

OLİMPİYATLARA HAZIRLIK İÇİN

FONKSİYONEL DENKLEM PROBLEMLERİ

ve ÇÖZÜMLERİ (L. Gökçe)

Merak uyandıran konulardan birisi olan fonksiyonel denklemlerle ilgili Türkçe kaynakların az oluşundan dolayı, matematik olimpiyatlarında önemli bir yere sahip olan bu konuya nereden başlanacağı da bir parça belirsizlik içerip kafa karıştırmaktadır. Bu eksikliği göz önünde bulundurarak www.geomania.org yazarları olarak bizler de fonksiyonel denklem problemleri için bir çalışma kitapçığı hazırladık. Teori yönüyle *J. Aczel'in Lectures on Functional Equations And Their Applications* (1966) isimli eserinden faydalanılmıştır. Başlangıç düzeyinde problemlerle başlayarak daha zor sorulara doğru ilerleyen bir konu sıralaması bulunan bu keyifli konunun doyurucu olabilmesi için problemlerin çözüm yöntemlerini de irdelemeye özen gösterdik. Hepimize kolay gelsin.

Öncelikle yerine koyma metodu olarak bilinen yöntemle ilgili problemler sunacağız. Burada değişkenlere $x=0, x=1$ ya da herhangi bir $x=a$ değeri verilerek çözüme gidilir.

Problem 1: $f(xy) = y^3 \cdot f(x)$ denklemini sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz. Ayrıca $f(5) = 1000$ olarak verilirse $f(4)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm: $f(xy) = y^3 \cdot f(x)$ denkleminde $x=1, y=t$ kolaysak $f(t) = t^3 \cdot f(1)$ olur. Burada $f(1)$ bir sayıdır ama kaçta eşit olduğunu bilmiyoruz. a değişken bir reel sayı olmak üzere $f(1) = a$ dersek denklemin genel çözümü $f(t) = a \cdot t^3$ olur. $f(t) = a \cdot t^3$ fonksiyonunu $f(xy) = y^3 \cdot f(x)$ denkleminde yazarak çözüm olduğu görülebilir.

Şimdi $f(5) = 1000$ koşulu altında a nın değerini belirleyebiliriz. $a \cdot 5^3 = 1000 \Rightarrow a = 8$ olup $f(x) = 8 \cdot x^3$ özel çözümünü elde ederiz. Bu fonksiyon için $f(4) = 8 \cdot 4^3 = 512$ dir.

Alıştırma: k bir sabit olmak üzere $f(xy) = y^k \cdot f(x)$ denklemini sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Cevap: $f(x) = a \cdot x^k$

Problem 2: $f(x+y) = f(x).e^y$ fonksiyonel denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $x=0, y=t$ için denklem $f(t) = f(0).e^t$ şekline gelir. a değişken bir reel sayı olmak üzere $f(0) = a$ dersek genel çözüm $f(t) = a.e^t$ şeklindedir. Gerçekten bu fonksiyonu $f(x+y) = f(x).e^y$ eşitliğinde yazarsak her a sayısı için $a.e^{x+y} = a.e^x.e^y$ eşitliği sağlanır.

Problem 3: $y > 0, f(x) \geq 0$ koşulu altında $f(x+y) = f(x)^y$ fonksiyonel denklemini çözünüz.

Çözüm: $f(x) \equiv 0$ ve $f(x) \equiv 1$ aşikâr çözümlerdir. $x=0, y=t$ için $f(t) = f(0)^t$ olur. a bir reel sayı olmak üzere $f(0) = a$ dersek genel çözüm $f(t) = a^t$ şeklindedir. Bu fonksiyonu $f(x+y) = f(x)^y$ denkleminde yazarsak $a^{x+y} = (a^x)^y$ olur. Her x reel sayısı ve $y > 0$ için bu eşitliğin sağlanması gerekmektedir. Bu ise sadece $a=0$ ve $a=1$ durumunda geçerlidir. Bu değerler de bizi $f(x) \equiv 0$ ve $f(x) \equiv 1$ çözümlerine götürür.

NOT: Bu çözümde kullandığımız $f(x) \equiv 0$ ve $f(x) \equiv 1$ gösterimleri, f fonksiyonunun sabit fonksiyon olduğunu ve sırasıyla 0 ve 1 değerlerine eşit olduğunu ifade etmektedir.

Bazı problemlerin çözümünde fonksiyonların monotonluk özelliği kullanılabilir.

Problem 4: $x > 0$ olmak üzere $f(x^y) = y.f(x)$ denklemini sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x=2$ için denklem $f(2^y) = y.f(2)$ şekline gelir. $f(2) = b$ diyelim. $f(2^y) = y.b$ olur. $t = 2^y$ dersek bu fonksiyon monoton artan olduğundan bir ters fonksiyonu vardır ve $y = \log_2 t$ olarak çözülür. Böylece $f(2^y) = y.b$ eşitliği $f(t) = b.\log_2 t = \frac{b}{\ln 2}.\ln t$ şekline dönüşür ve $f(t) = c.\ln t$ genel çözümü bulunur.

Gerçekten $f(t) = c.\ln t$ fonksiyonu $f(x^y) = y.f(x)$ denkleminde yazılırsa $c.\ln(x^y) = y.c.\ln x$ eşitliği sağlanır.

NOT: Burada $x=2$ için çözüme başladık. $x=\frac{1}{2}, x=e$ ya da logaritma tabanı olmaya uygun herhangi bir a sayısı için $x=a$ seçilerek de çözüme başlanabilir.

