

8. Ulusal Matematik Olimpiyatı 1. Aşama Sınavı - 2000

1. Alanı a olan bir dik üçgenin iç teğet çemberi ile, alanı b olan bir dik üçgenin çevrel çemberi aynı çember ise, $\frac{a}{b}$ en az nedir?

(A) $3 + 2\sqrt{2}$ (B) $1 + \sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2 + \sqrt{3}$ (E) $2\sqrt{3}$

Çözüm:

a yı minimum, b yi de maksimum yapacağız.

Bir çemberi içine çizilebilecek dik üçgenlerin en büyük alanlısı (b), ikizkenar dik üçgendir. Dik üçgenin hipotenüsü çemberin çapı olacağı için tüm dik üçgenlerin hipotenüsleri aynıdır. Alanı en çok yapmak için hipotenüse ait yüksekliği en çok yapmak gerekiyor. Hipotenüse ait yükseklik en fazla bir yarıçap kadar olabilir. Bu durumda çemberin yarıçapına r dersek, $b = r^2$ olacaktır.

Alanı a olan dik üçgenin, iç teğet çemberinin yarıçapını r olarak tanımlamıştık. Bu durumda u yarıçevreyi göstermek üzere; $a = ur$ olacaktır.

$\frac{a}{b} = \frac{ur}{r^2} = \frac{u}{r}$ değerini küçültmeye çalışacağız.

Üçgenin kenarlarına da a, b, c diyeceğimiz için soruda $a = A$ ve $b = B$ değişikliği yapalım. Bu durumda bizden

$$\frac{A}{B} = \frac{u}{r} = \frac{u}{u-a} = \frac{1}{1-\frac{a}{u}} = \frac{1}{1-\frac{2a}{a+b+c}}$$

ifadesini minimize etmemiz isteniyor.

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{1-\frac{2}{1+\frac{b+c}{a}}} = \frac{1}{1-\frac{2}{1+\frac{b+c}{\sqrt{b^2+c^2}}}} = \frac{1}{1-\frac{2}{1+\sqrt{\frac{b^2+c^2+2bc}{b^2+c^2}}}} = \frac{1}{1-\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2bc}{b^2+c^2}}}}$$

olacağından $\frac{A}{B}$ yi en büyük yapmak için, son ifadedeki paydayı, yani

$$1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2bc}{b^2 + c^2}}}$$

ifadesini en büyük yapmak gerekir. Bunun için de, paydadaki çıkan durumundaki

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2bc}{b^2 + c^2}}}$$

ifadesi en küçük değerini almalı. Bu ifadenin en küçük değerini alması için paydanın, yani

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2bc}{b^2 + c^2}}$$

ifadesinin en büyük değerini, yani

$$\frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

ifadesinin en büyük değerini alması gerekir. $AO \geq GO$ olduğu için

$$b^2 + c^2 \geq 2bc \Rightarrow 1 \geq \frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

olacağından

$$\frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

ifadesi en fazla 1 olabilir. Eşitlik ise $b = c$, yani üçgen ikizkenar olduğunda mümkündür. Bu durumda r yarıçaplı çemberi iç teğet çemberi kabul eden en küçük alanlı dik üçgen, ikizkenar dik üçgendir.

$$\frac{2bc}{b^2 + c^2} = 1$$

değerini yerine yazarsak,

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{1 - \frac{2}{1 + \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

elde ederiz.

Cevap: A

2. Aşağıdakilerden hangisi tam sayı katsayılı ikinci dereceden bir polinomun diskriminantı olamaz?

(A) 23 (B) 24 (C) 25 (D) 28 (E) 33

Çözüm:

$\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesi mod4 te, 0 ya da 1 değerini alabilir. Bu durumda

$$23 \equiv 3 \not\equiv 1 \not\equiv 0 \pmod{4}$$

olduğu için tam sayı katsayılı ikinci dereceden bir polinomun diskriminantı 23 olamaz.

Cevap: A

3. 0, 1, 2, ..., 9 sayılarını, tek sayılar kendi içlerinde, çift sayılar da yine kendi içlerinde artan olmak koşuluyla, kaç değişik biçimde sıralayabiliriz?

(A) 126 (B) 189 (C) 252 (D) 315 (E) Hiçbiri

Çözüm:

Tek sayıları kırmızıya, çift sayıları maviye boyayalım. Örnek bir dağılımda, tek sayıları kendi içlerinde yeniden sıralayıp, yeni dağılımlar oluşturamıyoruz; çünkü tek sayılar artan olmak koşuluyla tek bir şekilde sıralanabilir. Aynıısı çift sayılar için de geçerli. Bu durumda tek sayıları özdeş kırmızı top, çift sayıları özdeş mavi top gibi düşünebiliriz. 5 kırmızı top, 5 mavi top $\frac{10!}{5!5!} = 252$ farklı şekilde sıralanabilir.

Cevap: C

4. $(x\sqrt{x})^x = x^{x\sqrt{x}}$ denkleminin gerçel çözümlerinin toplamı nedir?

(A) $\frac{18}{7}$ (B) $\frac{71}{4}$ (C) $\frac{9}{4}$ (D) $\frac{24}{19}$ (E) $\frac{13}{4}$

Çözüm:

$$x^{\frac{3x}{2}} = x^{x^{\frac{3}{2}}}$$

eşitliğinde her iki tarafın log unu alalım.

$$\frac{3x}{2} \log x = x^{\frac{3}{2}} \log x \Rightarrow \log x \left(\frac{3x}{2} - x^{\frac{3}{2}} \right) = x \log x \left(\frac{3}{2} - x^{\frac{1}{2}} \right)$$

$x = 0$ için 0^0 tanımsız olduğu için, $x = 0$ bir kök değildir. Olsaydı da, gerçel köklerin toplamına etki etmeyecekti.

$$\log x = 0 \Rightarrow x = 10^0 = 1$$

ve

$$\frac{3}{2} - x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

olduğundan denklemin gerçel kökleri toplamı

$$1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$$

tür.

Cevap: E

5. Bir ABC üçgeninde $[BD]$ kenarortay, $m(\widehat{ABD}) = 90^\circ$, $|AB| = 2$ ve $|AC| = 6$ ise, $|BC|$ nedir?
(A) 3 (B) $3\sqrt{2}$ (C) 5 (D) $4\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{6}$

Çözüm:

D den AB çizilen paralel BC yi E de kessin. $BE = EC$ ve $DE = 1$ olacaktır. $\triangle ABD$ de Pisagordan, $BD = \sqrt{5}$; $\triangle BDE$ de Pisagordan $BE = \sqrt{6}$ çıkacaktır. Bu durumda $BC = 2\sqrt{6}$ olur.

Cevap: E

6. $\sqrt{17p + 625}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan en büyük p asal sayısı nedir?
(A) 3 (B) 67 (C) 101 (D) 151 (E) 211

Çözüm:

$$17p + 625 = T^2 \Rightarrow 17p = (T - 25)(T + 25)$$

$T - 25 \neq 1$ ise, $(T - 25)(T + 25)$ sayısının en az iki asal çarpanı olacak. Bu durumda $T + 25 > 17$ olduğu için, $T - 25 = 17$ ve $T + 25 = p$ olmalı. Bu durumda, $T = 42$ ve $p = 67$ olacaktır.

