

TRİGONOMETRİK FORMÜLLER ve ÖZDEŞLİKLER

ÇALIŞMA KAĞIDI (L. Gökçe)

Özellikle bol miktarda formül içerdiği için öğrencilerin çoğunluğu açısından birçok lise matematik konusuna nazaran daha zor olarak kabul gören bir konu olan *trigonometri* konusunu ele alacağız. Bu yazıyı evvela, ‘*trigonometri konusuna çalıştık ve temel formülleri de biliyoruz ama sorularda uygulayamıyoruz*’ diyen öğrenciler için hazırladık. Buna ilave olarak, olimpiyat sorularında trigonometri problemleri direkt olarak pek sorulmasa da tercih ettiğiniz çözüm yoluna göre trigonometrik çözümler oldukça kullanışlı olabilmektedir. Bu yönüyle olimpiyata girişte temel bilgilerinizi kontrol etmek için de bu çalışma kağıdından faydalanabilirsiniz. Birbiri ile ilişkili ya da benzer yöntemle çözülebilen problemler peş peşe sıralanıp aynı renkle boyanmıştır. Toplam – fark, yarım açı, dönüşüm – ters dönüşüm formüllerini burada tekrar yazmayacağız. Bunları hatırlatma kağıtlarınızda zaten not etmiş olmalısınız, kopya çekmek serbesttir. Kolay gelsin ...

Problem 1: Aşağıdaki ifadelerin değerlerini hesaplayınız:

- a) $\tan 22,5^\circ$ b) $\tan 67,5^\circ$ c) $\tan 15^\circ$ d) $\tan 75^\circ$

Problem 2: Aşağıdaki çarpımların değerlerini hesaplayınız:

- a) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$ b) $\sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ$

Problem 3: Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz:

- a) $1 - 2 \sin^2 22,5^\circ$ b) $2 \cos^2 75^\circ - 1$ c) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

Problem 4: $\cos x = \frac{1}{3}$ ise aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz:

- a) $\cos 2x$ b) $\cos 4x$ c) $\sin 4x$

Problem 5: Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz:

- a) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ b) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$

Problem 6: $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$ çarpımının değeri kaçtır?

Problem 7: $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$ çarpımının değeri kaçtır?

Problem 8: $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ$ farkının değeri kaçtır?

Problem 9: $\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 96^\circ$ çarpımının değeri kaçtır?

Problem 10: $\cos \frac{\pi}{17} \cdot \cos \frac{2\pi}{17} \cdot \cos \frac{4\pi}{17} \cdot \cos \frac{8\pi}{17}$ çarpımının değeri kaçtır?

Problem 11: $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7}$ çarpımının değeri kaçtır?

Problem 12: Aşağıdaki özdeşlikleri ispatlayınız:

a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Problem 13: Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız:

a) $3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$ b) $3\sin 80^\circ - 4\sin^3 80^\circ$

c) $4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$ d) $4\cos^3 50^\circ - 3\cos 50^\circ$

Problem 14: a, b birer tamsayı olmak üzere $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{a}}{b}$ ise $a+b$ en az kaçtır?

Problem 15: a bir tamsayı ve $\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 80^\circ = \sqrt{a}$ ise a kaçtır?

Problem 16: $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 120^\circ + \cos 160^\circ$ toplamının sonucu kaçtır?

Problem 17: $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ toplamının sonucu kaçtır?

Problem 18: $\frac{\sin 12^\circ + \sin 24^\circ + \sin 36^\circ + \sin 48^\circ + \sin 60^\circ}{(3/2) + \cos 12^\circ + \cos 24^\circ + \cos 36^\circ + \cos 48^\circ}$ işleminin sonucu kaçtır?

Problem 19: Dar açılı ABC üçgeninde A dan BC doğrusuna indirilen dikme ayağı H , $|AH| = 6$, $|BH| = 3$, $|CH| = 2$ ise $m(BAC)$ kaç derecedir?

Problem 20: B açısı geniş olan ABC üçgeninde A dan BC doğrusuna indirilen dikme ayağı H olmak üzere $|AH| : |BH| : |BC| = 3 : 1 : 5$ orantısı olduğuna göre $m(BAC)$ kaç derecedir?

