OLİMPİYATLARA

HAZIRLIK

NOTLARI

EŞİTSİZLİKLER

http://www.geomania.org/forum/

DÜZENLENEBİLİR EŞİTSİZLİKLER

TANIM: $\left(a_1, a_2, a_3\right)$ ve $\left(b_1, b_2, b_3\right)$ sıralı üçlülerini ele alalım.

Eğer;

* Sıralı üçlüleri oluşturan elamanlar her iki üçlüde de artan veya azalan sırada ise bu üçlülere benzer sıralı , biri artan sırada diğeri azalan sırada ise karşıt sıralı üçlü ler denir.

Örneğin $a_1 \le a_2 \le a_3$ ve $b_1 \le b_2 \le b_3$ veya $a_1 \ge a_2 \ge a_3$ ve $b_1 \ge b_2 \ge b_3$ ise $\left(a_1, a_2, a_3\right)$ ve $\left(b_1, b_2, b_3\right)$ sıralı üçlülerini benzer sıralıdır.

$a_1 \le a_2 \le a_3$ ve $b_1 \ge b_2 \ge b_3$ veya $a_1 \ge a_2 \ge a_3$ ve $b_1 \le b_2 \le b_3$ ise $\left(a_1, a_2, a_3\right)$ ve $\left(b_1, b_2, b_3\right)$ sıralı üçlülerini karşıt sıralıdır.

ÖRNEK: $0<a \le b \le c$ ise (a,b,c) ve $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ üçlüleri karşıt sıralıdır.

(a,b,c) ve $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ üçlüleri ise benzer sıralıdır.

ÖRNEK: $0<a \le b \le c$ ve $m \in R^+$ ise (a,b,c) ve $\left(a^m, b^m, c^m\right)$ üçlüleri benzer sıralı (a,b,c) ve $\left(\frac{1}{a^m}, \frac{1}{b^m}, \frac{1}{c^m}\right)$ üçlüleri karşıt sıralıdır.

ÖRNEK: $a \le b \le c$ ve n bir tek tamsayı ise (a,b,c) ve $\left(a^n, b^n, c^n\right)$ üçlüleri benzer sıralıdır.

TEOREM: (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) reel sayı üçlüleri ve (x_1, x_2, x_3) de (b_1, b_2, b_3) ün bir permütasyonu olsun.

* Eğer (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) reel sayı üçlüleri benzer sıralı ise

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ tir.

* Eğer (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) reel sayı üçlüleri karşıt sıralı ise

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ tir.

Eşitlik her iki durumda da $a_1 = a_2 = a_3$ ve $b_1 = b_2 = b_3$ iken sağlanır.

İSPAT: (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) üçlülerinin her ikiside artan sırada ve (b_2, b_1, b_3) de (b_1, b_2, b_3) ün herhangi bir permütasyonu olsun $\Rightarrow .b_2 \geq b_1$ dir.

S=$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ve S'=$a_1b_2 + a_2b_1 + a_3x_3$ olup

S'-S=$a_1(b_2 - b_1) + a_2(b_1 - b_2) = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$, $a_1 \leq a_2$ ve $b_2 \geq b_1$ olduğundan

S'-S ≤ 0 $\Rightarrow$ S $\geq$ S' dir. $\Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3$ olur. (b_1, b_2, b_3) ün herhangi bir permütasyonu için eşitsizlik doğru olduğuna göre tüm permütasyonları için de doğrudur.

Eğer (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) üçlüleri azalan sırada veya karşıt sıralı iseler benzer şekil de ispat yapılır.

ÖRNEK1: a,b,c $\in$ R ve n pozitif bir çift tamsayı olmak üzre;

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+ac+bc$ olduğunu ispatlayınız.

b) $a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$ olduğunu ispatlayınız.

CÖZÜM:

a) $a \leq b \leq c$ olsun. Bu durumda (a,b,c) ve (a,b,c) üçlüleri benzer sıralı olup

$a.a+b.b+c.c \geq ab+bc+ca \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+ac+bc$

a) $a \leq b \leq c$ ve n cift olsun. $\Rightarrow (a,b,c)$ ve $(a^{n-1}, b^{n-1}, c^{n-1})$ üçlüleri benzer sıralı olup

$a.a^{n-1} + b.b^{n-1} + c.c^{n-1} \geq a.b^{n-1} + b.c^{n-1} + c.a^{n-1} \Rightarrow a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$ dır.

ÖRNEK2: a,b,c>0 olmak üzre aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu ispatlayınız.

a) $\dfrac{a+b+c}{abc} \leq \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

b) $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}$

c) $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geq a + b + c$

CÖZÜM:

a) $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ ve $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ üçlüleri benzer sıralıdır.Genelliği bozmaksızın a ≤ b ≤ c olsun.

$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ üçlüsünün bir permütasyonu $\left(\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{a}\right)$ olduğu için

$\frac{1}{a}.\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.\frac{1}{c}\geq\frac{1}{a}.\frac{1}{b}+\frac{1}{b}.\frac{1}{c}+\frac{1}{c}.\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{\text{a+b+c}}{\text{abc}}$ dir.

b) $\left(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right)$ ve $\left(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right)$ üçlüleri benzer sıralıdır.$\left(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right)$ üçlüsünün bir permütasyonu $\left(\frac{b}{c},\frac{c}{a},\frac{a}{b}\right)$ olduğu için ;

$\frac{a}{b}.\frac{a}{b}+\frac{b}{c}.\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.\frac{c}{a}\geq\frac{a}{b}.\frac{b}{c}+\frac{b}{c}.\frac{c}{a}+\frac{c}{a}.\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$ dir.

c) $\left(\mathrm{a}^2,b^2,c^2\right)$ ve $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ üçlüleri karşıt sıralı olup $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ üçlüsünün bir permütasyonu $\left(\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{a}\right)$ olduğu için;

$\mathrm{a}^2.\frac{1}{a}+b^2.\frac{1}{b}+c^2.\frac{1}{c}\leq\mathrm{a}^2.\frac{1}{b}+b^2.\frac{1}{c}+c^2.\frac{1}{a}\Rightarrow a+b+c\leq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ dır.

ÖRNEK3: Eğer a,b,c>0 ise $\frac{\text{a}}{\text{b+c}}+\frac{\text{b}}{\text{c+a}}+\frac{\text{c}}{\text{a+b}}\geq\frac{3}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜM: a ≤ b ≤ c olsun. Bu durumda (a,b,c) ve $\left(\frac{1}{\text{b+c}},\frac{1}{\text{c+a}},\frac{1}{\text{a+b}}\right)$ üçlüleri benzer sıralı olup $\left(\frac{1}{\text{b+c}},\frac{1}{\text{c+a}},\frac{1}{\text{a+b}}\right)$ üçlüsünün bir permütasyonu $\left(\frac{1}{\text{c+a}},\frac{1}{\text{a+b}},\frac{1}{\text{b+c}}\right)$ olduğundan ;

$a.\frac{1}{\text{b+c}}+b.\frac{1}{\text{c+a}}+c\,\frac{1}{\text{a+b}}\geq a.\frac{1}{\text{c+a}}+b\,\frac{1}{\text{a+b}}+c.\frac{1}{\text{b+c}}$ olur (1)

$\left(\frac{1}{\text{b+c}},\frac{1}{\text{c+a}},\frac{1}{\text{a+b}}\right)$ üçlüsünün bir diğer permütasyonu $\left(\frac{1}{\text{a+b}},\frac{1}{\text{b+c}},\frac{1}{\text{c+a}}\right)$ olduğundan

$a.\frac{1}{\text{b+c}}+b.\frac{1}{\text{c+a}}+c\,\frac{1}{\text{a+b}}\geq a.\frac{1}{\text{a+b}}+b.\frac{1}{\text{b+c}}+c.\frac{1}{\text{c+a}}$ olur. (2)

(1) ve (2) yi taraf tarafa toplarsak;

$2\left(\frac{\text{a}}{\text{b+c}}+\frac{\text{b}}{\text{c+a}}+\frac{\text{c}}{\text{a+b}}\right)\geq\frac{\text{a}}{\text{c+a}}+\frac{\text{b}}{\text{a+b}}+\frac{\text{c}}{\text{b+c}}+\frac{\text{a}}{\text{a+b}}+\frac{\text{b}}{\text{b+c}}+\frac{\text{c}}{\text{c+a}}=3$ olup

$\frac{\text{a}}{\text{b+c}}+\frac{\text{b}}{\text{c+a}}+\frac{\text{c}}{\text{a+b}}\geq\frac{3}{2}$ dir.

CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ: Eğer (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) üçlüleri benzer sıralı ise ; $\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{3} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)$ olduğunu ispatlayınız.

İSPAT:

(a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) üçlüleri benzer sıralı olduklarından;

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1$

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2$ olup taraf tarafa toplarsak;

$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq a_1(b_1 + b_2 + b_3) + a_2(b_1 + b_2 + b_3) + a_3(b_1 + b_2 + b_3)$

$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$

$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{3} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)$ dir.

SONUÇ:Eğer (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) üçlüleri karşıt sıralı ise

$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{3} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)$ olduğunu ispatlayınız.

KARESEL ORTALAMA-ARİTMETİK ORTA EŞİTSİZLİĞİ:

a_1, a_2, a_3 reel sayılar olmak üzre; $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}}$ tür.

İSPAT: Genelliği bozmaksızın $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ kabul edelim.(a_1, a_2, a_3) ve (a_1, a_2, a_3) üçlüleri benzer sıralı olduklarından chebyshev eşitsizliğinden

$\frac{a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3}{3} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right) \Rightarrow$

$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}}$ dir.

ARİTMETİK ORTA-GEOMETRİK ORTA EŞİTSİZLİĞİ:

a_1, a_2, a_3 reel sayılar olmak üzre; $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ tür.

İSPAT: $x_1 = \frac{a_1}{P}$, $x_2 = \frac{a_1a_2}{P^2}$ ve $x_3 = \frac{a_1a_2a_3}{P^3} = 1$ ve $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$,$y_3 = \frac{1}{x_3} = 1$ olsun.$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} = P$ dir.Genelliği bozmaksızın $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ olsun.Bu durumda $y_3 \leq y_2 \leq y_1$ olup (x_1, x_2, x_3) ve (y_1, y_2, y_3) üçlüleri karşıt sıralı olurlar.Bu durumda ;

$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \leq x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 \Rightarrow$

$1 + 1 + 1 + \leq \frac{a_1}{P} + \frac{a_2}{P} + \frac{a_3}{P} \Rightarrow P \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{a_1a_2a_3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ dir.

ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER:

1. a,b,c>0 ise $ab+ac+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$ dir.

ÇÖZÜM: Genelliği bozmaksızın a ≤ b ≤ c kabul edelim.Bu durumda

AO-GO eşitsizliğinden $\begin{cases} \text{ab+ac} \geq 2\sqrt{\text{ab.ac}} = 2a\sqrt{bc} \\ \text{ab+bc} \geq 2\sqrt{\text{ab.bc}} = 2b\sqrt{bc} \\ \text{ac+bc} \geq 2\sqrt{\text{ac.bc}} = 2c\sqrt{bc} \end{cases}$ olup bulduklarımızı taraf tarafa

toplarsak $2(ab+ac+ca) \geq 2\left(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}\right) \Rightarrow$

$ab+ac+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$ dir.

2) a,b,c>0 ise $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM1: AO-GO eşitsizliğinden $\begin{cases} a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \end{cases}$ olup taraf tarafa çarparsak

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9$ dur.

ÇÖZÜM2: a ≤ b ≤ c olsun. $\Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$ olup (a,b,c) ve $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ üçlüleri karşıt düzenli olurlar .Chebyshev eşitsizliğinden; $\frac{\text{a}.\frac{1}{\text{a}}+b.\frac{1}{\text{b}}+c.\frac{1}{\text{c}}}{3} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\right)$

$1 \leq \frac{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{9} \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ dir.

3. a,b,c>0 ise $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{\text{a+b+c3}}{3}}$ tür.

ÇÖZÜM: a ≤ b ≤ c olsun.Bu takdirde (a,b,c) ve $(\log a, \log b, \log c)$ üçlüleri benzer sıralı olurlar. $\Rightarrow$ Chebyshev eşitsizliğinden;

$$\frac{a\log a+b\log b+c\log c}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{\log a+\log b+\log c}{3}\right)$$

$$\frac{\log a^a b^b c^c}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{\log abc}{3}\right) \Rightarrow \log a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\log abc$$

$\log a^a b^b c^c \geq \log abc^{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)} \Rightarrow a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{\text{a+b+c3}}{3}}$ dir.

4. a,b,c>0 ve abc=1 ise ise $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM1: x=$\frac{1}{a}$, y=$\frac{1}{b}$ ve z=$\frac{1}{c}$ olsun :bu durumda x.y.z=1 olup eşitsizlik;

$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}$ olur. (*)

$\left(x^2,y^2,z^2\right)$ ve $\left(\frac{1}{y+z},\frac{1}{x+z},\frac{1}{x+y}\right)$ üçlüleri benzer sıralı olduğundan ;

$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}\geq\frac{x^2}{x+z}+\frac{y^2}{x+y}+\frac{z^2}{y+z}$ ve

$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}\geq\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{x+z}$ olup taraf tarafa toplarsak;

$2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}\right)\geq\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{x+z}$ olur. (1)

AO-GO eşitsizliğinden $x^2+y^2\geq 2xy$ old. $2x^2+2y^2\geq x^2+2xy+y^2$

$\Rightarrow x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{x+y}\geq\frac{x+y}{2}$ olur.Aynı mantıkla $\frac{y^2+z^2}{y+z}\geq\frac{y+z}{2}$ ve

$\frac{x^2+z^2}{x+z}\geq\frac{x+z}{2}$ eşitsizlikleri elde edilir.Bu dularımızı (1) eşitsizliğinde kullanırsak;

$2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}\right)\geq\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{x+z}{2}=x+y+z$ elde edilir.AO-GO eşitsizliğinden $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$ olup xyz=1 old. $x+y+z\geq 3$ olur.Bunu (2) eşitsizli ğinde kullanırsak;

$2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}\right)\geq 3\Rightarrow\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}\geq\frac{3}{2}\Rightarrow$ (*) dan

$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ elde edilir.

5. a,b,c>0 ve abc=1 ise ise $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM1: AO-GO eşitsizliğinden $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $a+c \geq 2\sqrt{ac}$,$a+b \geq 2\sqrt{ab}$

olup $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)=\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)+\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)$ (1)

$AO-GO$ eşitsizliğinden $\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right) \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}}=2\sqrt{c}$ olup aynı mantıkla

$\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)+\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right) \geq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$ dir. (2)

$AO-GO$ eşitsizliğinden $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq 3\sqrt[6]{abc}=3$ olup

$2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$ (3)

1,2 ve 3 ten $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$ dir.

