB|$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde, $[AC]$ nın orta dikmesi $[BC]$ yi K; $[BC]$ nin orta dikmesi de AC yi L de kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O; CKL ve OAB üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri de sırasıyla O_1 ve O_2 olmak üzere, OCO_1O_2 dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu gösteriniz.

3. $n+1$ kentin bulunduğu bir ülkede, bu kentlerden bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. A ve B kentleri arasında yapılan bir karşılıklı sefer, aynı gün içinde hem A dan B ye, hem de B den A ya yapılan bir uçuş ikilisi anlamına gelip, bir kentten diğerine karşılıklı olmayan tek yönlü bir sefer mevut değildir. İki kent arasında aynı gün içinde birden çok sayıda karşılıklı sefer yapılabilmektedir. İki kent arasında aynı gün içinde birden çok sayıda karşılıklı sefer yapılabilmektedir. A kenti için, bir günde A dan kalkan uçak sayısını d_A ile gösteriyoruz. Başkent dışındaki tüm A kentleri için $d_A \leq n$ ve yine başkent dışındaki ve aralarında karşılıklı uçak seferi bulunmayan farklı herhangi iki A, B kenti için, $d_A+d_B\leq n$ koşulları sağlanmaktadır. $n+1$ kent arasında yer alan başkentten bir gün içinde yapılan uçak seferlerinin sayısı konusunda ise, herhangi bir kısıtlama yoktur.

   Bu ülkede bir günde en çok kaç karşılıklı uçak seferi yapılabileceğini ve bu en çok karşılıklı sefer sayısını olanaklı kılan tüm uçuş çizelgelerini belirleyiniz.

4. $5^m+7^n=k^3$ eşitliğini sağlayan tüm (m,n,k) negatif olmayan tam sayı üçlülerini bulunuz.

5. Kenar uzunlukları a, b, c ve iç teğet çemberinin yarıçapı r olan bir üçgende,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leq\frac{1}{4r^2}$$

olduğunu gösteriniz.

6. Terimleri tam sayılar olan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinde, her $n\geq N$ için,

$$a_n=|\{i|i\leq i<n \text{ ve } a_i+i\geq n\}|$$

olacak şekilde bir N pozitif tam sayısı varsa, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin en çok kaç değeri sonsuz kere alabileceğini belirleyiniz?

[1] 10-11 Aralık 2005

47. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2006[1]

1. Köşeleri 1 yarıçapında bir çember üstünde bulunan ve köşegenlerinden ikisi dik kesişen bir yedigenin alanının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

2. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $2\times n$ lik bir dikdörtgeni, kenar uzunlukları tam sayılar olan dikdörtgenlere kaç farklı biçimde ayırabiliriz?

3. x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $xy + yz + zx = 1$ ise,
$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \geq (\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x})^2 \geq 6\sqrt{3}$$
olduğunu gösteriniz.

4. x_1 bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $n \geq 1$ tam sayısı için $x_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ ise, x_{2006} sayısının 2006 ile bölünmesini sağlayan en küçük x_1 sayısını bulunuz.

5. $[AB]$ çaplı bir çemberin üstündeki A ve B den farklı herhangi bir Q noktasından $[AB]$ çapına, $H \in [AB]$ olmak üzere, $[QH]$ dikmesi iniliyor. Q merkezli ve $|QH|$ yarıçaplı çemberin $[AB]$ çaplı çemberi kestiği noktalar C ve D ise, CD doğrusunun $[QH]$ nı iki eşit parçaya böldüğünü gösteriniz.

6. 2006000 öğrencinin katıldığı bir Üniversite Giriş Sınavı'nda, her öğrenci 2006 bölüm arasından 12 bölümlük bir liste yapıyor. Herhangi 6 öğrenciyi aldığımızda, bu öğrencilerden her birinin en az birini kendi listesine dahil etmiş olduğu iki bölümün bulunduğu gözleniyor. Her öğrencinin listesinden en az bir bölüm içeren bir bölüm listesine, kapsamlı bir liste diyoruz.

   (a) Öğrencilerin verdikleri listeler ne olursa olsun, 12 elemanlı bir kapsamlı liste oluşturulabileceğini kanıtlayınız.

   (b) Daha küçük bir listenin kendilerine göre kapsamlı olmadığı öğrenci listelerinin bulunduğunu gösteriniz.

[1] 1-2 Nisan 2006

14. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2006[1]

1. Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin $[CD]$ kenarı üzerinde $0 < |DE| = |FC| < |CD|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ADE ve ACF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez K noktasında; BDE ve BCF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez L noktasında kesişiyor. A, B, K, L noktalarının çemberdeş olduğunu ispat ediniz.

2. 2006 öğrenci ve 14 öğretmenin bulunduğu bir okulda, her öğrencinin en az bir öğretmen ile tanışık olması koşuluyla, öğretmenler ve öğrenciler arasındaki tanışıklı bağıntısı ne olursa olsun; öğretmenin tanıdığı öğrenci sayısının, öğrencinin tanıdığı öğretmen sayısına oranının en az t olduğu, birbirini tanıyan bir öğrenci-öğretmen ikilisinin bulunmasını sağlayan en büyük t gerçel sayısını belirleyiniz.

3. $$P_n(x) = (x^2 + x + 1)^n - (x^2 + x)^n - (x^2 + 1)^n - (x + 1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$

   polinomunun tüm katsayılarının 7 ile bölünmesini sağlayan bütün n pozitif tam sayılarını bulunuz.

4. $n \geq 2$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere

   $$t = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

   ise,

   $$\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} \geq \frac{(n-1)^2 t}{t-1}$$

   olduğunu gösteriniz.

5. Dar açılı bir ABC üçgeninin yükseklikleri $[AA_1]$, $[BB_1]$ ve $[CC_1]$ olsun. AB_1C_1, BC_1A_1 ve CA_1B_1 üçgenlerinin iç merkezleri, sırasıyla, O_A, O_B ve O_C olsun. ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC, CA ve AB kenarlarına, sırasıyla, T_A, T_B ve T_C noktalarında teğet ise, $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ altıgeninin eşkenar olduğunu gösteriniz.

