POLİNOM FONKSİYONLARIN KÖKLERİNE GENEL BAKIŞ

Hazırlayan:Emre ORHAN(e44)

Polinom fonksiyonların köklerine genel bakış adını verdiğim bu yazıda,Descartes İşaret Kuralı,Tam Kök Testi ve Rasyonel Kök Testi hakkında bilgi paylaşımında bulunacağım.Öncelikle Descartes İşaret Kuralından başlamak istiyorum.

Descartes İşaret Kuralı bir polinom denklemin köklerinin karakterini belirlemeye yarar.Köklerin karakterinden kastedilen köklerin pozitif,negatif ya da sanal olma durumudur.n.dereceden gerçel katsayılı bir polinom denklemi

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (1) şeklinde gösterelim.Buradaki $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ *herbiri sıfırdan* farklı reel sayılardır.İfadenin x'in azalan kuvvetlerine göre dizildiğine dikkat ediniz.
(1) de yazılı denklemin pozitif köklerinin sayısı,ya denklemin katsayıları arasındaki işaret değişiminin sayısına eşit ya da işaret değişimi sayısının bir çift tam sayı eksiği kadardır.Negatif kökler içinde aynı durum söz konusudur.Eğer x sayısı denklemin negatif kökü ise,-x sayısının pozitif kök olacağı aşikardır.Kısacası Descart işaret kuralı bize denklemin pozitif,negatif köklerinin olası maksimum sayısını verir.

Descartes işaret kuralının ispatı için aşağıdaki linkleri inceleyebilirsiniz

http://sepwww.stanford.edu/oldsep/stew/descartes.pdf

http://www.math.tamu.edu/~rojas/wangdescartes.pdf

Şimdi Descartes işaret kuralı ile ilgili örnekler çözelim.

ÖRNEK 1

$f(x) = 6x^4 - 31x^3 + 25x^2 + 33x + 7 = 0$ denkleminin kök durumlarını inceleyelim.Burada şimdilik pozitif,negatif ve sanal kök olma durumuna göre inceleyeceğiz.Bu köklerin nasıl bulunduğuna daha sonra değineceğiz.

Öncelikle şunu belirtelim ki,verilen ifadeyi x 'in azalan kuvvetlerine göre dizerek başlayacağız.Ama örneğimizde zaten azalan kuvvetlere göre dizildiğinden sorun yok.

$$6x^4 - 31x^3 + 25x^2 + 33x + 7$$

1.işaret değişimi 2.işaret değişimi

İfademiz de 1.terimden 2.terime geçerken(+dan - ye) ve 2.terimden 3.terime geçerken (- den +ya) işaret değişimi olmuştur.Bunun anlamı şudur:

f(x)’in olası maksimum pozitif kök sayısı 2 dir.Eğer iki pozitif kök yoksa 2-2=0 olduğundan hiç pozitif kök yoktur.

Gelelim negatif kök durumuna,f(x) de x yerine –x yazarsak,

$$f(-x)=6(-x)^4-31(-x)^3+25(-x)^2+33(-x)+7=0$$
$$f(-x)=6x^4+31x^3+25x^2-33x+7=0$$

1.işaret değişimi 2.işaret değişimi

İfademizde 3.terimden 4.terime geçerken(+dan – ye) ve 4.terimden 5.terime geçerken(- den +ya)

işaret değişimi olmuştur.f(x) in olası maksimum negatif kök sayısı 2 yada 2-2=0 dır.

Bu durumu bir tabloyla göstermek gerekirse,

Pozitif kök sayısı	Negatif kök sayısı	Kompleks kök sayısı
2	0	0
2	2	0
0	2	2
0	0	4

Tabloyu nasıl doldurduğumuzu açıklayalım.Cebirin temel teoremi gereği n.derecen bir denklemin en fazla n tane kökü olur.Yazdığımız denklem 4.dereceden olduğu için 2 pozitif kökü varsa,negatif kökü yoksa kalan 2 kök kompleks demektir.Kompleks kökler çift halinde bulunur.Biri varsa eşleniği de vardır çünkü.

ÖRNEK 2

$f(x)=x^4+4x^3+3x^2-4x-4$ =0 denkleminin kök durumlarını inceleyelim.