Problem 5: $f((xy)^{1/3}) = 4y \cdot f(x)^{1/3}$ denklemini sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x=1$ için denklem $f(y^{1/3}) = 4y \cdot f(1)^{1/3}$ şekline dönüşür. $t = y^{1/3}$ ve $f(1) = b$ dersek $f(y^{1/3}) = 4y \cdot b^{1/3}$ olur. $t = y^{1/3}$ fonksiyonu monoton artan olduğundan bir ters fonksiyona sahiptir. Kolayca görülebileceği gibi $y = t^3$ olur. Böylelikle $f(y^{1/3}) = 4y \cdot b^{1/3}$ denklemi $f(t) = 4 \cdot b^{1/3} \cdot t^3$ şekline dönüşür ve genel çözüm $f(t) = c \cdot t^3$ biçimindedir.

Şimdi $f(t) = c \cdot t^3$ fonksiyonunu $f((xy)^{1/3}) = 4y \cdot f(x)^{1/3}$ denkleminde yazarsak $c(xy) = 4 \cdot y \cdot (cx^3)^{1/3}$ olup $c = 4 \cdot c^{1/3} \Rightarrow c^3 - 64c = 0$ elde edilir. Buradan $c = 0, 8, -8$ olarak çözümlür. Sonuç olarak verilen fonksiyonel denklemin tam olarak 3 tane çözümü vardır ve bunlar $f(x) = 8x^3, f(x) = -8x^3, f(x) \equiv 0$ fonksiyonlarıdır.

Şimdi, içinde $f(x+y)$ ve $f(x-y)$ fonksiyon gruplarını bulunduran denklemlerin çözümünü inceleyeceğiz. En basit yolu, $y=0$ koyup eğer mümkünse $f(x)$ fonksiyonunu doğrudan doğruya verilen denklemden çözmektir. Bu mümkün değilse $x=0, y=t; x=0, y=-t; x=t, y=t$... vs değerler verilerek $f(t), f(-t), f(2t)$... fonksiyon gruplarını içeren denklemler elde edilir. Bu denklemlerden $f(-t), f(2t)$... ifadeleri yok edilerek $f(t)$ bulunabilir.

Problem 6: $f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 6xy \cdot \sqrt[3]{f(y)} + x^3$ ise $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $y=0$ için denklem $2 \cdot f(x) = f(x) + x^3$ olup buradan $f(x) = x^3$ olarak çözülür.

Problem 7: $f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$ denklemini sağlayan tüm f fonksiyonlarını belirleyiniz.

Çözüm: $y=0$ için denklem $f(x) - 2f(x) + f(x) - 2f(0) = -2$ olup buradan $f(0) = 1$ bulunur. Şimdi $x=0, y=t$ ve $x=0, y=-t$ değerlerini denklemden yazarsak

$$\left. \begin{aligned} f(t) + 2f(-t) &= -t + 3 \\ 2f(t) + f(-t) &= t + 3 \end{aligned} \right\}$$

sistemi elde edilir. İlk denklemi, 2. denklemin 2 katından çıkararak $f(-t)$ ifadesini yok edebiliriz. Bu işlemin sonucunda $f(t) = t + 1$ bulunur. Bu çözümü orijinal fonksiyonel denklemde yazarak, denklemi sağladığı kontrol edilebilir.

Problem 8: $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cdot \cos y$ fonksiyonel denklemini çözünüz.

Çözüm: $x = 0, y = t$ için $f(t) + f(-t) = 2 \cdot f(0) \cdot \cos t$ olur. $f(0) = a, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = b$ dersek

$$f(t) + f(-t) = 2a \cdot \cos t \quad \dots (1)$$

denkleme ulaşırız. Daha sonra $x = \frac{\pi}{2} + t, y = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + t$ için

$$f(t + \pi) + f(t) = 0 \quad \dots (2)$$

$$f(t + \pi) + f(-t) = 2b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -2b \cdot \sin t \quad \dots (3)$$

denklemlerini oluşturalım. (1) ve (2) denklemlerinin toplamından (3) denklemini çıkarırsak

$$2f(t) = 2a \cdot \cos t + 2b \cdot \sin t$$

olup

$$f(t) = a \cdot \cos t + b \cdot \sin t$$

genel çözümünü elde ederiz. Bu çözümü verilen fonksiyonel denklemde yazarsak keyfi a, b sabitleri için denklemin sağlandığını görebiliriz.

NOT: Burada $x = 0, y = t; x = \frac{\pi}{2} - t, y = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + t$ değerleri verilerek benzer bir çözüm yapılabilir.

Problem 9: $f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $f(0) = a$ olmak üzere $y = 0$ için denklem $4f(x) + 2a = 4x$ olup $f(x) = x - a/2$ olarak elde edilir. Burada $x = 0$ için $f(0) = 0 - a/2$ dir. Ayrıca $f(0) = a$ olduğundan $a = 0$ bulunur. Dolayısıyla fonksiyonel denklemin tek çözümü $f(x) = x$ fonksiyonudur.

Problem 10: $f(x).f(x+y) = f(y)^2 f(x-y)^2 .e^{y+4}$ fonksiyonel denklemini çözünüz.

Çözüm 1: $f(t) \equiv 0$ sabit fonksiyonu denklemin aşikâr çözümüdür. Bundan sonraki işlemlerde $f(t) \neq 0$ olduğunu varsayalım. $f(0) = a$ olmak üzere $x = 0, y = t$ için

$$a.f(t) = f(t)^2 .f(-t)^2 .e^{t+4} \dots (1)$$

elde ederiz. $x = 0, y = -t$ için

$$a.f(-t) = f(t)^2 .f(-t)^2 .e^{-t+4} \dots (2)$$

elde ederiz. (1) denklemini (2) nin karesi ile bölersek $f(t) \neq 0$ olduğundan $a = f(t)^3 .e^{-3t+4}$ olup bu eşitlik her t değeri için sağlanacağından $t = 0$ için $a = a^3 .e^4$ olup $a = \pm e^2$ elde edilir. Bu durumda $f(t) = \sqrt[3]{a.e^{3t-4}}$ olup denklemin tüm çözümleri $f(t) = e^{t-2}, f(t) = -e^{t-2}$ ve $f(t) \equiv 0$ dir. Bu çözümler fonksiyonel denkleminde yazılırsa, denklemin sağladıkları görülür.

