Soru çözümlerinde ya da konu açıklayan kısımlarda gördüğünüz hatalar ya da şöyle olsaydı daha iyi olurdu diye olumlu olumsuz her türlü eleştirinizi emreorhan44@gmail.com adresinden bana iletebilirsiniz.

TELESKOBİK TOPLAMLARLA İLGİ SORU ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: EMRE ORHAN (e44)

SORU 1: $1.1!+2.2!+3.3!+\dots+n.n!=?$

Çözüm: $n.n! = (n+1-1).n! = (n+1).n! - 1.n!$

$$= (n+1)! - n!$$

$$1.1! = \cancel{2!} - 1!$$

$$2.2! = \cancel{3!} - \cancel{2!}$$

$$3.3! = \cancel{4!} - \cancel{3!}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+\ n.n! = (n+1)! - \cancel{n!}$$

$$\boxed{1.1!+2.2!+\dots+n.n! = (n+1)!-1}$$

Örnek soru: $1.1!+2.2!+\dots+99.99!$ toplamının sonunda kaç tane 9 rakamı vardır?

Çözüm: Okuyucuya bırakılmıştır. Cevap $=24$

Soru 2: $\sum_{k=1}^{999} k!(k^2+k+1) = ?$

Çözüm: $k!.(k^2+k+1) = k!.(k^2+k+1+k-k)$

k terimini ekleyip çıkardık.

$= k!.(k^2+2k+1-k) = k!((k+1)^2-k)$

$= k!.(k+1)^2 - k!.k$

$= \underbrace{k!.(k+1)}.(k+1) - k!.k$

$= (k+1)!.(k+1) - k!.k$

k=1 için $\quad 2!.2 - 1!.1$

k=2 için $\quad 3!.3 - 2!.2$

k=3 için $\quad 4!.4 - 3!.3$

$\vdots$

k=999 için $\quad 1000!.1000 - 999!.999$

+

$1000!.1000 - 1!.1 = \boxed{1000!.1000 - 1}$

SORU 3: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot k! + \frac{k}{(k+1)!}\right) = ?$

ÇÖZÜM: $\displaystyle\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!}_{(n+1)!-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

1. soruda gösterdik.

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{\cancel{k+1}}{\cancel{(k+1)}\cdot k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$= \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$k=1$ için $\quad \dfrac{1}{1!} - \cancel{\dfrac{1}{2!}}$

$k=2$ için $\quad \cancel{\dfrac{1}{2!}} - \cancel{\dfrac{1}{3!}}$

$k=3$ için $\quad \cancel{\dfrac{1}{3!}} - \cancel{\dfrac{1}{4!}}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$

$k=n$ için $\quad \cancel{\dfrac{1}{n!}} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

$+$

$$1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Cevabımız

$$(n+1)! - 1 + 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\boxed{(n+1)! - \frac{1}{(n+1)!}}$$

Soru 4: $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+\dots+\dfrac{1}{98.99.100}=?$

Çözüm: $\dfrac{1}{k.(k+1).(k+2)}=\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)}$

Buradan;

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{k(k+1)(k+2)}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$k=1$ için $\quad \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1.2}-\cancel{\dfrac{1}{2.3}}\right]$

$k=2$ için $\quad \dfrac{1}{2}\left[\cancel{\dfrac{1}{2.3}}-\cancel{\dfrac{1}{3.4}}\right]$

$k=3$ için $\quad \dfrac{1}{2}\left[\cancel{\dfrac{1}{3.4}}-\cancel{\dfrac{1}{4.5}}\right]$

$\vdots$

$k=98$ için $\quad \dfrac{1}{2}\left[\cancel{\dfrac{1}{98.99}}-\dfrac{1}{99.100}\right]$

$+$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{99.100}\right]=\frac{4949}{19800}$$

SORU5: $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\ldots+\frac{1}{96.97.98.99}=?$

Çözüm:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

Buradan,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right)$$

$k=1$ için: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\cancel{\frac{1}{2.3.4}}\right)$

$k=2$ için $\frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{2.3.4}}-\cancel{\frac{1}{3.4.5}}\right)$

$k=3$ için $\frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{3.4.5}}-\cancel{\frac{1}{4.5.6}}\right)$

$\vdots$

$k=96$ için $\frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{96.97.98}}-\frac{1}{97.98.99}\right)$

$+$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{97.98.99}\right)$$

SORU 6:

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\dots+\frac{1907!}{1905!+1906!+1907!}$$

