Hong Kong Ulusal Matematik Olimpiyatı
2009
Sorular

sbelianwordpress@gmail.com

Ülkemizde Tübitak Bilim Adamı Yetiştirme Grubunun yaptığı lise ve ilköğretim matematik olimpiyatları sınavının muadili diyebileceğimiz Hong Kong Matematik Olimpiyatları Birinci Basamak Sınavı, her yıl ülkede öğrenim gören ilköğretim ve lise öğrencilerine uygulanmaktadır. Sorular çoktan seçmeli değildir ve her sorunun çözümü ayrıntılı olarak istenir. Soruların her biride aynı puana sahip değildirler. Son soruların puanları iki, üç kat daha yüksektir. Şu an elinizdeki kitapçıkta sadece sorular bulunmaktadır. Önce soruları resmi vakit olan 3 saat içerisinde çözmeye çalışmanızı daha sonrada yine sitemizden indireceğiniz çözümleri incelemenizi tavsiye ederiz.

Kolay gelsin.

Soru 1.

$$\frac{1^4 + 2009^4 + 2010^4}{1^2 + 2009^2 + 2010^2}$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

Soru 2. Bir $ABCDE$ beşgeninde, $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$ olmak üzere $s(\widehat{B}) = 96^\circ$ ve $s(\widehat{C}) = s(\widehat{D}) = 108^\circ$ olarak verildiğine göre, $s(\widehat{E}) =$?

Soru 3. Bir büyükbaba çocukları Davut, Halil ve Can'a şekerleri %70, %25 ve %5 olarak sıralı biçimde dağıtıyor. Dağıtımdan sonra Davut Can'a 20 şeker daha veriyor ve daha sonra Halil ve Can ellerindeki şekerleri eşit bir şekilde paylaşıyorlar. Bundan sonra Davut'un elindeki şeker sayısı artık Halil'in elindekinin 3 katı oluyor. Bir sonraki gün herbirine x miktarda yeniden şeker veriyor ve Davut'un şeker sayısı Halil'in şeker sayısının iki katı olduğuna göre, x kaçtır?

Soru 4. $n > 1$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $9997 \cdot n$ sayısının tüm basamakları birer tek sayı ise, n'nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Soru 5. $\{x_n\}$ pozitif sayılar üzerinde tanımlı bir dizi olmak üzere veriliyor. $x_1 = \frac{3}{2}$ ve

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{n^2}$$

ise $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2009}$ toplamını bulunuz.

Soru 6. Bir ABC üçgeninde $|AB| = |AC| = 13$ ve $|BC| = 10$ olmak üzere, $|BC|$ kenarı üzerinden $|PB| < |PC|$ olacak biçimde bir P noktası alınıyor. H ve K noktaları sırasıyla APB ve APC üçgenlerinin ortasantr (Ortasantr: Bir üçgende köşelerden indirilen dikmelerin kesişim noktası.) noktaları ve $|HK| = 2$ ise $|PC|$ uzunluğunu bulunuz.

Soru 7. Kenar uzunluğu 4 birim olan bir ABC üçgeninin BC kenarı üzerinden alınan D noktası için $|BD| = 1$ olarak veriliyor. r ve s uzunlukları sırasıyla ADB ve ADC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezi olduğuna göre, r ve s uzunluklarını bulunuz.

Soru 8. Kenar uzunluğu 1 birim olan $ABCD$ karesinin $|BC|$ ve $|CD|$ kenarları üzerinden sırasıyla $|CX| = |CY| = m$ olacak şekilde X ve Y noktaları alınıyor. Daha sonra AB doğrususu uzatılarak DX doğrusuyla P noktasında, AX dorusu uzatılarak DC doğrusuyla R noktasında, AY doğrusu uzatılarak BC doğrusuyla S noktasında ve son olarak BY doğrusu uzatılarak AD doğrusu ile Q noktasında ökesişmektedir. P, Q, R ve S noktaları doğrusal olduğuna göre, m uzunluğunu bulunuz.