Çözüm 2: $f(t) \neq 0$ olduğunu varsayalım. $f(x).f(x+y) = f(y)^2 f(x-y)^2 .e^{y+4}$ eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra logaritması alınırsa $\ln|f(x)| + \ln|f(x+y)| = 2.\ln|f(y)| + 2.\ln|x-y| + y + 4$ olur. $g(x) = \ln|f(x)|$ denirse fonksiyonel denklem $g(x) + g(x+y) = 2.g(y) + 2g(x-y) + y + 4$ biçimine indirgenir.

$x = y = 0$ için $-2.g(0) = 4$ olup $g(0) = -2$ elde edilir.

$x = 0, y = t$ için

$$g(t) + 2.g(-t) = -t - 6 \dots (3)$$

olur. $x = 0, y = -t$ için

$$2.g(t) + g(-t) = t - 6 \dots (4)$$

olur. (3) denklemini, (4) denkleminin 2 katından çıkarırsak $g(-t)$ terimi yok edilir ve $3.g(t) = 3t - 6$ olup $g(t) = t - 2$ bulunur. $g(x) = \ln|f(x)|$ olduğundan $|f(t)| = e^{t-2}$ olup $f(t) = \pm e^{t-2}$ elde edilir. Dolayısıyla denklemin tüm çözümleri $f(t) = \pm e^{t-2}$ ve $f(t) \equiv 0$ dır. Bu fonksiyonların denklemini sağladığı kontrol edilebilir.

Problem 11: $f(x+y) + f(x-y) - f(x)(y+2) + y(x^2 - 2y) = 0$ fonksiyonel denklemini çözüünüz.

Çözüm: $y=0$ için denklemden $f(0) = 0$ elde ederiz. Denklemden $(y+2)$ şeklinde bir çarpan olduğunu göz önüne alırsak $x=t+2, y=-2$ için denkleminiz daha sade hale gelecektir. O halde $f(-2) = b$ olmak üzere $x=0, y=t; x=t+2, y=-2$ ve $x=-2, y=t+2$ için

$$\begin{aligned} f(t) + f(-t) - 2t^2 &= 0 \\ f(t-4) + f(t) - 2f(t^2 - 4t + 8) &= 0 \\ f(t-4) + f(-t) - bt + (t-2)(8-2t) &= 0 \end{aligned}$$

sistemini elde ederiz. İlk iki denklemin toplamından 3. denklemi çıkarırsak

$$2f(t) = 2t^2 + (4-b)t$$

olup $f(t) = t^2 + ct$ elde edilir. Başlangıçta $f(0) = 0$ olduğunu bulmuştuk Buna göre $c = 0$ dır. Denklemin tek çözümü $f(t) = t^2$ dir. Bu çözümü denklemden yazarak, denklemin sağlandığı görülebilir.

Şimdi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ile verilen Cauchy'nin temel denklemini inceleyeceğiz.

Problem 12: x, y reel sayılar olmak üzere $f(x+y) = f(x) + f(y)$ denklemini sağlayan tüm sürekli f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Tümevarım ile

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \dots (1)$$

denklemden

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \dots (2)$$

eşitliği kolayca elde edilebilir. Şimdi tüm değişkenler için $x_k = x$ ($k = 1, 2, \dots, n$) yazarsak

$$f(nx) = nf(x) \dots (3)$$

olur. m, n tamsayılar ve t bir rasyonel sayı olmak üzere $x = \frac{m}{n}t$ şeklinde ise $nx = mt$ olur ve

$f(nx) = f(mt) \Rightarrow nf(x) = mf(t)$ yazılır. Buradan

$$f\left(\frac{m}{n}t\right) = \frac{m}{n}f(t) \dots (4)$$

elde edilir. $t = 1$ için $f(1) = c$ olsun. Bu durumda her x pozitif rasyonel sayısı için

$$f(x) = cx \dots (5)$$

bulunur.

(1) denkleminde $x = y = 0$ yazarsak buradan $f(0) = 0$ elde edilir. Buna göre (4) ve (5) denklemleri sırasıyla $\frac{m}{n} = 0$ ve $x = 0$ için geçerlidir.

Negatif x ler için (1) de $y = -x$ yerine koymasını yaparsak $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ olup $f(x) = -f(-x)$ olur. Yani negatif rasyonel x ler için de $f(x) = cx$ olur. Dolayısıyla tüm rasyonel x ler için (1) denkleminin çözümleri $f(x) = cx$ şeklindedir.

$f(x)$ in her yerde sürekli olması kabulünden dolayı rasyonel x ler için geçerli olan $f(x) = cx$ eşitliğinin her iki tarafının limiti alınır, $f(x) = cx$ eşitliği her x reel sayısı için geçerli olur.

NOT: (1) denklemini sağlayan f fonksiyonlarının sürekli olduğu kabulüyle, yukarıda yaptıklarımıza benzer biçimdeki çözüm 1821 de A. L. Cauchy tarafından verilmiştir.

