

TELESKOPIK TOPLAMLAR – ÇARPIMLAR (F. UÇAR)

1.1 Fonksiyonlarda Teleskopik Toplam

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x) + x$ ve $f(1) = 5$ olduğuna göre, $f(50)$ nin değeri kaçtır?

2. $f(x+1) = \frac{3f(x)+5}{3}$ ve $f(1) = 2$ ise $f(61)$ in değeri kaçtır?

3. $f(x+2) = 2^{x+1} \cdot f(x)$ ve $f(0) = 1$ ise $f(10)$ kaçtır?

4. $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$ ise $\sum_{x=1}^{19} f(x)$ kaçtır?

5. $f(x) = f(x-1) + 2x^2 - 3$ ve $f(0) = -100$ veriliyor. $f(15)$ kaçtır?

6. $f(x+1) = f(x) + x^3 - 5x + 2$ ve $f(1) = 2$ olduğuna göre $f(17)$ değeri nedir?

1.2 Basit Kesirlere Ayırarak Toplamların Hesaplanması

1. $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{29 \cdot 30}$ toplamını bulunuz.

2. $A = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 101}$ toplamını bulunuz.

3. $A = \frac{1}{11 \cdot 4} + \frac{1}{18 \cdot 11} + \frac{1}{25 \cdot 18} + \dots + \frac{1}{102 \cdot 95}$ toplamını bulunuz?

4. Aşağıdaki toplamı hesaplayınız.

$$\frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{25 \cdot 28 \cdot 31}$$

5. $\sum_{k=1}^{99} \frac{2k+1}{k^2 \cdot (k+1)^2}$ toplamının 100 katı kaçtır?

1.3 Faktöriyel İçeren Toplamlarının Hesaplanması

1. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$ toplamını bulunuz.

2. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$ toplamını bulunuz.

3. $\frac{1}{2 \cdot 0!} + \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{4 \cdot 2!} + \frac{1}{5 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{30 \cdot 28!}$ toplamını bulunuz

4. $\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \dots + \frac{29}{27!+28!+29!}$ toplamını hesaplayınız.

1.4 Terimlerin Eşlenikleri ile Çarpılarak Toplamın hesaplanması

1. $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{169} + \sqrt{167}}$ toplamının bulunuz.

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2 + x} + \sqrt[3]{(x+1)^2}}$ ise

$A = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(26)$ toplamını bulunuz.

3. $f(k) = \frac{k+3}{\sqrt{k^2+3k} + \sqrt{k^2+9k+18}}$ veriliyor.

$S = f(1) + f(4) + f(7) + \dots + f(43)$ toplamını hesaplayınız.

4. $f(x) = \frac{1}{(\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[4]{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}$ ise

$T = f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(14639)$ toplamının değeri kaçtır?

KARIŞIK ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen toplamı bulunuz.

$$\frac{3}{1^3} + \frac{5}{1^3 + 2^3} + \frac{7}{1^3 + 2^3 + 3^3} + \dots + \frac{2n+1}{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}$$

2. $S = 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \dots + 99! \cdot 101$ toplamının birler basamağındaki rakam kaçtır?

3. $A = \frac{3}{2!} - \frac{4}{3!} + \frac{5}{4!} - \frac{6}{5!} + \dots + \frac{11}{10!} - \frac{12}{11!}$ toplamını bulunuz.

4. $\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{10 \cdot 13}{11 \cdot 12}$ toplamını bulunuz.

5.

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{101^2}}$$

olduğuna göre, $\frac{101 \cdot S}{100}$ kaçtır?

6. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!}$ toplamı neye eşittir?

7. $\sum_{n=1}^9 \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$ toplamını hesaplayınız.

8. Aşağıdaki toplamın değeri A olsun.

$$\frac{2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{3! \cdot 4!} + \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 1}{4! \cdot 5!} + \dots + \frac{10^2 + 3 \cdot 10 + 1}{11! \cdot 12!}$$

Buna göre, $11! \cdot 12! \cdot A$ sayısını 11'e bölümünden kalan nedir?

9. Aşağıdaki toplamın değerini bulunuz.

$$A = \frac{\sqrt{1^2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 1^2 - 1}}{1 \cdot 3} + \frac{\sqrt{3^2 \cdot 5^2 + 8 \cdot 2^2 - 1}}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{\sqrt{23^2 \cdot 25^2 + 8 \cdot 12^2 - 1}}{23 \cdot 25}$$

10.

$$S = \frac{10}{10^4 + 10^2 + 1} + \frac{11}{11^4 + 11^2 + 1} + \frac{12}{12^4 + 12^2 + 1} + \dots + \frac{100}{100^4 + 100^2 + 1} \text{ ise, } 2S + \frac{1}{10101} \text{ ifadesinin değeri nedir?}$$

11. $a_1 = \frac{1}{a}$, $a_2 = a_1 + 1$, $a_3 = a_1 a_2 + 1$,

$a_4 = a_1 a_2 a_3 + 1$, \dots , $a_{100} = a_1 a_2 a_3 \dots a_{99} + 1$ ve $a_1 a_2 a_3 \dots a_{100} = \frac{1}{b}$ olduğuna göre,

$$A = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{100}}$$

ifadesini a ve b cinsinden ifade ediniz.