ÇÖZÜM2: Genelliği bozmaksızın $a \geq b \geq c$ olsun. $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{b}} \leq \frac{1}{\sqrt{c}}$ olup düzenlenebilir eşitsizliklerden ;

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\frac{a}{\sqrt{a}}+\frac{b}{\sqrt{b}}+\frac{c}{\sqrt{c}} \leq \frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{c}{\sqrt{b}}+\frac{a}{\sqrt{c}}$ dir.AO-GO eşitsizliğinden ;

$3 \leq \frac{c}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{c}}$ olur.Bulduğumuz bu eşitsizliğin her iki tarafına $\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{c}{\sqrt{b}}+\frac{a}{\sqrt{c}}$ ifadesini eklersek $3+\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{c}{\sqrt{b}}+\frac{a}{\sqrt{c}} \leq \frac{c}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{c}}+\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{c}{\sqrt{b}}+\frac{a}{\sqrt{c}}=\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}$ dir.

$\frac{a}{\sqrt{a}}+\frac{b}{\sqrt{b}}+\frac{c}{\sqrt{c}} \leq \frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{c}{\sqrt{b}}+\frac{a}{\sqrt{c}}$ olduğundan $3+\frac{a}{\sqrt{a}}+\frac{b}{\sqrt{b}}+\frac{c}{\sqrt{c}} \leq 3+\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{c}{\sqrt{b}}+\frac{a}{\sqrt{c}}$

olup $3+\frac{a}{\sqrt{a}}+\frac{b}{\sqrt{b}}+\frac{c}{\sqrt{c}} \leq \frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$ dir.

Şimdiye kadar düzenlenebilir eşitsizlikleri sıralı üçlüler için inceledik.Şimdi ise düzenlenebilir eşitsizliklerin genel haline geçelim.

GENELLEŞTİRİLMİŞ DÜZENLENEBİLİR EŞİTSİZLİKLER

TEOREM: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq .... \leq a_n$ ve $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq .... \leq b_n$ olup $\left(a_1', a_2', a_3',,,,,, a_n'\right)$ sıralı n-liside $\left(a_1, a_2, a_3,,,,,, a_n\right)$ in bir permütasyonu olsun bu durumda ;

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \geq \quad a_1' b_1 + a_2' b_2 + ... + a_n' b_n \text{ dür.}$$

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq .... \geq a_n$ ve $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq .... \leq b_n$ olup $\left(a_1', a_2', a_3',,,,,, a_n'\right)$ saıralı n-liside $\left(a_1, a_2, a_3,,,,,, a_n\right)$ in bir permütasyonu olsun bu durumda ;

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \leq \quad a_1' b_1 + a_2' b_2 + ... + a_n' b_n \text{ dür}$$

SONUÇ1: $a_1, a_2, a_3 .... a_n$ reel sayılar ve $\left(a_1', a_2', a_3', ,,,,, a_n'\right)$ de $\left(a_1, a_2, a_3, ,,,,, a_n\right)$ in bir permütasyonu olsun.Bu durumda ;

$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq a_1' a_1 + a_2' a_2 + ... + a_n' a_n$ dir.

SONUÇ2: $a_1, a_2, a_3 .... a_n$ pozitif reel sayılar ve $\left(a_1', a_2', a_3', ,,,,, a_n'\right)$ de $\left(a_1, a_2, a_3, ,,,,, a_n\right)$ in bir permütasyonu olsun.Bu durumda ;

$\frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \frac{a_3'}{a_3} + ... + \frac{a_n'}{a_n} \geq n$ dir.

ÖRNEK1: $a_1, a_2, ..., a_n$ farklı pozitif tamsayılar olmak üzre;

$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ olduğunu gösteriniz. (IMO-78)

ÇÖZÜM: $\left(a_1', a_2', a_3', ,,,,, a_n'\right)$ üçlüsü $\left(a_1, a_2, a_3, ,,,,, a_n\right)$ in bir permütasyonu ve

$a_1' \leq a_2' \leq a_3' \leq .... \leq a_n'$ olsun.$\left(a_1', a_2', a_3', ,,,,, a_n'\right)$ üçlüsünü $1 \leq i \leq n$ için

$a_i' \geq i$ olacak şekilde seçersek düzenlenebilir eşitsizliklerden

$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{a_1'}{1} + \frac{a_2'}{2^2} + ... + \frac{a_n'}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{2}{2^2} + ... + \frac{n}{n^2}$ olup

$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ dir.

ÖRNEK2: a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları ise

$a^2\left(b+c-a\right) + b^2\left(c+a-b\right) + c^2\left(a+b-c\right) \leq 3abc$ olduğunu ispatlayınız.(IMO-1975)

ÇÖZÜM: $a \geq b \geq c$ (*)kabul edelim.İlk olarak $a\left(b+c-a\right) \leq b\left(c+a-b\right) \leq c\left(a+b-c\right)$ (**) olduğunu gösterelim.Bunun için $c\left(a+b-c\right) - b\left(c+a-b\right) = \left(b-c\right)\left(b+c-a\right) > 0$ *olup* diğerleride aynı mantıkla gösterilebilir.(*) ve (**) ile düzenlenebilir eşitsizliklerden;

$aa\left(b+c-a\right) + bb\left(c+a-b\right) + cc\left(a+b-c\right) \leq ba\left(b+c-a\right) + cb\left(c+a-b\right) + ac\left(a+b-c\right)$

$\Rightarrow a^2\left(b+c-a\right) + b^2\left(c+a-b\right) + c^2\left(a+b-c\right) \leq ba\left(b+c-a\right) + cb\left(c+a-b\right) + ac\left(a+b-c\right)$

ve $a^2\left(b+c-a\right) + b^2\left(c+a-b\right) + c^2\left(a+b-c\right) \leq ca\left(b+c-a\right) + cb\left(c+a-b\right) + bc\left(a+b-c\right)$

eşitsizliklerini yazabiliriz.Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa elde edilen eşitsizliğin sağ tarafı $6abc$ olup $2\left(a^2\left(b+c-a\right) + b^2\left(c+a-b\right) + c^2\left(a+b-c\right)\right) \leq 6abc$

$\Rightarrow \quad a^2\left(b+c-a\right) + b^2\left(c+a-b\right) + c^2\left(a+b-c\right) \leq 3abc$ olur.

PROBLEMLER:

1. a,b pozitif reel sayılar ve n bir pozitif tamsayı olmak üzre; $\dfrac{a^n+b^n}{a+b} \geq \dfrac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}$ olduğu ispatlayınız.

2. a,b>0 ise; aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlayınız.

$a)$ $2\left(a^5+b^5\right) \geq \left(a^3+b^3\right)\left(a^2+b^2\right)$

$b)$ $a^9+b^9 \geq a^2b^2\left(a^5+b^5\right)$

$c)$ $\left(a+b\right)^n \leq 2^{n-1}\left(a^n+b^n\right)$ $n \in Z^+$

3. $a,b,c>0$ ise $\dfrac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[n]{\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3}}$ olduğunu ispatlayınız.

4. a,b,c>0 ve $n \in Z^+$ olmak üzre ; $\dfrac{a^n}{b+c}+\dfrac{b^n}{c+a}+\dfrac{c^n}{a+b} \geq \dfrac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$ dir.