Şunu hatırlatmada fayda vardır: G. Darboux 1875 de (1) denklemini sağlayan f fonksiyonlarının her yerde sürekli olması şartını zayıflatmayı başarmıştır ve denklemini sağlayan f fonksiyonları sadece bir tek x_0 noktasında sürekli oluyorsa f nin her yerde sürekli olduğunu aşağıdaki yolla göstermiştir:

Eğer $\lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = f(x_0)$ ise herhangi bir x için

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow x} f(u) &= \lim_{u-x+x_0 \rightarrow x_0} f[(u-x+x_0) + (x-x_0)] = \lim_{t \rightarrow x_0} f[t + (x-x_0)] = \lim_{t \rightarrow x_0} [f(t) + f(x-x_0)] \\ &= f(x_0) + f(x-x_0) = f(x_0 + x - x_0) = f(x) \text{ olup ispat tamamlanır.} \end{aligned}$$

Daha sonraki zamanlarda birçok ünlü matematikçi, (1) denklemini sağlayan f fonksiyonları üzerindeki sadece bir tek x_0 noktasında sürekli olma şartını da kaldırıp, tüm çözümlerin (5) formatında olduğunu gösterme şerefine erişebilmek için uğraşmışlardır. Nihayet 1905 de G. Hamel beklenenin aksine bir sonuca ulaşmıştır. G. Hamel reel sayı tabanlı bir cebirsel yapı inşa etmiş ve bu cebirsel yapıyı kullanarak (1) denkleminin $f(x) = cx$ biçiminde olmayan (ve dolayısıyla sürekli olmayan) çözümlerinin de olduğunu göstermiştir. Genel çözümü bulma problemini de tamamlamıştır.

Cauchy'nin diğer denklemleri şunlardır:

$$f(x+y) = f(x).f(y)$$

$$f(x.y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x.y) = f(x).f(y)$$

G. Hamel'in derin çalışmalarından yakamızı kurtarabilmek maksadıyla Cauchy'nin temel denklemine dönüşebilen tüm denklemler için bir noktada sürekli olma koşulunu ilave edeceğiz. Şimdi bu denklemlerin çözümünü inceleyelim.

Problem 13: $f(x+y) = f(x).f(y)$ denkleminin bir noktada sürekli olan tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: Denklem aşikâr çözümü $f(x) \equiv 0$ dır. Sıfırdan farklı $x = y = \frac{t}{2}$ değerleri için

denklem $f(t) = f\left(\frac{t}{2}\right)^2 > 0$ dir. Böylece denklemin aşikâr olmayan çözümü her yerde pozitifdir. Dolayısıyla denklemin her iki tarafının logaritması alınarak

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y)$$

şekline dönüştürülür. Burada $g(x) = \ln f(x)$ dersek $g(x+y) = g(x) + g(y)$ Cauchy'nin temel denklemini elde ederiz. Bu denklemin sürekli olan çözümleri $g(x) = cx$ biçiminde olduğundan $f(x) = e^{cx}$ olarak bulunur. Dolayısıyla denklemin en genel çözümleri $f(x) \equiv 0$ ve $f(x) = e^{cx}$ fonksiyonlarıdır.

Problem 14: $f(x,y) = f(x) + f(y)$ denkleminin bir noktada sürekli olan tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: İlk olarak pozitif x,y değerleri için $x = e^a, y = e^b$ değişken değiştirmesi yaparsak denklem $f(e^a \cdot e^b) = f(e^a) + f(e^b)$ olup

$$f(e^{a+b}) = f(e^a) + f(e^b)$$

biçimine dönüşür. $g(x) = f(e^x)$ denirse $g(x+y) = g(x) + g(y)$ Cauchy'nin temel denklemini elde ederiz. Bir noktada sürekli olma koşulundan dolayı bu denklemin tüm çözümleri $g(x) = cx$ şeklindedir. Buna göre $f(x) = g(\ln x) \Rightarrow f(x) = c \cdot \ln x$ bulunur.

$y = 0$ için $f(0) = f(x) + f(0)$ olup denklemin aşikâr çözümü $f(x) \equiv 0$ bulunur.

Tüm pozitif ve negatif x,y ler için $x = y = t, x = y = -t$ değerlerini denklemden yazarsak $2 \cdot f(t) = f(t^2) = 2 \cdot f(-t)$ olduğundan $f(-t) = f(t) = c \cdot \ln|t|$ dir. Dolayısıyla fonksiyonel denklemin en genel çözümleri $f(x) = c \cdot \ln|x|$ ve $f(x) \equiv 0$ bulunur.

Problem 15: $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$ denkleminin bir noktada sürekli olan tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $y = 0$ için $f(0) = f(x) \cdot f(0)$ olup buradan $f(x) \equiv 1$ veya $f(0) = 0$ bulunur. Tüm pozitif ve negatif x,y ler için $x = y = t, x = y = -t$ değerlerini denklemden yazarsak

$$f(t)^2 = f(t^2) = f(-t)^2 \text{ olup } f(-t) = f(t) \text{ ya da } f(-t) = -f(t) \text{ dir.}$$

Pozitif x,y değerleri için $x = e^a, y = e^b$ değişken değiştirmesi yaparsak denklem $f(e^{a+b}) = f(e^a) \cdot f(e^b)$ şeklinde olur. Burada $g(x) = f(e^x)$ denirse denklem $g(a+b) = g(a) \cdot g(b)$ biçimine indirgenir. Bu denklemi de Problem.13'de çözmüştük: $g(x) = e^{cx}$ veya $g(x) \equiv 0$ dir. $f(e^x) = g(x)$ olduğundan $f(e^x) = e^{cx} \Rightarrow f(x) = x^c$ veya $f(x) \equiv 0$ bulunur. Bu durumda tüm reel sayılardaki çözümler $c \neq 0$ olmak üzere $f(x) = |x|^c$, $f(x) = |x|^c \cdot \text{sgn } x$, $f(x) \equiv 1$, $f(x) \equiv 0$ olarak bulunur.

NOT: $c = 0$ durumunda $f(x) = |\text{sgn } x|$ ve $f(x) = \text{sgn } x$ olacağına dikkat edilmelidir.

