Uluslararası Matematik Olimpiyatı (IMO) Soruları (Türkçe)

İçindekiler

1 IMO - 1959, Romanya

1.1 Yarışma Problemleri

1. Hiçbir n doğal sayısı için $\frac{21n+4}{14n+3}$ kesrinin sadeleşmeyeceğini gösteriniz.

2. $$\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})}+\sqrt{(x-\sqrt{2x-1})}=A$$

   denkleminin gerçel köklerini (a) $A=\sqrt{2}$, (b) $A=1$, (c) $A=2$ iken bulunuz. (Karekök içerisindeki ifadelerin negatif olmadığını varsayın.)

3. a, b, c gerçel sayılar olmak üzere;
   $$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$$
   denklemi $\cos x$ e göre ikinci dereceden bir denklem olsun. a, b, c, x sayılarını kullanarak $\cos 2x$ e göre ikinci dereceden bir denklem oluşturun. $a=4, b=2, c=-1$ değerleri için denklemleri karşılaştırın.

4. Hipotenüsü $c =$ Sabit, hipotenüse ait kenarortayı da dik kenarlarının geometrik ortalamasına eşit olan dik üçgeni çiziniz.

5. AB doğru parçasının üzerinde bir M hareketli noktası alınıyor. $AMCD$ ve $MBEF$ kareleri, AB ye göre aynı tarafta yer alacak şekilde oluşturuluyor. Bu kareleri çevreleyen P ve Q merkezli çemberler, M haricinde bir N noktasında kesişiyor. AF ile BC doğrularının kesişimi N' ise,

   (a) N ve N' noktalarının çakıştığını gösteriniz.

   (b) MN doğrularının M seçiminden bağımsız bir S noktasından geçtiğini gösteriniz.

   (c) M, A ve B arasında değişirken, PQ doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yerini bulunuz.

6. P ve Q düzlemleri bir p doğrusu boyunca kesişiyor. Hiçbirisi p üzerinde yer almayan, P düzleminde bir A ve Q düzleminde bir C noktası veriliyor. $AB \parallel CD$ olacak şekilde aynı zamanda teğetler dörtgeni olan $ABCD$ ikizkenar yamuğunu, B ve D sırasıyla P ve Q düzlemlerinde olacak şekilde çiziniz.

2 IMO - 1960, Romanya

2.1 Yarışma Problemleri

1. Rakamlarının kareleri toplamının 11 katına eşit olan tüm üç basamaklı sayıları bulunuz.

2. $$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x+9$$

   eşitsizliği sağlayan x değerlerini bulunuz.

3. ABC dik üçgeninin uzunluğu a olan BC hipotenüsü, n eşit parçaya (n tek sayı) bölünüyor. Hipotenüsün orta noktasını bulunduran parçayı gören A açısı α ise,

   $$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

   olduğunu gösteriniz.

4. h_a, h_b (A ve B'ye ait yükseklikler) ve m_a (A'ya ait kenarortay) uzunlukları verilen ABC üçgenini çiziniz.

5. $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ yüzü $A'B'C'D'$ yüzünün üstünde) küpünü ele alalım.

   (a) X ve Y, sırasıyla AC ve $B'D'$ doğru parçalarının üzerinde rastgele noktalar olmak üzere; XY doğru parçasının orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

   (b) (a)'da tanımlanan XY doğru parçasının üzerinde $ZY = 2XZ$ olacak şekilde alınan Z noktasının geometrik yerini bulunuz.

6. V_1 hacimli bir dik koninin içine tabanına teğet olacak şekilde en büyük hacimli küre çiziliyor. Tabanı koninin tabanı üzerinde yer alacak şekilde küreyi çevreleyen en küçük hacimli silindirin hacmi V_2'dir.

   (a) $V_1 \neq V_2$ olduğunu gösteriniz.

   (b) $V_1 = kV_2$ eşitliği sağlayan en küçük k sayısını bulunuz. Bu durumda, koninin köşesinin taban çapını gördüğü açıyı oluşturun.

7. Tabanları a ve c, yüksekliği h olan bir ikizkenar yamuk veriliyor.

   (a) Yamuğun simetri ekseni üzerinde yer alan ve yamuğun kollarının ikisini de (tabanların dışındaki kenarları) dik açı ile gören tüm P noktalarını bulunuz.

   (b) P'nin tabanlara olan uzaklıklarını hesaplayınız.

   (c) Bu şekilde bir P noktasının hangi koşullarda var olduğunu belirleyiniz.

3 IMO - 1961, Macaristan

3.1 Yarışma Problemleri

1. a ve b sabit sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz. Denklem sisteminin çözümleri olan x, y, z'nin farklı pozitif sayılar olmasını için a ve b'nin sağlaması gereken şartları belirtiniz.

2. Alanı T, kenarları a, b, c olan bir üçgende

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}T$$

olduğunu gösteriniz. Hangi koşullarda eşitliğin sağlandığını belirtiniz.

3. n doğal sayı olmak üzere, $\cos^n x - \sin^n x = 1$ denklemini çözünüz.

4. P, $P_1P_2P_3$ üçgeni içerisinde bir noktadır. P_1P, P_2P, P_3P doğruları karşı kenarları sırasıyla Q_1, Q_2, Q_3 noktalarında kesiyor.

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$$

sayılarından en azından birinin ≤ 2, ve en azındandan birinin ≥ 2 olduğunu gösteriniz.

5. M, BC doğru parçasının orta noktası ve $\omega < 90°$ olmak üzere; $AC = b$, $AB = c$ ve $\angle AMB = \omega$ olan ABC üçgeni çiziniz. Bu şekilde bir çizimin yapılabilmesi için gerek ve yeter koşulun

$$b \tan\frac{\omega}{2} \leq c < b$$

olduğunu gösteriniz. Eşitliğin hangi durumda sağlandığını belirtiniz.

6. Bir ϵ düzlemi ile bu düzleme paralel olmayan bir düzlem üzerinde yer alan, ϵ'a göre aynı tarafta bulunan ve doğrusal olmayan A, B, C noktalarını ele alalım. A', B', C' noktaları ϵ üzerinde rastgele üç nokta olsun. L, M, N sırasıyla AA', BB', CC' doğru parçalarının orta nokları ve G LMN üçgeninin ağırlık merkezi olsun. (L, M, N nin üçgen oluşturmadığı A', B', C' noktalarını ele almıyoruz.) A', B', C' noktaları ϵ üzerinde bağımsız olarak değişirken, G noktasının geometrik yeri nedir?

4 IMO - 1962, Çekoslavakya

4.1 Yarışma Problemleri

1. Aşağıdaki özellikleri sağlayan en küçük n doğal sayısını bulunuz.

   (a) Ondalık yazımında son basamağı 6'dır.

   (b) Son basamağı silinip, başa yazılırsa, oluşan sayı ilk baştaki n sayısının dört katı oluyor.

2. $$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

   eşitsizliğini sağlayan tüm x gerçel sayılarını belirleyiniz.

3. $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ ve $A'B'C'D'$ üst ve alt tabanlar, AA', BB', CC', DD' kenarları birbirlerine paralel) küpünü ele alalım. X noktası sabit bir hızla $ABCD$ karesinin çevresinde $ABCDA$ yönünde hareket ediyor. Y noktası da aynı hızla $B'C'CB$ karesinin çevresinde $B'C'CBB'$ yönünde hareket ediyor. X ve Y noktları, hareketlerine aynı anda sırasıyla A ve B' noktasında başlıyor. Buna göre, XY doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yerini belirleyiniz ve çiziniz.

4. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ denklemini çözünüz.

5. K çemberi üzerinde üç farklı A, B, C noktaları veriliyor. K üzerinde dördüncü bir D noktasını, oluşan dörtgenin içteğet çemberi çizilebilecek şekilde (sadece cetvel ve pergel kullanarak) oluşturun.

6. Çevrel çemberinin yarıçapı r, içteğet çemberinin yarıçapı ρ olan bir ikizkenar üçgen veriliyor. Bu iki çemberin merkezleri arası uzaklık d ise,

   $$d = \sqrt{r(r-2\rho)}$$

   olduğunu gösteriniz.

7. Her biri SA, SB, SC, BC, CA, AB doğrularına teğet olan beş kürenin bulunabildiği $SABC$ dörtyüzlüsü veriliyor.

   (a) $SABC$ dörtyüzlüsünün düzgün olduğunu gösteriniz.

   (b) Her düzgün dörtyüzlü için bu şekilde beş kürenin bulunabileceğini gösteriniz.

5 IMO - 1963, Polonya

5.1 Yarışma Problemleri

1. p gerçel bir parametre olmak üzere;

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

denkleminin tüm gerçel köklerini bulunuz.

2. A noktası ve BC doğru parçası veriliyor. Uzayda, bir kolu A'dan geçen, diğer kolu da BC doğru parçasını kesen dik açıların köşelerinin geometrik yerini belirleyiniz.

3. Tüm iç açıları eşit olan bir n-genin, ardışık kenarlarının uzunlukları arasında

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$$

bağıntısı varsa, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ olduğunu gösteriniz.

4. y bir parametre olmak üzere;

$$\begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1 \\ x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= yx_3 \\ x_3 + x_5 &= yx_4 \\ x_4 + x_1 &= yx_5 \end{aligned}$$

sistemini sağlayan tüm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sayılarını bulunuz.

5. $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

6. A, B, C, D, E öğrencileri bir yarışmaya katılıyor. Tahminlerden biri sıralamanın $ABCDE$ şeklinde olacağı idi. Bu tahmin tutmadı. Aslında, hiçbir yarışmacı tahmindeki sırada yarışmayı bitiremedi. Dahası, birbiri ardına sıralanır diye düşünülen hiçbir yarışmacı birbiri ardına sıralanmamıştır. Bir diğer tahmin de, sıralamanın $DAECB$ şeklinde olacağı idi. Bu tahmin ilkinden daha iyiydi. Yarışmacılardan tam olarak ikisi, yarışmayı tahmin edilen sırada bitirdi. Dahası, tahminde birbiri ardına sıralanır diye düşünülen çiftlerden tam olarak ayrık ikisi yarışmayı birbiri ardında bitirdi. Buna göre, yarışmanın nasıl sonuçlandığını belirleyiniz.

6 IMO - 1964, Sovyetler Birliği

6.1 Yarışma Problemleri

1. (a) $2^n - 1$ sayısının 7 ile bölünebildiği tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

   (b) $2^n + 1$ sayısının 7 ile bölünmesini sağlayan bir n pozitif tam sayısının olmadığını gösteriniz.

2. a, b, c bir üçgenin kenarları olmak üzere;

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

   olduğunu gösteriniz.

3. Kenarları a, b, c olan bir ABC üçgeninin içteğet çemberi çiziliyor. Bu çembere teğet ve kenarlara paralel olan doğrular $\triangle ABC$'den birer üçgen kesiyor. Bu üçgenlerin içteğet çemberleri çiziliyor. Bu dört içteğet çemberin alanını a, b, c cinsinden bulunuz.

4. On yedi kişi aralarında, herkes bir diğerine yazacak şekilde mektuplaşıyorlar. Mektuplarda sadece üç konu üzerine, her çift sadece bir konu üzerine olacak şekilde yazışıyorlar. Birbirlerine aynı konu üzerine yazmış üç kişinin bulunabileceğini gösteriniz.

5. Düzlemde beş nokta, bu noktaların belirttiği doğrulardan herhangi ikisi birbirine paralel, dik veya çakışık olmayacak şekilde seçiliyor. Her noktadan, diğer dört noktanın belirttiği doğrulara dikler çiziliyor. Bu dikmelerin en fazla kaç noktada kesişir?

6. $ABCD$ dörtyüzlüsünde, D köşesi $\triangle ABC$'nin ağırlık merkezi olan D_0 ile birleştiriliyor. A, B, C noktalarından DD_0'a paraleller çiziliyor. Bu doğrular, BCD, CAD, ABD düzlemlerini sırasıyla A_1, B_1, C_1 noktalarında kesiyor. $ABCD$'nin hacminin $A_1B_1C_1D_0$'nın hacminin üçte biri olduğunu gösteriniz. D_0, $\triangle ABC$ içerisinde herhangi bir nokta olsa, aynı oran sağlanır mı?

7 IMO - 1965, Federal Almanya

7.1 Yarışma Problemleri

1.
$$2\cos x \le \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \le \sqrt{2}$$
eşitsizliğini sağlayan $0 \le x \le 2\pi$ aralığındaki tüm x değerlerini bulunuz.

2. Bilinmeyenleri x_1, x_2, x_3 olan
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$
denklem sisteminin katsayıları aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

   (a) a_{11}, a_{22}, a_{33} pozitif,

   (b) kalan katsayılar negatif,

   (c) her denklemde katsayılar toplamı pozitiftir.

   Buna göre verilen sistemin tek çözümünün $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ olduğunu gösteriniz.

3. Kenarları $AB = a$, $CD = b$ olan $ABCD$ dörtyüzlüsü veriliyor. AB ve CD aykırı doğruları arasındaki mesafe d, aralarındaki açı ω'dır. AB ve CD doğrlarına paralel olan ϵ düzlemi, $ABCD$ dörtyüzlüsünü iki katı cisme bölüyor. ϵ düzleminin AB ve CD'ye olan uzaklıkları oranı k ise, bu iki katı cismin hacimleri oranı nedir?

4. Herhangi biri ile, diğer üçünün çarpının toplamı 2'ye eşit olan tüm x_1, x_2, x_3, x_4 gerçel sayılarını bulunuz.

5. AOB açısı dar olan $\triangle OAB$'yi ele alalım. $M \neq O$ noktasından OA ve OB'ye çizilen dikmelerin ayakları sırasıyla P ve Q'dur. $\triangle OPQ$'nin yükseklikleri H'de kesişiyor. M,

   (a) AB kenarı üzerinde bir nokta

   (b) $\triangle OAB$ içerisinde bir nokta

   ise, H'nin geometrik yeri nedir?

6. Düzlemde n nokta ($n \ge 3$) veriliyor. Her nokta çifti, doğru parçaları ile birleştiriliyor. Bu doğru parçalarının en uzununun uzunluğu d olsun. Uzunluğu d olan doğru parçalarının kümesinin eleman sayısının n'den çok olamayacağını gösteriniz.