$T - 25 = 1$ ise, $T = 26$ ve $17p = (T + 25) = 51 \Rightarrow p = 3$ elde edilecektir. Bu durumda, $17p + 625$ sayısının tam kare olmasını sağlayan en büyük asal sayı 67 olacaktır.

Cevap: B

7. A, B, C, D ve E den bazıları doğrucu, bazıları da yalancıdır. Doğrucuların her söylediği doğru; yalancıların ise, her söylediği yalandır. A nın doğrucu olduğunu ve diğerlerinin de aşağıdaki önermeleri söylediğini biliyoruz:
 B : Ben doğrucuyum.
 C : D , doğrucudur.
 D : B ve E ikisi birden doğrucu değildir.
 E : A ve B doğrucudur.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Veriler yetersizdir

Çözüm:

A doğrucu olduğu için, E nin doğrucu olması B nin doğrucu olmasına bakıyor. Yani B doğrucu ise, E doğrucu; B yalancı ise E de yalancı olacaktır.

B doğrucu olsun. Bu durumda D nin söylediği yalan oluyor. D yalancı olduğu için de C yalancı oluyor. Bu durumda doğrucu sayısı 3 tür.

B yalancı olsun. Doğal olarak E yalancı ve D de doğrucu olacak. D doğrucu olduğu için de C doğrucu olacak. Doğrucu sayısı yine 3 oluyor.

Cevap: C

8. $(x + y)^5 = z$
 $(y + z)^5 = x$
 $(z + x)^5 = y$

sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı sıralı üçlüsü vardır?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) Sonsuz çoklukta (E) Hiçbiri

Çözüm:

$x \geq y \geq z$ olsun.

$(x+y)^5 \geq (z+x)^5 \geq (y+z)^5$ olacaktır. Sistemdeki eşitlikleri bu eşitsizlikte yerine yazarsak,

$$z \geq y \geq x$$

elde ederiz. Baştaki kabulümüzün tam tersi çıktı. Bu durumda $x = y = z$ dir. Bu eşitliği sistemde yerine yazarsak,

$$(2x)^5 = x$$

denklemini elde ederiz.

$$32x^5 - x = 0 \Rightarrow x(32x^4 - 1)$$

denkleminin köklerinden biri $x = 0$ dir. Diğerleri ise,

$$x^2 = \sqrt{\frac{1}{32}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\sqrt{\frac{1}{32}}}$$

dir. Yani, sistemin çözüm kümesi

$$\{(0, 0, 0), (2^{-\frac{5}{4}}, 2^{-\frac{5}{4}}, 2^{-\frac{5}{4}}), (-2^{-\frac{5}{4}}, -2^{-\frac{5}{4}}, -2^{-\frac{5}{4}})\}$$

dir.

Cevap: C

9. $ABCDE$ dışbükey beşgeninde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$, $m(\widehat{C}) = 120^\circ$, $|AB| = 2$, $|BC| = |CD| = \sqrt{3}$ ve $|ED| = 1$ olduğuna göre, $|AE|$ nedir?

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\sqrt{3} - 1$ (E) $\sqrt{3}$

Çözüm:

BA ile DE doğruları F de kesişsin.

$\triangle BCD$ de, $\angle CBD = \angle CDB = 30^\circ$ ve $BD = 3$ dir. $\angle ABD = \angle BDE = 60^\circ$ olduğu için, $\triangle FBD$ bir eşkenar üçgendir. Bu durumda $FB = 1$ ve $FE = 2$ dir.

$\triangle AFE$ de ister Kosinüs teoreminden, isterse de doğrudan AFE üçgeninin bir $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olduğunu fark ederek $AE = \sqrt{3}$ bulabiliriz. Biraz daha estetik bir yol izleyelim.

A dan BD ye çizilen paralel FD yi G de kessin. $FA = AG = FG = GE = 1$ ve $\angle AGE = 120^\circ$ olduğu için, $AE = \sqrt{3}$ tür.

Cevap: E

10. On tabanına göre yazılımı 50 basamaklı olan bir N tam sayısının soldan 26. basamağı dışındaki bütün basamaklarında 1 rakamı bulunuyor ve N , 13 ile bölünüyorsa, N nin yazılımında soldan 26. rakam nedir?

(A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 8 (E) Veriler yetersizdir

Çözüm:

$N = 10^{49} + 10^{48} + \dots + 10^{25} + a \cdot 10^{24} + 10^{23} + \dots + 1$ ise, amacımız a yı bulmak. Biraz düzenlemeyle

$$\begin{aligned} N &= (1 + 10^2 + \dots + 10^{49}) + (a-1)10^{24} \\ &= \frac{10^{50} - 1}{9} + (a-1)10^{24} \end{aligned}$$

elde edilir. $A = \frac{10^{50} - 1}{9} \Rightarrow 9A = 10^{50} - 1$ olsun. Fermat'ın Küçük Teoreminden $10^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ olduğu için,

$$9A \equiv 10^{50-1} \equiv 100 - 1 \equiv 99 \equiv 8 \pmod{13}$$

tür. $9A \equiv 8 \pmod{13}$ denkleminin çözümü $A = 11$ dir. Bu durumda,

$$N = \frac{10^{50} - 1}{9} + (a-1)10^{24} = A + (a-1)10^{24} \equiv 11 + a - 1 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow a \equiv 3 \pmod{13}$$

elde ederiz.

Cevap: B

11. 7 kırmızı, 7 beyaz topu, her kutuda tam olarak 2 top olması koşuluyla, 7 kutuya kaç değişik biçimde dağıtabiliriz?
(A) 163 (B) 393 (C) 858 (D) 1716 (E) Hiçbiri

Çözüm:

Önce kırmızı topları dağıtalım. Tüm kırmızı toplar dağıtıldıktan sonra, toplamda 14 top olacağı için geri kalan 7 top, 7 boşluğa tek bir şekilde dağıtılır. Yani soru, “7 topu 7 kutuya, her kutuda en fazla 2 top olacak şekilde kaç değişik biçimde dağıtırız?” oldu. Kırmızı toplar kutulara $((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7))$ ile her kutunun içindeki kırmızı top sayısını gösteriyoruz),

Hiçbir kutuda 2 kırmızı top olmayacak şekilde $((1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)) \frac{7!}{7!} = 1$ değişik biçimde,

tam olarak 1 kutuda 2 kırmızı top olacak şekilde $((2, 1, 1, 1, 1, 1, 0)) \frac{7!}{5!1!1!} = 42$ değişik biçimde,

tam olarak 2 kutuda 2 kırmızı top olacak şekilde $((2, 2, 1, 1, 1, 0, 0)) \frac{7!}{3!2!1!} = 210$ değişik biçimde,

tam olarak 3 kutuda 2 kırmızı top olacak şekilde $((2, 2, 2, 1, 0, 0, 0)) \frac{7!}{3!3!} = 140$ değişik biçimde dağıtılır. Yani toplamda, $1 + 42 + 210 + 140 = 393$ farklı şekilde dağıtılır.

Cevap: B

12. (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ pozitif tam sayısı için $|a_n| = |a_{n-1} + 2|$ koşullarını sağlıyorsa, $\sum_{i=1}^{2000} a_i$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?