6. Kenarları, alanı ve iç açılarının derece cinsinden ölçüleri rasyonel sayılar olan bir üçgenin bulunmadığını ispat ediniz.

[1] 16-17 Aralık 2006

48. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2007[1]

1. Bir havayolu şirketi A, B, C, D, E ve F kentlerinden bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri başlatacaktır. Bu altı kentten herhangi ikisi arasında yalnızca bu şirketin seferlerini kullanarak ulaşımı mümkün kılacak biçimde, bu seferlerin kaç farklı biçimde düzenlenebileceğini belirleyiniz.

2. Farklı A ve B noktaları ile bu noktalardan geçen bir Γ çemberi verilmiş olsun. P, Γ üstünde A ve B den farklı, değişen bir nokta olmak üzere, $\widehat{APB}$ nın açıortayının P noktasından Γ çemberinin dışına doğru uzantısı üstünde yer alan ve $|MP| = |AP| + |PB|$ koşulunu sağlayan M noktasının geometrik yerini belirleyiniz.

3. a, b, c pozitif gerçel sayıları, $a + b + c = 1$ koşulunu sağlıyorsa,
$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geq \frac{1}{ab + bc + ca}$$
olduğunu kanıtlayınız.

4. Dar açılı bir ABC üçgeniyle; bu üçgenin dışında ve sırasıyla $[AC$, $[BA$ ve $[CB$ ışınları üstünde yer alan B_1, C_1 ve A_1 noktalarının oluşturduğu $A_1B_1C_1$ üçgeni benzerdir. $A_1B_1C_1$ üçgeninin diklik merkezi ile ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin çakıştığını kanıtlayınız.

5. Hangi n pozitif tek sayıları için,
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n^4$$
eşitliğini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tek sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

6. 2007×2007 bir satranç tahtasının her birim karesine 1 veya -1 yazıyoruz. Bu yazımın, tahtanın birim karelerinden oluşan her karenin içindeki sayıların toplamının mutlak değeri 1 i aşmayacak biçimde, kaç farklı şekilde gerçekleştirilebileceğini belirleyiniz.

[1] 24-25 Mart 2007

15. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2007[1]

1. Dar açılı bir ABC üçgeninin AC kenarını çap kabul eden çember, AB ve BC yi, A ve C dışında, sırasıyla K ve L noktalarında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberi, CK doğrusunu C dışında F noktasında; AL doğrusunu ise, A dışında D noktasında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin $[AC]$ kirişinin küçük yayı üstünde bir E noktası alıp, BE ile AC nin kesiştiği noktaya N diyelim. Eğer

$$|AF|^2 + |BD|^2 + |CE|^2 = |AE|^2 + |CD|^2 + |BF|^2$$

ise, $m(\widehat{KNB}) = m(\widehat{BNL})$ olduğunu gösteriniz.

2. 2007×2007 bir satranç tahtasının bazı birim kareleri kırmızıya boyanıyor. Tahtanın i. satır ve j. sütunundaki birim kareyi (i, j) ile $x \le i$ ve $y \le j$ koşullarını sağlayan kırmızı boyalı (x, y) birim karelerinin kümesini de $S_{i,j}$ ile gösteriyoruz. Başlangıçta boyalı her (i, j) birim karesine $S_{i,j}$ ye ait boyalı karelerin sayısı yazılıyor. Daha sonraki her adımda, boyalı her (i, j) birim karesine, $S_{i,j}$ deki karelere bir önceki adım sonunda yazılmış olan sayıların toplamı yazılıyor. Sonlu sayıda adım sonunda boyalı birim karelere yazılı tüm sayıların tek sayı haline geleceğini gösteriniz.

3. $a + b + c = 3$ eşitliğini sağlayan tüm $a, b, c > 0$ gerçel sayıları için,

$$\frac{a^2 + 3b^2}{ab^2(4 - ab)} + \frac{b^2 + 3c^2}{bc^2(4 - bc)} + \frac{c^2 + 3a^2}{ca^2(4 - ca)} \ge 4$$

olduğunu gösteriniz.

4. $k > 1$ bir sayı, $p = 6k + 1$ bir asal sayı ve $m = 2^p - 1$ olmak üzere,

$$\frac{2^{m-1} - 1}{127m}$$

sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

5. $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi, BC kenarına D noktasında değiyor. ABD ve ACD üçgenlerinin iç merkezleri sırasıyla X ve Z olmak üzere, XZ ve AD doğruları K noktasında kesişiyor. XZ nin ABC nin çevrel çemberini kestiği noktalar U ve V; UV doğru parçasının orta noktası M; AD nin ABC nin çevrel çemberini A dışında kestiği nokta Y olmak üzere, $|CY| = 2|MK|$ olduğunu gösteriniz.

6. n kentin bulunduğu bir ülkede, herhangi iki kent arasında, bu kentleri doğrudan birleştiren en çok bir yol bulunuyor. Farklı yolların sadece kentlerde kesiştiği bu ülkede, herhangi bir kentin tüm yolları kapansa bile, her kentten başka her kente, gerekirse diğer kentlerden geçerek ulaşılabiliyor. Farklı A ve B kentleri verildiğinde, seçtiğimiz en çok k yolu istediğimiz gibi tek yönlü yapmak suretiyle, geri kalan yollar nasıl tek yönlü yapılırsa yapılsın, iki kenti doğrudan birleştiren herhangi bir l yolu için, A dan başlamak, belirlenmiş yönlere uymak, l yolunu kullanmak ve herhangi bir kentten en çok bir kez geçmek üzere B ye ulaşabiliyorsak, *A kenti B kentine k-yönlü bağlanabilir* diyoruz. Her A kenti başka her B kentine k-yönlü bağlanabiliyorsa, k en az kaç olur?