Problem 16: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ denklemini sağlayan ve bir noktada sürekli olan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Bu eşitlik, *Jensen Denklemi* olarak bilinir.

Çözüm: $f(0) = a$ olmak üzere $y = 0$ için $f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2} = \frac{f(x)+a}{2}$ yazılır. Böylece $\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+a}{2}$ olup $f(x+y) = f(x) + f(y) - a$ elde edilir. Burada $g(x) = f(x) - a$ değişken değiştirmesi yapılırsa $g(x+y) = g(x) + g(y)$ Cauchy denklemi elde edilir. Bir noktada süreklilikten $g(x) = cx$ olur. $f(x) = cx + a$ genel çözümü bulunur.

Problem 17: $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$ denklemini sağlayan ve bir noktada sürekli olan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $f(0) = a$ olmak üzere $z = 0$ için $f\left(\frac{x+y+0}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)+f(0)}{3} = \frac{f(x)+f(y)+a}{3}$ olur. Ayrıca $f\left(\frac{(x+y)+0+0}{3}\right) = \frac{f(x+y)+f(0)+f(0)}{3} = \frac{f(x+y)+2a}{3}$ olup $\frac{f(x)+f(y)+a}{3} = \frac{f(x+y)+2a}{3}$ elde edilir. Buradan $f(x+y) = f(x) + f(y) - a$ yazılır. $g(x) = f(x) - a$ değişken değiştirmesi yapılırsa $g(x+y) = g(x) + g(y)$ Cauchy denklemi elde edilir. Bir noktada süreklilikten $g(x) = cx$ olur. Fonksiyonel denklemin genel çözümü $f(x) = cx + a$ şeklinde bulunur.

NOT: $n \geq 2$ tamsayı olmak üzere Jensen denkleminin genel şekli

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}$$

olacaktır. Benzer işlemlerle bu denklemi sağlayan ve bir noktada sürekli olan tüm f fonksiyonlarının $f(x) = cx + a$ şeklinde olacağı görülebilir.

Problem 18: $xy \neq 0$ ve $x + y \neq 0$ olmak üzere $xy \cdot f(x + y) = y(x + y) \cdot f(x) + x(x + y) \cdot f(y)$ denklemini sağlayan ve bir noktada sürekli olan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafını $xy(x + y)$ ile bölersek

$$\frac{f(x + y)}{(x + y)} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}$$

eşitliğine ulaşırız. Burada $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ denirse denklem, $g(x + y) = g(x) + g(y)$ biçimine indirgenir. Bir noktada süreklilikten dolayı $g(x) = cx$ olur. $f(x) = x \cdot g(x) \Rightarrow f(x) = cx^2$ genel çözümü elde edilir.

Problem 19: $f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x) \cdot f(y)$ denklemini sağlayan ve bir noktada sürekli olan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $f(x) = g(x) - 1$ yerine koyması yapılırsa verilen denklem

$$g(x + y) - 1 = g(x) - 1 + g(y) - 1 + (g(x) - 1) \cdot (g(y) - 1)$$

olup $g(x + y) = g(x) \cdot g(y)$ şeklindeki Cauchy denklemine dönüşür. Problem 13 de bu denklemin çözümünün $g(x) = e^{cx}$ ve $g(x) \equiv 0$ olduğunu göstermiştik. $f(x) = g(x) - 1$ olduğundan verilen denklemin genel çözümü $f(x) = e^{cx} - 1$ ve $f(x) \equiv -1$ bulunur.

Problem 20: $xy \neq 0$ olmak üzere $f(xy) = \frac{f(x)}{y} + \frac{f(y)}{x}$ denklemini sağlayan ve bir noktada sürekli olan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafını xy ile genişletirsek $xy \cdot f(xy) = x \cdot f(x) + y \cdot f(y)$ eşitliğini elde ederiz. $g(x) = x \cdot f(x)$ denirse denklem, $g(xy) = g(x) + g(y)$ Cauchy denklemine dönüşür. Bu denklemin çözümünün $g(x) \equiv 0$ ve $g(x) = c \cdot \ln|x|$ olduğunu biliyoruz. $f(x) = \frac{g(x)}{x}$

olduğundan $f(x) \equiv 0$ ve $f(x) = \frac{c \cdot \ln|x|}{x}$ bulunur.

Şimdi $A.B \neq 0$ olmak üzere $f(Ax + By + c) = A.f(x) + B.f(y) + C$ formundaki bir denklemin çözüm yöntemini vereceğiz.

Denklemden $x = \frac{u}{A}, y = \frac{v-c}{B}$; $x = \frac{u}{A}, y = \frac{-c}{B}$; $x = 0, y = \frac{v-c}{B}$ ve $x = 0, y = \frac{-c}{B}$ koyarsak sırasıyla

$$f(u+v) = A.f\left(\frac{u}{A}\right) + B.f\left(\frac{v-c}{B}\right) + C \dots (1)$$

$$f(u) = A.f\left(\frac{u}{A}\right) + B.f\left(\frac{-c}{B}\right) + C \dots (2)$$

$$f(v) = A.f(0) + B.f\left(\frac{v-c}{B}\right) + C \dots (3)$$

$$f(0) = A.f(0) + B.f\left(\frac{-c}{B}\right) + C \dots (4)$$

elde edilir. $f(0) = a$ olmak üzere (1) ve (4) denklemlerinin toplamında (3), (4) denklemlerinin toplamını çıkarırsak

$$f(u+v) = f(u) + f(v) - a \dots (5)$$

denklemini elde ederiz. Böyle bir denklem için $g(x) = f(x) - a$ yerine koyması yapılarak $g(u+v) = g(u) + g(v)$ temel Cauchy denklemini elde edebileceğimizi daha önce görmüştük. Bir noktada süreklilik şartı altında $g(x) = cx$ olup $f(x) = cx + a$ elde edilir. Bu f fonksiyonunun $f(Ax + By + c) = A.f(x) + B.f(y) + C$ denklemini sağladığını görmek için yerine yazmak yeterlidir.