1.işaret değişimi

İfademizde 3.terimden 4.terime geçerken(+dan – ye) işaret değişimi olmuştur.İşaret değişimi 1 tane olduğu için bu denklemin kesinlikle 1 pozitif kökü vardır.Şimdi f(-x) e bakalım.

$$f(-x)=(-x)^4+4(-x)^3+3(-x)^2-4(-x)-4=0$$
$$f(-x)=x^4-4x^3+3x^2+4x-4=0$$

1.işaret değişimi 2.işaret değişimi 3.işaret değişimi

F(-x) de 3 kez işaret değişimi olduğundan,ilk başta verilen ifadenin ya 3 tane ya da 3-2=1 tane negatif kökü vardır.

Tablomuzu yaparsak;

Pozitif kök sayısı	Negatif kök sayısı	Kompleks kök sayısı
1	3	0
1	1	2

ÖRNEK 3

$f(x) = x^7 - x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1=0$ denklemini inceleyelim.

$x^7 - x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1$

1. işaret değişimi 2. işaret değişimi 3. işaret değişimi 4. işaret değişimi

ifademiz 4 kez işaret değiştirdiği için olası maksimum pozitif kök sayısı ya 4,ya 4-2=2 ya da 4-4=0 dır.Birde f(-x) i inceleyelim.

F(-x)= $-x^7 + x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1$

1. işaret değişimi 2. işaret değişimi 3. işaret değişimi

F(-x),3 kez işaret değiştirdiğinden ifademizin olası maksimum negatif kök sayısı ya 3,ya da 3-2=1 dir.

Tablomuzu yaparsak,

Pozitif kök sayısı	Negatif kök sayısı	Kompleks kök sayısı
4	3	0
2	3	2
0	3	4
4	1	2
2	1	4
0	1	6

ÖRNEK 4

f(x)= $4x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 16x + 4 = 0$ denklemini inceleyelim.

$4x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 16x + 4$ ifadesinde hiç işaret değişimi olmadığından yukarıdaki denklemin hiç pozitif kökü yoktur.Şimdi f(-x) e bakalım.

F(-x)= $4x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 16x + 4$

1.işaret değişimi 2.işaret değişimi 3.işaret değişimi 4.işaret değişimi

F(-x) de 4 kere işaret değişimi yaşandığından olası negatif kök sayısı ya 4,ya 4-2=2,ya da 4-4=0 dır.

Tablomuzu yaparsak;

Pozitif kök sayısı	Negatif kök sayısı	Kompleks kök sayısı
0	4	0
0	2	2
0	0	4

Tablodan da anlaşılacağı üzere,kompleks köklerin sayısının her zaman çift olacağını daha önce belirtmiştik.Kısaca f(x) de hiç işaret değişimi yoksa pozitif kök yoktur.f(-x) de hiç işaret değişimi yoksa negatif kök yoktur.Dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta Descartes işaret kuralı pozitif ve negatif köklerin sayısını bulmak içindir.Karmaşık kökler için Descartes kuralı yoktur.Yukarıda yaptığımız tablolar cebirin temel teoremiyle ilgilidir.Bir karışıklık olmasın diye açıklama ihtiyacı hissettim.Bunu bir örnekle açıklasak daha iyi olacak.

ÖRNEK 5

f(x) = $x^3 + x^2 + 9x + 9 = 0$ denkleminin köklerini inceleyelim.

F(x) de hiç işaret değişimi olmadığından pozitif kök yoktur.

F(-x) incelenirse,

F(-x)=$-x^3 + x^2 - 9x + 9 = 0$

1.işaret değişimi 2.işaret değişimi 3.işaret değişimi

$x^3 + x^2 + 9x + 9 = 0$

$x^2(x+1) + 9(x+1) = 0$

$(x+1).(x^2+9) = 0$

F(-x) 3 kez işaret değiştirdiğinden olası maksimum negatif kök sayısı ya 3,ya da 3-2=1 dir.

Köklere dikkatli bakılırsa 3i,-3i ve -1 dir.Burada -3i negatifliğinden söz edemeyiz.Çünkü karmaşık sayılarda sıralama yoktur.

Buraya kadar ki kısımda Descartes işaret kuralını ve kuralın işleyişini anlatmaya çalıştık.

Şimdi de bu karakterini belirlediğimiz köklerin sayısal değerini nasıl bulacağız sorusuyla uğraşalım.