- (A) -4000 (B) -3000 (C) -2000 (D) -1000 (E) Hiçbiri

Çözüm:

Her iki tarafın karesini alalım:

$$\begin{aligned} a_n^2 &= a_{n-1}^2 + 4a_{n-1} + 4 \\ a_{n-1}^2 &= a_{n-2}^2 + 4a_{n-2} + 4 \\ &\vdots \\ a_2^2 &= a_1^2 + 4a_1 + 4 \end{aligned}$$

olacaktır. Taraf tarafa topladığımızda,

$$a_n^2 = a_1^2 + 4 \sum_{i=1}^{n-1} a_i + 4(n-1)$$

olacaktır. $n = 2001$ ve $a_1 = 1$ için,

$$a_{2001}^2 = 1 + 4 \sum_{i=1}^{2000} a_i + 8000 \geq 0 \Rightarrow 4 \sum_{i=1}^{2000} a_i \geq -8001 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2000} a_i \geq -2000$$

olacaktır. Peki, $\sum_{i=1}^{2000} a_i = -2000$ eşitliğini sağlayan bir (a_n) dizisi var mıdır?

Mutlak değerli eşitliği, her seferinde

$$a_n = -a_{n-1} - 2$$

şeklinde çözersek,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= -3 \\ a_3 &= 1 \\ a_4 &= -3 \\ &\vdots \\ a_{1999} &= 1 \\ a_{2000} &= -1 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda $\sum_{i=1}^{2000} a_i = -2000$ dir.

Cevap: C

13. Birbirine dıştan teğet olan k_1 ve k_2 çemberlerinin ortak dış teğet doğrularından biri d olsun. d nin k_1 çemberine değdiği nokta A , k_1 çemberinin A dan geçen çapı $[AB]$, B noktasından k_2 çemberine çizilen teğetin değme noktası C ile gösterilmek üzere, $|AB| = 8$ ve k_2 çemberinin çapı 7 ise, $|BC|$ nedir?

(A) 7 (B) $6\sqrt{2}$ (C) 10 (D) 8 (E) $5\sqrt{3}$

Çözüm 1:

k_1 ve k_2 çemberlerinin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olsun. d doğrusu, k_2 çemberine M noktasında dokunsun. Çemberler teğet olduğu için

$$O_1O_2 = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$$

dir. O_1AMO_2 bir dik yamuktur. O_2 den O_1A ya inilen dikmenin ayağı P olsun.

$$O_1P = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

olur. Pisagor teoreminden,

$$\begin{aligned} BO^2 &= BP^2 + O_2P^2 = BC^2 + O_2C^2 \Rightarrow \\ BC^2 &= BP^2 + O_2P^2 - OC^2 \Rightarrow \\ BC^2 &= \left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 64 \Rightarrow \\ BC &= 8. \end{aligned}$$

NOT:

$AB = a$ ve $O_2C = b$ olsaydı,

$$BC^2 = \left(\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2} - b\right)\right)^2 + \left(\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - b\right)^2\right) - (b)^2 = a^2 \Rightarrow BC = a$$

olacaktı. Demek ki, BC uzunluğu, k_2 nin çapından bağımsız olarak, her zaman AB ye eşit.

Çözüm 2:

İki çember N noktasında birbirlerine dokunsun. O_1, N, O_2 nin doğrusal olduğunu söylemek çok da zor değil. Şimdi de BN ve NM doğru parçalarını çizelim. $O_2M \parallel O_1A$ olduğu için $\angle BO_1N = \angle NO_2M$ dir. $\triangle BO_1N$ ve $\triangle NO_2M$ nin ikisi de ikizkenardır. Bu durumda $\angle O_2NB = \angle O_1NM$ olacak, bu da B, N, M noktalarının doğrusal olmasını gerektirecek. AB çap olduğu için, $AN \perp BM$ olacak. Öklit'ten $AB^2 = BN \cdot BM$ ve BC nin k_2 teğet olmasından $BC^2 = BC \cdot BM$ olacağı için, $BC = AB$ dir.

Cevap: D

14. $9^{8^{7^{\dots^2}}}$ sayısının on tabanına göre yazılımının son iki basamağı nedir?

(A) 81 (B) 61 (C) 41 (D) 21 (E) 01

Çözüm:

$(100, 9) = 1$ ve $\varphi(100) = 40$ olduğu için

$$9^{40} \equiv 1 \pmod{100}$$

olacaktır. Bu durumda

$$8^{7^{\dots^2}} \equiv x \pmod{40}$$

denkliğini çözmemiz gerekiyor.

$$\begin{aligned} 8^1 &\equiv 8 \pmod{40} \\ 8^2 &\equiv 24 \pmod{40} \\ 8^3 &\equiv 32 \pmod{40} \\ 8^4 &\equiv 16 \pmod{40} \\ 8^5 &\equiv 8 \pmod{40} \end{aligned}$$

ve

$$7^{6^{\dots^2}} \equiv (-1)^{6^{\dots^2}} = 1 \pmod{4}$$

olduğu için

$$8^{7^{\dots^2}} \equiv 8 \pmod{40}$$

ve

$$9^{8^{7^{\dots^2}}} \equiv 9^{40k+8} \equiv 9^8 \equiv 81^4 \equiv 19^4 \equiv 61^2 \equiv 21 \pmod{100}$$

olur.

Cevap: D

15. A , B ve C , aralarında tavla oynarlar. Önce A ile B karşılaşır, kazanan C ile oynar. Bundan sonra, parti devam ettiği sürece, oynanan son oyunu kazanan, o karşılaşmada oynamayan üçüncü kişi ile karşılaşır. Oyunculardan biri art arda iki kez kazanınca, parti sona erer ve ardışık iki oyunu kazanan partinin galibi olur. Her oyunda iki tarafın da kazanma olasılığı eşit ise, C nin partiyi kazanma olasılığı nedir?

- (A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{14}$ (D) $\frac{1}{7}$ (E) Hiçbiri

Çözüm 1:

A ilk maçı kazanırsa, A nın partiyi kazanma olasılığı

$$P_1(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{4 \cdot 8^k} + \dots$$

olacaktır. A ilk maçı kaybederse, A nın partiyi kazanma olasılığı

$$P_0(A) = \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{16 \cdot 8^k} + \dots$$

olacaktır. A nın turnuvayı kazanma olasılığı

$$P(A) = P_1(A) + P_0(A) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) \left(1 + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8^k} + \dots\right) = \frac{5}{16} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{8}}\right) = \frac{5}{14}$$

tür. Benzer şekilde, $P(B) = P(A) = \frac{5}{14}$ olacağı için, $P(C) = 1 - \frac{5}{14} - \frac{5}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ olur.

Çözüm 2:

C ilk maçını kaybederse, onu yenen oyuncu ikinci galibiyetini almış olacağı için parti sona erer. Yani, C nin partiyi kazanması için ilk maçını mutlaka kazanması gerekiyor ($\frac{1}{2}$). C , bundan sonraki maçını, yani ikinci maçını kazandığında ($\frac{1}{2}$) partiyi kazanmış olacak. İkinci maçı kaybettiğinde ($\frac{1}{2}$), bir maç bekleyecek ve kendisini yenenin kaybetmesi için dua edecek. Aksi takdirde, kendisini yenen, peşpeşe iki maç kazanmış olacak ki, bu da partiyi sonlandırır. Kendisini yenen ikinci oyununu kaybettiğinde ($\frac{1}{2}$), C için her şey başa dönmüş olacak. Bu durumu,

$$P(C) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P(C)\right) \Rightarrow P(C) = \frac{2}{7}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Cevap: A

16. $(2 + (2 + (2 + x)^2)^2)^2 = 2000$ denkleminin gerçel kökleri toplamı nedir?