Problem 21: $f(2x - 3y + 12) = 2.f(x) - 3.f(y) + 5$ denklemini sağlayan ve bir noktada sürekli olan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x = \frac{u}{2}, y = \frac{v-12}{-3}$; $x = \frac{u}{2}, y = 4$; $x = 0, y = \frac{v-12}{-3}$ ve $x = 0, y = 4$ için

$$f(u+v) = 2.f\left(\frac{u}{2}\right) - 3.f\left(\frac{v-12}{-3}\right) + 5 \dots (1)$$

$$f(u) = 2.f\left(\frac{u}{2}\right) - 3.f(-4) + 5 \dots (2)$$

$$f(v) = 2.f(0) - 3.f\left(\frac{v-12}{-3}\right) + 5 \dots (3)$$

$$f(0) = 2.f(0) - 3.f(-4) + 5 \dots (4)$$

elde edilir. $f(0) = a$ olmak üzere (1) ve (4) denklemlerinin toplamında (3), (4) denklemlerinin toplamını çıkarırsak $f(u+v) = f(u) + f(v) - a$ elde edilir. $g(x) = f(x) - a$ yerine koyması yapılarak $g(u+v) = g(u) + g(v)$ temel Cauchy denklemini elde ederiz. Bir noktada süreklilikten dolayı $g(x) = cx$ olur. Buradan genel çözüm $f(x) = cx + a$ bulunur.

NOT: $abAB \neq 0$ olmak üzere $f(ax+by+c) = A.f(x) + B.f(y) + C$ biçiminde bir denklem verildiğinde aynı yöntemle çözüme gidebiliriz. Fakat elde edilen $f(x) = cx + a$ çözümü denklemde yazılırsa $a \neq A$ veya $b \neq B$ durumları için fonksiyonel denklemi sağlamayacağı görülür. Diğer bir deyişle sadece $a = A$ ve $b = B$ durumunda çözüm vardır.

Problem 22: $a.A \neq 0$ olmak üzere $f(ax+y) = f(Ax) + f(y)$ denklemini sağlayan bir f fonksiyonunun, her k pozitif tamsayısı için

$$f(a^k x) = A^k . f(x)$$

eşitliğini sağlayacağını gösteriniz.

Bu sade problem 1961 de Z. Daroczy tarafından bulunmuştur.

Çözüm: $f(ax+y) = f(Ax) + f(y)$ denkleminde $x = y = 0$ yazarsak $f(0) = f(0) + f(0)$ olup $f(0) = 0$ bulunur. $y = 0$ için $f(ax) = f(Ax) + f(0)$ olup

$$f(ax) = f(Ax)$$

bulunur. İddia $k = 1$ için doğrudur. Tümevarımla

$$f(a^k x) = A^k . f(x)$$

olduğunu kabul edip $k + 1$ için iddiamızın doğruluğunu gösterelim:

$$f(a^{k+1}x) = f(a \cdot (a^k x)) = A \cdot f(a^k x) = A^{k+1} \cdot f(x)$$

bulunur. İspatlamak istediğimiz de buydu.

Problem 23: $c > 0$ sabit bir sayı olmak üzere $f : \left(-\frac{\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x) \cdot f(y)}$

fonksiyonel denkleminin sürekli olan tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $\tan x$ fonksiyonu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty)$ için birebir ve örtendir. Dolayısıyla $f(x) = \tan g(x)$ dersek her f için bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık gelecektir.

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x) \cdot f(y)} \Rightarrow \tan g(x+y) = \frac{\tan g(x) + \tan g(y)}{1 - \tan g(x) \cdot \tan g(y)}$$

$$\Rightarrow \tan g(x+y) = \tan(g(x) + g(y))$$

$$\Rightarrow g(x+y) = g(x) + g(y)$$

elde edilir. Bu ise Cauchy'nin temel denklemi olup $g(x) = cx$ dir. Buradan $f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = \tan(cx)$ olarak çözülür.

Alıştırma: $c > 0$ sabit bir sayı olmak üzere $f : \left(0, \frac{\pi}{c}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+y) = \frac{f(x) \cdot f(y) - 1}{f(x) + f(y)}$ fonksiyonel denkleminin sürekli olan tüm çözümlerini bulunuz.

Cevap: $f(x) = \cot(cx)$

Problem 24: $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x+y) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{f(x) + f(y)}$ fonksiyonel denkleminin sürekli olan tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $f(x+y) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{f(x) + f(y)} \Rightarrow \frac{1}{f(x+y)} = \frac{f(x) + f(y)}{f(x) \cdot f(y)}$ olur. Buradan

$$\frac{1}{f(x+y)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}$$

olup $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ dersek denkleminiz, $g(x+y) = g(x) + g(y)$ Cauchy denklemine dönüşür.

Buradan $g(x) = cx$ olup $f(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow f(x) = \frac{c}{x}$ genel çözümü elde edilir.

Problem 25: $f(x+y) = f(x).f(y) - \sqrt{1-f(x)^2}.\sqrt{1-f(y)^2}$ fonksiyonel denkleminin reel sayılarda sürekli olan tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $1-f(x)^2 \geq 0$ olması gerektiğinden $-1 \leq f(x) \leq 1$ dir. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan $f(x) = \cos g(x)$ dersek verilen denklem:

$$\cos g(x+y) = \cos g(x).\cos g(y) - \sin g(x).\sin g(y)$$

biçimine indirgenir. Buna göre $\cos g(x+y) = \cos(g(x)+g(y))$ olup $g(x+y) = g(x) + g(y)$ temel Cauchy denklemi elde edilir. $g(x) = cx$ olduğundan $f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = \cos(cx)$ genel çözümü elde edilir.