[1] 8-9 Aralık 2007

49. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2008[1][2]

1. $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olan bir ABC üçgeninde, A açısının iç ve dış açıortayları BC yi sırasıyla D ve E noktalarında kesiyor. $[EA$ ışını üstünde, A ya göre E ile farklı tarafta bir P noktası alınıyor. DP ve AC doğruları M noktasında, ME ile AD ise, Q noktasında kesişiyor. P noktası değişirken elde edilen PQ doğrularının hepsinin bir noktada kesiştiğini gösteriniz.

2. 30 köşesi ve 105 kenarı bulunan bir çizgede, ortak bir köşesi bulunmayan sırası kenar ikililerinin sayısı 4822 ise, bu çizgideki iki köşenin dereceleri arasındaki fark en çok kaç olur?

3. $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ denkleminin bütün köklerinin pozitif gerçel sayılar olmasını sağlayan a, b, c gerçel sayıları için
$$\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$$
ifadesinin en küçük değerini bulunuz.

4. (x_n) dizisi, $x_1 = a$, $x_2 = b$ ve her $n \geq 1$ tam sayısı için
$$x_{n+2} = 2008x_{n+1} - x_n$$
bağıntıları aracılığıyla tanımlanıyor. Her $n \geq 1$ tam sayısı için,
$$1 + 2006x_n x_{n+1}$$
ifadesini tam kare yapan a ve b pozitif tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

5. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|AD| = \dfrac{|BD|^2}{|AB|+|AD|} = \dfrac{|CD|^2}{|AC|+|AD|}$ olacak şekilde bir D noktası ile $D \in [AE]$ ve $|CD| = \dfrac{|DE|^2}{|CD|+|CE|}$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. $|AE| = |AB| + |AC|$ olduğunu gösteriniz.

6. $m, n > 2$ tam sayılar olmak üzere, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ topluluğu, m elemanlı bir A kümesinin bir altkümesini seçecektir. N topluluğunun bir tercih profili, her $i \in N$ seçmeninin A kümesindeki seçeneklere ilişkin bir kesin tercih sıralamasından oluşmaktadır. $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ olmak üzere, k-çoğulcu seçim sisteminde, her seçmen, ilk k sırada tercih ettiği k adaya, sırasını belirtmeksizin eşit ağırlıklı oy vermekte ve en çok sayıda toplam oy alan adaylar seçilmektedir. R ve R', N topluluğunun iki tercih profili ve a olmak üzere, eğer her $i \in N$, R profilindeki tercihine göre a dan kötü bulduğu bütün adayları, R' profilindeki tercihine göre de a dan kötü buluyorsa, "R' profili, R profiline a-üstündür" diyoruz. k-çoğulcu seçim sistemine göre R profilinde seçilen her $a \in A$, R ye a-üstün olan her R' profilinde de seçilmeye devam ediyorsa, k-çoğulcu seçim sistemine *tekdüze* diyoruz. $k > \dfrac{m(n-1)}{n}$ olmasının, k-çoğulcu seçim sisteminin tekdüze olması için gerek ve yeter olduğunu gösteriniz.

[1]Kaynak: MatematikOlimpiyati.org
[2]29-30 Mart 2008

16. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2008[1]

1. Diklik merkezi H ve çevrel merkezi O olan dar açılı bir ABC üçgeninin BC, AC ve AB kenarlarının orta noktaları sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 olsun. $[HA_1$, $[HB_1$ ve $[HC_1$ ışınları, ABC üçgeninin çevrel çemberini, sırasıyla A_0, B_0 ve C_0 noktalarında kessin. $A_0B_0C_0$ üçgeninin diklik merkezi H_0 ise, O, H ve H_0 noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

2. (a) $\dfrac{7^{p-1}-1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

   (b) $\dfrac{11^{p-1}-1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

3. $a+b+c=1$ koşulunu sağlayan tüm a,b,c pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2-ab+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2-bc+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b^3(c^2-ca+a^2)}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}$$

   olduğunu kanıtlayınız.

4. $\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayıların ve $\mathbb{Z}$ de tüm tam sayıların kümesini göstermek üzere, $f:\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu,

   i. $f(0,0)=1,\ f(0,1)=1,$
   ii. her $k\notin\{0,1\}$ için, $f(0,k)=0$ ve
   iii. her $n\geq 1$ ve k için, $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)$

   koşullarını sağlıyorsa

$$\sum_{k=0}^{\binom{2009}{2}} f(2008,k)$$

   toplamının değerini bulunuz.

5. Düzlemde bir Γ çemberi ve onu kesmeyen bir ℓ doğrusu verilmiş olsun. $PQ\cap RS=\{A\}$ ve $PS\cap QR=\{B\}$ olacak biçimde, Γ çemberi üstünde P,Q,R,S noktalarının bulunmasını sağlayan ve ℓ doğrusu üstünde yer alan tüm $\{A,B\}$ nokta ikilileri için, $[AB]$ yi çap alan çemberlerin kesişim kümesini belirleyiniz.

6. 2008 tane bilgisayardan oluşan bir bilgisayar ağında, herhangi iki döngü kesişmiyor. $t=0$ anında, bir bilgisayar korsanı bu ağdaki bir bilgisayarı ele geçiriyor ve $t=1$ anında da, ağ yönetici, ele geçirilmemiş bir bilgisayara koruyucu bir program yüklüyor. Her k pozitif tam sayısı için, $t=2k$ anında, korsan, varsa, o ana kadar ele geçirdiği bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve koruyucu program yüklenmemiş olan bir bilgisayarı daha ele geçirebiliyor; $t=2k+1$ anında da, ağ yöneticisi, varsa, o ana kadar koruyucu program yüklenmiş bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve korsanın ele geçirmemiş olduğu bir bilgisayara daha koruyucu programı yükleyebiliyor. Bilgisayar ağı ne şekilde düzenlenmiş olursa olsun, korsanın en çok kaç tane bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebileceğini belirleyiniz.

