

2013 AKDENİZ MATEMATİK OLİMPİYATI

1. AŞAMA SINAVININ ÇÖZÜMLERİ

18. Akdeniz Matematik Olimpiyatı birinci aşama sorularının çözümlerini www.geomania.org aracılığıyla matematikseverlerin hizmetine sunuyoruz. İyi çalışmalar dileriz ...

L. Gökçe

1. $[a]$ ifadesi, a dan büyük olmayan en büyük tamsayıyı göstermek üzere, $[x^2] - 2x + 1 = 0$ denkleminin tüm çözümlerinin toplamı kaçtır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Çözüm: $x < 0$ için $[x^2] - 2x + 1 > 0$ olduğundan negatif sayılarda denklemin çözümü yoktur. $x = 0$ denklemini sağlamadığından $x > 0$ olduğunu varsayabiliriz. $2x = [x^2] + 1$ bir tamsayı olduğundan, n bir pozitif tamsayı olmak üzere $x = \frac{n}{2}$ şeklindedir. Tam değer fonksiyonunun tanımından dolayı $x^2 - 1 < [x^2] \leq x^2$ eşitsizliği vardır. Dolayısıyla $2x = [x^2] + 1 > x^2$ olup $x < 2$ dir. $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ değerleri denklemden denenirse bu sayıların birer çözüm olduğu görülür. Toplam $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$ elde edilir. Cevap D

2. 20 kişilik bir sınıfta bir matematik testi yapılıyor. Herkesin en az bir soru çözdüğü bu sınavda, testteki her bir problem tam 13 öğrenci tarafından çözülüyor. 20 öğrencinin iki tanesi dışında her biri 5'er soru çözüyor. Buna göre farklı sayıda soru çözen iki öğrenci arasından az sayıda soru çözen öğrenci, en az kaç soru çözmüş olabilir?

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Çözüm: Sınavda n tane soru sorulmuş olsun. $x < y$ olmak üzere son iki öğrenci x ve y tane soru çözmüş olsunlar. $x, y \leq n$ dir. $18 \cdot 5 + x + y = 13 \cdot n$ dir. $n = 7$ için $x + y = 1$ olup $x = 0$, $y = 1$ dir. x ve y pozitif olduğundan buradan bir değer bulamayız. $n = 8$ için $x + y = 14$ olur. $x, y \leq 8$ olduğundan $y = 8$ için $x = 6$ bulunur. Cevap D

3. $6!$ Sayısını böldüğünde 6 kalanı elde edilen kaç sayı vardır?

- a) 13 b) 3 c) 16 d) 11 e) 12

Çözüm: $x > 6$ bir tamsayı olmak üzere $6! \equiv 6 \pmod{x}$ olmalıdır. Buradan $714 \equiv 0 \pmod{x}$ yazılır. $\frac{714}{x} \in \mathbb{Z}$ olduğundan 714 sayısının pozitif bölen sayısını bulalım. $714 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ olup pozitif bölen sayısı $(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16$ dır. Fakat x , $\{1, 2, 3, 6\}$ değerlerini alamayacağından $16 - 4 = 12$ tane x değeri vardır. Cevap E

4. Terimlerinin tamamı tamsayı olan bir aritmetik dizide, $a_1 = 13$ 'tür. $a_1 = 13$ terimi ile 2013 terimi arasında en az 100 tane terim olması koşuluyla, 2013 sayısı bu dizinin en az kaçınıcı terimi olabilir?

- a) 251 b) 101 c) 126 d) 121 e) 108

Çözüm: $a_1 = 13$, $a_n = 2013$ ve aritmetik dizinin ortak farkı d olsun. $a_1 = 13$, $a_n = 2013$ arasında en az 100 terim varsa $n \geq 102$ olması gerekir. Bir aritmetik dizide $a_n = (n-1)d + a_1$ olduğundan $(n-1)d = 2013 - 13 = 2000$ dir. $n-1 \mid 2000$ olduğundan $n-1 = 100$ ya da $n-1 = 125$ gibi değerleri inceleriz. Buradan $n = 101$, $n = 126$ değerleri bulunur. 101 sayısı seçeneklerde olsa da $n \geq 102$ koşulundan dolayı $n = 126$ en küçük değer olur. Cevap C

5. $x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ denkleminin x_1 , x_2 , x_3 köklerinin üçü de negatif reel sayılardır. $3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = -18$ olduğuna göre, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- a) $\frac{79}{36}$ b) $\sqrt{13} + 4$ c) $\sqrt{13} + 13$ d) $\frac{7}{4}$ e) $\frac{9}{36} + \sqrt{13}$