Problem 21: $x > 0$ olmak üzere aşağıda verilen ifadelerin x türünden eşiti nedir?

a) $\sin(\arctan x)$ b) $\cos(\arcsin x)$

Problem 22: $\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{3}$ kaç derecedir?

Problem 23: $2\arctan \frac{2}{3} + \arctan \frac{5}{12}$ kaç derecedir?

Problem 24: $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$ kaç derecedir? (*John Machin*)

Problem 25: Reel katsayılı $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ polinomunun kökleri x_1, x_2, x_3 birer reel sayıdır. $P(1) = 2d + 2$ ise $\arctan x_1 + \arctan x_2 + \arctan x_3$ toplamı kaç derecedir? (*L. Gökçe*)

Problem 26: Bir üçgenin iç açıları x, y, z ise $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4 \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ olduğunu ispatlayınız.

Problem 27: Bir üçgenin iç açıları x, y, z ise aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

a) $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z$ **b)** $\cot x \cdot \cot y + \cot y \cdot \cot z + \cot z \cdot \cot x = 1$

Problem 28: $f(x) = \frac{(\cos \alpha)x - \sin \alpha}{(\sin \alpha)x + \cos \alpha}$ ve $g(x) = \frac{(\cos \beta)x - \sin \beta}{(\cos \beta)x + \sin \beta}$ fonksiyonları veriliyor.

Aşağıdaki bileşke işlemi özelliklerinin sağlandığını ispatlayınız:

a) $f(g(x)) = g(f(x))$ **b)** $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$

PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

1)

a) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ formülünde $x = 22,5^\circ$ yazalım. $\tan 45^\circ = \frac{2 \tan 22,5^\circ}{1 - \tan^2 22,5^\circ}$ olup

$\tan 22,5^\circ = a$ diyelim. $a^2 + 2a - 1 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin pozitif kökü $a = \sqrt{2} - 1$ olduğundan $\tan 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$ elde edilir.

b) $\tan 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$ olduğundan $\tan 67,5^\circ = \frac{1}{\tan 22,5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$ bulunur.

c) $\tan 30^\circ = \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$ eşitliğinde $\tan 15^\circ = a$ diyelim. $a^2 + 2\sqrt{3}a - 1 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin pozitif kökü $a = 2 - \sqrt{3}$ olduğundan $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ bulunur.

d) $\tan 75^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ olur.

2) $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ özdeşliğini kullanacağız:

a) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{(2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ)}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{1}{4}$

b) $\sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ = \frac{(2 \sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ)}{2} = \frac{\sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

3) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ özdeşliklerini kullanacağız:

a) $1 - 2 \sin^2 22,5^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $2 \cos^2 75^\circ - 1 = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4)

a) $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ özdeşliğinde $\cos x = \frac{1}{3}$ yazılırsa $\cos 2x = 2 \cdot \frac{1}{3^2} - 1 = -\frac{7}{9}$ bulunur.

b) $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$ özdeşliğinde $\cos 2x = -\frac{7}{9}$ yazılırsa $\cos 4x = 2 \cdot \frac{7^2}{9^2} - 1 = \frac{17}{81}$ olur.

c) $\cos^2 4x + \sin^2 4x = 1$ özdeşliğinde $\cos 4x = \frac{17}{81}$ yazılırsa $\sin 4x = \pm \frac{56\sqrt{2}}{81}$ bulunur.

5) $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ formülünü kullanacağız.

$$a) \cos 75^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right) = 2 \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$b) \cos 105^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos\left(\frac{105^\circ + 15^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{105^\circ - 15^\circ}{2}\right) = 2 \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6) $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$ formülünü kullanarak çözüm bulmayı deneyelim.

$$\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{2}(\cos(72^\circ - 36^\circ) + \cos(72^\circ + 36^\circ)) = \frac{1}{2}(\cos 36^\circ + \cos 108^\circ) \text{ olur. } \cos 36^\circ$$

ve $\cos 108^\circ$ değerlerini iyi bilen tecrübeli okuyucular için çözümün geri kalanı kolaydır. Fakat biz bu değerleri bilmeyenler için başka bir çözüm yolu arayalım. 72 sayısının, 36'nın iki katı olduğuna dikkat edersek değişik bir çözüm yoluna girişebiliriz. Verilen ifadeyi $2 \sin 36^\circ$ ile çarpıp bölelim:

$$\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{2 \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 36^\circ}$$

olur. Bu aşamada $\sin 144^\circ = \sin 36^\circ$ olduğu kullanılırsa $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$ elde edilir.