5. A,B,C bir üçgenin içaçıları ve a,b,c de kenar uzunlukları olsun.$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ olmak üzre; $\dfrac{A}{p-a}+\dfrac{B}{p-b}+\dfrac{C}{p-c} \geq \dfrac{3\pi}{p}$ olduğunu ispatlayınız.

6. $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq .... \leq x_n$ ve $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq .... \leq y_n$ olup $\left(z_1,z_2,z_3,,,,,,,z_n\right)$ sıralı n-liside $\left(y_1,y_2,y_3,,,,,,,y_n\right)$ in bir permütasyonu olsun bu durumda ;

$$\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2+......+\left(x_n-y_n\right)^2 \geq \left(x_1-z_1\right)^2+\left(x_2-z_2\right)^2+......+\left(x_n-z_n\right)^2$$

olduğunu ispatlayınız. (IMO-1975)

7. a,b,c bir üçgenin kenar uzunlukları ise

$a^2b\left(a-b\right)+b^2c\left(b-c\right)+c^2a\left(c-a\right) \geq 0$ olduğunu ispatlayınız.(IMO-1983)

8. a,b,c bir üçgenin kenar uzunlukları ise

$abc \geq \left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right)$ olduğunu ispatlayınız.

9. $x_1,x_2,x_3,.......,x_n>0$ olmak üzre

$\dfrac{x_1^{\ 2}}{x_2}+\dfrac{x_2^{\ 2}}{x_3}+.......+\dfrac{x_n^{\ 2}}{x_1} \geq x_1+x_2+x_3+.......+x_n$ olduğunun gösteriniz.

KONVEKS FONKSİYON:

$f:I \to R$, $\forall$ x,y $\in$ I ve a $\in [0,1]$ için $f(ax+(1-a)y) \leq af(x)+(1-a)f(y)$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Eğer $\forall$ x,y $\in$ I ve a $\in (0,1)$, x $\neq$ y ve $f(ax+(1-a)y) < af(x)+(1-a)f(y)$

ise f fonksiyonu kesin konveks olarak adlandırılır.Tersi durumda ise konkav ve kesin konkav olarak adlandırılır.

JENSEN EŞİTSİZLİĞİ:

$f: I \to R$ fonksiyonu konveks bir fonksiyon , $x_1,....x_n \in I$ $a_1,....a_n \geq 0$ ve $a_1+a_2+....+a_n=1$ olsun.Bu durumda ;

$f(a_1x_1+a_2x_2+........a_nx_n) \leq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+..........+a_nf(x_n)$ dir.

Eğer f fonksiyonu konkav ise

$f(a_1x_1+a_2x_2+........a_nx_n) \geq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+..........+a_nf(x_n)$ dir.

İSPAT:

Eşitsizliğin n=1 için doğruluğunu kontrol edelim.

n=1 ise $a_1=1$ olup $f(a_1x_1)=f(1.x_1)=1.f(x_1)=a_1f(x_1) \leq a_1f(x_1)$ olduğundan eşit sizliğimiz n=1 için doğrudur.

Eşitsizlik n=k için doğru olsun ; yani

$f(a_1x_1+a_2x_2+........a_kx_k) \leq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+..........+a_kf(x_k)$ olsun.

n=k+1 alalım.$x_1,....x_k \in I$ $a_1,....a_k,a_{k+1} \geq 0$ ve $a_1+a_2+....+a_k+a_{k+1}=1$ olsun.

Bu durumda ; $a_1,....a_k,a_{k+1}$ sayılarından en azından biri 1'den küçük olmalıdır.Genel liği bozmadan $a_{k+1}<1$ alıp $u=\frac{a_1}{1-a_{k+1}}x_1+..........+\frac{a_k}{1-a_{k+1}}x_k$ tanımlamasını yapalım.

$\frac{a_1}{1-a_{k+1}}+..........+\frac{a_k}{1-a_{k+1}}=\frac{a_1+.......+a_k}{1-a_{k+1}}=\frac{1-a_{k+1}}{1-a_{k+1}}=1$ olur.Bu durumda;

$a_1x_1+a_2x_2+........a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1}=(1-a_{k+1})u+a_{k+1}x_{k+1}$ olur f konveks olduğun dan $f((1-a_{k+1})u+a_{k+1}x_{k+1}) \leq (1-a_{k+1})f(u)+a_{k+1}f(x_{k+1})$ (*)

hipotezimiz n=k için doğru olduğundan;

$$f(u)=f\left(\frac{a_1}{1-a_{k+1}}x_1+..........+\frac{a_k}{1-a_{k+1}}x_k\right) \leq \frac{a_1}{1-a_{k+1}}f(x_1)+..........+\frac{a_k}{1-a_{k+1}}f(x_k) \quad (**)$$

$1-a_{k+1})u+a_{k+1}x_{k+1}=a_1x_1+a_2x_2+........a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1}$ olduğundan

$f(1-a_{k+1})u+a_{k+1}x_{k+1})=f(a_1x_1+a_2x_2+........a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1})$ olup (*) dan

$f(a_1x_1+a_2x_2+........a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1}) \leq (1-a_{k+1})f(u)+a_{k+1}f(x_{k+1})$ olup (**) dan

$$f(a_1x_1+a_2x_2+........a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1}) \leq (1-a_{k+1})\left(\frac{a_1}{1-a_{k+1}}f(x_1)+..........+\frac{a_k}{1-a_{k+1}}f(x_k)\right)+a_{k+1}f(x_{k+1})$$

$f(a_1x_1+a_2x_2+........a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1}) \leq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+........a_kf(x_k)+a_{k+1}f(x_{k+1})$ olur ki bu son eşitsizlik bize hipotezin n=k+1 için de doğru olduğunu gösterir ve ispat tamamlanmış olur.

Konkav olma durumu içinde benzer şekilde ispat yapılır.

SONUÇLAR :

$a_1,....a_n \geq 0$ ve $a_1 = a_2 = ... = a_n = \frac{1}{n}$ olsun.Bu durumda ;

f fonsiyonu konveks ise f $\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$

f fonsiyonu konkav ise f $\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$ dir.

KONVEKSİTE ve KONKAVİTE TESTİ:

f fonksiyonu bir I aralığıda ikinci türevi haiz bir fonksiyon olmak üzre;

a) f fonksiyonu I aralığında konveks ise $\forall$x $\in$ I için f"(x) $\geq$ 0 dır.

b) f fonksiyonu I aralığında kesin konveks ise $\forall$x $\in$ I için f"(x)>0 dır.

c) f fonksiyonu I aralığında konkav ise $\forall$x $\in$ I için f"(x) $\leq$ 0 dır.

d) f fonksiyonu I aralığında kesin konkav ise $\forall$x $\in$ I için f"(x)<0 dır.

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİK ORTA-GEOMETRİK ORTA EŞİTSİZLİĞİ

$x_1,....x_n \geq 0$, $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ ve $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ olsun.Bu durumda ;

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq x_1^{a_1}x_2^{a_2}.....x_n^{a_n}$ dir.Esitlik $x_1 = ... = x_n$ durumunda geçerlidir.

İSPAT: $x_1,....x_n > 0$, f(x)=lnx ve x $\in (0,\infty)$ olsun.lnx fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında kesin konkav olup $\ln\left(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \right) \geq a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + ... + a_n \ln x_n \Rightarrow$

$\ln\left(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \right) \geq \ln x_1^{a_1} + \ln x_2^{a_2} + ... + \ln x_n^{a_n} = \ln\left(x_1^{a_1}x_2^{a_2}......x_n^{a_n} \right) \Rightarrow$

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq x_1^{a_1}x_2^{a_2}......x_n^{a_n}$ dir.