Çözüm: Vieta teoremine göre kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -2$ dir. Köklerinin üçü de negatif reel sayılar olduğundan $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$ pozitif sayılar olup $3(-x_1) + 9(-x_2) + 4(-x_3) = 18$ dir. Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$3(-x_1) + 9(-x_2) + 4(-x_3) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{3(-x_1)9(-x_2)4(-x_3)}$$

olup $18 \geq 18$ elde edilir. Ortalama eşitsizliklerinde, eşitlik durumu ancak ve ancak $3(-x_1) = 9(-x_2) = 4(-x_3) = \frac{18}{3}$ iken sağlanacaktır. Buradan $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{-2}{3}$, $x_3 = \frac{-3}{2}$ olup

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = (-2)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 - \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{79}{36} \text{ elde edilir. Cevap A}$$

NOT: Pekiştirici olması açısından, bu problemin *Akdeniz aday sorusu* olarak hazırladığım orijinal versiyonunu da sunalım.

Akdeniz Aday Sorusu: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 , x_2 , x_3 , x_4 şeklindeki negatif sayılardır. $6x_1 + 27x_2 + x_3 + 4x_4 = -24$ olduğuna göre $x_3 \cdot x_4$ nedir?

- a) 10 b) 9 c) 8 d) 6 e) 15

Çözüm: Vieta teoreminden polinomun kökler çarpımını $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 2$ olarak hesaplarız. $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$ sayıları pozitifdir. $6(-x_1) + 27(-x_2) + (-x_3) + 4(-x_4) = 24$ olup aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden

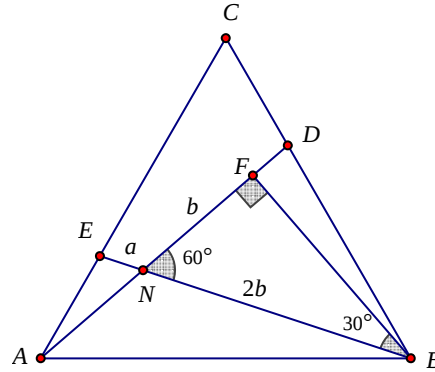
$$\frac{6(-x_1) + 27(-x_2) + (-x_3) + 4(-x_4)}{4} \geq \sqrt[4]{6(-x_1) \cdot 27(-x_2) \cdot (-x_3) \cdot 4(-x_4)}$$

yazılır. Buradan $6 \geq 6$ elde edilir. Eşitlik durumunun sağlanması ancak ve ancak $6x_1 = 27x_2 = x_3 = 4x_4 = -6$ iken mümkündür. Buradan $x_3 \cdot x_4 = (-6) \cdot \frac{-3}{2} = 9$ bulunur.

6. ABC eşkenar üçgeninde $[AC]$ kenarı üzerinde E noktası ve $[BC]$ kenarı üzerinde D noktası, $|AE| = |DC|$ olacak şekilde alınmıştır. $[AD]$ üzerinde, $[BF] \perp [AD]$ olacak şekilde de bir F noktası alınıyor. $[BE]$ ile $[AD]$ nin kesiştiği nokta N olmak üzere, $|NE| = a$, $|NF| = b$ ise, $|AD|$ nin a ve b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $a + b$ b) $a + 2b$ c) $2a + b$ d) $2(a + b)$ e) $2a + \frac{\sqrt{3}}{2}b$

Çözüm: $|AE| = |DC|$, $|AC| = |AB|$ ve $m(\angle ACD) = m(\angle BAE) = 60^\circ$ olduğundan $\triangle ACD \cong \triangle BAE$ kenar – açı – kenar eşliği vardır. Dolayısıyla $|AD| = |BE|$ ve $m(\angle CAD) = m(\angle ABE)$ olup $m(\angle FNB) = 60^\circ$ elde edilir. $\triangle FNB$ dik üçgeninde $|NB| = 2|NF| = 2b$ olduğundan $|BE| = a + 2b$ dir. Cevap B



7. x pozitif reel sayı olmak üzere, $\frac{x^3 + x}{x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 3x + 1}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

- a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{1}{11}$

Çözüm: $A = \frac{x^3 + x}{x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 3x + 1} = \frac{x^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 3x + \frac{3}{x} + 11 \right)}$ şeklinde yazalım. $x + \frac{1}{x} = a$ denirse $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$ olup $A = \frac{a}{a^2 + 3a + 9} = \frac{1}{a + (9/a) + 3}$ elde edilir. Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden $a + (9/a) \geq 2\sqrt{a \cdot (9/a)} = 6$ olup $A \leq \frac{1}{9}$ elde edilir. Eşitlik durumu analizini de yapalım: $a = \frac{9}{a}$ için $a = 3$ olur. $x + \frac{1}{x} = 3$ için $x^2 - 3x + 1 = 0$ olup $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$ değerleri için $A = \frac{1}{9}$ olur. Cevap C

8. ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ve a kenarı karşısındaki köşe açısı 60° olsun.