8 IMO - 1966, Bulgaristan

8.1 Yarışma Problemleri

1. 25 yarışmacıdan her biri A, B, C problemlerinden en az birisini çözmüştür. A'yı çözemeyip B'yi çözenleri sayısı, A'yı çözemeyip C'yi çözenlerin sayısının iki katıdır. Sadece A'yı çözenlerin sayısı, A'yı çözüp B ve C'den en az birini çözenlerin sayısından bir fazladır. Sadece A'yı çözenlerin sayısı sadece B'yi çözenler ile sadece C'yi çözenlerin toplamına eşitse, sadece B'yi çözen kaç kişi vardır?

2. Bir üçgenin kenarları a, b, c; bu kenarların karşılarındaki açılar da sırasıyla α, β, γ'dır.
$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}(a\tan\alpha + b\tan\beta)$$
ise, bu üçgenin ikizkenar olduğunu gösteriniz.

3. Bir düzgün dörtyüzlünün köşelerinin bu dörtyüzlünün çevrel küresinin merkezinden olan uzaklıkları toplamının, uzaydaki başka bir noktanın bu köşelere olan uzaklıkları toplamından az olduğunu gösteriniz.

4. Her n doğal sayısı ve her $x \neq k\pi/2^t$ $(t = 0, 1, \ldots, n;\ k$ tam sayı) gerçel sayısı için,
$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$
olduğunu gösteriniz.

5. a_1, a_2, a_3, a_4 dört farklı gerçel sayı olmak üzere;
$$\begin{array}{rcl} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 & = & 1 \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 & = & 1 \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 & = & 1 \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 & = & 1 \end{array}$$
sistemini çözünüz.

6. ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerinde sırasıyla K, L, M noktaları alınıyor. AML, BKM, CLK üçgenlerinin en az birinin alanının ABC üçgeninin alanının dörtte birinden çok olmadığını gösteriniz.

9 IMO - 1967, Yugoslavya

9.1 Yarışma Problemleri

1. Kenarları $AB = a$ ve $AD = 1$ olan $ABCD$ paralelkenarında $\angle BAD = \alpha$'dır. $\triangle ABD$ dar açılı ise, A, B, C, D merkezli ve 1 yarıçaplı dört çember ile paralelkenarın kaplanabilmesi için gerek ve yeter koşulun
$$a \leq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$
olduğunu gösteriniz.

2. Bir dörtyüzlünün sadece bir kenarının uzunluğu 1'den büyükse, hacminin $\leq 1/8$ olduğunu gösteriniz.

3. k, m, n doğal sayılar olmak üzere; $m + k + 1$ sayısı $n + 1$'den büyük bir asal sayıdır. $c_s = s(s+1)$ olsun. Bu durumda,
$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)\dots(c_{m+n} - c_k)$$
çarpımının $c_1c_2\dots c_n$ çarpımı ile bölündüğünü gösteriniz.

4. $A_0B_0C_0$ ve $A_1B_1C_1$ üçgenleri dar açılıdır. $\triangle A_1B_1C_1$ ile benzer olan (A_1, B_1, C_1 köşeleri sırasıyla A, B, C köşeleri ile eşleşiyor) ve $A_0B_0C_0$ üçgenini çevreleyen (A_0, B_0, C_0 sırasıyla BC, CA, AB üzerinde yer alıyor) tüm ABC üçgenlerini ele alalım. Bu tip üçgenler arasından en büyük alanlısını belirleyiniz, bu üçgeni çiziniz.

5. $a_1, a_2, \dots, a_8$ hepsi birden sıfıra eşit olmayan gerçel sayılar olmak üzere;
$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_8 \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2 \\ &\dots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n \\ &\dots \end{aligned}$$
şeklinde tanımlanan $\{c_n\}$ dizisini ele alalım. $\{c_n\}$ dizisinin sonsuz sayıda teriminin sıfıra eşit olduğunu varsayın. $c_n = 0$ olan tüm n doğal sayılarını bulunuz.

6. Bir spor müsabakasında, peşpeşe $n > 1$ günde m madalya dağıtılıyor. İlk gün, bir madalya ve kalan $m - 1$ madalyanın $1/7$'si dağıtılıyor. İkinci gün, iki maldalya ve kalan madalyaların $1/7$'si dağıtılıyor. Bu böyle devam ediyor. n. gün, yani sonuncu gün, geriye kalan n madalya dağıtılıyor. Müsabaka kaç gün sürdü, müsabakada toplamda kaç madalya dağıtıldı?

10 IMO - 1968, Sovyetler Birliği

10.1 Yarışma Problemleri

1. Açılarından biri diğerinin iki katı olan ve kenarları ardışık tam sayılar olan tek bir üçgen olduğunu gösteriniz.

2. Ondalık yazımındaki rakamların çarpımı, $x^2 - 10x - 22$'ye eşit olan tüm x doğal sayılarını bulunuz.

3. $a \neq 0, b, c$ gerçel sayılar olmak üzere; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenleri için

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= x_3 \\ &\ldots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c &= x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c &= x_1 \end{aligned}$$

tanımlanan denklem sistemini ele alalım. $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$ olsun. Bu sistemin,

   (a) $\Delta < 0$ ise, çözümünün olmadığını,

   (b) $\Delta = 0$ ise, tam olarak bir çözümünün olduğunu,

   (c) $\Delta > 0$ ise, birden fazla çözümünün olduğunu gösteriniz.

4. Her dörtyüzlünün, kendisinden çıkan üç kenarın bir üçgen belirttiği bir köşesi olduğunu gösteriniz.

5. Tüm gerçel x sayıları için tanımlı, gerçel değerli f fonksiyonu, bir a sabiti için ve tüm x sayıları için

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

eşitliğini sağlıyor.

   (a) f fonksiyonunun periyodik olduğunu (tüm x sayıları için $f(x+b) = f(x)$ olacak şekilde bir b pozitif sayısının bulunduğu) gösteriniz.

   (b) $a = 1$ için, gerekli şartları sağlayan sabit olmayan bir fonksiyon örneği veriniz.

6. Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots$$

toplamını hesaplayınız. ($[x]$ ile, x'i aşmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.)

11 IMO - 1969, Romanya

11.1 Yarışma Problemleri

1. Şu özelliği sağlayan sonsuz çoklukta a doğal sayısının olduğunu gösteriniz: $z = n^4 + a$ sayısı, n doğal sayısının hiçbir değeri için asal değildir.

2. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sabitleri ve x gerçel değişkeni için

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{4}\cos(a_3 + x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$$

şeklinde tanımlanıyor. $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ise, $x_2 - x_1 = m\pi$ olacak şekilde bir m tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

3. k kenarı a uzunluğunda, $6 - k$ kenarı da 1 uzunluğunda bir dörtyüzlünün bulunabilmesi için $a > 0$ sayısının gerek ve yeter koşullarını, her $k = 1, 2, 3, 4, 5$ değeri için ayrı ayrı bulunuz.

4. AB çaplı γ yarım çemberi veriliyor. C, γ üzerinde A ve B den farklı bir nokta; D de C den AB ye inilen dikmenin ayağıdır. Üçü de AB doğrusuna teğet olan γ_1, γ_2, γ_3 çemberlerini ele alalım. Bunlardan γ_1, $\triangle ABC$'nin kenarlarına teğet, γ_2 ve γ_3 de γ ve CD ye teğet olup CD ye göre farklı taraflarda yer almaktadır. γ_1, γ_2 ve γ_3 ün ikinci bir ortak teğetinin olduğunu gösteriniz.

5. Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan $n > 4$ nokta veriliyor. Bu noktaların oluşturduğu en az $\binom{n-3}{2}$ dışbükey çokgenin bulunabileceğini gösteriniz.

6. $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ şartını sağlayan tüm $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ gerçel sayıları için

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşulları veriniz.

12 IMO - 1970, Macaristan

12.1 Yarışma Problemleri

1. M, $\triangle ABC$'nin AB kenarı üzerinde bir nokta olsun. r_1, r_2 ve r sırasıyla AMC, BMC ve ABC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçapları olsun. q_1, q_2 ve q da, sırasıyla aynı üçgenlerin ACB açıları üzerinde yer alan dışteğet çemberlerinin yarıçapları olsun.
$$\frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{r_2}{q_2} = \frac{r}{p}$$
olduğunu gösteriniz.

2. a, b ve n tam sayıları 1 den büyük olup a ve b iki sayı sisteminin tabanlarıdır. a tabanındaki A_{n-1} ve A_n sayıları ile, b tabanındaki B_{n-1} ve B_n sayıları arasında
$$\begin{array}{rcl} A_n & = & x_n x_{n-1} \dots x_0, \quad A_{n-1} \;=\; x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0, \\ B_n & = & x_n x_{n-1} \dots x_0, \quad B_{n-1} \;=\; x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0, \\ x_n & \neq & 0, \quad x_{n-1} \neq 0. \end{array}$$
bağıntısı vardır.
$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n} \Leftrightarrow a > b$$
olduğunu gösteriniz.

3. $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ gerçel sayıları arasında
$$1 = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le \dots$$
bağıntısı vardır. $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ sayıları
$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$
şeklinde tanımlanıyor.

   (a) Her n için $0 \le b_n < 2$ eşitsizliğin sağlandığını gösteriniz.

   (b) $0 \le c < 2$ şartını sağlayan bir c sayısı verildiğinde, $b_n > c$ şartını sağlayan yeterince büyük n ler için, yukarıdaki özellikleri sağlayana $a_0, a_1, \dots$ sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

4. $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ kümesinin birideki elemanların çarpımının, diğerindeki elemanların çarpına eşit olacak şekilde iki parçaya ayrılmasını mümkün kılan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

5. $ABCD$ dörtyüzlüsünde BDC açısı dik açıdır. D den ABC düzlemine inilen dikmenin ayağı olan H, aynı zamanda $\triangle ABC$ nin yüksekliklerinin kesişim noktasıdır.
$$(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$
olduğunu gösteriniz. Hangi dörtyüzlülerde eşitliğin sağlandığını belirleyiniz.

6. Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan 100 nokta veriliyor. Bu noktaları köşe kabul eden tüm üçgenleri ele alalım. Bu üçgenlerin %70 inden daha fazlasının dar açılı olamayacağını gösteriniz.

13 IMO - 1971, Çekoslavakya

13.1 Yarışma Problemleri

1. Aşağıdaki iddianın $n = 3$ ve $n = 5$ için doğru, bunun haricinde her $n > 2$ doğal sayısı için yanlış olduğunu gösteriniz.

   Her $a_1, a_2, \dots, a_n$ gerçel sayıları için,

   $$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)+\dots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1}) \geq 0$$

   eşitsizliği sağlanır.

2. Köşeleri $A_1, A_2, \dots, A_9$ olan bir P_1 çokyüzlüsünü ele alalım. $i = 2, 3, \dots, 9$ olmak üzere; P_i ile, P_1 çokyüzlüsünün A_1 den A_2 ye ötelenmesi ile elde edilen çokyüzlüyü gösterelim. $P_1, P_2, \dots, P_9$ çokyüzlülerinden en az ikisinin ortak bir iç noktaya sahip olduğunu gösteriniz.

3. $2^k - 3$ $(k = 2, 3, \dots)$ biçimdeki tam sayılar kümesinin herhangi iki elemanı aralarında asal olan sonsuz elemanlı bir alt kümesinin olduğunu gösteriniz.

4. $ABCD$ dörtyüzlüsünün yüzlerinden her biri dar açılı üçgendir. X, AB kenarı üzerinde A ve B den farklı bir noktadır. Benzer şekilde Y, Z, T sırasıyla BC, CD, DA kenarlarının iç noktalarıdır. Tüm $XYZTX$ kapalı çokgensel yollarını ele alalım.

   (a) $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle CDA + \angle ABC$ ise, çokgensel yollar arasından en kısa yola sahip olanın bulunmadığını gösteriniz.

   (b) $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle CDA + \angle ABC$ ise, sonsuz çoklukta en kısa çokgensel yol olduğunu, $\alpha = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$ olmak üzere; bu en kısa yolun uzunluğunun da $2 \cdot AC \cdot \sin(\alpha/2)$ olduğunu gösteriniz.

5. Her m doğal sayısı için, düzlemde şu özelliği sağlayan bir S noktalar kümesinin var olduğunu gösteriniz:

   S deki her A noktası için, S de, A dan birim uzaklıkta olan tam olarak m nokta vardır.

6. $i, j = 1, 2 \dots, n$ olmak üzere; $A = (a_{ij})$ elemanları negatif olmayan tam sayılar olan bir kare matris olsun. Herhangi bir eleman $a_{ij} = 0$ olduğunda i-inci satır ile j-inci sütundaki elemanların toplamının $\geq n$ olduğunu biliyoruz. Matristeki tüm elemanların toplamının $\geq n^2/2$ olduğunu gösteriniz.

14 IMO - 1972, Polonya

14.1 Yarışma Problemleri

1. Onluk sistemde, iki basamaklı on farklı sayıdan oluşan bir kümeden, elemanları toplamları aynı olan iki ayrık altküme seçilebileceğini gösteriniz.

2. $n \geq 4$ olmak üzere; her kirişler dörtgeninin her biri kirişler dörtgeni olan n dörtgene ayrılabileceğini gösteriniz.

3. Negatif olmayan her m ve n tam sayıları için,

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

kesrinin bir tam sayıya eşit olduğunu gösteriniz. $(0! = 1.)$

4. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pozitif gerçel sayılar olmak üzere;

$$\begin{array}{rcl} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) & \leq & 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) & \leq & 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) & \leq & 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) & \leq & 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) & \leq & 0 \end{array}$$

eşitsizlik sisteminin sağlayan tüm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ beşlilerini bulunuz.

5. Tüm x, y gerçel sayıları için tanımlı gerçel değerli f ve g fonksiyonları, her x, y için

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

eşitliğini sağlamaktadır. $f(x)$ tamamiyle sıfır değilse ve her x için $|f(x)| \leq 1$ ise, her y için $|g(y)| \leq 1$ olduğunu gösteriniz.

6. Dört farklı paralel düzlem veriliyor. Her bir düzlem üzerinde bir köşesi bulunan düzgün bir dörtyüzlünün var olduğunu gösteriniz.

15 IMO - 1973, Sovyetler Birliği

15.1 Yarışma Problemleri

1. g doğrusu üzerinde O noktası, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktaları g ile aynı düzlemde ve hepsi birden g nin aynı tarafında yer alacak ve $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ vektörleri birim vektör olacak şekilde alınıyor. $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ ile $\overrightarrow{OM}$ vekötürünün uzunluğu gösterilmek üzere;

$$\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geq 1$$

olduğunu gösteriniz.