7) İki çözüm verelim:

Çözüm 1: Akla ilk gelen yol $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$ formülünden fayda-

lanmaktır. Bunu deneyelim: $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{4}$ olduğun-

dan $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{4}\right) \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cos 80^\circ$ dir.

Ayrıca $\cos 20^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 100^\circ) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 80^\circ$ dir. Buna göre

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 80^\circ \right) + \frac{1}{4} \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \text{ sonucuna ulaşılır.}$$

Çözüm 2: 20, 40, 80 sayılarının 2 ile çarpılarak artan bir dizi oluşturduğuna dikkat edersek verilen ifadeyi $2\sin 20^\circ$ çarpıp bölerek başlayabiliriz.

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ &= \frac{2\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} \\ &= \frac{\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}\end{aligned}$$

olur. $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ$ olduğundan $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$ elde edilir.

8) $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ formülünü uygulayalım.

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = -2\sin(-18^\circ) \cdot \sin 54^\circ = 2\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$$

olur. Problem 6 da $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$ olduğundan $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$ elde edilir.

9) 12, 24, 48, 96 sayılarının 2 ile çarpılarak artan bir dizi oluşturduğuna dikkat edersek verilen ifadeyi $2\sin 12^\circ$ ile çarpıp bölelim:

$$\begin{aligned}\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 96^\circ &= \frac{2\sin 12^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 96^\circ}{2\sin 12^\circ} \\ &= \frac{\sin 24^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 96^\circ}{2\sin 12^\circ} = \frac{\sin 48^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 96^\circ}{4\sin 12^\circ} = \frac{\sin 96^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 96^\circ}{8\sin 12^\circ} \\ &= \frac{\sin 192^\circ}{16\sin 12^\circ} \text{ olur. } \sin 192^\circ = -\sin 12^\circ \text{ olduğundan } \cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 96^\circ = -\frac{1}{16} \text{ dır.}\end{aligned}$$

10) Verilen ifadeyi $2\sin \frac{\pi}{17}$ ile çarpıp bölelim.

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{17} \cdot \cos \frac{2\pi}{17} \cdot \cos \frac{4\pi}{17} \cdot \cos \frac{8\pi}{17} &= \frac{2\sin \frac{\pi}{17} \cdot \cos \frac{\pi}{17} \cdot \cos \frac{2\pi}{17} \cdot \cos \frac{4\pi}{17} \cdot \cos \frac{8\pi}{17}}{2\sin \frac{\pi}{17}} \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{17} \cdot \cos \frac{2\pi}{17} \cdot \cos \frac{4\pi}{17} \cdot \cos \frac{8\pi}{17}}{2\sin \frac{\pi}{17}} = \frac{\sin \frac{4\pi}{17} \cdot \cos \frac{4\pi}{17} \cdot \cos \frac{8\pi}{17}}{4\sin \frac{\pi}{17}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{17} \cdot \cos \frac{8\pi}{17}}{8\sin \frac{\pi}{17}} = \frac{\sin \frac{16\pi}{17}}{16\sin \frac{\pi}{17}}\end{aligned}$$

olur. $\sin \frac{16\pi}{17} = \sin \frac{\pi}{17}$ olduğundan $\cos \frac{\pi}{17} \cdot \cos \frac{2\pi}{17} \cdot \cos \frac{4\pi}{17} \cdot \cos \frac{8\pi}{17} = \frac{1}{16}$ bulunur.

$$\begin{aligned}
 11) \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \\
 &= \frac{\sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{4 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} \text{ olur. } \sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7} \text{ olduğundan } \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