   [$m\geq 3$ olmak üzere, B_1 ve B_m bilgisayarları ve, her $2\leq i\leq m$ için, B_{i-1} ve B_i bilgisayarları doğrudan bağlıysa, m elemanlı $\{B_1,B_2,\ldots,B_m\}$ kümesine bir *döngü* diyoruz.]

[1] 29-30 Kasım 2008

50. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2009[1]

1. $\mathbf{Q}^+$ tüm pozitif rasyonel sayıların, $\mathbf{Z}$ ise tüm tam sayıların kümesini göstermek üzere, $x > 1$ olan her $x \in \mathbf{Q}^+$ için, $f(1/x) = f(x)$ ve $(x+1)f(x-1) = xf(x)$ bağıntılarını sağlayan bütün $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

2. Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninin iç teğet çemberinin merkezi O, yarıçapı ise r dir. AB ve CD doğruları P; AD ve BC doğruları Q; AC ve BD köşegenleri ise, K noktasında kesişiyor. O noktasından PQ doğrusuna olan uzaklık d ise, $|OK| \cdot d = r^2$ olduğunu gösteriniz.

3. 2009 kişilik toplulukta, hangi iki kişiyi alırsak alalım, bunların ikisiyle birden tanışık olan tam olarak bir kişi bulunuyor. Böyle bir toplulukta en çok tanıdığı olan ve en az tanıdığı olan kişilerin tanıdık sayıları arasındaki farkın alabileceği en küçük değeri bulunuz.

4. Hangi p asal sayıları için, $1 + p + \prod_{i=1}^{2p-2} Q(x^i)$ polinomunun en az bir tam sayı kökü olacak biçimde, tam sayı katsayılı bir $Q(x)$ polinomunun bulunduğunu belirleyiniz.

5. Bir ABC üçgeninde, A_1, B_1 ve C_1, iç teğet çemberin sırasıyla, BC, AC ve BC kenarlarına değdiği noktalar olmak üzere,
$$\sqrt{\frac{|AB_1|}{|AB|}} + \sqrt{\frac{|BC_1|}{|BC|}} + \sqrt{\frac{|CA_1|}{|CA|}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$
olduğunu kanıtlayınız.

6. Bir sınıftaki $n \geq 4$ öğrenciden bazıları arkadaştır. Bu sınıftaki herhangi $n-1$ öğrenci, her birinin her iki yanında da birer arkadaşı bulunacak biçimde bir çember oluşturabilirken, n öğrenciyle bu koşulu sağlayan bir çember oluşturulamıyorsa, n nin alabileceği en küçük değerin 10 olduğunu gösteriniz.

[1] 4-5 Nisan 2009

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2009[1]

1. $p^3 - 4p + 9$ un tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını bulunuz.

2. Γ, ABC üçgeninin çevrel çemberi; D ve E de, sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde köşelerden farklı noktalar olsun. A', $\widehat{BAC}$ nin açıortayının Γ yı ikinci kez kestiği nokta; P ve Q da, sırasıyla $A'D$ ve $A'E$ doğrularının Γ yı ikinci kez kestiği noktalar olsun. R ve S sırasıyla APD ve AQE üçgenlerinin çevrel çemberlerinin AA' doğrusunu ikinci kez kestikleri noktalar ise; DS ve ER doğrularının, Γ ya A da teğet olan doğru üstünde bir noktada kestiğini gösteriniz.

3. Bir beldenin Elektrik İşleri görevlisi Ahmet, k gün boyunca her gün, ya seçtiği bir direkle yine kendisinin seçtiği istediği sayıda direk arasına birer tel bağlıyor, ya da en çok 17 direk ikilisi seçip her ikiliye ait direkler arasına birer tel bağlıyor. Beldenin Boya İşleri görevlisi Berna da, beldede kaç direk olursa olsun ve Ahmet telleri nasıl bağlarsa bağlasın, beldedeki tüm direklerin en çok 2009 renk kullanarak ve aralarına tel bağlanmış herhangi iki direk aynı renkte olmayacak biçimde boyanabileceğini iddia ediyor. k nin, Berna'nın iddiasının doğru olmasını sağlayan en büyük değerinin belirleyiniz.

4. Dar açılı ABC üçgeninin diklik merkezi H ve A, B, C köşelerine ait yüksekliklerinin ayakları da, sırasıyla A_1, B_1, C_1 dir. K, $[AB]$ çaplı çemberin küçük AB_1 yayı üstünde yer alan ve $m(\widehat{HKB}) = m(\widehat{C_1KB})$ koşulunu sağlayan bir nokta ve $[KB] \cap [CC_1] = \{L\}$ olmak üzere; C merkezli ve $[CL]$ yarıçaplı çember $[AA_1]$ i M noktasında kesiyor. B merkezli ve $[BM]$ yarıçaplı çemberin CC_1 doğrusunu kestiği noktalar P ve Q ise, A, K, P ve Q noktalarının çemberdeş olduğunu kanıtlayınız.

5. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{(b+c)(a^4 - b^2c^2)}{ab + 2bc + ca} + \frac{(c+a)(b^4 - c^2a^2)}{bc + 2ca + ab} + \frac{(a+b)(c^4 - a^2b^2)}{ca + 2ab + bc} \geq 0$$

olduğunu gösteriniz.

6. $1 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılar olmak üzere; her N tam sayısı için, $k_i | N - a_i$ olacak biçimde en az bir $1 \leq i \leq n$ bulunuyorsa, n nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

[1] 5-6 Aralık 2009

51. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2010[1]

1. ABC üçgeninin sırasıyla $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarları üstünde yer alan D, E, F noktaları, $|AD| = |AF|$, $|BD| = |BE|$ ve $|DE| = |DF|$ koşullarını sağlıyor. I, ABC üçgeninin iç merkezi olmak üzere; ABI üçgeninin çevrel çemberine A noktasında teğet olan doğru ile BI doğrusu K noktasında kesişiyor. $|AK| = |AD|$ ise, $|AK| = |KE|$ olduğunu kanıtlayınız.

2. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} + \sqrt[4]{\frac{(b^2+c)(b^2-bc+c^2)}{2}} + \sqrt[4]{\frac{(c^2+a^2)(c^2-ca+a^2)}{2}}$$
$$\leq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

   olduğunu gösteriniz.

3. Yıl boyunca yaptığı sınavlarda 2010 tane soru sormuş olan bir öğretmen, bu soruları her biri 670 tane soru içeren üç dosyaya ayırarak, her dosyayı o dosyadaki soruların hepsini çözmüş olan bir öğrenciye vermek istiyor. Herhangi bir soruyu çözemeyen en çok iki öğrenci olması koşuluyla; hangi soru hangi öğrenciler tarafından çözülmüş olursa olsun, öğretmenin bunu yapmasının olanaklı olması için toplam öğrenci sayısının en az kaç olması gerektiğini belirleyiniz.

4. $0 \leq k < n$ tam sayılar ve $A = \{a : a \equiv k \pmod{n}\}$ olmak üzere, hiçbir $(a, m) \in A \times \mathbf{Z}^+$ için,

$$\frac{a^m + 3^m}{a^2 - 3a + 1}$$

   ifadesinin değeri tam sayı değilse, n nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

5. ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan bir D noktası için, $BD \cap AC = \{E\}$ ve $CD \cap AB = \{F\}$ olmak üzere; A, E, D, F noktaları çemberdeş ise, bu noktalardan geçen çemberi Γ_D ile gösterelim. Tüm Γ_D çemberlerinin A dan farklı bir ortak noktadan geçtiğini gösteriniz.

6. Λ düzlemdeki kafes noktalarının kümesi ve $\mathcal{F}$ de, Λ dan $\{-1, 1\}$ ne fonksiyonların kümesi olsun. $\mathcal{F}$ deki bir f fonksiyonu, $\mathcal{F}$ ye ait olan ve f den farklı değer aldığı kafes noktalarının sayısı sonlu olan her g fonksiyonu için,

$$\sum_{\substack{P,Q\in\Lambda \\ 0<|PQ|<2010}} \frac{f(P)f(Q) - g(P)g(Q)}{|PQ|} \geq 0$$

   koşulunu sağlıyorsa, f ye *şahane* diyelim. Birbirinin ötelemesi olmayan sonsuz çoklukta şahane fonksiyon bulunduğunu kanıtlayınız.

[1] 27-28 Mart 2010

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2010[1]

1. Bir ülkede başkente doğrudan karayolu ile bağlı kentlerin sayısı 2010 dur. Başkent dışındaki her kent 2010 dan az sayıda kente doğrudan karayolu ile bağlı olup, aynı sayıda kente doğrudan bağlı olan herhangi iki kent için bu sayı çifttir. Başkenti doğrudan çeşitli kentlere bağlayan yollardan k tanesi kapatılarak bakıma alınacaktır. Bu ülkedeki karayolu ağı nasıl oluşturulmuş olursa olsun, bunun aralarında karayolu ulaşımı mümkün olan herhangi iki kent arasındaki ulaşımın hala mümkün olacağı biçimde yapılmasını olanaklı kılan en büyük sayı k sayısını belirleyiniz.

2. P, ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan, A köşesine ait kenarortay üstünde olmayan ve $m(\widehat{CAP}) = m(\widehat{BCP})$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. $BP \cap CA = \{B'\}$ ve $CP \cap AB = \{C'\}$ olmak üzere; AP doğrusu ile ABC üçgeninin çevrel çemberi ikinci kez Q noktasında, $B'Q$ ve CC' doğruları R noktasında ve $B'Q$ doğrusu ile P den AC doğrusuna paralel çizilen doğru da S noktasında kesişiyor. $B'C'$ ve QB doğruları AB doğrusunun C den farklı yanında yer alan bir T noktasında kesişsin. $m(\widehat{BAT}) = m(\widehat{BB'Q})$ olması için, $|SQ| = |RB'|$ olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayınız.

3. Her n pozitif tam sayısı ve $a_1a_2\dots a_n = 1$ koşulunu sağlayan tüm $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitif gerçel sayıları için,
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$
olduğunu kanıtlayınız.

4. A ve B noktaları $[CD]$ çaplı çemberin üstünde ve CD doğrusunun farklı yanlarında bulunuyor. C ve D noktalarından geçen bir Γ çemberi $[AC]$ yi uçlarından farklı bir E noktasında, $[BC]$ yi de F noktasında kesiyor. E noktasında Γ çemberine teğet olan doğru ile BC doğrusunun kesiştiği nokta P olmak üzere; Q noktası, $|QP| = |EP|$ koşulunu sağlayan ve CEP üçgenin çevrel çemberi üstünde yer alan E den farklı bir nokta olsun. $AB \cap EF = \{R\}$ ve $|EQ|$ nun orta noktası S ise, DR ve PS doğrularının paralel olduğunu gösteriniz.

5. $0 \leq a, b < 2010^{18}$ tam sayılar olmak üzere, $P(x) = ax^2 + bx$ biçimindeki polinomların kümesini $\mathcal{S}$ ile gösterelim. $\mathcal{S}$ ye ait kaç P polinomunun, tüm $0 \leq n < 2010^{18}$ tam sayıları için $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ bağıntısını sağlayan ve $\mathcal{S}$ ye ait olan bir Q polinomunun bulunmasını olanaklı kıldığını belirleyiniz.

6. K, düzlemdeki dışbükey bir 2010-genin kenar ve köşegenlerinin kümesi olsun. A, K nin bir altkümesi olmak üzere; A ya ait her doğru parçası çifti kesişiyorsa, A ya *kesişimli küme* diyelim. İki kesişimli kümenin birleşiminin en çok kaç elemana sahip olabileceğini belirleyiniz.