SONUÇ: (AO-GO EŞİTSİZLİĞİ)

$a_1 = a_2 = ... = a_n = \frac{1}{n}$ alınırsa ; $\frac{x_1 + x_2 + ... + ax_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1.......x_n}$ dir.

TANIMLAMALAR:

$x_1,....x_n,\ a_1, a_2,...., a_n > 0$, $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ olsun. $t \in R$, $t \neq 0$ için aşağıda tanımlı M_t genelleştirilmiş ortasını tanımlayalım;

$$M_t = \left(\frac{a_1 x^t{}_1 + a_2 x^t{}_2 + ... + a_n x^t{}_n}{n} \right)^{\frac{1}{t}}$$

t=1 için $M_1 = \dfrac{a_1x_1 + a_2x_2 + ...+ a_nx_n}{n}$;GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİK ORTA(GAO)

t=-1 için $M_{-1} = \dfrac{n}{\frac{a_1}{x_1} + ... + \frac{a_n}{x_n}}$;GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK ORTA(GHO)

t=2 için $M_2 = \sqrt{\dfrac{a_1x^2{}_1 + ...a_nx^2{}_n +}{n}}$;GENELLEŞTİRİLMİŞ KARESEL ORTA(GKO)

L'Hospital kuralından faydalanarak $\lim\limits_{t\to 0} M_t = x_1^{b_1} x_2^{b_2} .... x_n^{b_n}$ olduğu gösterilebilir.Şimdi biz $M_0 = \lim\limits_{t\to 0} M_t = x_1^{b_1} x_2^{b_2} .... x_n^{b_n}$ tanımlamasını yaparsak M_0 bu durum da GENELLEŞTİRİLMİŞ GEOMETRİK ORTA olarak isimlendirilir.

$M_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} M_t$ olup $M_\infty = \max\{x_1,........,x_n\}$ olarak tanımlanır.

$M_{-\infty} = \lim\limits_{t\to-\infty} M_t$ olup $M_\infty = \min\{x_1,........,x_n\}$ olarak tanımlanır.

GENELLEME:

Eğer t<0<s se $M_t \leq M_0 \leq M_s$ ve sonuç olarak $M_{-\infty} \leq M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq M_\infty$ dur.

KUVVET ORTALAMASI EŞİTSİZLİĞİ(Power Mean Inequality):

$x_1,....x_n,\ a_1, a_2,...., a_n > 0$, $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ ve t,s sıfırdanfarklı iki reel sayı olsun.
s<t ise

$$\left(\frac{a_1 x^s{}_1 + a_2 x^s{}_2 + ... + a_n x^s{}_n}{n} \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\frac{a_1 x^t{}_1 + a_2 x^t{}_2 + ... + a_n x^t{}_n}{n} \right)^{\frac{1}{t}}$$

$İSPAT: f(x)=x^{\frac{t}{s}}$ fonksiyonunu tanımlayalım.0<s<t ve s<0<t ise f fonksiyonu kesin konveks tir.Bu durumda $b_1,....b_n$, $a_1,a_2,....,a_n>0$, $a_1+a_2+....+a_n=1$ için

$$\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n}{n}\right)^{\frac{t}{s}}\le\frac{a_1b_1^{\frac{t}{s}}+a_2b_2^{\frac{t}{s}}+......+a_nb_n^{\frac{t}{s}}}{n}$$

$b_1=x_1^s,.........b_n=x_n^s$ seçersek eşitsizlik ispatlanmış olur.

Eğer s<t<0 ise 0<-t<-s olup eşitsizliğimiz $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},,,,,,\frac{1}{x_n}$ için

$$\left[\frac{a_1\left(\frac{1}{x_1}\right)^{-t}+.........+a_n\left(\frac{1}{x_n}\right)^{-t}}{n}\right]^{\frac{1}{-t}}\le\left[\frac{a_1\left(\frac{1}{x_1}\right)^{-s}+.........+a_n\left(\frac{1}{x_n}\right)^{-s}}{n}\right]^{\frac{1}{-s}}$$ şeklini alır.

ÖRNEK: a,b ≥ 0 ve a+b=2 için $\left(1+\sqrt[5]{a}\right)^5+\left(1+\sqrt[5]{b}\right)^5\le 2^6$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: f(x)=$\left(1+\sqrt[5]{x}\right)^5$ olarak seçelim.f fonksiyonu kesin konkavdır.Bu durum da Jensen Eşitsizliğinden $f(\frac{a+b}{2})\ge\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$ dir.$\Rightarrow$ $f(1)\ge\frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt[5]{a}\right)^5+\left(1+\sqrt[5]{b}\right)^5\right)$

$$\Rightarrow 2^5\ge\frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt[5]{a}\right)^5+\left(1+\sqrt[5]{b}\right)^5\right)\Rightarrow 2^6\ge\left(1+\sqrt[5]{a}\right)^5+\left(1+\sqrt[5]{b}\right)^5$$ dir.

ÖRNEK: a,b,c>0 için $a^a.b^c.c^c\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $f(x)=x\ln x$ $x\in(0,\infty)$ olsun $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ olduğundan kesinkonveks olup

$$f(\frac{a+b+c}{3})\le\frac{1}{3}\left(f(a)+f(b)+f(c)\right)\Rightarrow$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\le\frac{1}{3}\left(a\ln a+b\ln b+c\ln c\right)\Rightarrow$$

$$(a+b+c)\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\le\left(a\ln a+b\ln b+c\ln c\right)\Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}\le\ln a^a+\ln b^b+\ln c^c=\ln\left(a^ab^bc^c\right)\Rightarrow$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}\le\left(a^ab^bc^c\right)$$

ÖRNEK : a,b,c>0 için $\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c}\geq\frac{3}{7}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM : $f(x)=\frac{x}{s-x}=\frac{s}{s-x}-1$ ve $x\in(0,s)$ olsun. $f''(x)=\frac{2s}{(s-x)^3}>0$ olduğundan f fonksiyonu kesin konvekstir. $\Rightarrow f(\frac{2a+2b+2c}{3})\leq\frac{1}{3}\left(f(2a)+f(2b)+f(2c)\right)-$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2a+2b+2c}{3}}{s-\frac{1}{3}(2a+2b+2c)}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{2a}{s-2a}+\frac{2b}{s-2b}+\frac{2c}{s-2c}\right)$$

$\Rightarrow \frac{3(a+b+c)}{3s-2(a+b+c)}\leq\frac{2a}{s-2a}+\frac{2b}{s-2b}+\frac{2c}{s-2c}$ dir. s=3(a+b+c) alınırsa;

$\Rightarrow \frac{3}{7}\leq\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c}$ olur.

ÖRNEK : a,b,c>0 için $\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c}\geq\frac{3}{7}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM : $f(x)=\frac{x}{s-x}=\frac{s}{s-x}-1$ ve $x\in(0,s)$ olsun. $f''(x)=\frac{2s}{(s-x)^3}>0$ olduğundan f fonksiyonu kesin konvekstir. $\Rightarrow f(\frac{2a+2b+2c}{3})\leq\frac{1}{3}\left(f(2a)+f(2b)+f(2c)\right)-$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2a+2b+2c}{3}}{s-\frac{1}{3}(2a+2b+2c)}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{2a}{s-2a}+\frac{2b}{s-2b}+\frac{2c}{s-2c}\right)$$

$\Rightarrow \frac{3(a+b+c)}{3s-2(a+b+c)}\leq\frac{2a}{s-2a}+\frac{2b}{s-2b}+\frac{2c}{s-2c}$ dir. s=3(a+b+c) alınırsa;

$\Rightarrow \frac{3}{7}\leq\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c}$ olur.