12) $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ ve $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ özdeşliklerini kullanalım.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = 2 \sin x \cdot \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \cdot \sin x \\
 &= 2 \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \cdot \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \text{ elde edilir.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x \\
 &= (2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

13)

$$\text{a)} \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \text{ özdeşliğinde } x = 10^\circ \text{ için } 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{b)} \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \text{ özdeşliğinde } x = 80^\circ \text{ için } 3 \sin 80^\circ - 4 \sin^3 80^\circ = \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{c)} \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \text{ özdeşliğinde } x = 20^\circ \text{ için } 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{d)} \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \text{ özdeşliğinde } x = 50^\circ \text{ için } 4 \cos^3 50^\circ - 3 \cos 50^\circ = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

14) $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ve $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ özdeşliklerine sahibiz.

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{1}{2} (\cos(40^\circ - 20^\circ) - \cos(40^\circ + 20^\circ)) \cdot \sin 80^\circ$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \cos 10^\circ = \frac{1}{4} (2 \cos 20^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 10^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} (2(2 \cos^2 10^\circ - 1) \cdot \cos 10^\circ - \cos 10^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} (4 \cos^3 10^\circ - 3 \cos 10^\circ) = \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

15) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ve $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$ eşitliklerini ispatlamıştık.

Buna göre $\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 80^\circ = \frac{\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ} = \frac{(\sqrt{3}/8)}{(1/8)} = \sqrt{3}$ olup $\sqrt{a} = \sqrt{3}$ eşitliğinden $a = 3$ bulunur.

16) $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 120^\circ + \cos 160^\circ$ toplamında $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ olduğunu bildiğimiz için $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ$ toplamıyla ilgilenelim.

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ = 2 \cos \left(\frac{80^\circ + 40^\circ}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{80^\circ - 40^\circ}{2} \right) = 2 \cos 60^\circ \cdot \cos 20^\circ = \cos 20^\circ \text{ ve}$$

$\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$ dir. $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 120^\circ + \cos 160^\circ = \cos 20^\circ - \frac{1}{2} - \cos 20^\circ = -\frac{1}{2}$ şeklinde hesaplanır.

17) Çözümünüzde Problem 11 de ispatladığımız $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$ eşitliğini kullanacağız.

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} = 2 \cos \left(\frac{\frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{7}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\frac{4\pi}{7} - \frac{2\pi}{7}}{2} \right) = 2 \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \text{ olduğundan}$$

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = 2 \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} + 2 \cos^2 \frac{3\pi}{7} - 1$$

$$= 2 \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right) - 1$$

$$= 2 \cos \frac{3\pi}{7} \cdot 2 \cos \left(\frac{\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{7}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\frac{3\pi}{7} - \frac{\pi}{7}}{2} \right) - 1$$

$$= 4 \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} - 1 = 4 \cdot \frac{1}{8} - 1 = -\frac{1}{2} \text{ elde edilir.}$$

NOT: Karmaşık sayılar konusunu iyi bilen okuyucular $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ eşitliğini göstermek için $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ denkleminin kökler toplamından faydalanarak estetik bir çözüm yapabilirler.

18) $\cos 0^\circ + \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$ ve $\sin 0^\circ = 0$ olduğunu kullanırsak bizden bulmamız istenen ifade

$$\frac{\sin 0^\circ + \sin 12^\circ + \sin 24^\circ + \sin 36^\circ + \sin 48^\circ + \sin 60^\circ}{\cos 0^\circ + \cos 12^\circ + \cos 24^\circ + \cos 36^\circ + \cos 48^\circ + \cos 60^\circ}$$