$a = 4$ ve $b = 3$ ise, $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 14 b) 16 c) 18 d) 20 e) 25

Çözüm: Kosinüs teoreminden $16 = 9 + c^2 - 2 \cdot 3 \cdot c \cdot \cos 60^\circ$ olup $c^2 = 3c + 7$ dir. Eşitliğin her iki tarafını c ile çarparsak $c^3 = 3c^2 + 7c = 3(3c + 7) + 7c = 16c + 21$ olur. Buna göre

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = \frac{64 + 27 + 16c + 21}{4 + 3 + c} = \frac{16c + 112}{c + 7} = \frac{16(c + 7)}{c + 7} = 16$$

bulunur. Cevap B

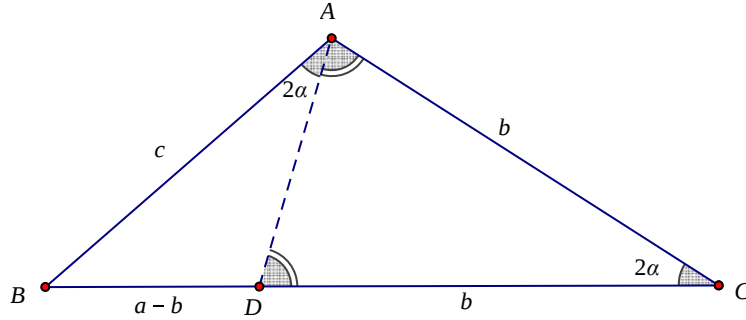
NOT: Bu problemde $c^2 - 3c - 7 = 0$ denkleminin pozitif bir köke sahip olduğu gösterilmelidir. İkinci dereceden denklem çözülürse, $c = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$ şeklinde pozitif bir değer vardır.

9. $2m(\hat{A}) - m(\hat{C}) = 180^\circ$ olan ABC üçgeninde $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ ise, b 'nin a ve c türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{a^2 - c^2}{a}$ b) $\sqrt{a^2 - ac}$ c) $(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2$ d) $\frac{a^2 + c^2}{2c}$ e) $\frac{a(a + c)}{2c}$

Çözüm: $m(\hat{C}) = 2\alpha$ diyelim. $m(\hat{A}) = 90^\circ + \alpha$ olur. $[BC]$ üzerinden $m(\widehat{BAD}) = 2\alpha$ olacak şekilde bir D noktası alalım. Bu durumda $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ADC}) = 90^\circ - \alpha$ olduğundan ADC üçgeni ikizkenar olup $|CD| = |CA| = b$ dir. $|BD| = a - b$ dir. $DBA \sim ABC$ (A – A – A benzerli-

ği) olduğundan $\frac{|DB|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} \Rightarrow \frac{a-b}{c} = \frac{c}{a}$ yazılır. Buradan $a^2 - ab = c^2$ olup $b = \frac{a^2 - c^2}{a}$ elde edilir. Cevap A



10. Bir torbada üç farklı renkte bilye vardır. Mavi bilyelerin sayısı, sarı bilyelerin sayısının 2 katı, beyaz bilyelerin sayısı da sarı bilyelerin sayısının 3 katının 1 fazlası kadardır. Torbadan, her alışıta torbada bulunan bilyelerin sayısının 2 tasının 1 fazlasının 3'te biri bilye alınarak, 7 defa bilye alınıyor. 7. alıştan sonra torbada bilye kalmadığına göre, torbada ilk başta kaç tane sarı bilye vardı?