ÖRNEK: $a_1,.......,a_n \geq 1$ için $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2.......a_n}}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ ve $x\in[0,\infty)$ olsun. $x\in(0,\infty)$ için $f''(x)=\frac{e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^3}>0$

olduğundan ğundan f fonksiyonu kesin konvekstir.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+e^{x_k}} \geq \frac{n}{1+e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k}}$ olup $x_k=\ln a_k$, k=1,2,.......n alınırsa

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2.......a_n}}$ olur.

ALIŞTIRMALAR: A,B,C bir üçgenin içaçıları olmak üzre aşağıdaki eşitsizlik leri ispatlayınız.

a) $\sin A+\sin B+\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$

c) $\sin A.\sin B.\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

d) $\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$

e) $\sec\frac{A}{2}+\sec\frac{B}{2}+\sec\frac{C}{2} \geq 2\sqrt{3}$

ÖRNEK:

$a_1,....a_n,\ b_1,b_2,....,b_n>0$, $b_1+b_2+....+b_n=1$ olsun.Eğer $a_1^{b_1}.......a_n^{b_n}=1$

ise $a_1+........+a_n \geq \frac{1}{b_1^{b_1}......b_n^{b_n}}$ olup eşitlik ancak ve ancak $a_k=\frac{b_k}{b_1^{b_1}......b_n^{b_n}}$

k=1,2,.........,n durumunda geçerlidir.

ÇÖZÜM: Genelleştirilmiş AO-GO eşitsizliğini kullanırsak;

$a_1+........+a_n=b_1\left(\frac{a_1}{b_1}\right)+..................+b_n\left(\frac{a_n}{bn}\right) \geq \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{b_1}....................\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n}=$

$=\frac{a_1^{b_1}.......a_n^{b_n}}{b_1^{b_1}......b_n^{b_n}}=\frac{1}{b_1^{b_1}......b_n^{b_n}}$ olur.Eşitlik $\frac{a_1}{b_1}=........=\frac{a_n}{b_n}$ durumunda gerçekleşir

.Bu durumda $a_1^{b_1}.......a_n^{b_n}=1$ olduğundan $a_k=\dfrac{b_k}{b_1^{b_1}......b_n^{b_n}}$, k=1,2,.........,n dir.

PROBLEMLER:

1. a,b,c>0 olmak üzre; $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ olduğunu gösteriniz.

(Ireland-98)

2. a,b,c $\geq$ 0 olmak üzre $\dfrac{(a+b+c)^2}{3}\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$ olduğunu gösteriniz.

(Zveda-98)

3. x,y,z>0 x+y+z=xyz olmak üzre $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\leq\dfrac{3}{2}$ olduğunu gösteriniz.

(Korea-98)

4. Bütün pozitif a,b,c reel sayıları için $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$ olduğunu gösteriniz.

(Nesbitt-1903)

5. a,b,c pozitif reel sayılar ve abc=1 ise $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(a+c)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\geq\dfrac{3}{2}$ olduğu ğunu gösteriniz. (IMO-95)

6. x>0 için $x^x\geq\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x+1}$ olduğunu göstriniz.

ÇÖZÜM: f(x)=xlnx olsun .f''(x)=$\dfrac{1}{x}>0$ old. f konveks olup

Jensen eşitsizliğinden $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\leq\dfrac{1}{2}\left(f(x)+f(1)\right)\Rightarrow$

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left(x\ln x+1.\ln 1\right)\Rightarrow(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\leq x\ln x$$

$$\Rightarrow\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1}\leq\ln x^x\Rightarrow\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1}\leq x^x$$

7. $x_1,,,,,,,,,,,,x_n\in R^+$ olup $x_1+..........+x_n=1$ dirBuna göre ; $\dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+........+\dfrac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$ olduğunu ispatlayınız. (India-95)

ÇÖZÜMLÜ EŞİTSİZLİK PROBLEMLERİ

SORU : a,b,c>1 ise $\log_a abc + \log_b abc + \log_c abc \geq 9$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\log_a abc + \log_b abc + \log_c abc = \log abc\left(\frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log b} + \frac{1}{\log c}\right)$ dir.

a,b,c>1 olduğundan loga,logb,logc>0 olup

Aritmetik orta-Harmonik orta eşitsizliğinden ;

$$\frac{\text{loga+logb+logc}}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{\log a}+\frac{1}{\log b}+\frac{1}{\log c}} \Rightarrow \frac{1}{\log a}+\frac{1}{\log b}+\frac{1}{\log c} \geq \frac{9}{\text{loga+logb+logc}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log a}+\frac{1}{\log b}+\frac{1}{\log c} \geq \frac{9}{\text{logabc}} \Rightarrow \log abc\left(\frac{1}{\log a}+\frac{1}{\log b}+\frac{1}{\log c}\right) \geq \log abc.\frac{9}{\text{logabc}}$$

$$\Rightarrow \log_a abc + \log_b abc + \log_c abc \geq 9$$

Geometrik eşitsizlik

SORU : ABC üçgenin kenar uzunluklar a,b,c ve içteğet çemberinin merkezi I ise $IA.IB.IC \leq \frac{abc}{3\sqrt{3}}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: u= $\frac{\text{a+b+c}}{2}$ olsun.Bu durumda $A(ABC) = ur = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{(u-a)(u-b)(u-c)}{u} \qquad (1)$$

İçteğet çemberin AB,BC,CA kenrlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla P,Q,R olsun.

Bu durumda $AP = u-a$, $BQ = u-b$ *ve* $CR = u-c$ dir.AO-GO eşitsizliğinden

$$\frac{u-a+u-b+u-c}{3} \geq \sqrt[3]{(u-a)(u-b)(u-c)} \Rightarrow \frac{u}{3} \geq \sqrt[3]{(u-a)(u-b)(u-c)}$$

Pisagor teoreminden ;

$$\begin{aligned} \text{IA}^2.\text{IB}^2.\text{IC}^2 &= \left[r^2+(u-a)^2\right]\left[r^2+(u-b)^2\right]\left[r^2+(u-c)^2\right] \\ &= \left[\frac{(u-a)bc}{u}\right]\left[\frac{(u-b)ca}{u}\right]\left[\frac{(u-c)ab}{u}\right] \\ &= \frac{(u-a)(u-b)(u-c)(abc)^2}{u^3} \leq \frac{u^3(abc)^2}{27u^3} = \frac{(abc)^2}{27} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow IA.IB.IC \leq \frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

$SORU$: $a,b,c>0$ için $\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(a+b+c\right)^2\geq 4\sqrt{3abc\left(a+b+c\right)}$ olduğunu gösteriniz.

$ÇÖZÜM$: AO-GO eşitsizliğinden

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow \quad \left(a+b+c\right)^2\geq 3\left(a+b+c\right)\left(abc\right)^{1/3}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 3\sqrt[6]{abc}\Rightarrow \quad \sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 3\left(abc\right)^{2/3}$

$\Rightarrow \sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(a+b+c\right)^2\geq 3\left(abc\right)^{2/3}+3\left(a+b+c\right)\left(abc\right)^{1/3}$

$\geq 4\sqrt[4]{3\left(abc\right)^{2/3}\left(abc\right)\left(a+b+c\right)^3}\geq 4\sqrt[4]{3\left(abc\right)^{2/3}\left(abc\right)3\left(abc\right)^{1/3}\left(a+b+c\right)^2}$

$=4\sqrt{3\left(abc\right)\left(a+b+c\right)}$

$SORU$: $a,b,c>0$ ve $a.b.c=1$ ise $\dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}+\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}+\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1$ olduğunu gösteriniz.