2. M; uzayda, hepsi birden aynı düzlemde yer almayan sonlu noktalar kümesi olsun. M kümesindeki herhangi iki A ve B noktası için, AB ile CD paralel olacak; ama çakışık olmayacak şekilde M kümesinden C ve D noktaları seçilebiliyorsa, bu şekilde bir M kümesinin bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

3. a ve b gerçel sayıları olmak üzere;

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

denkleminin en az bir gerçel çözümü olsun. Bu şekildeki tüm (a, b) sayı çifti için, $a^2 + b^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

4. Bir asker, eşkenar üçgen şeklindeki bir bölgede mayın taraması yapıyor. Kullandığı mayın tarayıcı, eşkenar üçgenin yüksekliğinin yarısı kadar bir yarıçaplı bir dairenin içerisini tarayabiliyor. Asker üçgenin köşelerinden birinden başlayarak tüm bölgeyi taramak amacıyla yola koyuluyor. Askerin görevini en kısa mesafede tamamalayabileceği yolu bulunuz.

5. G; gerçel x değişkeninin

$$f(x) = ax + b, a \text{ ve } b \text{ gerçel sayılar}$$

biçimindeki sabit olmayan fonksiyonlarının kümesi olup, aşağıdaki özellikleri taşımaktadır:

   (a) f ve g fonksiyonları G de ise, $g \circ f$ fonksiyonu da G dedir. (Burada $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ oluyor.)

   (b) f, G de ise, tersi olan f^{-1} de G dedir. (Burada $f(x) = ax + b$ nin tersi $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ oluyor.)

   (c) G deki her f için, $f(x_f) = x_f$ olacak şekilde x_f gerçel sayısı vardır.

   G deki her f için $f(k) = k$ olacak şekilde bir k gerçel sayısının var olduğunu gösteriniz.

6. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif sayılar, q da $0 < q < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir gerçel sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sayılarını bulunuz:

   (a) $k = 1, 2, \ldots, n$ için $a_k < b_k$,

   (b) $k = 1, 2, \ldots, n-1$ için $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$,

   (c) $b_1 + b_2 + \ldots b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

16 IMO - 1987, Küba

16.1 Yarışma Problemleri

1. $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 1)$ kümesinin sabit noktalarının sayısı tam olarak k'ya eşit olan permütasyonlarının sayısı $p_n(k)$ olsun.
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$
olduğunu gösteriniz.
(Not: Bir $S \neq \emptyset$ kümesinden kendi üzerine tanımlı ve bire-bir olan bir f fonksiyonuna S'nin bir permütasyonu denir. S'nin bir i elemanı için $f(i) = i$ ise i f'nin bir sabit noktasıdır denir.)

2. Dar açılı bir ABC üçgeninde A açısının açıortayı BC kenarını L'de ve daha sonra ABC üçgeninin çevrel çemberini N'de kesmektedir. L noktasından AB ve AC kenarlarına çizilen dik doğrular AB kenarını K'da ve AC kenarını M'de kesmektedir. $AKNM$ dörtgeninin alanının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu gösteriniz.

3. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ olan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gerçek sayıları veriliyor. Her $k \geq 2$ tam sayısı için hepsi birden sıfır olmayan öyle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılarının varlığını gösteriniz ki her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $|a_i| \leq k - 1$ ve
$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$
olsun.

4. Negatif olmayan tam sayılar kümesinden kendi içine tanımlı ve her n için $f(f(n)) = n + 1987$ şartını sağlayan bir f fonksiyonunun olmadığını ispat ediniz.

5. Öklid düzleminde (iki boyutlu koordinat düzlemi) her $n \geq 3$ için n noktadan oluşan öyle bir küme bulunuz ki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık irrasyonel olsun ve her üç nokta dejenere olmayan ve alanı bir rasyonel sayıya eşit olan bir üçgen belirlesin.

6. $n \geq 2$ bir tam sayı olsun. Eğer $0 \leq k \leq \sqrt{n/3}$ şartını sağlayan her k tam sayısı için $k^2 + k + n$ bir asal tam sayı ise $k = 0, 1, \ldots, n-2$ için $k^2 + k + n$ sayılarının hepsinin asal olduğunu ispat ediniz.

17 IMO - 1988, Avustralya

17.1 Yarışma Problemleri

1. Aynı düzlemde bulunan ve merkezleri aynı olan R ve r $(R > r)$ yarıçaplı iki çember veriliyor. P küçük çember üzerinde sabit bir nokta ve B büyük çember üzerinde değişken bir nokta olsun. BP doğrusu büyük çemberi C noktasında kesiyor. BP'ye P noktasında dik olan l doğrusu küçük çemberi A noktasında kesiyor. (Eğer l, P noktasında çembere teğet ise $A = P$ dir.)

   (i) $BC^2 + CA^2 + AB^2$ ifadesinin aldığı değerlerin kümesini bulunuz.

   (ii) AB'nin orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

2. n bir pozitif tam sayı ve $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ bir B kümesinin alt kümeleri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

   (a) Her bir A_i'nin tam $2n$ tane elemanı vardır.

   (b) Her bir $A_i < A_j$ $(1 \le i < j \le 2n+1)$ yalnızca bir tek eleman içerir.

   (c) B'nin her bir elemanı en az iki tane A_i'de vardır.

   B'nin her bir elemanını 0 veya 1 iel göstermek istiyoruz. Böyle bir gösterilimin, A_i'lerin her birinin tam n tane 0 içerecek şekilde yapılabilmesi için n'nin değeri ne olmalıdır?

3. Bir f fonksiyonu pozitif tam sayılar kümesinden, pozitif tam sayılar kümesine, her n pozitif tam sayısı için aşağıdaki şekilde tanımlanıyor:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \quad f(3) = 3 \\ f(2n) &= f(n) \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n) \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$

   $f(n) = n$ koşuluna uyan ve 1988'den küçük ya da 1988'e eşit olan n pozitif tam sayılarını bulunuz.

4. $$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \ge \frac{5}{4}$$

   eşitsizliğini sağlayan x reel sayılarının kümesinin, uzunlulari toplamı 1988 olan ayrık aralıkların birleşimi olduğunu gösteriniz.

5. ABC, dik açısı A köşesinde olan bir dik üçgen ve D, A'dan çizilen yüksekliğin ayağı olsun. ABD ve ACD üçgenlerinin iç çemberlerinin merkezlerinin birleştiren doğru AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında kesmektedir. S ve T sırasıyla ABC ve AKL üçgenlerinin alanları ise, $S \ge 2T$ olduğunu gösteriniz.

6. a ve b pozitif tam sayıları, $ab+1$ sayısı a^2+b^2'yi tam olarak bölecek şekilde seçilsin. $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ ifadesinin, bir pozitif tam sayının karesi olduğunu gösteriniz.

18 IMO - 1989, Batı Almanya

18.1 Yarışma Problemleri

1. $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ kümesinin aşağıdaki özelliklere uyan, ikişer ayrık A_i $(i = 1, 2, \ldots, 117)$ altkümelerinin birleşi olarak yazılabildiğini ispatlayınız.

   (i) Her bir A_i kümesinde 17 tane eleman bulunsun,

   (ii) A_i kümelerinin her birindeki elemanlarının toplamı aynı olsun.