Çözüm:

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{k+2}{k!+(k+1).k!+(k+2)(k+1).k!}$$

$$=\frac{k+2}{k!\,(1+(k+1)+(k+1).(k+2))}$$

ufak bir hile yapalım

$$=\frac{\cancel{k+2}}{k!.(\cancel{k+2}).(k+2)}=\frac{1}{k!.(k+2)}$$

bir hile daha

$$\frac{1}{k!.(k+2)}=\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{k+2-1}{(k+2)!}=\frac{k+2}{(k+2)!}-\frac{1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{\cancel{(k+2)}}{\cancel{(k+2)}(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$$

$k=1$ için $\frac{1}{2!}-\cancel{\frac{1}{3!}}$

$k=2$ için $\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}$

$k=3$ için $\cancel{\frac{1}{4!}}-\cancel{\frac{1}{5!}}$

$\vdots$

$k=1905$ için $\cancel{\frac{1}{1906!}}-\frac{1}{1907!}$

$+$

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{1907!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1907!}$$

SORU 7: $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+\dots+\frac{1}{97.99}+\frac{1}{98.100}=?$

ÇÖZÜM: $A=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\dots+\frac{1}{97.99}$ olsun.

$B=\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\dots+\frac{1}{98.100}$ olsun.

Bizden istenen $A+B$ toplamıdır.

$$\frac{1}{k.(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$k=1$ için $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$k=3$ için $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

$k=5$ için $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

$\vdots$

$k=97$ için $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)$

$+$

$\underbrace{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{99}\right)}_{A}$

$k=2$ için $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$k=4$ için $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$

$k=6$ için $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)$

$\vdots$

$k=98$ için $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)$

$+$

$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{100}\right)}_{B}$

$$A+B=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{99}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

SORU8: $\frac{1}{3.4.5}+\frac{2}{4.5.6}+\frac{3}{5.6.7}+\dots+\frac{95}{97.98.99}=?$

Çözüm;
$$\frac{k}{(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{k}{(k+2)(k+3)}-\frac{k}{(k+3)(k+4)}=\frac{1}{2}.\frac{2k}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

Buradan,
$$\frac{k}{(k+2).(k+3).(k+4)}=\frac{1}{2}.\left(\frac{2k}{(k+2).(k+3).(k+4)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}.k\left(\frac{1}{(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+3)(k+4)}\right)$$

$k=1$ için, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)$

$k=2$ için, $\frac{1}{2}.2\left(\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}\right)$

$k=3$ için $\frac{1}{2}.3\left(\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}\right)$

$\vdots$

$k=95$ için $\frac{1}{2}.95\left(\frac{1}{97.98}-\frac{1}{98.99}\right)$

+

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{3.4}+\frac{1}{2.4.5}(2-1)+\frac{1}{2.5.6}(3-2)+\dots+\frac{1}{2.97.98}(95-94)-\frac{1}{2}\frac{95}{98.99}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\dots+\frac{1}{97.98}\right)-\frac{1}{2}.\frac{95}{98.99}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cancel{-\frac{1}{4}}\cancel{+\frac{1}{4}}\cancel{-\frac{1}{5}}\cancel{+\frac{1}{5}}\cancel{-\frac{1}{6}}+\dots+\cancel{\frac{1}{97}}-\frac{1}{98}\right)-\frac{1}{2}.\frac{95}{98.99}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{98}\right)-\frac{1}{2}.\frac{95}{98.99}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{98}-\frac{95}{98.99}\right)$$

SORU: $(1!.3 - 2!.4 + 3!.5 - 4!.6 - \ldots - 100!.102!) + 101! = ?$

ÇÖZÜM: $1!.3 + 3!.5 + \ldots + 97!.99 = A$ olsun
$2!.4 + 4!.6 + \ldots + 100!.102 = B$ olsun.

parantezin içindeki ifadenin $A - B$ olduğu belli:

$$k!.(k+2) = k!.(k+1+1) = k!(k+1) + k! = (k+1)! + k!$$

$k = 1$ için, $1!.3 = 2! + 1!$
$k = 3$ için, $3!.5 = 4! + 3!$
$k = 5$ için, $5!.7 = 6! + 5!$
$\vdots$
$k = 97$ için $97!.99 = 98! + 97!$

$+$ taraf tarafa toplarsak, $\boxed{1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 97! + 98!} \rightarrow A$