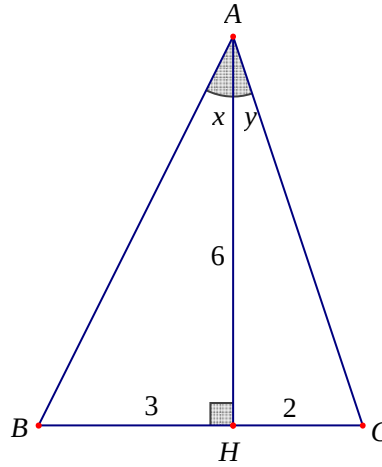
şeklinde yazılabilir. 0, 12, 24, 36, 48, 60 sayıları aritmetik dizi oluşturmaktadır. Bu dizinin ortalaması $\frac{0+12+24+36+48+60}{6} = 30$ olduğundan

$$\frac{\sin 0^\circ + \sin 12^\circ + \sin 24^\circ + \sin 36^\circ + \sin 48^\circ + \sin 60^\circ}{\cos 0^\circ + \cos 12^\circ + \cos 24^\circ + \cos 36^\circ + \cos 48^\circ + \cos 60^\circ} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

19) $m(\angle BAH) = x$, $m(\angle CAH) = y$ olsun. Biz $m(\angle BAC) = x + y$ değerini hesaplamalıyız.

$$\tan x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \tan y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ dir. } \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \text{ formülüne göre}$$

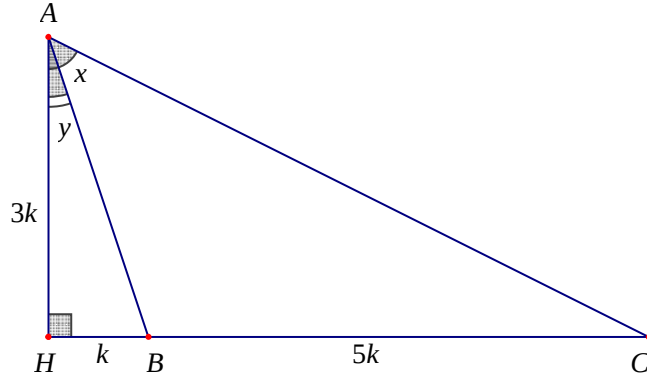
$$\tan(x + y) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \text{ olup } \tan(x + y) = 1 \text{ dir. Dolayısıyla } x + y = 45^\circ \text{ dir.}$$



20) $m(\angle HAC) = x$, $m(\angle HAB) = y$ olsun. Biz $m(\angle BAC) = x - y$ değerini bulmalıyız.

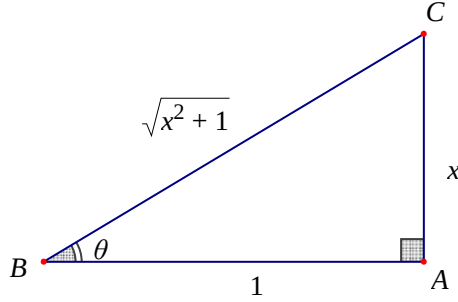
$$\tan x = \frac{6k}{3k} = 2, \tan y = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3} \text{ tür. } \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \text{ formülüne göre}$$

$$\tan(x - y) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} \text{ olup } \tan(x - y) = 1 \text{ bulunur. Buradan } m(\angle BAC) = x - y = 45^\circ \text{ elde edilir.}$$



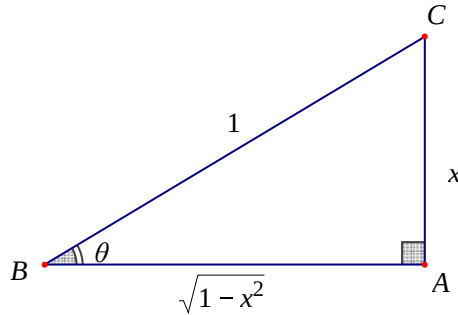
21)

a) $\arctan x = \theta$ olsun. $x > 0$ verildiğinden $0^\circ < \theta < 90^\circ$ dir. Biz $\sin \theta$ ifadesinin x türünden eşitini bulmalıyız. $\arctan x = \theta \Rightarrow \tan \theta = x$ dir. Aşağıdaki ABC dik üçgenini çizelim.



$|BC| = \sqrt{x^2 + 1}$ olduğundan $\sin \theta = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ elde edilir.

b) $\arcsin x = \theta$ olsun. Bu durumda $\cos \theta$ ifadesinin x türünden eşitini bulmalıyız. $\arcsin x = \theta \Rightarrow \sin \theta = x$ olur. Aşağıdaki ABC dik üçgenini çizelim.