Alıştırma: $f(x+y) = f(x).\sqrt{1-f(y)^2} + f(y).\sqrt{1-f(x)^2}$ fonksiyonel denkleminin reel sayılarda sürekli olan tüm çözümlerini bulunuz.

Cevap: $f(x) = \sin(cx)$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Soru 1: $f(x^3 + y^3) = x.f(x^2) + y.f(y^2)$ denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x = y = 0$ için $f(0) = 0$ elde edilir. Ayrıca $x = 0$ için $f(y^3) = y.f(y^2)$ olduğundan verilen denklem

$$f(x^3 + y^3) = f(x^3) + f(y^3)$$

biçimine indirgenir. Burada $x^3 = u, y^3 = v$ değişken değiştirmesi yapılırsa $f(u + v) = f(u) + f(v)$ Cauchy denklemi elde edilir. Genel çözümler $f(x) = cx$ olur.

Soru 2: $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x + y) - f(y) = \frac{x}{y(x + y)}$ denklemini sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $f(1) = a$ olmak üzere $y = 1$ için $f(x + 1) - f(1) = \frac{x}{x + 1}$ olup $f(x + 1) = a + 1 - \frac{1}{x + 1}$ yazılır. $x + 1 = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa $f(t) = c - \frac{1}{t}$ çözümüne ulaşılır. Bu fonksiyonu denklemde yazarsak eşitliğin her c için sağlandığı görülebilir.

Soru 3: $f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + xy + y^2)(f(x) - f(y))$ denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $f(0) = a$ olmak üzere $g(x) = f(x) - a$ değiştirmesi yapılırsa $g(0) = a - a = 0$ olur. Verilen denklem

$$g(x^3) - g(y^3) = (x^2 + xy + y^2)(g(x) - g(y))$$

biçimine gelir. $y = 0$ için $g(x^3) = x^2 \cdot g(x)$ olur. Denklemimiz:

$$x^2 \cdot g(x) - g(y^3) = (x^2 + xy + y^2)(g(x) - g(y))$$

olarak yazılıp $y = 1$ için $x^2 \cdot g(x) - g(1) = (x^2 + x + 1) \cdot g(x) - (x^2 + x + 1) \cdot g(1)$ elde edilir. Buradan $g(x) = x \cdot g(1)$ olur. $g(1) = b$ olmak üzere $f(x) = bx + a$ şeklinde bulunur.

Soru 4: $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1995, 1996\}$ olmak üzere $f(1) + f(2) + \dots + f(1996)$ toplamının tek sayı olmasını sağlayan tüm f fonksiyonlarının sayısını bulunuz. (Yunanistan – 1996)

Çözüm: $1, 2, \dots, (n - 1)$ sayıları için $\{1995, 1996\}$ elemanlarından herhangi biriyle eşleme yapabiliriz. $f(n)$ ise tek türlü belirlenerek istenen toplamın sonucu tek sayı yapılabilir. Böylece 2^{n-1} tane f fonksiyonu yazılabilir.

Soru 5: α nın hangi değerleri için sabit olmayan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\alpha(x+y)) = f(x) + f(y)$ fonksiyonu vardır? (Rusya – 1997)

Çözüm: $\alpha=1$ için $f(x+y) = f(x) + f(y)$ olur. Bu denklemi sağlayan ve sabit olmayan $f(x) = mx$ biçiminde fonksiyonlar vardır. Şimdi $\alpha \neq 1$ olsun. $y = \frac{\alpha x}{1-\alpha}$ yerine koymasını yaparsak denklem $f(y) = f(x) + f(y)$ biçimine indirgenir. Buradan $f(x) \equiv 0$ sabit fonksiyonu bulunur. Sonuç olarak sadece $\alpha=1$ için f fonksiyonu sabit olmayabilir.

Soru 6: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$ fonksiyonel denkleminin sürekli olan tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $x+y=a$, $x-y=b$ değişken değiştirmesini yaparsak $x = \frac{a+b}{2}$ olur. Bu durumda fonksiyonel denklem $f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ şekline dönüşür. Bunu da $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$ biçiminde yazarsak Jensen denklemini elde ederiz. Dolayısıyla genel çözüm $f(x) = mx + n$ şeklindeki doğrusal fonksiyonlardır.

Soru 7: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)$ fonksiyonel denkleminin sürekli olan tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: Öncelikle verilen denklemde $x=y=0$ koyarsak $f(0) = 0$ elde edilir. $x+y=a$, $x-y=b$ değişken değiştirmesini yaparsak $y = \frac{a-b}{2}$ olur. Bu durumda fonksiyonel denklem $f(a) - f(b) = 2f\left(\frac{a-b}{2}\right)$ şekline dönüşür. Bu denklemi $f\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{2}f(a) - \frac{1}{2}f(b)$ şeklinde yazalım. Problem 21 den, $f(Ax + By + c) = A.f(x) + B.f(y) + C$ biçimindeki sürekli bir denklemin genel çözümünün $f(x) = mx + n$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $f(a) - f(b) = 2f\left(\frac{a-b}{2}\right)$ denkleminin genel

çözümü de $f(x) = mx + n$ dir. Fakat $f(0) = 0$ olduğundan $n = 0$ dir ve genel çözüm $f(x) = mx$ olarak bulunur.