12. $a_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$$

şeklinde tanımlanan (a_n) dizisi veriliyor. m, n aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 + \dots + a_{2011} \cdot a_{2012}$ toplamının değeri m/n ise, $m+n$ kaçtır?

13. $a_0 = 1$ ve $n \geq 1$ için $a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2 \cdot a_{n-1} + 1}$ ise a_{11} kaçtır?

14. $a_1 = \frac{1}{10}$ ve $n \geq 1$ için $a_n = a_{n+1} (2a_n + 1)$ ise a_{101} kaçtır?

15. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ve $n \geq 3$ için $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 1$ ise a_{2010} kaçtır?

16. $a_1 = 6$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} - 2 = a_n (2a_n + 5)$ olsun. Buna göre

$$S = \frac{1}{2a_1 + 3} + \frac{1}{2a_2 + 3} + \frac{1}{2a_3 + 3} + \dots$$

sonsuz toplamının değerini bulunuz.

17. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ ve her $k \geq 1$ için

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$$

şeklinde tanımlanan $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi veriliyor.

$$S = \frac{1}{2^1 a_0} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + \frac{1}{2^2 a_1} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{2^k a_{k-1}} \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} \right) + \dots$$

sonsuz toplamının değerini bulunuz.

18. $P = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{101}\right)$

çarpımını bulunuz.

19. $P = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{101}\right)$

çarpımını bulunuz.

20. Aşağıdaki çarpımın sonucunu bulunuz.

$$P = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{101^2}\right)$$

21. $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ ve

$$P_n = \frac{T_2}{T_2 - 1} \cdot \frac{T_3}{T_3 - 1} \cdot \frac{T_4}{T_4 - 1} \cdots \frac{T_n}{T_n - 1}$$

olmak üzere, P_{100} kaçtır?

22. $T_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ ve

$$P_n = \frac{4T_2}{2(T_2 - T_1)} \cdot \frac{4T_3}{3(T_3 - T_2)} \cdots \frac{4T_n}{n(T_n - T_{n-1})}$$

olmak üzere P_{25} kaçtır?

23. $n \geq 2$ olmak üzere,

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1001}{2001}$$

olmasını sağlayan en küçük n tamsayısı kaçtır?

a) 1999 b) 2000 c) 2001 d) 2002 e) Hiçbiri

24. (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1 + 4a_n^2}}$$

şeklinde tanımlanıyor. $a_k < 10^{-2}$ eşitsizliğini gerçekleyen en küçük k tamsayısı kaçtır?

a) 2501 b) 251 c) 2499 d) 249 e) Hiçbiri

25. f fonksiyonu her x gerçel sayısı için

$$(x-1)f(x+1) - (x+2)f(x) = 0$$

eşitliğini sağlıyor. $f(2) = 6$ ise $f(10)$ kaçtır?

26. $x_1 = -1$ ve $n \geq 1$ için, $x_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)x_n + \frac{4}{n}$

ise, x_{2000} nedir?

27. $S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2002^2}$ ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $1 \leq S < \frac{4}{3}$ b) $\frac{4}{3} \leq S < 2$ c) $2 \leq S < \frac{7}{3}$
d) $\frac{7}{3} \leq S < \frac{5}{2}$ e) $\frac{5}{2} \leq S < 3$

28. $x_1 = 5$, $x_2 = 401$ ve her $3 \leq n \leq m$ için

$$x_n = x_{n-2} - \frac{1}{x_{n-1}}$$

ise, m nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 405 b) 2005 c) 2006 d) 2007 e) Hiçbiri

29. Bir (a_n) dizisi $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ ve her $n \geq 2$

için $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ şeklinde tanımlanmaktadır. Buna göre a_{17} kaçtır?

a) 895 b) 900 c) 905 d) 910 e) Hiçbiri

30. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_1 = 1$, $a_3 = 4$ ve her $n \geq 2$ için, $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n + 1$ koşulunu sağlıyorsa, a_{2011} nedir?

a) 2^{2010} b) 2021056 c) 1010528
d) 3016 e) 2011