$|AB| = \sqrt{1 - x^2}$ olduğundan $\cos \theta = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}$ bulunur.

22) $\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{3}$ ifadesini hesaplarken $\arctan \sqrt{3} = 60^\circ$ olduğunu bildiğimiz

için biz $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$ toplamını inceleyelim. $\arctan \frac{1}{2} = \alpha$, $\arctan \frac{1}{3} = \beta$ dersek $\alpha + \beta$

toplamını bulmalıyız. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$ olur. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ formülünü kul-

lanırsak $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}$ olup $\tan(\alpha + \beta) = 1$ dir. Dolayısıyla $\alpha + \beta = 45^\circ$ dir. Böylece

$60^\circ - (\alpha + \beta) = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ olarak bulunur.

23) $\arctan \frac{2}{3} = \alpha$ ve $\arctan \frac{5}{12} = \beta$ olsun. $2\alpha + \beta$ değerini bulalım. $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ for-

mülüne göre $\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot (2/3)}{1 - (2/3)^2}$ olup $\tan 2\alpha = \frac{12}{5}$ dir. $\tan(2\alpha + \beta) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \beta}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \beta}$ for-

mülünü uygulayalım: $\tan(2\alpha + \beta) = \frac{\frac{12}{5} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{12}}$ ve $\tan(2\alpha + \beta) = \infty$ olup $2\alpha + \beta = 90^\circ$ dir.

24) $\arctan \frac{1}{5} = \alpha$, $\arctan \frac{1}{239} = \beta$ olsun. $4\alpha - \beta$ değerini bulalım. $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ formü-

lünden $\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot (1/5)}{1 - (1/5)^2}$ olup $\tan 2\alpha = \frac{5}{12}$ dir. $\tan 4\alpha = \frac{2 \cdot (5/12)}{1 - (5/12)^2}$ ve $\tan 4\alpha = \frac{120}{119}$ dir.

$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{\tan 4\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 4\alpha \cdot \tan \beta}$ formülünden $\tan(4\alpha - \beta) = \frac{(120/119) - (1/239)}{1 + (120/119) \cdot (1/239)}$ olup

$\tan(4\alpha - \beta) = 1$ elde edilir. Buradan $4\alpha - \beta = 45^\circ$ bulunur.

25) $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ polinomu için $P(1) = 1 + b + c + d = 2d + 2$ olduğundan $c - 1 = d - b$ eşitliği elde edilir. $x_k = \tan \theta_k$ ($k = 1, 2, 3$) olsun. Bu halde $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ toplamını bulmalıyız.

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{1 - (x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1)}$$

formülünden faydalanalım. $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denklemi için Vieta formüllerini yazarsak

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b, \quad x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = c, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -d$$

olur. Buna göre $\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{-b+d}{1-c}$ dir. $c - 1 = d - b$ olup $\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = -1$ elde

edilir. Dolayısıyla $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 135^\circ + 180^\circ \cdot n$ dir ($n \in \mathbb{Z}$).

26) $x + y + z = 180^\circ$ olduğundan $2x + 2y + 2z = 360^\circ$ dir. Dolayısıyla $\sin 2z = -\sin(2x + 2y)$ dir.

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = \sin 2x + \sin 2y - \sin(2x + 2y)$$

$$= \sin 2x + \sin 2y - \sin 2x \cdot \cos 2y - \cos 2x \cdot \sin 2y$$

$$= \sin 2x(1 - \cos 2y) + \sin 2y(1 - \cos 2x)$$

$$= \sin 2x(1 + 2\sin^2 y - 1) + \sin 2y(1 + 2\sin^2 x - 1)$$

$$= 4\sin x \cdot \cos x \cdot \sin^2 y + 4\sin y \cdot \cos y \cdot \sin^2 x$$

$$= 4\sin x \cdot \sin y \cdot (\sin y \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos y)$$

$$= 4\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$$

$$= 4\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$$