I.**TAM SAYI KATSAYILI DENKLEMİN TAM SAYI KÖKLERİ**

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ şeklinde denklem alalım.Buradaki $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ *herbiri sıfırdan* farklı tamsayılardır.

Herhangi bir k tam sayısının bu denklemin kökü olması demek,

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + ... + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0 \ \textit{olması demektir.Bu denklemde bir adım ilerlersek,}$$
$$k.(a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + ... + a_1) = -a_0 \ \textit{olur.Her i için,} a_i \ \textit{ler tam sayı olduğundan,} k / a_0 \ \textit{çıkar.}$$

Buradan Tam Kök Testi olarak da anılan ifadeyi verelim:

Bu denklemin kökü olacak tam sayılar, a_0 sabit teriminin bölenleridir.Diğer bir ifadeyle, a_0 sabit teriminin bölenleri yukarıdaki denklemin aday tam sayı kökleridir.Eğer, $a_0 \neq 0$ ise, a_0 ın sonlu sayıda böleni olacağından ,bu bölenlerden hangisinin kök olacağını denklemde yerine koyarak birkaç adımda kolay şekilde belirleyebiliriz.Eğer $a_0 = 0$ ise x=0 denklemin tam sayı kökü olup,diğer olası kökleri bulmak içinde a_1 katsayısının bölenlerini denemek gerekir.Şimdi bununla ilgili bir örnek verelim.

ÖRNEK 6

$x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6 = 0$ denkleminin (varsa) tam sayı köklerini bulmaya çalışalım.

Denklemin sabit terimi -6 olup,bölenleri {$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$} dır.Denklemde yerine yazılarak 1 ve -3 ün kök olduğu kolayca görünür.

(x-1).(x+3)= $x^2 + 2x - 3$ ifadesi denklemin bir çarpanı olacağından,verilen denklem bu çarpana bölünürse diğer çarpan $x^2 + 2$ olrak bulunur.

Ayrıca Descartes işaret kuralına göre,1 negatif kökü vardır.3 yada 1 pozitif kökü vardır.

$x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6$=(x-1).(x+3).($x^2 + 2$) olup,denklemin -3 ve 1 dışında tam sayı kökü yoktur.

II.TAM SAYI KATSAYILI DENKLEMİN RASYONEL KÖKLERİ

Herhangi bir r rasyonel sayısı,p ve q aralarında asal tamsayılar ve $q \neq 0$ olmak üzere,r=$\frac{p}{q}$ biçiminde yazılabilir.Böyle bir r sayısının,

f(x)= $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ =0 denkleminin kökü olması

$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$ olması demektir.Buradan

$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$

$a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})$(1)

$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1})$(2) olur.

(1) nolu denklemden ql$a_n p^n$ dir.p ve q aralarında asal olduğundan,q ve p^n de aralarında asaldır.Buradan qla_n çıkar
(2) nolu denklemden pl$a_0 q^n$ dir. P ve q aralarında asal olduğundan,p ve q^n de aralarında asaldır.Buradan pla_0 çıkar.

Bunları belirttikten sonra,Rasyonel Kök testi olarak da belirtilen ifadeyi verelim.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ şeklinde denklem alalım.Buradaki $a_n, a_{n-1}, \ldots.., a_2, a_1, a_0$ *herbiri sıfırdan* farklı tamsayılardır.

Bu denklemin rasyonel kökü olabilecek sayılar, pla_0 ve qla_n olmak üzere,$\frac{p}{q}$ formatındaki rasyonel sayılardır.

Bunu bir örnekle netleştirelim.

ÖRNEK 7

$f(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 20 = 0$ denkleminin (varsa) rasyonel köklerini bulalım.

1.adım,Descartes işaret kuralını uygulayalım

$x^3 + 8x^2 + 11x - 20$

1.işaret
değişimi

F(x) denkleminde 1 işaret değişimi olduğundan 1 pozitif kök vardır.Şimdi f(-x) e bakalım,

$-x^3 + 8x^2 - 11x - 20$

1.işaret değişimi   2 işaret değişimi

F(-x) de 2kez işaret değişimi olduğundan ya 2 negatif kök yada 2-2=0 negatif kök vardır.