$ÇÖZÜM$: $a^5+b^5\geq a^2b^2\left(a+b\right)$ dir.(Düzenlenebilir eşitsizlikler yardımıyla kolay ca gösterilebilir)

$\Rightarrow a^5+b^5+ab\geq a^2b^2\left(a+b\right)+ab\Rightarrow \dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}\leq \dfrac{ab}{a^2b^2\left(a+b\right)+ab}$

$\Rightarrow \dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}\leq \dfrac{ab}{a^2b^2\left(a+b\right)+ab}\times\dfrac{c^2}{c^2}=\dfrac{abc.c}{\left(abc\right)^2\left(a+b\right)+abc.c}=\dfrac{c}{a+b+c}$

Aynı mantıkla ; $\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}\leq\dfrac{a}{a+b+c}$ ve $\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq\dfrac{b}{a+b+c}$ olup bul duğumuz bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa ;

$\dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}+\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}+\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1$ olur.

$SORU$: $a,b,c>0$ ve $abc\leq 1$ ise $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\geq a+b+c$ olduğunu gösteriniz.

$ÇÖZÜM$: $abc\leq 1\Rightarrow \dfrac{1}{bc}\geq a,\ \dfrac{1}{ac}\geq b\ ,\ \dfrac{1}{ab}\geq c$ dir. AO-GO eşitsizliğinden

$\dfrac{2a}{c}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{bc}}\geq 3a$ olup benzer şekilde $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{c}\geq 3b$ ve $\dfrac{2c}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 3c$

dir. Eşitsizlikleri taraf tarafa toplar 3 e bölersek $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\geq a+b+c$ olur.

SORU : $x,y,z>0$ ise $\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\geq\frac{x+y+z}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜM1: $4x^2=\left[(x+y)+(x-y)\right]^2=(x+y)^2+2(x+y)(x-y)+(x-y)^2$

$$\geq(x+y)^2+2(x+y)(x-y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4x^2}{4(x+y)}\geq\frac{(x+y)^2+2(x+y)(x-y)}{4(x+y)}=\frac{x+y}{4}+\frac{x-y}{2}$$

$\Rightarrow \frac{x^2}{(x+y)}\geq\frac{x+y}{4}+\frac{x-y}{2}$ olup aynı mantıkla diğer eşitsizliker de elde edilir ve taraf taraf toplanırsa; $\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\geq\frac{x+y+z}{2}$ olur.

ÇÖZÜM2: $a_1=\sqrt{x+y}$, $a_2=\sqrt{y+z}$, $a_3=\sqrt{z+x}$, $b_1=\frac{x}{\sqrt{x+y}}$

$b_2=\frac{y}{\sqrt{y+z}}$, $b_3=\frac{z}{\sqrt{z+x}}$ olsun.Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$ olup veriler yerine yazılırsa istenen eştisizlik elde edilir.

SORU : $a,b,c>0$ ve $a+b+c=1$ ise $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{10}+\left(b+\frac{1}{b}\right)^{10}+\left(c+\frac{1}{c}\right)^{10}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM: $a+b+c=1$ olduğundan 0<a,b,c<1 olmalıdır.f fonksiyonu $(0,1)$ de tanımlı ve $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ olsun. $f''(x)=90\left(x+\frac{1}{x}\right)^8\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+10\left(x+\frac{1}{x}\right)^9\left(\frac{2}{x^3}\right)$

olup $f''(x)>0$ olduğundan f kesin konveks olup Jensen eşitsizliğinden

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\leq\frac{1}{3}\left(f(a)+f(b)+f(c)\right)\Rightarrow 3f\left(\frac{1}{3}\right)\leq f(a)+f(b)+f(c)$$

$\Rightarrow \frac{10^{10}}{3^9}\leq\left(a+\frac{1}{a}\right)^{10}+\left(b+\frac{1}{b}\right)^{10}+\left(c+\frac{1}{c}\right)^{10}$ dir.

SORU : $a,b,c>0$ ve $a+b+c=abc$ ise $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜM: $A=\arctan a$, $B=\arctan b$, $C=\arctan c$ olsun.a,b,c>0 olduğundan $0<A,B,C<\frac{\pi}{2}$ alalım.$a+b+c=abc$ olduğundan $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow \tan C=\frac{-(\tan A+\tan B)}{1-\tan A\tan B}=\tan(\pi-A-B)\Rightarrow A+B+C=\pi$ olmalı.

$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ dir.$A=\arctan a\Rightarrow\cos A=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$,$B=\arctan b\Rightarrow\cos B=\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$

$C=\arctan c\Rightarrow\cos C=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ old. $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{2}$ dir.

SORU : $a,d\ge 0$ ve $b,c>0$ olmak üzre $b+c\ge a+d$ ise $\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM: Genelliği bozmaksızın a ≥ d ve b ≥ c kabul edelim. $b+c\ge a+d$ olduğun dan $b+c\ge(a+b+c+d)/2$ dir.

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\ge\frac{a+b+c+d}{2(c+d)}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{a+b}{2(c+d)}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\ge 2\sqrt{\frac{a+b}{2(c+d)}.\frac{c+d}{a+b}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

SORU : $x_k,y_k\in R^+$ ve $(k=1,2,3,....,1995)$ olsun.

$x_1+x_2+....+x_{1995}=y_1+y_2+....+y_{1995}=1$ ise $\sum_{k=1}^{1995}\frac{x_ky_k}{x_k+y_k}\le\frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM : $(x_k-y_k)^2\ge 0\Rightarrow x_k^2+y_k^2\ge 2x_ky_k\Rightarrow x_k^2+2x_ky_k+y_k^2\ge 4x_ky_k$

$\Rightarrow(x_k+y_k)^2\ge 4x_ky_k\Rightarrow\frac{x_k+y_k}{4}\ge\frac{x_ky_k}{x_k+y_k}\Rightarrow\sum_{k=1}^{1995}\frac{x_ky_k}{x_k+y_k}\le\sum_{k=1}^{1995}\frac{x_k+y_k}{4}=\frac{1}{2}$ dir..

SORU : $a,b,c\in R^+$ ve $a^2+b^2-ab=c^2$ ise $(a-c)(b-c)\le 0$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM : a ≤ b olsun. $\Rightarrow a\le\sqrt{a^2+b(b-a)}=c=\sqrt{b^2-a(b-a)}\le b\Rightarrow$

$(a-c)(b-c)\le 0$ dir.

SORU : ABC üçgeninin kenarları a ,b,c olmak üzre

$a\cos A + b\cos B + c\cos C \le \dfrac{a+b+c}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜM : $a \le b \le c$ olsun.Bu durumda $\cos A \ge \cos B \ge \cos C$ olur.Düzenlenebilir

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C \le a\cos B + b\cos C + c\cos A$$

eşitsizlikler yardımıyla $a\cos A + b\cos B + c\cos C \le a\cos C + b\cos A + c\cos B$ yazabiliriz.

