1 54. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2013[1]

1. Bir n pozitif tam sayısı için, n den küçük ve n ile arasında asal olan pozitif tam sayıların sayısı $\phi(n)$ ile gösterilmek üzere,
$$2^n + (n - \phi(n) - 1)! = n^m + 1$$
eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

2. 2013×2013 bir satranç tahtasının birim karelerine, her birim karede en çok bir taş olacak ve birim karelerden oluşan her 19×19 karede de en az 21 taş olacak biçimde en az kaç taş yerleştirilebileceğini belirleyiniz.

3. $\widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ açılarının ölçüleri farklı olan dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O ve iç teğet çemberinin merkezi de I dır. $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla, D, E, F ve I dan $[AB]$ ye inilen dikmenin ayağı T olsun. DEF üçgeninin çevrel çemberinin merkezi P ve $[OI]$ doğru parçasının orta noktası Q olmak üzere, A, P, Q noktaları doğrudaş ise,
$$\frac{|AO|}{|OD|} - \frac{|BC|}{|AT|} = 4$$
olduğunu kanıtlayınız.

4. $m^6 = n^{n+1} + n - 1$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

5. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin $[BC]$ kenarına teğet olduğu nokta D ve merkezi I; $[ID]$ doğru parçasının orta noktası ise T olsun. I dan AD doğrusuna çizilen dikme AB ve AC doğrularını sırasıyla, K ve L noktalarında; T den AD ye çizilen dikme de bu doğruları sırasıyla, M ve N noktalarında kesiyor. $|KM| \cdot |LN| = |BM| \cdot |CN|$ olduğunu gösteriniz.

6. $-2 \le x, y, z \le 2$ ve $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$ koşullarını sağlayan tüm x, y, z gerçel sayıları için,
$$\frac{z(xz + yz + y)}{xy + y^2 + z^2 + 1} \le K$$
olmasını sağlayan en küçük K gerçel sayısını belirleyiniz.

7. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin kesişim noktası E olmak üzere, $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{BAD})$ koşulu sağlanıyor. $[BC]$ kenarı üstündeki bir F noktası için, $m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{EBF}) = m(\widehat{BFE})$ ise, A, B, F, D noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

8. Tüm x, y gerçel sayıları için,

   i. $f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x)$

   ii. $f(-x) = f(x - 1)$

   iii. $1 < x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$

   koşullarını sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

9. Bir ülkedeki n kentten bazıları arasında, herhangi iki kent arasında ulaşımı olanaklı kılacak ve her kentten en az k sefer olacak biçimde karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. Bu seferlerin, nasıl düzenlenmiş olurlarsa olsunlar, $n - k$ hava yolu şirketi arasında, herhangi bir kentten bir diğerine aynı hava yolu şirketini birden fazla kere kullanmadan gitmek mümkün olacak biçimde paylaştırılabileceğini kanıtlayınız.

[1] 30 Mart-31 Mart-1 Nisan 2013