- (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

Çözüm:

$(x + 2)^2$ pozitif olduğu için,

$$\begin{aligned} \sqrt{2000} - 2 &= (2 + (2 + x)^2)^2 \\ \sqrt{\sqrt{2000} - 2} - 2 &= (2 + x)^2 = x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

ikinci dereceden denkleminin kökler toplamı -4 tür.

Cevap: A

17. Kenar uzunlukları 1, 4, 7, 8 olan bir dörtgenin alanı en çok kaç olabilir?

- (A) $7\sqrt{2}$ (B) $10\sqrt{3}$ (C) 18 (D) $12\sqrt{3}$ (E) $9\sqrt{5}$

Çözüm 1:

4 ile 7 ardışık iki kenar değilse, uzunluğu 1 olan kenar 4 ile 7 arasındadır. Bu durumda $AB = 1$, $BC = 4$, $CD = 8$, $AD = 7$ olsun.

$AB = A'D$ olacak şekilde $AA'DB$ ikizkenar yamuğunu çizelim. $A'B = 7$, $A'D = 1$ ve $[A'BD] = [ABD] \Rightarrow [ABCD] = [A'BCD]$ olacaktır. Bu durumda 4 ile 7 ardışık iki kenar oldu. Kenarları 4 ile 7 olan bir üçgenin alanı en çok $\frac{4 \times 7}{2} = 14$ olabilir. Kenarları 1 ile 8 olan bir üçgenin alanı en çok $\frac{1 \times 8}{2} = 4$ olabilir. Bu durumda

$$[ABCD] = [A'BCD] \leq 4 + 14 = 18$$

olacaktır. Eşitliğin sağlanması için, 4 ile 7 arasındaki açı 90° ve 1 ile 8 arasındaki açı da 90° olması gerekir. Bunun olabilmesi için $7^2 + 4^2 = 65 = 1^2 + 8^2$ olması gerekir ki, bu da mümkün. Demek ki, kenarları 1, 4, 7, 8 olan bir dörtgenin alanı en çok 18 olabilir.

Çözüm 2:

Kenarları sabit olan dörtgenler arasında en büyük alanlısı, kirişler dörtgenidir. Bir kirişler dörtgeninin alanı da Brahmagupta Formülü ile bulunur. $p = \frac{a + b + c + d}{2}$ olmak üzere,

$$[ABCD] = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

dir. Soruda verilenleri yerine yazarsak,

$$p = 10 \text{ ve } [ABCD] = \sqrt{(10-1)(10-4)(10-7)(10-8)} = 18$$

elde ederiz.

Şimdi de isterseniz, yukarıdaki sonuca nasıl varıldığını açıklayalım:

$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $\angle ABC = \alpha$ ve $\angle CDA = \beta$ olsun.

Kosinüs Teoreminden,

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos \alpha - 2cd \cos \beta$$

olur. Her iki tarafı 2 ye bölüp, her iki tarafın karesini alalım.

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} \right)^2 = a^2 b^2 \cos^2 \alpha + c^2 d^2 \cos^2 \beta - 2abcd \cos \alpha \cos \beta \quad (..1..)$$

Şimdi de $ABCD$ dörtgeninde alanı yazalım.

$$A = \frac{ab \sin \alpha}{2} + \frac{cd \sin \beta}{2} \Rightarrow 4A^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha + c^2 d^2 \sin^2 \beta + 2abcd \sin \alpha \sin \beta \quad (..2..)$$

elde edilir. (..1..) ile (..2..) yi taraf tarafa toplarsak $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ve $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ olacağından

$$a^2 b^2 + c^2 d^2 - 2abcd \cos(\alpha + \beta) = 4A^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} \right)^2 \quad (..3..)$$

elde edilir. a, b, c, d verildiği için maksimum alan için $\cos(\alpha + \beta)$ değeri minimum olmalı. Yani $\alpha + \beta = 180^\circ$ olmalı. Bu da $ABCD$ nin kirişler dörtgeni olduğunu gösterir. (..3..) yeniden düzenlersek

$$a^2 b^2 + c^2 d^2 + 2abcd = 4A^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} \right)^2 \Rightarrow (ab + cd)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} \right)^2 = 4A^2.$$

İki kare farkından yararlanarak

$$(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) = 16A^2$$

$$\Rightarrow ((a+b)^2 - (c-d)^2)((c+d)^2 - (a-b)^2) = (b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d).$$

$$p = \frac{a+b+c+d}{2} \text{ ise}$$

$$16A^2 = (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d) \Rightarrow A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

elde edilir.

Cevap: A

18. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$ toplamının 77 ile bölünmesini sağlayan en küçük $n \geq 100$ tam sayısı nedir?

- (A) 101 (B) 105 (C) 111 (D) 119 (E) Hiçbiri

Çözüm:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{77} \Rightarrow 2^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{7} \wedge 2^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

Söz konusu denklemleri sağlayan en küçük n değerleri

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow n + 1 = 3p$$

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow n + 1 = 10q$$

şeklinde bulunur. Sonuçları birleştirdiğimizde

$$n + 1 = 30k \Rightarrow n = 30k - 1$$

olduğu için en küçük $n \leq 100$ sayısı 119 dur.

NOT:

$\varphi(77) = 60$ olduğunu fark edip, $2^{60} \equiv 1 \pmod{77} \Rightarrow n = 120 - 1 = 119$ şeklinde bir çözüm yanlış olacaktır. $\varphi(77)$, bize $2^x \equiv 1 \pmod{77}$ denklemini sağlayan en küçük x değerini vermez. Sadece $x|77$ olduğunu söyler. Soru bize $n \geq 200$ olarak verseydi, $\varphi(77)$ den sonuca gitmeye çalışan biri $n = 239$ bulacaktı ki, yukarıda yaptığımız çözüme göre $n = 209$ olurdu.

Cevap: D

19. Kenar uzunlukları 3, 7 ve 8 olan bir üçgenin içinde gelişigüzel alınan bir noktadan, köşelerden en az birine olan uzaklığı 1 den küçük olması olasılığı nedir?

- (A) $\frac{\pi}{36}\sqrt{2}$ (B) $\frac{\pi}{36}\sqrt{3}$ (C) $\frac{\pi}{36}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{4}$

Çözüm:

Köşeleri merkez alarak 1 yarıçaplı çember yaylarını üçgen içerisinde kalacak şekilde çizelim. Bu üç eş yarıçaplı yayın ölçüleri toplamı 180° olduğu için, bu üç yay bir yarım çember yapar. Bu çemberin alanı $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$ dir. Üçgenin alanı da (Heron Formülü) $\sqrt{9(9-3)(9-7)(9-8)} = 6\sqrt{3}$ olduğu için seçilen bir noktanın bu üç çember parçasının içerisinde olma olasılığı

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi}{36}\sqrt{3}$$

olur.

Cevap: B

20. $p(x)$ tüm kökleri gerçel olan ve her x gerçel sayısı için $p(x^2 - 1) = p(x)p(-x)$ eşitliğini sağlayan bir polinom ise, $p(x)$ in derecesi en fazla kaç olabilir?