Soru 9. $f(n)$ fonksiyonu, $n!$ sayısını bölen 2'nin en büyük kuvvetini göstermektedir. Mesela $f(10) = 8$ dir çünkü 10! sayısının içindeki 2 çarpanının en büyük kuvveti 8 dir. Buna göre,

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(1023)$$

toplamının eşiti kaçtır?

Soru 10. Dört matematikçi, iki fizikçi, bir kimyager ve bir biyolog bir tenis turnuvasına katılıyorlar. Bu sekiz tenisçi dört gruba ayrılıp eleme usulü maçlar yapıyorlar. Buna göre, iki matematikçinin tekrar maç yapmama olasılığı kaçtır?

Soru 11.

$$\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{2\cdot 2^2}+\tan^{-1}\frac{1}{2\cdot 3^2}+\cdots+\tan^{-1}\frac{1}{2\cdot 2009^2}\right)$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

Soru 12. $n\times n$ boyutlarında ki bir satranç tahtasında 2009 tane bozuk para yerleştiriliyor. Birbiriyle komşu (karelerin bir kenarı ortaktır) her hangi iki kare içerisindeki bozuk para sayısının farkı 1 olduğuna göre (karelerden bazılarında hiç bozuk para olmayabilir), n değerinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Soru 13. Bir $ABCD$ yamuğunda $AB \parallel DC$ ve $AB > DC$ olarak veriliyor. E noktası AB üzerinde olmak üzere $AE = DC$ dir. AC doğrusu DE ve DB doğrularıyla sırasıyla F ve G noktalarında kesiştiğine göre,

$$\frac{A\,(DFG)}{A\,(ABCD)}$$

oranını en büyük olması için

$$\frac{AB}{CD}$$

kaç olmalıdır?

Soru 14. Bir sınavda, sınava girenlerin hiçbirisi aynı puanı alamamıştır. Her birinin puanı birbirinden farklıdır ve puanları $n+2-2k$ formülüyle hesaplanmıştır. n bir sabit sayı ve k ise sıra numarasıdır. Eğer sınava katılan tümünün puanları toplamı 2009 ise, n sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Soru 15. $[\![x]\!]$ ifadesi $x$sayısından küçük en büyük tamsayı değerini göstermektedir. Buna göre $\left[\!\!\left[\sqrt{2009^2+1}+\sqrt{2009^2+2}+\cdots+\sqrt{2009^2+4018}\right]\!\!\right]$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Soru 16. $f(n)$ fonksiyonu $4x+3y+2z=n$ denkleminin tamsayı çözümlerinin tamsayı çözümlerini verdiğine göre, $f(2009)-f(2000)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Soru 17. 6 farklı renkte boya kullanılarak bir küp boyanmak isteniyor. Ancak, bu kübün herhangi komşu iki yüzeyi aynı renkte olmayacaksa, bu boyama işlemi kaç farklı şekilde yapılabilir?

Soru 18. Bir ABC ikizkenar dik üçgeninde, $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ olarak veriliyor. Hipotenüs üzerinden alınacak bir P noktası için Q ve R noktaları sırasıyla APB ve APC üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezlerini temsil etmektedir. $|BP| = \sqrt{2}$ ve $|QR| = 2$ ise $|PC|$ uzunluğunu bulunuz.

Soru 19. x, y, z, w birbirinden farklı reel sayılar ve t pozitif bir reel sayı olarak veriliyor. Buna göre,

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{w}=w+\frac{1}{x}=t$$

eşitliğini sağlayan t değerini bulunuz.

Soru 20. a, b, c, d pozitif tamsayılarının herhangi üç tanesinin EKOK'u, $3^3\times 7^5$ olarak veriliyor. Buna göre, bu durumu sağlayan kaç farklı (a, b, c, d) dörtlüsü elde edilebilir?