2. Dar açılı bir ABC üçgeninde, A açısının iç açıortayı ABC üçgeninin çevrel çemberi ile A_1 noktasında kesişmektedir. B_1 ve C_1 noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor. B ve C açılarının dış açıortaylarının AA_1 doğrusu ile kesişme noktası A_0 olsun. B_0 ve C_0 noktaları da benzer şekilde tanımlansın. Aşağıdakileri ispatlayınız:

   (i) $A_0B_0C_0$ üçgeninin alanı, $AC_1BA_1CB_1$ altıgeninin alanının iki katına eşittir.

   (ii) $A_0B_0C_0$ üçgeninin alanı, ABC üçgeninin alanının en az dört katıdır.

3. n ve k pozitif tam sayılar olsun. S bir düzlem üzerinde bulunan ve aşağıdaki iki koşula uyan n tane noktanın oluşturduğu küme olsun.

   (i) S'deki herhangi üç nokta aynı doğru üzerinde değildir,

   (ii) S'nin her bir P noktası için, bu P noktasına olan uzaklıkları aynı olan ve S'de bulunan en az k tane nokta vardır.

   Bu koşullar altında
   $$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$
   olduğunu ispatlayınız.

4. $ABCD$ bir konveks dörtgen olsun ve $|AB|$, $|AD|$, $|BC|$ kenar uzunlukları
   $$|AB| = |AD| + |BC|$$
   koşulunu sağlasın. Bu dörtgenin içinde aşağıdaki özelliklere uyan bir P noktası vardır.

   (i) P noktasının CD kenarına olan uzaklığı h kadardır.

   (ii) $|AP| = h + |AD|$ ve $|BP| = h + |BC|$'dir.

   Bu takdirde
   $$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$
   olduğunu gösteriniz.

5. Her n pozitif tam sayısı için, her biri bir asal sayının tam kuvveti olmayan, ardışık n tane pozitif tam sayının var olduğunu ispatlayınız.

6. n bir pozitif tam sayı olmak üzere $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ kümesinin bir permütasyonu $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ olsun. Eğer bu permütasyonda en az bir $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ için $|x_i - x_{i+1}| = n$ koşulu sağlanıyorsa, permütasyona P özelliğine sahiptir diyelim.
   Her n için, P özelliğine sahip olan permütasyonların sayısının, P özelliğine sahip olmayanlardan daha fazla olduğunu gösteriniz.

19 IMO - 1990, Amerika Birleşik Devletleri

19.1 Yarışma Problemleri

1. Bir çemberin AB ve CD kirişleri, çemberin içerisindeki E noktasında kesişiyor. M, EB doğru parçası üzerinde bir nokta olsun. D, E, M noktalarından geçen çembere E de teğet olan doğru BC ve AC doğrularını sırasıyla F ve G de kesiyor.
$$\frac{AM}{AB} = t$$
ise
$$\frac{EG}{EF}$$
ifadesinin t cinsinden değerini bulunuz.

2. $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere; E kümesi, bir çember üzerindeki farklı $2n-1$ noktadan oluşan bir küme olsun. Bu noktalardan tam olarak k tanesi siyaha boyanıyor.

3. $$\frac{2^n + 1}{n^2}$$
ifadesinin tam sayı olmasını sağlayan tüm $n > 1$ tam sayılarını bulunuz.

20 IMO - 1992, Sovyetler Birliği

20.1 Yarışma Problemleri

1. $1 < a < b < c$ olmak üzere, $abc - 1$ tam sayısının $(a-1)(b-1)(c-1)$ ile bölünmesini sağlayan tüm a, b, c tam sayılarını bulunuz.

2. $\mathbf{R}$ ile reel sayılar kümesini gösterelim. Her reel x, y için

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + (f(x))^2$$

bağıntısını sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonskiyonlarını bulunuz.

3. Uzayda herhangi dördü aynı düzlem üstünde bulunmayan dokuz nokta verilmiş olsun. Her bir nokta çifti bir kenar (yani bir doğru parçası) ile birleştiriliyor ve her kenar ya mavi ya kırmızıya boyanıyor ya da hiç boyanmadan bırakılıyor. Aşağıdaki koşulu sağlayan en küçük n sayısını bulunuz:

   Kenarlardan tam olarak n tanesi boyandığında, boyalı kenarların kümesi içinde mutlaka üç kenarı da aynı renkte olan bir üçgen bulunur.

4. Düzlemde, C bir çember; L, C çemberine teğet olan bir doğru ve M ise L doğrusu üstünde bir nokta olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan tüm P noktalarının geometrik yerinin bulunuz:

   L doğrusu üstünde Q ve R gibi öyle iki nokta vardır ki, M, QR nin orta noktası ve C de PQR üçgeninin iç çemberi olur.

5. S, üç boyutlu uzayda sonlu sayıda noktadan oluşan bir küme olsun. S_x, S_y ve S_z ile S deki noktaların sırasıyla yz düzlemi, zx düzlemi ve xy düzlemi üstüne dik izdüşümlerinden oluşan kümeleri gösterelim. Bu durumda

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$$

   olduğunu kanıtlayınız. Burada $|A|$ ile sonlu bir A kümesindeki eleman sayısı gösterilmektedir.
   (Not: Bir noktanın bir düzlem üstüne dik izdüşümü, o noktadan düzleme çizilen dikmenin ayağıdır.)

6. Her n pozitif tam sayısı için $S(n)$ sayısını aşağıdaki koşulu sağlayan en büyük tam sayı olarak tanımlıyoruz:

   Her $k < S(n)$ pozitif tam sayısı için, n^2 sayısı k tane pozitif tam karenin toplamı olarak yazılabilir.

   (a) Her $n > 4$ için $S(n) < n^2 - 14$ olduğunu kanıtlayınız.
   (b) $S(n) = n^2 - 14$ eşitliğini sağlayan bir n tam sayısı bulunuz.
   (c) $S(n) = n^2 - 14$ eşitliğini sağlayan sonsuz sayıda n tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

21 IMO - 1993, Türkiye

21.1 Yarışma Problemleri

1. $n > 1$ bir tam sayı ve $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ olsun. $f(x)$ in, herbirinin derecesi en az 1 olan ve tüm katsayıları tam sayılar olan iki polinomun çarpımı şeklinde yazılamayacağını gösteriniz.

2. Daraçılı bir ABC üçgeni içindeki bir D noktası, $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90°$ ve $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ koşullarını sağlamaktadır.

   (a) $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ oranının değerini bulunuz.

   (b) ACD ve BCD üçgenlerinin çevrel çemberlerine C noktasında çizilen teğetlerin dik olduklarını kanıtlayınız.

3. Sonsuz bir satranç tahtası üzerinde aşağıdaki oyun oynanıyor. Başlangıç durumunda, n^2 tane taş her karede bir taş olmak üzere birbirine bitişik karelerden oluşan $n \times n$ büyüklüğündeki bir blokta bulunmaktadırlar. Oyundaki bir hamle, dolu bir komşu kare üzerinden yatay veya düşey doğrultuda geçerek hemen ardındaki boş kareye atlamaktadır. Üzerinden atlanan taş tahtadan kaldırılmaktadır.
   Hangi n değerleri için oyunun tahta üzerinde yalnızca bir taş kalacak şekilde sonuçlanacağını bulunuz.