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) $p(x)$ in derecesi için üst sınırdır yoktur. (E) Hiçbiri

Çözüm 1:

$p(x) = x^{2n}(x+1)^{2n}$ polinomu verilen eşitliği sağlar.

$$p(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^{2n}(x^2)^{2n} = (x - 1)^{2n}x^{2n}(x + 1)^{2n}x^{2n} = (-x + 1)^{2n}(-x)^{2n}(x + 1)^{2n}x^{2n} = p(-x)p(x)$$

Çözüm 2:

$\alpha_i \in \mathbf{R}$ olmak üzere,

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

polinomu tüm kökleri gerçel olan n . dereceden bir polinomdur.

$$p(x^2 - 1) = (x^2 - 1 - \alpha_1)(x^2 - 1 - \alpha_2) \dots (x^2 - 1 - \alpha_n)$$

ve

$$p(x)p(-x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)(-x - \alpha_1)(-x - \alpha_2) \dots (-x - \alpha_n)$$

ifadelerini sorudaki eşitlikte yerine yazarsak

$$(x^2 - 1 - \alpha_1)(x^2 - 1 - \alpha_2) \dots (x^2 - 1 - \alpha_n) = (-1)^n (x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2) \dots (x^2 - \alpha_n^2)$$

elde ederiz. n çift olduğunda

$$x^2 - 1 - \alpha_i = x^2 - \alpha_i^2$$

eşitliğini sağlayan α_i gerçel sayısı varsa, polinomun derecesi n için bir üst limit olmayacak. Gerçekten de

$$\alpha_i^2 - \alpha_i - 1 = 0$$

denkleminin iki gerçel kökü vardır. α bunlardan biri ise

$$p(x) = (x - \alpha)^{2n}$$

polinomu soruda verilen eşitliği her zaman sağlar. Bu durumda $p(x)$ in derecesi için bir üst sınır yoktur.

Cevap: D

21. Bir $ABCD$ dışbükey kirişler dörtgeninde $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$, $m(\widehat{ABD}) = 45^\circ$, $|AB| = 26$ ve $|BC| = 10$ ise, DAC üçgeninin alanı nedir?

(A) 120 (B) 108 (C) 90 (D) 84 (E) 80

Çözüm 1:

$ABCD$ kirişler dörtgeninde $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$ ve $\angle ADB = \angle BCA = 90^\circ$ olduğu için $\triangle ABD$ ikizkenar dik üçgendir. $AB = 26 \Rightarrow AD = 13\sqrt{2}$.

$\angle ADC$ geniş açı olduğu için A dan CD ye inilen yükseklik üçgenin dışındadır. Bu yükseklik CD yi E de kessin. $\angle ADE = \angle ABC$ olduğu için

$$\triangle ADE \sim ABC \Rightarrow AE = 12\sqrt{2} \text{ ve } DE = 5\sqrt{2} \Rightarrow CD = 7\sqrt{2}$$

elde edilir.

$$[DAC] = \frac{DC \cdot AE}{2} = \frac{12\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2} = 84$$

Çözüm 2:

Pisagordan $AC = 24$ ve $\triangle ABD$ ikizkenar dik üçgeninden $AD = BD = 13\sqrt{2}$ dir. Ptolemy'den

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC \Rightarrow 26 \cdot CD + 10 \cdot 13\sqrt{2} = 24 \cdot 13\sqrt{2} \Rightarrow CD = 7\sqrt{2}$$

olur.

$$[DAC] = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD \cdot \sin \angle ACD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 84$$

Cevap: D

22.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 &= 0 \\ 5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 &= 0 \end{aligned}$$

sistemini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı sıralı üçlüsü vardır?

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) Sonsuz çoklukta (E) Hiçbiri

Çözüm:

$$\begin{array}{r} 5/ \quad 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 = 0 \\ -3/ \quad 5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 = 0 \\ \hline \quad \quad \quad -y^2 + z^2 + 48 = 0 \end{array}$$

Bu durumda

$$y^2 - z^2 = 48 \Rightarrow (y - z)(y + z) = 48$$

elde edilir. y ve z pozitif tam sayılar ve $(y - z) + (y + z) = 2y$ sayısı çift sayı olduğu için, 48 i toplamları çift olmak üzere,

$$48 = 2 \cdot 24 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$$

3 farklı şekilde çarpanlarına ayırabiliriz. Bu durumda, olası çözümler

$$\begin{aligned} y &= 13 & z &= 11 \\ y &= 8 & z &= 4 \\ y &= 7 & z &= 1 \end{aligned}$$

den ibarettir. İlk denklemden

$$3x^2 = 2y^2 + 4z^2 - 54 = 2y^2 - 2z^2 + 6z^2 - 54 = 2 \cdot 48 + 6z^2 - 54 \Rightarrow x^2 = 2(7 + z^2)$$

elde edilir. $2(7 + z^2)$ in bir tam kare olabilmesi için z nin tek sayı olması gerekir ki, bu da denenecek ihtimalleri ikiye indirir.

$y = 13, z = 11$ için

$$x^2 = 2(7 + 11^2) = 256 \Rightarrow x = 16$$

$y = 7, z = 1$ için

$$x^2 = 2(7 + 1^2) = 16 \Rightarrow x = 4$$

Yani $\text{ÇK} = \{(4, 7, 1), (16, 13, 11)\}$ dir.

Cevap: B

23. 20 kişilik bir komite, A, B, C adayları arasından bir seçim yapmak için değişik türden bir oylamaya başvurur. Her komite üyesi, adaylara ilişkin tercih sıralmasını, herhangi iki aday arasında çekimsiz kalmaksızın, oy pusulasına yazar. (Örneğin, pusulaya BAC yazan üye, B yi A ya ve C ye; A yı da C ye tercih ediyor demektir.) Oy pusulaları açılınca, üç adayın altı değişik sıralanışından her birinin en az bir pusulada geçtiği ve tam olarak 11 üyenin A yı B ye; 12 üyenin C yi A ya; 14 üyenin de B yi C ye tercih ettiği görülür. Kaç komite üyesinin birinci tercihi B dir?

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) Veriler yetersizdir

Çözüm:

$$\begin{cases} x = (ABC), y = (BAC), z = (CAB), \\ x' = (ACB), y' = (BCA), z' = (CBA). \end{cases}$$

olsun.

$$\begin{aligned} x + x' + z &= 11 \\ z + z' + y' &= 12 \\ y + y' + x &= 14 \end{aligned}$$

olacaktır. Taraf tarafa toplarsak,

$$x + y' + z = 17$$

elde edilir. Bu durumda

$$x' + y + z' = 3$$

olacaktır. Bu da

$$x' = y = z' = 1$$

olduğu anlamına gelir. Bu değerleri yerine yazarsak,

$$x + x' + z = 11 \Rightarrow x + z = 10$$

elde ederiz.

$$x + y' + z = 17 \Rightarrow y' = 7 \Rightarrow y + y' = 8$$

olur.

Cevap: C

24. a, b, c, d, e negatif olmayan gerçel sayılar ve $a + b + c + d + e > 0$ olmak üzere, $a + c = tb$, $b + d = tc$, $c + e = td$ koşullarını sağlayan en küçük gerçel t sayısı nedir?