$k = 2$ için, $2!.4 = 3! + 2!$
$k = 4$ için, $4!.6 = 5! + 4!$
$k = 6$ için, $6!.8 = 7! + 6!$
$\vdots$
$k = 100$ için, $100!.102 = 101! + 100!$

$+$ taraf tarafa toplarsak, $\boxed{2! + 3! + 4! + \ldots + 100! + 101!}$ B

$A - B = 1! - 99! - 100! - 101!$

Cevabımız, $1! - 99! - 100! - \cancel{101!} + \cancel{101!}$

$\boxed{1 - 99! - 100!}$

Soru 10:

$$\frac{2^2+3.2+1}{3!.4!}+\frac{3^2+3.3+1}{4!.5!}+\frac{4^2+3.4+1}{5!.6!}+\dots+\frac{10^2+3.10+1}{11!.12!}=?$$

Çözüm:

ufak bir hile

$$\frac{k^2+3k+1}{(k+1)!.(k+2)!}=\frac{k^2+3k+2-1}{(k+1)!.(k+2)!}=\frac{k^2+3k+2}{(k+1)!.(k+2)!}-\frac{1}{(k+1)!.(k+2)!}$$

$$\frac{\cancel{(k+2)}.\cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}.k!.\cancel{(k+2)}(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!.(k+2)!}=\frac{1}{k!.(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!.(k+2)!}$$

$k=2$ için, $\frac{1}{2!.3!}-\frac{1}{3!.4!}$

$k=3$ için, $\frac{1}{3!.4!}-\frac{1}{4!.5!}$

$k=4$ için, $\frac{1}{4!.5!}-\frac{1}{5!.6!}$

⋮

$k=10$ için, $\frac{1}{10!.11!}-\frac{1}{11!.12!}$

+

taraf tarafa toplarsak

$$\left(\frac{1}{2!.3!}-\frac{1}{11!.12!}\right)$$

Örnek soru: 10. soruda verilen sayıya A diyelim. $(A.11!.12!)$ sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm: Okuyucuya bırakılmıştır. Cevap = 10

Soru 11: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{1999}{2000!}=?$

Çözüm: $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}$

$=\frac{\cancel{k+1}}{(\cancel{k+1}).k!}-\frac{1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$

$k=1$ için $\frac{1}{1!}-\cancel{\frac{1}{2!}}$

$k=2$ için $\cancel{\frac{1}{2!}}-\cancel{\frac{1}{3!}}$

$k=3$ için $\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}$

$\vdots$

$k=1999$ için $\cancel{\frac{1}{1999!}}-\frac{1}{2000!}$

$+$

taraf tarafa toplarsak, $\frac{1}{1!}-\frac{1}{2000!}=1-\frac{1}{2000!}$

SORU 12:

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{81\sqrt{80}+80\sqrt{81}}=?$$

ÇÖZÜM:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k.(k+1)}\,\underbrace{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}_{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}}$$

pay ve payda yı çarptık.

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k.(k+1)}}=\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$k=1$ için, $1-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$k=2$ için, $\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$k=3$ için, $\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$k=80$ için $\cancel{\frac{1}{\sqrt{80}}}-\frac{1}{\sqrt{81}}$

$+$

---

taraf tarafa toplarsak,

$$1-\frac{1}{\sqrt{81}}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

Soru 13: $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{4n}{4n^4+1} = ?$

Çözüm: $\dfrac{4n}{4n^4+1} = \dfrac{4n}{\underbrace{4n^4+4n^2+1-4n^2}_{4n^2 \text{ ekleyip çıkardık}}} = \dfrac{4n}{(2n^2+1)^2-(2n)^2}$

$= \dfrac{4n}{(2n^2+2n+1)(2n^2-2n+1)} = \dfrac{1}{2n^2-2n+1} - \dfrac{1}{2n^2+2n+1}$

$n=1$ için $\quad 1 - \cancel{\frac{1}{5}}$

$n=2$ için $\quad \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{13}}$

$n=3$ için $\quad \cancel{\frac{1}{13}} - \cancel{\frac{1}{25}}$

$\vdots$

$n=10$ için $\quad \cancel{\frac{1}{181}} - \frac{1}{221}$

$+$

taraf tarafa toplarsak, $\quad 1 - \dfrac{1}{121} = \dfrac{120}{121}$

Soru 14:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}=?$$

Çözüm:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{9.10}+\frac{1}{10.11}$$

$$1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\ }\ldots+\cancel{\frac{1}{10}}-\frac{1}{11}$$

$$1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$$