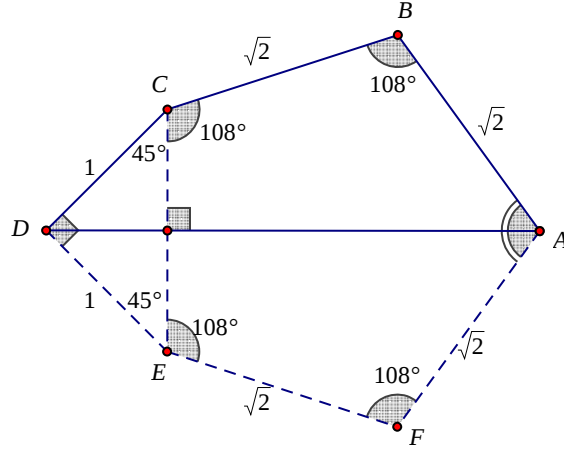
- a) 115 b) 141 c) 176 d) 167 e) 182

Çözüm: Mavi, Beyaz, Sarı bilyelerin sayısını sırasıyla M, B, S ile gösterelim. $M = 2S$, $B = 3S + 1$ olur. Torbada başlangıçta bulunan bilye sayısını x_0 ile gösterirsek $x_0 = 6S + 1$ dir. Torbadan n - inci defa bilye alındığında kalan bilye sayısını da x_n ile gösterelim. Diğer taraftan $x_n - \frac{2x_n + 1}{3} = x_{n+1}$ olduğundan $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{3}$ elde edilir. $x_7 = 0$ olduğundan $x_6 = 1$ dir. Bu şekilde $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$ değerleri sırasıyla 4, 13, 40, 121, 364, 1093 olarak elde edilir. $6S + 1 = 1093$ eşitliğinden $S = 182$ bulunur. Cevap E

11. $|AB| = |BC| = \sqrt{2} \cdot |CD|$ olan $ABCD$ dörtgeninde $m(\hat{B}) = 108^\circ$, $m(\hat{C}) = 153^\circ$ ise $m(\hat{A})$ kaç derecedir?

- a) 45 b) 54 c) 60 d) 72 e) 75

Çözüm: Genelliği bozmadan $|AB| = |BC| = \sqrt{2}$ ve $|CD| = 1$ alabiliriz. Bu durumda kenar uzunluğu $\sqrt{2}$ birim olan $ABCE$ düzgün beşgenini inşa edebiliriz. $|CE| = \sqrt{2}$ ve $m(\widehat{DCE}) = 153^\circ - 108^\circ = 45^\circ$ olduğundan $|DE| = 1$ olup DEC ikizkenar dik üçgen olur. Dolayısıyla $[AD]$, $ABCDEF$ altıgeninin simetri ekseni olup $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{FAD}) = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$ elde edilir. Cevap B



12. $\frac{2x}{x-1}(x^5-1) + x^6 + 1 = 0$ denkleminin reel çözümlerinin sayısı kaçtır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

Çözüm: $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ olduğundan $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ elde edilir. Her iki tarafı da x^3 ile bölersek $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ olur. $x + \frac{1}{x} = a$ değişken değiştirmesi yapılırsa $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$ olup denklem $a^3 + 2a^2 - a - 2 = 0$ şekline dönüşür. Buradan $(a+2)(a^2-2) = 0$ denklemi elde edilir. $a = -2$ için $x + \frac{1}{x} = -2$ eşitliğinden $(x+1)^2 = 0$ olup $x = -1$ reel kökü bulunur. $a = \pm\sqrt{2}$ için $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{2}$ denklemlerinin reel kökleri yoktur. Cevap A

13. $(3x^2 + 2x + y + 4z)^{10}$ açılımındaki terimlerden biri rastgele seçiliyor. Seçilen terimde x^7 çarpanı bulunma olasılığı kaçtır?

- a) $\frac{2}{13}$ b) $\frac{1}{13}$ c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{1}{15}$ e) $\frac{1}{12}$

Çözüm: Verilen açılımda $a + b + c + d = 10$ denkleminin negatif olmayan tamsayılarıdaki çözüm sayısı kadar terim oluşur. Dağılım prensibinden $\binom{13}{3} = 286$ tane çözüm bulunur. Şimdi $2a + b = 7$, $a + b + c + d = 10$ denklem sisteminin çözüm sayısını bulalım. $a = 0, b = 7$ için $c + d = 3$ olup 4 çözüm vardır. $a = 1, b = 5$ için $c + d = 4$ olup 5 çözüm vardır. $a = 2, b = 3$ için $c + d = 5$ olup 6 çözüm vardır. $a = 3, b = 1$ için $c + d = 6$ olup 7 çözüm vardır. İstenen durumların sayısı $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ dir. Olasılık p ise, $p = 22 / 286 = 1/13$ dür. Cevap B

14. $100^2 + 1, 100^2 + 2, 100^2 + 3, \dots, 102^2 - 2, 102^2 - 1, 102^2$ sayılarından 100'e bölünenlerin toplamının kaç pozitif çift böleni vardır?