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) 2

Çözüm:

$c = 0$ olursa, tüm hepsi 0 olacağı için; $c > 0$.

$$2c \leq a + c + c + e = tb + td = t(b + d) = t^2c \Rightarrow t \geq \sqrt{2}.$$

$t = \sqrt{2}$ olduğunda ise,

$$a = e = 0 \text{ ve } c = b\sqrt{2} = d\sqrt{2}$$

sayıları sorudaki eşitlikleri sağlar.

Cevap: C

25. Alanı 18 olan bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde, $|AB| + |BD| + |DC| = 12$ ise, $|AC|$ nedir?

- (A) 9 (B) $6\sqrt{3}$ (C) 8 (D) 6 (E) $6\sqrt{2}$

Çözüm:

$AB = x$, $BD = y$, $CD = z$ olsun.

$$[ABCD] = 18 \leq \frac{xy + yz}{2} = \frac{y(x + z)}{2} \Rightarrow 36 \leq y(x + z)$$

olacaktır. Diğer taraftan $AO \geq GO$ dan,

$$\frac{y + (x + z)}{2} = 6 \geq \sqrt{y(x + z)} \Rightarrow 36 \geq y(x + z)$$

olacağı için $y(x + z) = 36$ dır. Yani eşitsizlikteki eşitlik sağlanmış. Eşitlik $y = x + z = 6$, $BD \perp AB$ ve $BD \perp AC$ iken sağlanır.

A dan BD ye çizilen paralel DC yi E de kessin. $AE = BD = 6$ ve $EC = AB + CD = 6$ olduğu için $AC = 6\sqrt{2}$ çıkacaktır.

NOT:

Bu soru, IMO 1976/1 sorusunun neredeyse aynıdır.

Cevap: E

26. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 9x + 10$ ise,

$$f(a) \equiv f(b) \pmod{p} \Rightarrow a \equiv b \pmod{p}$$

gerektirmesinin tüm a, b tam sayıları için doğru olmasını p nin aşağıdaki değerlerinden hangisi sağlar?

- (A) 5 (B) 7 (C) 11 (D) 13 (E) 17

Çözüm:

Sorudaki ifadenin eşiti,

$$p|f(a) - f(b) \Rightarrow p|a - b$$

dir. İlk birkaç $f(x)$ değerlerini hesaplırsak:

$$f(0) = 10, f(1) = 27$$

$17|27 - 10$ olduğu için E şıkkı elenir.

$$f(2) = 64, f(3) = 127$$

$5|127 - 27$ olduğu için A şıkkı elenir.

$7|127 - 64$ olduğu için B şıkkı elenir.

$13|127 - 10$ olduğu için D şıkkı elenir.

Bu durumda geriye sadece $p = 11$ kalır.

Cevap: C

27. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin, her $1 \leq k \leq 4$ için $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, $\{1, \dots, k\}$ kümesinin bir permütasyonu olmayacak şekilde kaç değişik $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5)$ permütasyonu vardır?
 (A) 13 (B) 65 (C) 71 (D) 461 (E) Hiçbiri

Çözüm:

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin toplamda $5! = 120$ permütasyonu var. Bunlardan her $1 \leq k \leq 4$ için $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, $\{1, \dots, k\}$ kümesinin bir permütasyonu olan $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5)$ leri çıkartırsak sonucu elde ederiz.

$$k = 1 \text{ için } (1 \overbrace{\dots}^{4!}) \rightarrow 24$$

$k = 2$ için $\{1, 2\}$ kümesinin toplamda $2!$ permütasyonu var. Bunlardan biri $k = 1$ de geçen $(12\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$ permütasyonu olduğu için $(\overbrace{21}^{2!-1} \overbrace{\dots}^{\text{Geriye kalanlar } 3!}) \rightarrow 6$

$k = 3$ için $\{1, 2, 3\}$ kümesinin toplamda $3!$ permütasyonu var. Bunlardan ikisi $k = 1$ de geçen $(1 \overbrace{\dots}^{2,3} \alpha_4 \alpha_5)$ permütasyonu, biri de $k = 2$ de geçen $(21 \overbrace{3}^{1 \text{ tane}} \alpha_4 \alpha_5)$ permütasyonu olduğu için $(\overbrace{\dots}^{3!-2!-1} \overbrace{\dots}^{\text{Geriye kalanlar } 2!}) \rightarrow 6$

$k = 4$ için $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin toplamda $4!$ permütasyonu var. Bunlardan $3!$ tanesi $k = 1$ de geçen $(1 \overbrace{\dots}^{2,3,4} 5)$ permütasyonu, $2!$ tanesi $k = 2$ de geçen $(21 \overbrace{\dots}^{3,4} 5)$ permütasyonu ve 3 tanesi de $k = 3$ de geçen tüm permütasyonlar olduğu için $(\overbrace{\dots}^{4!-3!-2!-3} 5) \rightarrow 13$

$$120 - 24 - 6 - 6 - 13 = 71$$

Cevap: C

28. $f_1(x) = x^2 + x$ $f_2(x) = 2x_2 - x$ $f_3(x) = x^2 + x$
 $g_1(x) = x - 2$ $g_2(x) = 2x$ $g_3(x) = x + 2$
 olmak üzere, fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri kullanılarak, $i \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere f_i ve g_i fonksiyonlarından $h(x) = x$ fonksiyonu elde edilebiliyorsa, $F_i = 1$; aksi halde $F_i = 0$ olarak tanımlanıyor. (F_1, F_2, F_3) nedir?
 (A) (0, 0, 0) (B) (0, 0, 1) (C) (0, 1, 0) (D) (0, 1, 1) (E) Hiçbiri

Çözüm:

$f_i(a) = A$ ve $g_i(a) = B$ olsun. $h_i(a) = a$ olacaktır. Toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri kullanılarak, f_i ve g_i fonksiyonlarından $h_i(a) = a$ elde edilebiliyorsa, $(A, B)|a$ olması gerekir.

$i = 1$ için, $x = 2$ alırsak

$$f_1(2) = 6, g_1(2) = 0 \Rightarrow (6, 0) = 6 \nmid 2$$

olacağı için $F_1 = 0$ dir.

$i = 2$ için, $x = \frac{1}{2}$ alırsak

$$f_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0, g_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

olacağı ve 0 ile 1 kullanarak $\frac{1}{2}$ elde edilemeyeceği için $F_2 = 0$ dir.

$i = 3$ için

$$g_3^2(x) - f_3(x) - g_3(x) - g_3(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 - x - x - 2 - x - 2 = x$$

olduğu için de $F_3 = 1$ dir.

Cevap: B

29. O_1 ve O_2 merkezli birbirine dıştan teğet iki çemberin ortak dış teğet doğrularından biri çemberlere sırasıyla B ve C noktalarında geçiyor. Çemberlerin ortak noktası A olmak üzere BA doğrusu O_2 merkezli çemberi A ve D noktalarında kesiyor. $|BA| = 5$ ve $|AD| = 4$ ise $|CD|$ nedir?
 (A) $\sqrt{20}$ (B) $\sqrt{27}$ (C) 6 (D) $\frac{15}{2}$ (E) $4\sqrt{5}$

Çözüm 1:

A dan geçen ve çemberlere teğet olan ℓ doğrusu BC yi E de kessin.

$$\angle ABC = \angle BAE = \angle(AD, \ell) = \angle DCA$$

olduğu için,

$$DA \cdot DB = DC^2 \Rightarrow 4 \cdot 9 = DC^2 \Rightarrow DC = 6$$

dır.