4. Düzlemde verilen P, Q, R gibi üç nokta için, $m(PQR)$, PQR üçgeninin yüksekliklerinin minimumu olarak tanımlanıyor. (P, Q, R nin doğrusal olması durumunda $m(PQR) = 0$)
   A, B, C düzleminde verilmiş noktalar olsun. Düzlemdeki herhangi bir X noktası için

   $$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

   olduğunu kanıtlayınız.

5. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun. $f(1) = 2$, ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $f(f(n)) = f(n) + n$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) < f(n+1)$ koşullarını sağlayan bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun var olup olmadığını belirleyiniz.

6. $n > 1$ bir tam sayı olsun. Bir çember üzerine n tane lamba $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ yerleştirilmiştir. Her lamba **AÇIK** ya da **KAPALI**dır. $S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$ işlemler dizisi uygulanmaktadır. İşlem S_j yalnızca L_j'nin durumunu (diğer tüm lambalarının durumunu koruyarak) şu şekilde etkiler:

   Eğer L_{j-1} **AÇIK** ise, S_j, L_j'nin durumunu **AÇIK**tan **KAPALI**ya ya da **KAPALI**dan **AÇIK**a çevirir. Eğer L_{j-1} **KAPALI** ise, S_j, L_j'nin durumunu değiştirmez.

   Lambalar n moduna göre şöyle sıralanmıştır:

   $$L_{-1} = L_{n-1}, L_0 = L_n, L_1 = L_{n+1}, \text{vs.}$$

   Başlangıçta bütün lambalar **AÇIK** durumdadır. Aşağıdakileri gösteriniz.

   (a) Öyle bir pozitif tam sayı $M(n)$ vardır ki, $M(n)$ işlemden sonra tüm lambalar tekrar **AÇIK** duruma gelmektedir.

   (b) Eğer n, 2^k şeklindeyse, tüm lambalar $n^2 - 1$ işlemden sonra **AÇIK** duruma gelmektedir.

   (c) Eğer n, $2^k + 1$ şeklindeyse, tüm lambalar $n^2 - n + 1$ işlemden sonra **AÇIK** duruma gelmektedir.

22 IMO - 1994, Hong Kong

22.1 Yarışma Problemleri

1. m ve n pozitif tam sayılar olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin farklı öyle elemanları olsun ki, $1 \leq i \leq j \leq m$ olmak üzere $a_i + a_j \leq n$ olduğu her durumda, $a_i + a_j = a_k$ olacak şekilde bir k $(1 \leq k \leq m)$ bulunsun.
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$
olduğunu kanıtlayınız.

2. ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ olsun.

   (a) M, BC'nin orta noktası; O da, AM doğrusu üstünde bulunan ve OB'nin AB'ye dik olmasını sağlayan nokta olsun.

   (b) Q, BC kenarı üstünde, B ve C'den farklı herhangi bir nokta olsun.

   (c) E, Q ve F aynı doğru üstünde bulunan farklı noktalar olmak üzere, E'nin AB doğrusu, F'nin de AC doğrusu üstünde bulunduğunu kabul edelim.

   OQ'nun EF'ye dik olmasının, $|QE| = |OF|$ olması için gerek ve yeter bir koşul olduğunu kanıtlayınız.

3. Her k pozitif tam sayısı için, $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ kümesine ait ve 2 tabanına göre yazılımlarında tam olarak üç tane 1'in geçtiği elemanların sayısı $f(k)$ olsun.

   (a) Her m pozitif tam sayısı için, $f(k) = m$ olacak şekilde en az bir k pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

   (b) $f(k) = m$ eşitliğinin tam olarak bir k için sağlandığı tüm m pozitif tam sayılarını bulunuz.

4. $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan tüm (m, n) sıralı pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

5. S, -1'den kesin büyük reel sayıların kümesi olsun. Aşağıdaki iki koşulu sağlayan tüm $f : S \to S$ fonksiyonlarını bulunuz:

   (a) S'ye ait her x, y için, $f\left(x + f(y) + xf(y)\right) = y + f(x) + yf(x)$ olup,

   (b) $\dfrac{f(x)}{x}$, $-1 < x < 0$ ve $0 < x$ aralıklarının her birinde kesin artan bir fonksiyondur.

6. Aşağıdaki koşulu sağlayan ve pozitif tam sayılardan oluşan bir A kümesinin var olduğunu gösteriniz:

   Tüm elemanları asal sayılar olan sonsuz her S kümesi için, m ve n sayılarından her birinin S'ye ait k farklı elemanın çarpımı olmasını sağlayacak biçimde $K \leq 2$, $m \in A$ ve $n \notin A$ pozitif tam sayıları vardır.

23 IMO - 1997, Arjantin

23.1 Yarışma Problemleri

1. Köşeleri düzlemdeki tam sayı koordinatlı noktalar olan birim karelere bakalım. Bu kareler (satranç tahtasındaki gibi) sırayla siyah ve beyaza boyanmış olsun. Her (m, n) pozitif tam sayı çifti için, köşeleri tam sayı koordinatlı noktalar olan ve m ve n uzunluğundaki dik kenarları yukarıdaki karelerin kenarları üstünde bulunan bir dik üçgen alalım. S_1 ile bu üçgendeki siyah bölgelerin toplam alanını; S_2 ile de aynı üçgendeki beyaz bölgelerin toplam alanını gösterelim.

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|$$

   olsun.

   (a) Her ikisi de tek veya her ikisi de çift pozitif m ve n tam sayıları için $f(m, n)$ değerini hesaplayınız.

   (b) Her m ve n için $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}$ olduğunu kanıtlayınız.

   (c) $f(m, n) < C$ koşulunu m ve n'nin tüm değerleri için sağlayan bir C sabitinin bulunmadığını gösteriniz.

2. A açısı ABC üçgenindeki açıların en küçüğüdür. B ve C noktaları bu üçgenin çevrel çemberini iki yaya ayırıyor. U, B ve C arasındaki, A noktasını içermeyen yayın bir iç noktası olsun. $[AB]$ ile $[AC]$'nin orta dikmeleri AU doğrusunu sırasıyla V ve W noktlarında kesiyor. BV ile CW doğruları da T noktasında kesişiyor.

$$|AU| = |TB| + |TC|$$

   olduğunu gösteriniz.

3. $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$ ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$$

   koşullarını sağlayan gerçel sayılar olsun.
   $x_1, x_2, \ldots, x_n$'nin

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

   koşulu sağlanacak biçimde bir $y_1, y_2, \ldots, y_n$ permüstasyonu bulunduğunu gösteriniz.

4. Elemanları $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ kümesine ait bir $n \times n$ matrise (n sütun ve n satırdan oluşan kare biçimindeki bir tabloya), eğer her $i = 1, \ldots, n$ için i-inci satır ile i-inci sütun birlikte S'nin tüm elemanlarını kapsıyorsa, bir *gümüş matris* diyoruz.

   (a) $n = 1997$ için hiç bir gümüş matrisin bulunmadığını;

   (b) n'nin sonsuz sayıda değeri için gümüş matrislerin bulunduğunu gösteriniz.

5. $a \geq 1$, $b \geq 1$ olmak üzere,

$$a^{\left(b^2\right)} = b^a$$

   eşitliğini sağlayan tüm (a, b) tam sayı sıralı ikililerini bulunuz.