- a) 20 b) 22 c) 24 d) 18 e) 27

Çözüm: $100^2 < 100^2 + 100k \leq 102^2$ eşitsizliğini sağlayan k tamsayılarını belirleyelim. $0 < 100k \leq 404$ olup $1 \leq k \leq 4$ olur. Bu değerler için elde edilen $100^2 + 100k$ sayılarını toplarsak $4 \cdot 100^2 + 100(1 + 2 + 3 + 4) = 41 \cdot 10^3$ olup $41 \cdot 2^2 \cdot 5^3$ sayısının pozitif böleni kadar $41 \cdot 10^3$ sayısının pozitif çift böleni vardır. (Neden?) Bu sayı $(1+1)(2+1)(3+1) = 24$ tür. Cevap C

15. Kaç tane $m \in [-100, 100]$ tamsayısı için $m^3 + m^2 + 11$ sayısı, $m^2 - m + 1$ sayısına tam bölünür?

- a) 10 b) 7 c) 5 d) 3 e) 2

Çözüm: $n = \frac{m^3 + m^2 + 11}{m^2 - m + 1} = \frac{m^3 + 1}{m^2 - m + 1} + \frac{m^2 - m + 1}{m^2 - m + 1} + \frac{m + 9}{m^2 - m + 1}$ olup $n = m + 2 + \frac{m + 9}{m^2 - m + 1}$ yazılabilir. $m = -9$ için $n = -7$ tamsayısı elde edilir.

$m > -9$ durumunu inceleyelim. $n \in \mathbb{Z}$ olması için $m + 9 \geq m^2 - m + 1$ olmalıdır. Buradan $m^2 - 2m - 8 \leq 0$ olup $-2 \leq m \leq 4$ elde edilir. Bu aralıktaki değerler denenirse $m \in \{-2, 0, 1, 4\}$ için $n \in \mathbb{Z}$ olur.

$m < -9$ durumunu inceleyelim. $n \in \mathbb{Z}$ olması için $|m + 9| \geq m^2 - m + 1$ olmalıdır. Buradan $|m + 9| = -m - 9$ ve $-m - 9 \geq m^2 - m + 1$ olup $m^2 \leq -10$ elde edilir. Bu halde çözüm yoktur. Tüm değerler $m \in \{-9, -2, 0, 1, 4\}$ olup 5 tanedir. Cevap C

16. $P(x) = 36x^4 - 36x^3 + 5x^2 + 4x - 1$ polinomunun kökleri x_1, x_2, x_3, x_4 olsun. Bu köklerin reel olduğu biliniyorsa, $S = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)(1 - x_4^2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{5}{6}$

Çözüm: $S = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)$ yazalım. $i = 1, 2, 3, 4$ için $1 - x_i$ sayıları $P(1 - x)$ polinomunun kökleri ve $1 + x_i$ sayıları da $P(x - 1)$ polinomunun kökleridir. $P(1 - x)$ ve $P(x - 1)$ 'in kökler çarpımı sırasıyla M ve N ise $S = M \cdot N$ dir.

$P(1 - x) = 36(1 - x)^4 - 36(1 - x)^3 + 5(1 - x)^2 + 4(1 - x) - 1 = 36x^4 + \dots + c_1$ dersek $c_1 = 8$ olur.

$P(x - 1) = 36(x - 1)^4 - 36(x - 1)^3 + 5(x - 1)^2 + 4(x - 1) - 1 = 36x^4 + \dots + c_2$ dersek $c_2 = 72$ olur.

Vieta teoreminden $M = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$, $N = \frac{72}{36} = 2$ olup $S = \frac{2}{9} \cdot 2 = \frac{4}{9}$ bulunur. Cevap D

17. $f(x)$ fonksiyonu, x sayısının basamak sayısını göstermek üzere,

$$f(a) + f(a^2) + f(a^3) + \dots + f(a^{20})$$

toplamı en fazla 2730 olabiliyorsa, a sayısı kaç basamaklıdır?

- a) 10 b) 14 c) 12 d) 11 e) 13

Çözüm: a pozitif tamsayısı için $f(a) = \lceil \log a \rceil + 1$ dir. $n+1$ basamaklı en küçük sayı $a = 10^n$ için bu toplamı bulalım.

$f(a) + f(a^2) + f(a^3) + \dots + f(a^{20}) = (n+1) + (2n+1) + (3n+1) + \dots + (20n+1) \leq 2730$ olup $210n + 20 \leq 2730$ yazılır. Buradan $n \leq 12$ elde edilir. $n=12$ için a sayısının 13 basamaklı olduğunu anlarız. Bu halde $f(10^{12}) + f(10^{24}) + f(10^{36}) + \dots + f(10^{120}) = 2540$ elde edilir. Bu toplamın 2730 olduğu duruma örnek vermek istersek 13 basamaklı en büyük sayı olan $a = 10^{13} - 1$ sayısını fonksiyonda yazabiliriz. Yaklaşık olarak $\log(10^{13} - 1) = 12,99$ olacağını tahmin edersek $f(a) + f(a^2) + f(a^3) + \dots + f(a^{20}) = 13 + 26 + 39 + \dots + 260 = 2730$ en büyük değerine de ulaşabiliriz. Cevap E