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C \le a\cos A + b\cos B + c\cos C$$

taraf tarafa toplarsak$3\left(a\cos A + b\cos B + c\cos C\right) \le \left(a+b+c\right)\left(\cos A + \cos B + \cos C\right)$

$\Rightarrow a\cos A + b\cos B + c\cos C \le \dfrac{\left(a+b+c\right)\left(\cos A + \cos B + \cos C\right)}{3}$ elde edilir.Herhangi bir ABC üçgeni için $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$ olduğundan

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C \le \frac{\left(a+b+c\right)\left(\cos A + \cos B + \cos C\right)}{3} \le \frac{\left(a+b+c\right)3}{3.2} = \frac{a+b+c}{2}$$

olur.

SORU : $a,b,c > o$ ve $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ise $\dfrac{1}{1+ab} + \dfrac{1}{1+bc} + \dfrac{1}{1+ca} \ge \dfrac{3}{2}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM : AO-GO eşitsizliğinden $a^2 + b^2 \ge 2ab \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{2} \ge ab \Rightarrow 1 + \dfrac{a^2+b^2}{2} \ge 1 + ab$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+ab} \ge \frac{1}{1+\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \ge \frac{1}{1+\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{2}} + \frac{1}{1+\frac{c^2+a^2}{2}}$$

$AO - HO$ eşitsizliğinden $\dfrac{1}{1+\frac{a^2+b^2}{2}} + \dfrac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{2}} + \dfrac{1}{1+\frac{c^2+a^2}{2}} \ge \dfrac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+ab} + \dfrac{1}{1+bc} + \dfrac{1}{1+ca} \ge \dfrac{3}{2}$ dir.

$SORU:$ x,y,z pozitif reel sayılar ve $x^2+y^2+z^2=1$ ise

$x^2yz+xy^2z+xyz^2\le\frac{1}{3}$ olduğunu ispatlayınız.

$ÇÖZÜM:$ AO-GO eşitsizliğinden $\sqrt[3]{xyz}\le\frac{x+y+z}{3}\Leftrightarrow xyz\le\frac{(x+y+z)^3}{27}$

$\Leftrightarrow xyz(x+y+z)\le\frac{(x+y+z)^4}{27}\cdots\cdots(1)$

Karesel orta – Aritmetik orta şitsizliğinden $\frac{x+y+z}{3}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow\frac{(x+y+z)^4}{3\cdot27}\le\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{(x+y+z)^4}{27}\le\frac{1}{3}\cdots\cdots(2)$

$xyz(x+y+z)\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow x^2yz+xy^2z+xyz^2\le\frac{1}{3}$

$SORU:$ Herhangi bir ABC üçgeninde $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le\sin A+\sin B+\sin C$ dir.

$İSPAT:$ $a\le b\le c$ olsun. $\Rightarrow\sin A\le\sin B\le\sin C$ ve $\cos A\ge\cos B\ge\cos C$ dir. $\Rightarrow$
Chbyshev eşitsizliğinden

$$\frac{\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C}{3}\le\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)$$

$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ old. $\le\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)\frac{3}{2}.\frac{1}{3}=\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{6}\right)$

$$\Rightarrow\frac{\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C}{3}=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{6}\le\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{6}$$

$\Rightarrow\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le\sin A+\sin B+\sin C$ dir.

$SORU:$ a,b,c bir üçgenin kenar uzunlukları ise
$abc\ge(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ olduğunu ispatlayınız.

$İSPAT:$ a,b,c bir üçgenin kenar uzunlukları olduğundan $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ olacak şekilde pozitif x,y,z reel sayılarını varlığı üçgen eşitsizliği yardımıyla ispatlanabilir.Bu durumda;

$(y+z)(z+x)(x+y)\ge 8xyz$ olur.

$\Rightarrow(y+z)(z+x)(x+y)-8xyz=x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\ge 0$ old.

$(y+z)(z+x)(x+y)\ge 8xyz\Rightarrow abc\ge(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ dir.

$SORU:$ a,b,c pozitif reel sayılar ve $abc=1$ ise

$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$ olduğunu ispatlayınız.

$İSPAT:$ $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ ve $x,y,z>0$ olsun.Bu durumda eşitsizlik

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\le 1 \Leftrightarrow xyz\ge (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$

olup son eşitsizlik bir önceki problemden dolayı doğru olduğundan ispat tamamlanmış olur.

$SORU:$ a,b,c bir üçgenin kenar uzunlukları ise

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$ olduğunu ispatlayınız.

$İSPAT:$ a,b,c bir üçgenin kenar uzunlukları olduğundan $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ olacak şekilde pozitif x,y,z reel sayılarını varlığı üçgen eşitsizliği yardımıyla ispatlanabilir.Bu durumda ifadeler yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$x^3z+y^3x+z^3y\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2 \Rightarrow \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge x+y+z$ olur.

$\left(\frac{x}{\sqrt{y}},\frac{y}{\sqrt{z}},\frac{z}{\sqrt{x}}\right)$ ve $\left(\sqrt{y},\sqrt{z},\sqrt{x}\right)$ üçlğleri için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)(x+y+z)\ge (x+y+z)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge x+y+z$ olup

ifade doğru olduğundan ispat tamamlanmış olur.

$SORU:$ $0\le a\le b\le c$ ise $(a+3b)(b+4c)(c+2a)\ge 60abc$ olduğunu gösteriniz.

$ÇÖZÜM:$ $(a+3b)(b+4c)(c+2a)=25abc+8a^2c+3b^2c+2a^2b+12c^2b+6b^2a+4c^2a$

olup genelleştirilmiş aritmetik orta-geometrik orta eşitsizliğinden ;

$$\frac{25abc+8a^2c+3b^2c+2a^2b+12c^2b+6b^2a+4c^2a}{25+8+3+2+12+6+4}\ge \sqrt[7]{abca^2cb^2ca^2bc^2bb^2ac^2a}$$

$25abc+8a^2c+3b^2c+2a^2b+12c^2b+6b^2a+4c^2a\ge 60\sqrt[7]{a^7b^7c^7}=60abc \Rightarrow$

$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\ge 60abc$ dir.

SORU : a *ve* b negatif olmayan reel sayıalr ve $a^2 + b^2 = 4$ ise $\dfrac{ab}{a+b+2} \le \sqrt{2}-1$ olduğunu gösteriniz. (AVUSTURYA-1989)

ÇÖZÜM : $a^2 + b^2 = 4$ olduğundan a ve b ikisi birden sıfır olamaz.Birini sıfır kabul edersek eşitsizliğn sağlandığı aşikar.Şimdi a,b>0 olsun. $\dfrac{a+b+2}{ab} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{ab}$ dir. (1)

$a^2 + b^2 \ge 2ab \Rightarrow 4 \ge 2ab \Rightarrow 2 \ge ab$ ve a,b>0 olduğundan $\dfrac{1}{\text{ab}} \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{\text{ab}} \ge 1$ (2)

$2\left(a^2+b^2\right) \ge \left(a+b\right)^2$ olduğundan $8 \ge \left(a+b\right)^2 \Rightarrow 2\sqrt{2} \ge a+b \Rightarrow \dfrac{4}{a+b} \ge \sqrt{2}$ (3)

AO-HO eşitsizliğinden $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$ dir. (4)

1,2,3 ve 4'ten $\dfrac{a+b+2}{ab} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{ab} \ge \dfrac{4}{a+b} + 1 \ge \sqrt{2}+1 \Rightarrow \dfrac{a+b+2}{ab} \ge \sqrt{2}+1$

$\Rightarrow \dfrac{ab}{a+b+2} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$