Soru 8: $F(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları tüm reel ekseninde verilmiş reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, her x ve y için $F(x + f(y)) = 3x + y + 7$ eşitliği sağlanmaktadır. $f(2 + F(7))$ değerini bulunuz. (Antalya – 1999)

Çözüm: $F(x + f(y)) = 3x + y + 7$ denkleminde $y = 0$ koyarsak $F(x + f(0)) = 3x + 7$ olur. $f(0) = c$ diyelim. Bu halde $F(x + c) = 3x + 7$ olup $F(x) = 3(x - c) + 7 = 3x + (7 - 3c)$ bulunur. Dolayısıyla $F(7) = 28 - 3c$ dir. Şimdi $F(x + f(y)) = 3x + y + 7$ eşitliğinde $x = 0$ koyarsak $F(f(y)) = y + 7$ olur. Diğer taraftan $F(f(y)) = 3f(y) + (7 - 3c)$ olacağından bu iki ifadeyi eşitlersek $3f(y) + (7 - 3c) = y + 7$ olup $f(y) = \frac{y}{3} + c$ şeklinde elde edilir. Buna göre $f(2 + F(7)) = f(30 - 3c) = \frac{30 - 3c}{3} + c$ olup $f(2 + F(7)) = 10$ bulunur.

Soru 9: Pozitif reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu için $f(x) \cdot f(y) - f(x \cdot y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ise $f(2)$ nin alabileceği farklı değerlerin toplamı nedir? (UMO – 2000)

Çözüm : $f(2)$ nin alabileceği iki değer var gibi görünüyor.

Öncelikle $x = y = 1$ için $f(1)^2 - f(1) - 2 = 0$ olup $[f(1) - 2] \cdot [f(1) + 1] = 0$ dır. Buradan $f(1) = 2$, $f(1) = -1$ elde ederiz. Şimdi de $x = 2, y = 1$ için $f(2) \cdot f(1) - f(2) = 2 + \frac{1}{2}$ yazılır.

Burada

$$f(1) = 2 \text{ için } 2 \cdot f(2) - f(2) = \frac{5}{2} \Rightarrow f(2) = \frac{5}{2} \text{ dir.}$$

$f(1) = -1$ için $-f(2) - f(2) = \frac{5}{2} \Rightarrow f(2) = -\frac{5}{4}$ tür. En başta yapılması gereken, verilen şartlara uygun kaç farklı f fonksiyonu olduğunu belirlemektir.

$f(1) = 2$ olduğunu varsayarak orijinal denklemde $y = 1$ yazarsak $f(x)f(1) - f(x) = x + \frac{1}{x}$ olup $f(x) = x + \frac{1}{x}$ elde edilir. Bu fonksiyonun, $f(x) \cdot f(y) - f(x \cdot y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ denkleminin çözümü olduğunu kontrol etmek kolaydır.

$f(1) = -1$ olduğunu varsayarak orijinal denklemde $y = 1$ yazarsak $f(x)f(1) - f(x) = x + \frac{1}{x}$ olup $f(x) = \frac{-1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$ dir. Bu fonksiyonu $f(x) \cdot f(y) - f(x \cdot y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ denkleminde yazarsak eşitliğin her x, y için sağlanmadığı görülebilir. Dolayısıyla $f(1) \neq -1$ dir. Buna bağlı olarak aranan tek değer $f(2) = \frac{5}{2}$ dir.

Soru 10: $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) + f(y) = f(x)f(y) + 1 - \frac{1}{xy}$ koşulunu sağlıyor ve $f(2) < 1$ ise $f(3)$ değeri nedir? (UMO – 1998)

Çözüm: $x = y = 1$ yazarsak $f(1)^2 - 2f(1) = 0$ olup $f(1) = 0$ veya $f(1) = 2$ dir. Şimdi de denklemde $x = 2, y = 1$ yazarsak $f(2) + f(1) = f(2)f(1) + 1 - \frac{1}{2}$ olup $f(1) = 0$ için $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 2$ için $f(2) = \frac{3}{2}$ olarak bulunur. $f(2) < 1$ şartından dolayı $f(1) = 0$ durumunu alırız.

Buna göre orijinal denklemde $x = 3, y = 1$ yazarsak $f(3) + f(1) = f(3)f(1) + 1 - \frac{1}{3}$ ve $f(3) = \frac{2}{3}$ elde edilir. Bu problemde de öncelikli olarak yapılması gereken, verilen koşullara uygun bir f fonksiyonu olup olmadığını belirlemektir. Nitekim $f(1) = 0$ şartı altında orijinal

denklemde $y = 1$ yazarsak $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ bulunur. Bu fonksiyon

$f(x) + f(y) = f(x)f(y) + 1 - \frac{1}{xy}$ denklemini (özdeş olarak) sağladığında verilen şartlara uygun bir f vardır.

NOT: Soruda $f(2) < 1$ şartı kaldırılırsa $f(1) = 2$ olup $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ elde edilir. Bu fonksiyon da orijinal denklemi sağlar.

Soru 11: Tüm x, y, z gerçel sayıları için $f(x)f(y)f(z) = 12f(xyz) - 16xyz$ koşulunu sağlayan kaç $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır? (UMO – 2012)

Çözüm: $x = y = z = 1$ için $f(1)^3 = 12f(1) - 16$ olur. $f(1) = a$ denirse $a^3 - 12a + 16 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin bir kökünün $a = 2$ olduğu görülürse $(a - 2)^2(a + 4) = 0$ şeklinde çarpanlara ayrılıp diğer kök $a = -4$ olarak bulunur.

$f(1) = 2$ olmak üzere $y = z = 1$ için $4f(x) = 12f(x) - 16x$ eşitliğinden $f(x) = 2x$ olur.

$f(1) = -4$ olmak üzere $y = z = 1$ için $16f(x) = 12f(x) - 16x$ eşitliğinden $f(x) = -4x$ olur.

$f(x) = 2x$ ve $f(x) = -4x$ fonksiyonların orijinal denklemi sağladığı kontrol edilebilir. Dolayısıyla iki çözüm vardır.