18. x, y ve z pozitif reel sayılar olmak üzere, $7x - y + 4z = 7$ ise, $2x^2 + x^3 + z^2 - y + 1071$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

- a) 1069 b) 1070 c) 1072 d) 1071 e) 1068

Çözüm: $A = 2x^2 + x^3 + z^2 - y + 1071$ dersek $A = 2x^2 + x^3 + z^2 - 7x - 4z + 1078$ yazılabilir. Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$x^3 + x^2 + x^2 + 1 + 1 + 1 + 1 \geq 7\sqrt[7]{x^3 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 7x$$

olup $2x^2 + x^3 - 7x \geq -4$ yazılır. $z^2 - 4z = (z-2)^2 - 4 \geq -4$ yazılır. Buna göre

$A \geq (-4) + (-4) + 1071 = 1070$ elde edilir. Bu değere $x=1, y=8, z=2$ için ulaşılır. Cevap B

19. $\{1, 2, 3, \dots, 2012\}$ kümesinin, en büyük ve en küçük elemanlarının toplamı 2013 olan alt-kümelerinin sayısının 7'ye bölümünden kalan kaçtır?

- a) 0 b) 5 c) 2 d) 6 e) 1

Çözüm: Altkümelerin en küçük ve en büyük elemanlarının kümesini yazalım

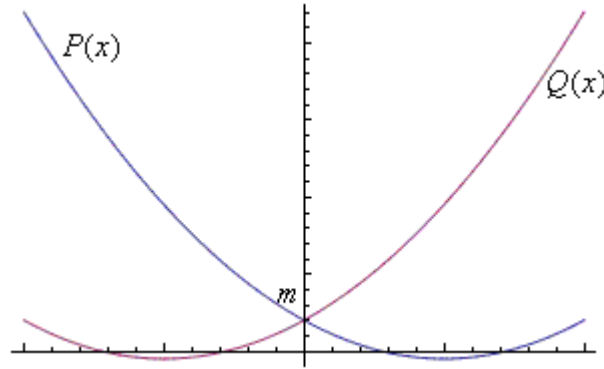
$\{1, 2012\}, \{2, 2011\}, \dots, \{1006, 1007\}$ olur. Bu elemanların kullanıldığı alt kümelerin sayısı toplam $2^{2010} + 2^{2008} + 2^{2006} + \dots + 2^0$ olur. $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}, 2^{3k+1} \equiv 2 \pmod{7}, 2^{3k+2} \equiv 4 \pmod{7}$

olduğundan $T = 2^{2010} + 2^{2008} + 2^{2006} + 2^{2004} + \dots + 2^0 \equiv (1+2+4) + (1+2+4) + \dots + 1 \equiv 1 \pmod{7}$ elde edilir. Cevap E

20. Kaç tane $m \in [-1001, 1001]$ tamsayısı için, x 'in her reel değerinde, $P(x) = x^2 + 1000x + m$ ve $Q(x) = x^2 - 1000x + m$ sayılarının en az biri pozitif olur?

- a) 1001 b) 1000 c) 1 d) 10 e) 11

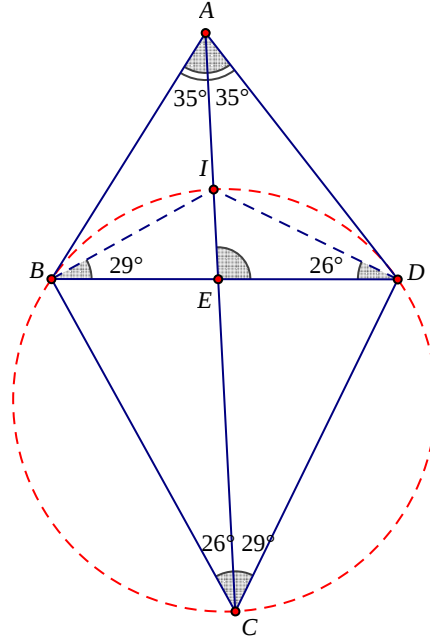
Çözüm: $m \leq 0$ için $P(0) = Q(0) = m \leq 0$ olduğundan polinomların pozitif değer almadığı bir x reel sayısı bulunmuş olur. O halde $m > 0$ durumunu inceleyelim. Paraboller y eksenindeki $(0, m)$ noktasında kesişirler. $x \geq 0$ reel sayıları için $Q(x) > 0$ olurken $x \leq 0$ reel sayıları için $P(x) > 0$ olmaktadır. Dolayısıyla her $m > 0$ sayısı istenen özelliğe sahiptir. Verilen aralıkta 1001 tane m değeri vardır. Cevap A



21. $m(\widehat{BAD}) = 70^\circ$, $m(\widehat{BDA}) = 52^\circ$, $m(\widehat{BCD}) = 55^\circ$, $m(\widehat{ACD}) = 29^\circ$ olan dışbükey $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin kesim noktası E ise, $m(\widehat{AED})$ kaç derecedir?