[1] 27-28 Kasım 2010

52. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2011[1][2]

1. $\mathbf{Q}^+$ pozitif rasyonel sayılar kümesini göstermek üzere; her $x \in \mathbf{Q}^+$ için
$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{f(x)}{x+1} \quad \text{ve} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^3}$$
koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

2. ABC üçgeninin çevrel çemberinin A noktasından geçen çapının diğer ucu D ve içteğet çemberinin merkezi I olsun. Sırasıyla $[BA$ ve $[CA$ ışınları üstünde yer alan E ve F noktaları
$$|BE| = |CF| = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2}$$
koşulunu sağlıyorsa, EF ve DI doğrularının dik olduğunu gösteriniz.

3. A ve B, sırasıyla 2011^2 ve 2010 elemanlı birer küme olsun. Her $(x, y) \in A \times A$ için, $f(x, y) = f(y, x)$ koşulunu ve her $g : A \to B$ fonksiyonu için, $g(a_1) = f(a_1, a_2) = g(a_2)$ ve $a_1 \neq a_2$ olacak biçimde bir $(a_1, a_2) \in A \times A$ bulunmasını sağlayan bir $f : A \times A \to B$ fonksiyonunun bulunduğunu kanıtlayınız.

4. D, ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta olmak üzere; ABC, ABD ve ADC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezleri sırasıyla, I, I_1 ve I_2 dir. AI_1I ve ADI_2 üçgenlerinin çevrel çemberleri A dan farklı bir E noktasında, AII_2 ve AI_1D üçgenlerinin çevrel çemberleri de A dan farklı bir F noktasında kesişiyor. $|AI_1| = |AI_2|$ ise,
$$\frac{|EI|}{|FI|} \cdot \frac{|ED|}{|FD|} = \frac{|EI_1|^2}{|FI_1|^2}$$
olduğunu kanıtlayınız.

5. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$ koşulunu sağlayan tüm pozitif a, b, c gerçel sayıları için,
$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)} + \frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)} + \frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{3}{2}$$
olduğunu kanıtlayınız.

6. n pozitif tam sayısının iki tabanına göre yazılımındaki rakamların toplamını $t(n)$ ile gösterelim. $k \geq 2$ bir tam sayı olsun.

   a. Tüm $m \geq N$ tam sayıları için, $t(3 \cdot 5 \cdots (2m+1)) > k$ olmasını sağlayan bir N tam sayısı bulunduğunu gösteriniz.

   b. Her m pozitif tam sayısı için, $a_m \geq 3$ bir tek sayı ve $t(a_1 a_2 \cdots a_m) = k$ olacak biçimde bir $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tam sayılar dizisi bulunduğunu gösteriniz.

7. K, dar açılı bir ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan bir nokta ve $ARBPCQ$, köşeleri ABC üçgeninin çevrel çemberi Γ nın üstünde bulunan dışbükey bir altıgen olsun. K den geçen ve Γ ya A da teğet olan çemberin AP doğrusunu ikinci kez kestiği nokta A_1, K den geçen ve Γ ya B de teğet olan çemberin BQ doğrusunu ikinci kez kestiği nokta B_1, K den geçen ve Γ ya C de teğet olan çemberin CR doğrusunu ikinci kez kestiği nokta C_1 ise,
$$\min\left\{\frac{|PA_1|}{|AA_1|}, \frac{|QB_1|}{|BB_1|}, \frac{|RC_1|}{|CC_1|}\right\} \leq 1$$
olduğunu kanıtlayınız.

8. 2011 kentin bulunduğu Çizgistan'daki her kent ikilisi için, Çizge Hava Yolları (ÇHY) tarafından bu kentlerden yalnızca birinden diğerine tek yönlü olarak uçak seferleri düzenlenmektedir. Her kentin kalkış noktası olduğu seferlerin sayısı ile varış noktası olduğu seferlerin sayısının farkının mutlak değeri k yi aşmamak koşuluyla bu seferler nasıl düzenlenirse düzenlensin, Çizgistan'ın herhangi bir kentinden herhangi başka bir kentine yalnızca ÇHY seferlerini kullanarak ulaşmak mümkün olmaktadır. k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

---

[1] 29-30-13 Mart 2011

[2] Takım Seçme Sınavları 2011'den itibaren 3 güne çıkartıldı.

9. p bir asal sayı, n bir pozitif tam sayı olsun ve $\mathbf{Z}_{p^n} = \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$ olsun. Her $a, b \in \mathbf{Z}_{p^n}$ için, ($a+b+pab$, $a + b + pab$ nin p^n ye bölümünden kalanı göstermek üzere),

$$f(a) + f(b) \equiv f(a + b + pab) \pmod{p^n}$$

koşulunu sağlayan kaç $f : \mathbf{Z}_{p^n} \to \mathbf{Z}_{p^n}$ fonksiyonunun bulunduğunu belirleyiniz.

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2011[1]

1. $n \geq 2$ ve $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. $A_1, A_2, \ldots, A_k$; E nin altkümeleri olmak üzere, her $1 \leq i < j \leq k$ için, $A_i \cap A_j$, $A'_i \cap A_j$, $A_i \cap A'_j$ ve $A'_i \cap A'_j$ kümelerinden tam olarak bir tanesi boş ise, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

   [A, E nin bir altkümesi ise, E nin A ya ait olmayan elemanlarının kümesini A' ile gösteriyoruz.]

2. D, ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta ve E, $[CD]$ nin orta noktası olsun. E den BC doğrusuna çizilen dikme $[AC]$ kenarını $|AF| \cdot |BC| = |AC| \cdot |EC|$ koşulunu sağlayan bir F noktasında kesiyor. ADC üçgeninin çevrel çemberi de, $[AB]$ kenarını A dan farklı bir G noktasında kesiyor. AGF üçgeninin çevrel çemberine F noktasından çizilen teğetin BGE üçgeninin çevrel çemberine de teğet olduğunu kanıtlayınız.

3. $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{1}{x + y^{20} + z^{11}} + \frac{1}{y + z^{20} + x^{11}} + \frac{1}{z + x^{20} + y^{11}} \leq 1$$

   olduğunu gösteriniz.