Niye? Çünkü $\angle DCA = \angle ABC$ olduğu için $\triangle DCA \sim \triangle DBC$ dir. Benzerlik oranları yazılırsa, $\frac{4}{DC} = \frac{DC}{9} \Rightarrow DC = 6$ elde edilir. Her seferinde, bu benzerliği yazmak yerine $\angle DCA = \angle DBC$ bağıntısı varsa doğrudan $DA \cdot DB = DC^2$ diyebiliriz. Dikkat ettiyseniz, bu çemberdeki kuvveti (teğet durumunda) hatırlatıyor. Gerçekten de öyle, $\angle DCA = \angle DBC$ ise DC doğrusu, $\triangle ABC$ nin çevrel çemberine teğettir (teğet-kiriş açısı = çevre açısı). Bu durumda D noktasının (ABC) çemberine göre kuvveti $DC^2 = DA \cdot DB$ olacaktır.

Çözüm 2:

A dan geçen ve çemberlere teğet olan doğru BC yi E de kessin.

$$AE = EB \text{ ve } AE = EC$$

olacağı için $\angle BAC = 90^\circ$ dir. Bu durumda, DC çaptır. Bu durumda, $DC \perp BC$ olacağı için, $\triangle BCD$ bir dik üçgendir. Öklit'ten

$$DC^2 = DA \cdot DB \Rightarrow DC = 6$$

olacaktır.

NOT:

Öklit'in bu bağıntısı, Çözüm 1'de anlatılan bağıntının özel halidir.

Cevap: C

30. $0 \leq x, y < 31$ olmak üzere, $(x^2 - 18)^2 \equiv y^2 \pmod{31}$ denkleğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı sıralı ikilisi vardır?

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $-\frac{5}{4}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) Hiçbiri

Çözüm:

$f(x) = x^2 - 18$ olsun. Her x sayısı için,

$$f^2(x) \equiv y^2 \pmod{31}$$

denkleğinin

$$y \equiv f(x) \pmod{31} \text{ ve } y \equiv -f(x) \pmod{31}$$

olmak üzere, 2 çözümü vardır. Bu son ifade biraz yanlış $f(x) \equiv 0 \pmod{31}$ ise $f^2(x) \equiv y^2 \pmod{31}$ denkleğinin 1 çözümü vardır.

$$f(x) \equiv x^2 - 18 \equiv 0 \pmod{31} \Rightarrow x \equiv \pm 7 \pmod{31}$$

olacağı için, $x = 7$ için 1 adet y ; $x = 31 - 7 = 24$ için 1 adet y , geri kalan 29 x değeri için ise 2 şer adet y vardır. Bu durumda, toplamda $2 \times 29 + 1 + 1 = 60$ çözüm vardır.

Cevap: B

31. Tüm basamaklarındaki rakamlar birbirinden farklı olan ve 11111 ile bölünen on basamaklı kaç tam sayı vardır?

- (A) 0 (B) 1264 (C) 2842 (D) 3456 (E) 11111

Çözüm:

Tüm rakamlar kullanılarak elde edilen 10 basamaklı sayının rakamları toplamı

$$0 + 1 + 2 + \dots + 9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45 \equiv 0 \pmod{9}$$

olacağı için bu sayı 9 ile bölünür. $(9, 11111) = 1$ olduğu için, hem 9 hem de 11111 ile bölünen sayılar 99999 ile bölünür.

$$\begin{aligned} \overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} &= 100000 \cdot \overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} \equiv \overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} \equiv 0 \pmod{99999} \\ &\Rightarrow \overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = 99999k \end{aligned}$$

olur. $k = 0$ olamaz. Tüm rakamlar birbirinden farklı olduğu için de $k \geq 2$ olamaz. Bu durumda $k = 1$ ve

$$\overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = 99999$$

olacaktır. $i = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere; her a_i için tek bir türlü a_{i+5} sayısı olacaktır. Ek olarak $a_9 \neq 0$ olduğu için $a_4 \neq 5$ tir. Rakamları dağıtmaya a_4 ten başlarsak, a_4 için 9 farklı seçenek var.

a_3 için a_4 ve a_9 da iki rakam kullanıldığı için 8 farklı seçenek var.

a_2 için 6,

a_1 için 4,

a_0 için 2 farklı seçenek vardır.

Bu durumda toplamda

$$9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$$

farklı sayı elde edilir.

Cevap: D

32. Tüm x, y pozitif gerçel sayıları için

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının alabileceği farklı $f(2)$ değerlerinin toplamı nedir?

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $-\frac{5}{4}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) Hiçbiri

Çözüm:

$x = 1, y = 1$ için

$$f^2(1) - f(1) - 2 = 0 \Rightarrow f(1) = 2 \text{ veya } f(1) = -1$$

$y = 1, f(1) = 2$ için

$$f(x) \cdot 2 - f(x) = \frac{1}{x} + x \Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$y = 1, f(1) = -1$ için

$$f(x)(-1) - f(x) = \frac{1}{x} + x \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

olur. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ fonksiyonu,

$$\left(x + \frac{1}{x} \right) \left(y + \frac{1}{y} \right) - \left(xy + \frac{1}{xy} \right) = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - xy - \frac{1}{xy} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

olduğu için verilen fonksiyon denklemini sağlar. Bu durumda $f(2) = \frac{5}{2}$ bir çözümdür.

Öte yandan, $f(x) = \frac{-1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$ fonksiyonu,

$$\frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(y + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{2} \left(xy + \frac{1}{xy} \right) = \frac{xy}{4} + \frac{1}{4xy} + \frac{x}{4y} + \frac{y}{4x} + \frac{xy}{2} + \frac{1}{2xy} = \left(xy + \frac{1}{xy} \right) \frac{3}{4} + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \frac{1}{4} \neq \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

olduğu için verilen fonksiyon denklemini sağlamaz.

Cevap: A

33. Bir $ABCD$ karesinin $[AB]$ kenarı üstünde bir K noktası, $[BC]$ kenarı üstünde de bir L noktası alınır. $|AK| = 3$, $|KB| = 2$ ve K nin DL doğrusuna uzaklığı 3 ise, $|BL| : |LC|$ nedir?

- (A) $\frac{7}{8}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{8}{7}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Çözüm 1:

K nin AD ve DL ye olan uzaklıkları 3 olduğu için, DK ; $\angle ADL$ nin açıortayıdır.

$\angle DLC = \angle ADL = 2\alpha$ olsun.

$$\tan \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{15}{8}$$

olacaktır.

$$DC = 15k = BC \Rightarrow LC = 8k \Rightarrow BL = 7k \Rightarrow BL : BC = \frac{7}{8}$$

Çözüm 2:

K nin AD ve DL ye olan uzaklıkları 3 olduğu için, DK ; $\angle ADL$ nin açıortayıdır. $[BC]$ üzerinde $[BC]$ nin dışında $DL = LN$ olacak şekilde bir N noktası alalım.

$$\triangle DCN \cong \triangle DAK$$

olacaktır. Bu durumda, $DL = LN = LC + 3$ olacağından, Pisagor'dan

$$DL^2 = LC^2 + DC^2 = LC^2 + 25 = LC^2 + 6 \cdot LC + 9 \Rightarrow LC = \frac{8}{3} \Rightarrow BL = \frac{7}{3} \Rightarrow BL : LC = \frac{7}{8}$$

olarak elde edilir.