- a) 93 b) 95 c) 97 d) 100 e) 102

Çözüm: $m(\widehat{ABD}) = 180^\circ - (70^\circ + 52^\circ) = 58^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = 55^\circ - 29^\circ = 26^\circ$ dir. ABD açısının açıortayını çizelim ve bu açıortay ile $[AE]$, bir I noktasından kesişsin. $m(\widehat{IBD}) = \frac{58^\circ}{2} = 29^\circ$ ve $m(\widehat{ICD}) = 29^\circ$ olduğundan $BCDI$ bir kirişler dörtgenidir. Aynı yayı gören çevre açılarının eşitliğinden $m(\widehat{IDB}) = m(\widehat{ICB}) = 26^\circ$ dir. $m(\widehat{IDB}) = m(\widehat{ADI}) = 52^\circ - 26^\circ = 26^\circ$ olduğundan $m(\widehat{BDI}) = m(\widehat{ADI})$ elde edilir. Dolayısıyla $[DI]$, ADB açısının açıortayı olur. Bir üçgende iç açıortaylar aynı noktadan geçtiğinden $[AI]$, ABD üçgeninde bir iç açıortay olmalıdır. Böylelikle $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{DAE}) = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$ olup AED üçgeninin iç açılar toplamından $m(\widehat{AED}) = 93^\circ$ elde edilir. Cevap A



NOT: Dikkate değer bir özellik de şudur: C noktası ABC üçgeninin A noktasına göre dış teğet çemberinin merkezi olmaktadır.

22. $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ için a_n sayısı, $a_n = 1 \underbrace{000 \dots 000}_{2^n - 1 \text{ tane sıfır}} 1$ şeklinde tanımlansın.

$A = 11 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{10}$ sayısının rakamları toplamı kaçtır?

- a) 2^9 b) 2^{10} c) 2^{11} d) 2^{12} e) 2^{13}

Çözüm: $a_n = 10^{2^n} + 1$ şeklinde yazılabilir. Genel bir ifadeyle $A_n = 11 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$ diyelim. $A_n = 11 \cdot (10^{2^1} + 1) \cdot (10^{2^2} + 1) \cdot (10^{2^3} + 1) \cdots (10^{2^n} + 1)$ olup her iki tarafı $10^{2^{n+1}} - 1$ ile çarparsak iki kare farkı özdeşliğinin peş peşe kullanılmasıyla $A_n = (10^{2^{n+1}} - 1) / 9$ elde edilir. Bu ifadenin de 2^{n+1} tane 1 rakamının yan yana yazılmasıyla elde edilen 111 ... 11 sayısına eşit olur. Çünkü geometrik toplam yardımıyla $111 \dots 11 = 10^{2^n} + 10^{2^n-1} + 10^{2^n-2} + \cdots + 1 = (10^{2^{n+1}} - 1) / 9$ eşitliği vardır. Dolayısıyla A_n nin rakamlarının toplamı 2^{n+1} dir. $A_{10} = 2^{11}$ bulunur. Cevap C

23. Bir karenin her kenarı üzerinde, köşe noktaları üzerinde olmayan 4'er nokta işaretlenmiştir. Aynı kenar üzerinde bulunmayan herhangi iki işaretlenmiş nokta alınıyor ve bu noktalar bir doğru parçası ile birleştiriliyor. Bu parçaların herhangi üçünün ortak noktası olmasın. Bu parçaların kesişiminden ortaya çıkan noktaların toplam sayısı kaçtır?

- a) 1500 b) 1564 c) 1600 d) 1624 e) Hiçbiri

Çözüm 1: Bir $ABCD$ karesi çizelim. Problemi üç alt duruma ayırıp çözelim

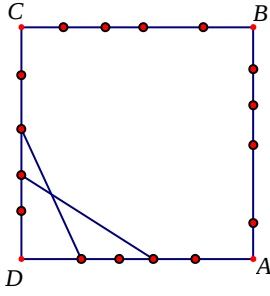
1. Durum: Kenarlardan ikisi seçilip bu iki kenar üzerinden ikişer nokta seçebiliriz. (Şekil – 1)
Bu durumların sayısı $C(4,2) \cdot C(4,2) \cdot C(4,2) = 216$ olur.

2. Durum: Kenarlardan birinden iki nokta, iki kenardan da birer nokta seçebiliriz. (Şekil – 2)
Bu durumların sayısı $4 \cdot 3 \cdot C(4,2) \cdot C(4,1) \cdot C(4,1) = 1152$ olur.