4. $a_1 = 5$ ve $n \geq 1$ için, $a_n + 1 = a_n^3 - 2a_n^2 + 2$ olsun. $p \equiv 3 \pmod 4$ koşulunu sağlayan bir p asal sayısı $a_{2011} + 1$ sayısını bölüyorsa, $p = 3$ olduğunu kanıtlayınız.

5. M ve N düzlemde yer alan düzgün dışbükey çokgensel bölgeler olmak üzere, uç noktalardan biri M ye, diğeri de N ye ait olan doğru parçalarının orta noktalarından oluşan kümeyi $K(M, N)$ ile gösterelim. $K(M, N)$ nin de düzgün dışbükey çokgensel bir bölge olmasını sağlayan tüm (M, N) ikililerini belirleyiniz.

6. A ülkesindeki 2011 kent ile B ülkesindeki 2011 kent arasında karşılıklı uçak seferleri yapılıyor. İki kent arasındaki seferleri yalnızca bir hava yolu şirketi işletebiliyor ve bir kentten çıkan seferleri en çok 19 farklı hava yolu şirketi işletebiliyor. Uçuşlar hava yolu şirketleri arasında bu koşulları sağlayacak biçimde nasıl paylaşılmış olursa olsun, yalnızca bir tek hava yolu şirketinin uçuşlarını kullanarak herhangi ikisi arasında gidebileceğimiz k kent bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

[1] 3-4 Aralık 2011

53. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2012[1]

1. $A = \{1, 2, \ldots, 2012\}$, $B = \{1, 2, \ldots, 19\}$ ve S de A nın tüm altkümelerinin kümesi olsun. Her $A_1, A_2 \in S$ için, $f(A_1 \cap A_2) = \min\{f(A_1), f(A_2)\}$ koşulunu sağlayan tüm $f : S \to B$ fonksiyonlarının sayısını belirleyiniz.

2. D, dar açılı bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta olmak üzere; M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 sırasıyla, $[AD]$, $[AB]$, $[AC]$, $[BD]$, $[CD]$ doğru parçalarının orta noktaları; O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 sırasıyla, ABD, ACD, $M_1M_2M_4$, $M_1M_3M_5$ üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri; S ve T de sırasıyla, AO_1 ve AO_2 doğru parçalarının orta noktaları olsun. SO_3O_4T dörtgeninin bir ikizkenar yamuk olduğunu kanıtlayınız.

3. $ab + bc + ca \leq 1$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$a + b + c + \sqrt{3} \geq 8abc\left(\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

4. Bir ABC üçgeninin içteğet çemberi $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarına sırasıyla, D, E, F noktalarında değiyor. A noktasında geçen ve BC doğrusuna D de teğet olan çember ise, $[BF]$ ve $[CE]$ doğru parçalarını sırasıyla, K ve L noktalarında kesiyor. E den geçen ve DL ye paralel olan doğru ile F den geçen ve DK ye paralel olan doğru da P noktasında kesişiyor. R_1, R_2, R_3, R_4 sırasıyla, AFD, AED, FPD, EPD üçgnlerinin çevrel çemberlerinin yarıçapları olmak üzere, $R_1R_4 = R_2R_3$ olduğunu kanıtlayınız.

5. Hangi n pozitif tam sayıları için, her biri n ile bölünen n tnae tam sayının karelerinin toplamı olarak yazılabilen her pozitif tam sayının, hiçbiri n ile bölünmeyen n tane tam sayının karelerinin toplamı olarak da yazılabileceğini belirleyiniz.

6. Arda ile Başak $1 \times m$ bir satranç tahtası ve üzerlerinde 1 den 2012 ye kadar tam sayıların yazılı olduğu 2012 taşla bir oyun oynuyorlar. Her hamlede Arda bir taş seçiyor ve Başak bunu tahtanın istediği boş bir karesine yerleştiriyor. Bu biçimde yapılan k hamle sonucunda seçilen taşlar tahtaya artan bir sırada yerleştirilmişse, oyunu Başak; değilse, Arda kazanıyor. Hangi (m, k) ikilileri için Başak'ın oyunu kazanmayı garantileyebileceğini belirleyiniz.

7. Bir r rasyonel sayısı ve bir n pozitif tam sayısı için, $S_r(n) = 1^r + 2^r + \cdots + n^r$ olsun. Sonsuz çoklukta n pozitif tam sayısı için, $S_a(n) = (S_b(n))^c$ olmasını sağlayan bütün a, b pozitif rasyonel sayılarını ve c pozitif tam sayılarını belirleyiniz.

8. $ABC \cong A'B'C'$ olacak biçimde düzlemde yer alan birbirinden farklı A, B, C, A', B', C' noktaları için, ABC üçgeninin ağırlık merkezi G noktası olsun. G den geçen A' merkezli çember ile $[AA']$ çaplı çember A_1 noktasında, G den geçen B' merkezli çember ile $[BB']$ çaplı çember B_1 noktasında, G den geçen C' merkezli çember ile $[CC']$ çaplı çember de C_1 noktasında kesişiyorsa,

$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 + |CC_1|^2 \leq |AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2$$

olduğunu gösteriniz.

9. Tüm pozitif tam sayıların kümesinin $\mathbf{Z}^+$ ile, tüm asal sayıların kümesini de $\mathbf{P}$ ile gösterelim.

   A ve S, $\mathbf{Z}^+$ nın altkümeleri olmak üzere; A nın tüm a elemanları ve $0 \leq b < a$ koşulunu sağlayan tüm b tam sayıları için, $b \equiv s_1 + s_2 + \cdots + s_n \pmod{a}$ ve $1 \leq n \leq N$ olacak biçimde S ye ait $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayılarının bulunmasını sağlayan bir N pozitif tam sayısı varsa, A kümesine S-*uygun* diyelim.

   $\mathbf{P}$ kümesi S-uygun olacak ve $\mathbf{Z}^+$ kümesi S-uygun olmayacak biçimde $\mathbf{Z}^+$ nın bir S altkümesini bulunuz.