Bu durumu tabloyla gösterelim(olası durumlar)

Pozitif kök sayısı	Negatif kök sayısı	Kompleks kök sayısı
1	2	0
1	0	2

2.adım:rasyonel kökleri bulalım

Rasyonel kökler $\frac{p}{q}$ formatında olacaktır.

p∈ $\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20\}$

q∈ $\{\pm1\}$

olası rasyonel kökler; $\frac{\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm5,\pm10,\pm20\}}{\{\pm1\}}$ yani $\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20\}$

3.adım sentetik bölme işlemi yapalım(sırayla deneme yapıyoruz)

-1 | 1 8 11 -20 → buraya yazılan sayılar denklemin katsayıları

-1 -7 -4

1 7 4 -24 $\neq 0$ olduğundan -1 kök değildir.

1 | 1 8 11 -20

1 9 20

1 9 20 0 x = 1 denklemin bir köküdür

$x^2 + 9x + 20$

$(x+4)(x+5)$

Sonuç olarak

$x^3 + 8x^2 + 11x - 20 = (x-1)(x+4)(x+5)$ olur.

Kökler $x_1 = 1, x_2 = -4, x_3 = -5$ dir

ÖRNEK 8

$f(x)=2x^4+x^3-35x^2-113x+65=0$ denkleminin köklerini inceleyelim.

1.adım: Descartes işaret kuralı

$2x^4+x^3-35x^2-113x+65$

1.işaret değişimi 2 işaret değişimi

F(x) de 2 kere işaret değişimi olduğundan ya 2 pozitif kök ya da 2-2=0 pozitif kök vardır,aslında pozitif kök yoktur demeye çalışıyorum☺

F(-x)= $2x^4-x^3-35x^2+113x+65$

1.işaret değişimi 2.işaret değişimi

F(-x) de 2 kere işaret değişimi olduğundan ya 2 negatif kök ya da 2-2=0 negatif kök vardır.yani negatif kök varsa maksimum 2 tanedir ya da yoktur.

Bunu tablolaştırırsak,(olası durumlar)

Pozitif kök sayısı	Negatif kök sayısı	Kompleks kök sayısı
2	0	2
0	2	2
2	2	0

2.adım.rasyonel kökleri irdeleyelim

$\frac{\{\pm1,\pm5,\pm13,\pm65\}}{\{\pm1,\pm2\}}$ biçiminde köklerdir buradan da $\{\pm1,\pm5,\pm13,\pm65,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{5}{2},\pm\frac{13}{2},\pm\frac{65}{2}\}$ olası rasyonel köklerdir.

Kökler sırayla denendiğinde +1 ve -1 in sağlamadığı kolayca görünür.5 için bakalım

5	2	1	-35	-113	65
		10	55	100	-65
	2	11	20	-13	0

→ x=5 denklemin köküdür.

$2x^3+11x^2+20x-13$ denkleminin köklerini inceleyeceğiz.

Burada denklem (x-5) ile tam bölündüğünden dolayı 5 ten büyük olan olası durumlara bakmaya gerek yoktur.Nedeni aşağıda belirtilmiştir

BOUNDNESS THEOREM

Let $P(x)$ be a polynomial with real coefficients. If $P(x)$ is divided synthetically by x - c, and

(a) if $c > 0$ and all numbers in the bottom row of the synthetic division are all positive or all negative (with 0 considered positive or negative, as needed), then $P(x)$ has no real zero greater than c. c is said to be an upper bound.

(b) if $c < 0$ and the numbers in the bottom row of the synthetic division alternate in sign (with 0 considered positive or negative, as needed), then $P(x)$ has no zeros less than c. c is said to be a lower bound.

The Boundness theorem is useful in eliminating those numbers from the list that are less than or greater than all real zeros of the polynomial function.

$2x^3 + 11x^2 + 20x - 13 = 0$ denklemini inceleyelim.

1adım:Descartes işaret kuralı okuyucuya bırakılmıştır.

2.adım :olası rasyonel kökler $\{\pm 1, \pm 13, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{13}{2}\}$

ilk kökün ½ olduğu görülür.

½	2	11	20	-13
		1	6	13
	2	12	26	0

$\rightarrow x = \frac{1}{2}$ denklemin bir köküdür

$2x^2 + 12x + 26 = 0$

$x^2 + 6x + 13 = 0$

$\Delta = 36 - 52 = -16 < 0$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 + 2i$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 - 2i$

$2x^4 + x^3 - 35x^2 - 113x + 65 =$ (x-5).(2x-1).($x^2 + 6x + 13$)