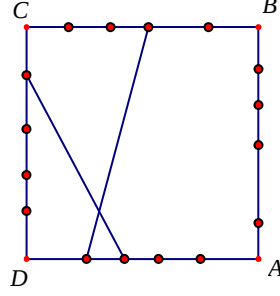
3. Durum: Her bir kenar üzerinden bir nokta seçebiliriz. (Şekil – 3)

Bu durumların sayısı $4^4 = 256$ olur.

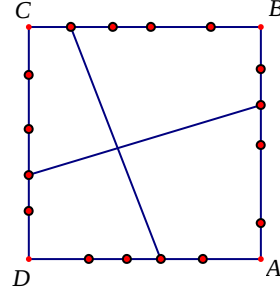
Bu üç durumdan toplam $216 + 1152 + 256 = 1624$ elde edilir. Cevap D



Şekil – 1



Şekil – 2



Şekil – 3

Çözüm 2: Tümlleme prensibini kullanarak problemi çözelim. Toplam 16 noktadan 4 tanesini seçelim. Tüm durumların sayısı $C(16,4) = 1820$ dir. Kenarlardan birinin üstünden 3 ya da dört nokta alınması durumları istenmeyen durumlardır. Bir kenar üzerinden 3 nokta alınırsa $4 \cdot C(4,3) \cdot C(12,1) = 192$ istenmeyen durum olur. Bir kenar üzerinden 4 nokta alınırsa 4 istenmeyen durum olur. İstenen durumların sayısı $1820 - (192 + 4) = 1624$ olur. Cevap D

24. $x^{\log_{100} x} = 10x$ denkleminin tüm çözümlerinin çarpımının bir tamsayı olduğu biliniyorsa, bu sayının rakamları toplamını bulunuz.

a) 1

b) 2

c) 3

d) 5

e) 8

Çözüm: Logaritma fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için $x > 0$ olmalıdır. $x^{\log_{100} x} = 10x$ eşitliğinde her iki tarafın onluk tabanda logaritmasını alırsak $\log(x^{(1/2)\log x}) = \log(10x)$ olup $\frac{1}{2} \log x \cdot \log x = 1 + \log x$ yazılır. $\log x = y$ değişken değiştirmesi yapılırsa $y^2 - 2y - 2 = 0$ olup kökler toplamı $y_1 + y_2 = 2$ dir. $x = 10^y$ olduğundan $x_1 \cdot x_2 = 10^{y_1} \cdot 10^{y_2} = 10^{y_1+y_2} = 10^2 = 100$ sonucuna ulaşılır. Rakamlar toplamı 1 olur. Cevap A

25. Düzgün $A_1A_2 \dots A_{12}A_{13}$ 13 – geninin merkezi O noktası olmak üzere, $[OA_1]$ üzerinde B_1 , $[OA_2]$ üzerinde B_2 , $\dots$, $[OA_{13}]$ üzerinde B_{13} noktaları,

$$\frac{|OB_k|}{|OA_k|} = \frac{1}{k}, (k=1,2,\dots,13)$$

sağlanacak şekilde alınmıştır. $A_1A_2 \dots A_{12}A_{13}$ çokgeninin alanına A ve $B_1B_2 \dots B_{12}B_{13}$ çokgeninin alanına da B denilirse, $\frac{A-B}{A+B}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{6}{7}$ e) $\frac{7}{8}$

Çözüm: Düzgün çokgenin çevrel çemberinin yarıçapının 1 olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. Yani $|OA_k|=1$ alalım. $|OB_k|=\frac{1}{k}$ olur. Ayrıca düzgün çokgenin bir kenarını gören merkez açının ölçüsü de θ olsun. $B_{14}=B_1$ olmak üzere $k=1,2,\dots,13$ değerleri için $S_k = \text{Alan}(OB_kB_{k+1})$ olsun. $k < 13$ için $S_k = \frac{1}{2}|OB_k| \cdot |OB_{k+1}| \cdot \sin \theta = (1/2) \sin \theta \cdot \frac{1}{k(k+1)}$ ve $k=13$ için $S_{13} = (1/2) \sin \theta \cdot \frac{1}{13}$ olur. $B = S_1 + S_2 + \dots + S_{13} = (1/2) \sin \theta \left[\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{13} \right]$ olup teleskopik toplamdan $B = (1/2) \sin \theta$ elde edilir. $A = 13 \cdot (1/2) \sin \theta$ olduğundan $A = 13 \cdot B$ yazılabilir. $\frac{A-B}{A+B} = \frac{13-1}{13+1} = \frac{6}{7}$ bulunur. Cevap D