[1] 24-25-26 Mart 2012

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2012[1]

1. Her n pozitif tam sayısı için $P(n!) = |P(n)|!$ koşulunu sağlayan tüm tam sayı katsayılı $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

2. ABC, $|AB| = |AC|$ koşulunu sağlayan bir ikizkenar üçgen ve D, A ya ait yüksekliğin ayağı olmak üzere, ADC üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktası $m(\widehat{APB}) > 90°$ ve $m(\widehat{PBD}) + m(\widehat{PAD}) = m(\widehat{PCB})$ koşullarını sağlıyor.
   $CP \cap AD = \{Q\}$ ve $BP \cap AD = \{R\}$ olsun. $[AB]$ üstünde yer alan bir T noktası ile $[AP$ üstünde ve $[AP]$ dışında yer alan bir S noktası, $m(\widehat{TRB}) = m(\widehat{DQC})$ ve $m(\widehat{PSR}) = 2m(\widehat{PAR})$ koşullarını sağlıyorsa, $|TR| = |RS|$ olduğunu gösteriniz.

3. Tüm x, y gerçel sayıları için,

   i. $f\left(f(x^2) + y + f(y)\right) = x^2 + 2f(y)$ ve
   ii. $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

   koşullarını sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

4. Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{x(2x-y)}{y(2z+x)} + \frac{y(2y-z)}{z(2x+y)} + \frac{z(2z-x)}{x(2y+z)} \geq 1$$

   olduğunu kanıtlayınız.

5. $x_i \in 1, 2, \ldots, 20, (1 \leq i \leq 2012)$, biçimindeki tüm $(x_1, x_2, \ldots, x_{2012})$ 2012-lilerinden oluşan kümeyi P ile gösterelim.
   Bir $S \subset P$ altkümesi, her $(x_1, x_2, \ldots, x_{2012}) \in S$ için,

$$y_i \leq x_i (1 \leq i \leq 2012) \Rightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_{2012}) \in S$$

   koşulunu sağlıyorsa, S ye *alçalan küme*;

$$x_i \leq y_i (1 \leq i \leq 2012) \Rightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_{2012}) \in S$$

   koşulunu sağlıyorsa da, S ye *yükselen küme* diyelim.
   A ve B boş olmayan sırasıyla bir alçalan ve bir yükselen küme olmak üzere, $|A \cap B| / (|A|.|B|)$ nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

6. Sırasıyla, $[AE]$ ve $[AF]$ doğru parçaları üstünde yer alan B ve D noktaları için, ABF ve ADE üçgenlerinin A köşelerine ait dış teğet çemberleri aynıdır. Bu çemberin merkezi I, $[BF] \cap [DE] = \{C\}$ ve IAB, IBC, ICD, IDA, IAE, IEC, ICF, IFA üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla, P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 olsun.

   a. P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarının ve Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.
   b. Bu çemberlerin merkezleri sırasıyla, O_1 ve O_2 olmak üzere, O_1, O_2, I noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

[1] 24-25 Kasım 2012

54. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2013[1]

1. Bir n pozitif tam sayısı için, n den küçük ve n ile arasında asal olan pozitif tam sayıların sayısı $\phi(n)$ ile gösterilmek üzere,
$$2^n + (n - \phi(n) - 1)! = n^m + 1$$
eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

2. 2013×2013 bir satranç tahtasının birim karelerine, her birim karede en çok bir taş olacak ve birim karelerden oluşan her 19×19 karede de en az 21 taş olacak biçimde en az kaç taş yerleştirilebileceğini belirleyiniz.

3. $\widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ açılarının ölçüleri farklı olan dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O ve iç teğet çemberinin merkezi de I dır. $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla, D, E, F ve I dan $[AB]$ ye inilen dikmenin ayağı T olsun. DEF üçgeninin çevrel çemberinin merkezi P ve $[OI]$ doğru parçasının orta noktası Q olmak üzere, A, P, Q noktaları doğrudaş ise,
$$\frac{|AO|}{|OD|} - \frac{|BC|}{|AT|} = 4$$
olduğunu kanıtlayınız.

4. $m^6 = n^{n+1} + n - 1$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

5. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin $[BC]$ kenarına teğet olduğu nokta D ve merkezi I; $[ID]$ doğru parçasının orta noktası ise T olsun. I dan AD doğrusuna çizilen dikme AB ve AC doğrularını sırasıyla, K ve L noktalarında; T den AD ye çizilen dikme de bu doğruları sırasıyla, M ve N noktalarında kesiyor. $|KM| \cdot |LN| = |BM| \cdot |CN|$ olduğunu gösteriniz.

6. $-2 \le x, y, z \le 2$ ve $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$ koşullarını sağlayan tüm x, y, z gerçel sayıları için,
$$\frac{z(xz + yz + y)}{xy + y^2 + z^2 + 1} \le K$$
olmasını sağlayan en küçük K gerçel sayısını belirleyiniz.

7. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin kesişim noktası E olmak üzere, $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{BAD})$ koşulu sağlanıyor. $[BC]$ kenarı üstündeki bir F noktası için, $m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{EBF}) = m(\widehat{BFE})$ ise, A, B, F, D noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

8. Tüm x, y gerçel sayıları için,

   i. $f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x)$

   ii. $f(-x) = f(x - 1)$

   iii. $1 < x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$

   koşullarını sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

9. Bir ülkedeki n kentten bazıları arasında, herhangi iki kent arasında ulaşımı olanaklı kılacak ve her kentten en az k sefer olacak biçimde karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. Bu seferlerin, nasıl düzenlenmiş olurlarsa olsunlar, $n - k$ hava yolu şirketi arasında, herhangi bir kentten bir diğerine aynı hava yolu şirketini birden fazla kere kullanmadan gitmek mümkün olacak biçimde paylaştırılabileceğini kanıtlayınız.

[1] 30 Mart-31 Mart-1 Nisan 2013