Cevap: A

34. Aşağıdaki önermelerden hangisi, en az bir p asal sayısı için doğru değildir?

- (A) $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözümü varsa, $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözümü vardır.
- (B) $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözümü yoksa, $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözümü yoktur.
- (C) $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözümü varsa, $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözümü vardır.
- (D) $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözümü yoksa, $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözümü yoktur.
- (E) Hiçbiri

Çözüm 1:

Denklikleri uzun uzun yazmak yerine şu tanımlamayı yapalım.

$x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin p asal sayısı için çözümü varsa, $X(p) = 1$; yoksa $X(p) = 0$ olsun.

$x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin p asal sayısı için çözümü varsa, $Y(p) = 1$; yoksa $Y(p) = 0$ olsun.

Cevabın A olduğunu kabul edelim. Bu durumda öyle bir p asal sayısı var ki, $X(p) = 1$; ama $Y(p) = 0$. Bu p asal sayısı için, D şıkkı da doğru olmuyor. Çünkü $Y(p) = 0$ olmasına rağmen $X(p) \neq 0$.

Bu durum, diğer şıklar için de geçerli. Aslında, A ile D önermeleri, B ile C önermeleri karşıt ters.

Bir sorunun iki cevabı olmayacağı için, cevap A, B, C, D şıklarından hiçbirisidir. E deki şık da tam olarak bu anlama gelmektedir.

Çözüm 2:

Aslında soru şunu soruyor. Öyle bir p asal sayısı var mı ki,

$$x_2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p} \text{ ile } x_2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$$

denkliklerinden birinin çözümü var, diğerinin yok.

$x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin için,

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} \pmod{p}.$$

$x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin için,

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-99}}{2} \pmod{p}.$$

Bu durumda 2^{-1} , \pmod{p} de tanımlıysa;

$D_1^2 \equiv -11 \pmod{p}$ koşulunu sağlayan bir D_1 sayısı varsa, $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin bir çözümü vardır.

$D_2^2 \equiv -99 \pmod{p}$ koşulunu sağlayan bir D_2 sayısı varsa, $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin bir çözümü vardır.

Bu durumda D_1 ile D_2 arasında,

$$D_2 \equiv \pm 3D_1 \pmod{p} \text{ ve } 3^{-1}D_2 \equiv \pm D_1 \pmod{p}$$

bağıntıları vardır. Bu durumda, D_1 var olmasının D_2 varlığını gerektirmesi (ya da diğer ihtimaller) 3^{-1} in mod p de tanımlı olması ile alakası var.

Bir a sayısı için $a^{-1} \pmod{p}$ nin tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $(a, p) = 1$ olmasıdır.

$p = 2$ ve $p = 3$ hariç tüm asal sayılar için 2^{-1} ile 3^{-1} tanımlıdır.

$p = 2$ için, iki denkleğin de çözümü yoktur.

$p = 3$ için, iki denkleğin de çözümü vardır.

Bu durumda, tüm p asal sayıları için; ya iki denklemin de çözümü vardır, ya da iki denklemin de çözümü yoktur.

Böylelikle, tüm şıklar doğru olmuş oldu. Doğru yanıt, şıklardan hiçbiri. Yani E .

Cevap: E

35. $S = \{1, 2, \dots, 32\}$ olmak üzere; S nin hangi k elemanlı A altkümesini alırsak alalım, A kümesinde, a, b yi; b de c yi bölecek şekilde farklı a, b, c sayılarının bulunmasını sağlayan en küçük k değeri nedir?

(A) 17 (B) 24 (C) 25 (D) 29 (E) Hiçbiri

Çözüm:

Farklı a, b sayıları için $a|b$ demek, $b \geq 2a$ demektir. Bu durumda, farklı $b|c$ sayıları için de $b|c$ ise, $c \geq 2b \geq 4a$ olacaktır.

Açık bir şekilde $S_{24}\{9, 10, 11, \dots, 30, 31, 32\}$ kümesinden $a|b|c$ şeklinde üç sayı seçmek mümkün değil. Bu durumda $k > 24$ olmalı.

Acaba bu şekilde üç eleman içermeyen daha büyük bir küme var mı? Olduğunu varsayalım.

1, bu kümenin bir elemanı olabilir mi? 1 içeriliyorsa, n ile $2n$ sayılarından biri bu kümenin dışında olmalı.

$$\{2, 4\}, \{3, 6\}, \{5, 10\}, \{7, 14\}, \{8, 16\}, \{9, 18\}, \{11, 22\}, \{12, 24\}, \{13, 26\}, \dots$$

kümelerinin her birinden en fazla bir eleman seçilebileceği için 1 bu en büyük kümenin bir elemanı olamaz.

Bu en büyük küme, $\{2, 4, 8, 16, 32\}$ kümesinden en fazla iki eleman içerebilir. Yani en az 3 eleman içermez.

$\{3, 6, 12, 24\}$ kümesinden en az 2 eleman içermez.

$\{5, 10, 20\}$ kümesinden en az 1 eleman içermez.

$\{7, 14, 28\}$ kümesinden en az 1 eleman içermez.

Bu durumda $a|b|c$ şeklinde üç eleman içermeyen en büyük küme, $S = \{1, 2, \dots, 32\}$ kümesinden en az $1+3+2+1+1 = 8$ eleman içermez. Bu durumda bu kümenin eleman sayısı en fazla $32 - 8 = 24$ olabilir. Daha fazla olamaz. Demek ki bahsedilen koşulu sağlayan S_{24} kümesinden daha büyük bir küme yok. Bu durumda, S nin herhangi k elemanlı alt kümesinde $a|b|c$ şeklinde üç eleman bulunur.

Cevap: C

36. $x_1 = -1$ ve her n pozitif tam sayısı için $x_{n+1} \equiv \left(1 + \frac{2}{n}\right)x_n + \frac{4}{n}$ ise, x_{2000} nedir?

(A) 1999998 (B) 2000998 (C) 2009998 (D) 2000008 (E) 1999999

Çözüm:

Biraz düzenlemeyle

$$nx_{n+1} = (n+2)x_n + 4$$

elde ederiz. $y_n = x_n + 2$ olsun. Bu durumda $y_1 = 2$ ve

$$\begin{aligned} n(y_{n+1} - 2) &= (n+2)(y_n - 2) + 4 \\ ny_{n+1} - 2n &= (n+2)(y_n) - 2n - 4 + 4 \\ ny_{n+1} &= (n+2)y_n \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} ny_{n+1} &= (n+2)y_n \\ (n-1)y_n &= (n+1)y_{n-1} \\ (n-2)y_{n-1} &= ny_{n-2} \\ &\vdots \\ 3y_4 &= 5y_3 \\ 2y_3 &= 4y_2 \\ 1y_2 &= 3y_1 \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa çarparsak

$$y_{n+1} = \frac{y_1(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow y_{2000} = \frac{2000 \times 2001}{2} = 2001000$$

elde ederiz. Bu durumda

$$y_{2000} - 2 = x_{2000} = 2000998$$

olur.

Cevap: B