6. Her n pozitif tam sayısı için, n'nin, 2'nin negatif olmayan tam sayı kuvvetlerinin toplamı olarak yazılış biçimlerinin sayısını $f(n)$ ile gösterelim. Toplamda geçen terimlerin yalnızca sırasının değişik olduğu yazılış biçimlerinini aynı sayıyoruz. Örneğin 4 sayısı; 4, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$ olarak dört şekilde yazılabileceğinden $f(4) = 4$ olur. Her $n \geq 3$ tam sayısı için

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f\left(2^n\right) < 2^{\frac{n^2}{2}}$$

   olduğunu kanıtlayınız.

24 IMO - 1998, Tayvan

24.1 Yarışma Problemleri

1. $ABCD$ konveks dörtgeninde AC ve BD köşegenleri birbirine dik olup, AB ve DC kenarları paralel değildir. AB ve DC'nin orta dikmelerinin kesiştiği P notkasının $ABCD$'nin iç bölgesinde yer aldığı bilinmektedir. $ABCD$'nin bir kirişler dörtgeni olması için gerek ve yeter koşulun ABP ve CDP üçgenlerinin alanlarının eşit olması olduğunu gösteriniz.

2. Bir yarışmada, $b \geq 3$ bir tek sayı olmak üzere, a yarışmacı ve b hakem bulunmaktadır. Her hakem her yarışmacıyı ya "başarılı" ya da "başarısız" olarak değerlendiriyor. k aşağıdaki özelliğe sahip bir sayı olsun: Herhangi iki hakemin en çok k yarışmacı hakkındaki değerlendirmeleri çakışmaktadır.
$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$
olduğunu gösteriniz.

3. Her pozitif n tam sayısı için, $d(n)$ ile n'nin (1 ve n dahil olmak üzere) bölenlerinin sayısını gösterelim.
$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$
olmasını sağlayacak biçimde bir n sayısının bulunduğu tüm pozitif k tam sayılarını bulunuz.

4. $ab^2 + b + 7$'nin $a^2b + a + b$'yi bölmesini sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

5. I ile, ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezini gösterelim. ABC'nin iç çemberinin BC, CA ve AB kenarlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla K, L ve M olsun. B'den geçen ve MK'ya paralel olan doğru, LM ve LK doğrularını sırasıyla R ve S noktalarında kesiyor. $\angle RIS$'nin bir dar açı olduğunu gösteriniz.

6. $\mathbb{N}$ pozitif tam sayılar kümesini göstersin. $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve $\mathbb{N}$'ye ait her s, t için
$$f\left(t^2 f(s)\right) = s\left(f(t)\right)^2$$
koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarını ele alalım. $f(1998)$'in alabileceği en küçük değeri bulunuz.

25 IMO - 1999, Romanya

25.1 Yarışma Problemleri

1. Düzlemde aşağıdaki şartı sağlayan en az üç noktadalı tüm S sonlu kümelerini belirleyiniz:

   S deki herhangi iki farklı A ve B noktası için, AB doğru parçasının orta dikmesi, S nin bir simetri eksenidir.

2. $n \geq 2$ sabit bir tam sayı olsun.

   (a) Aşağıdaki eşitsizliği, her $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ gerçel sayılarını için sağlayan en küçük C sabitini bulunuz.

   $$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{i \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

   (b) Bu C sabiti için, eşitliğin hangi durumda sağlandığını belirleyiniz

3. n sabit bir pozitif çift sayı olmak üzere; $n \times n$ kareli bir tahta ele alalım. Tahta n^2 birim kareden oluşuyor. Ortak kenara sahip karelere komşu kareler diyoruz.
   Tahtanın N tane birim karesini, tahtadaki her kare (işaretli ya da değil) en az bir işaretlenmiş komşu kareye sahip olacak şekilde işaretliyoruz.
   N nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

4. Aşağıdaki koşulları sağlayan tüm (n, p) pozitif tam sayı çiftlerini belirleyiniz:

   p asal,
   $n \leq 2p$,
   $(p-1)^n + 1$ sayısı n^{p-1} ile bölünüyor.

5. G_1 ve G_2 çemberleri, G çemberine sırasıyla, farklı M ve N noktalarında içten teğettir. G_1, G_2 nin merkezinden geçmektedir. G_1 ve G_2 nin kesiştiği noktalardan geçen doğru G yi A ve B de kesmektedir. MA ve MB doğruları, G_1 ile sırasıyla C ve D de kesişmektedir. CD nin G_2 ye teğet olduğunu kanıtlayınız.

6. Tüm x, y gerçel sayıları için

   $$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

   koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

26 IMO - 2000, Güney Kore

26.1 Yarışma Problemleri

1. Γ_1 ve Γ_2 çemberleri M ve N de keşisiyor. ℓ, Γ_1 ve Γ_2 nin M ye yakın olan ortak teğeti olsun. ℓ, Γ_1 e A da, Γ_2 ye de B de değmektedir. M de geçen ve ℓ ye paralel olan doğru Γ_1 çemberini C de, Γ_2 çemberini de D de kesmektedir. CA doğrusu ile DB doğrusu E de, AN doğrusu ile CD doğrusu P de, BN doğrusu ile CD doğrusu Q da kesiştiğine göre, $EP = EQ$ olduğunu gösteriniz..

2. $abc = 1$ olacak şekilde alınan a, b, c pozitif gerçel sayıları için
$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$
olduğunu gösteriniz.

3. $n \geq 2$ pozitif tam sayı olmak üzere, başlangıçta n adet pire, yatay bir doğru boyunca, hepsi birlikte aynı noktada olmayacak şekilde yer almaktadır.
λ pozitif gerçel sayısı için, bir adım şu şekilde tanımlanıyor:

    A, B nin solunda olacak şekilde alınan A ve B noktalarındaki herhangi iki pire için, A daki pire; doğru üzerinde B nin sağında ve $BC/AB = \lambda$ şartını sağlayan C noktasına atlıyor.

    Doğru üzerindeki herhangi bir M noktası için, başlangıçtaki n pirenin dizilişi ne olursa olsun, tüm pireleri M nin sağına taşımayı mümkün kılan tüm λ değerlerini belirleyiniz.

4. Bir sihirbaz 1 den 100 kadar numaralnmış yüz kartı, biri kırmızı, diğeri beyaz, öteki mavi üç kutuya her kutuda en az bir kart olacak şekilde yerleştiriyor.
İzleyicilerden biri bu kutulardan ikisi seçtikten sonra, her iki kutudan da bir kart çekerek, bu kartların üzerinde yazan sayıların toplamını söylüyor. Bu toplama göre, sihirbaz içinden kart alınmayan kutuyu belirleyebiliyor.
Tüm kartlar bu kutulara, yukarıda anlatılan numara her zaman işleyecek şekilde kaç farklı biçimde dağıtılabilir? (Kartlardan en az biri farklı bir kutuya konmuşsa, bu iki yol farklı sayılacak.)

5. n, tam olarak 2000 asal sayı tarafından bölünecek ve
$2^n + 1$ sayısı n ile bölünecek şekilde

    bir n pozitif tam sayısının bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

6. AH_1, BH_2, CH_3 doğru parçaları ABC üçgenin yükseklikleri olsun. ABC üçgeninin içteğet çemberi BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla T_1, T_2, T_3 noktalarında dokunsun. ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 doğruları sırasıyla H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 doğrularının sırasıyla T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 doğrularına göre simetriği olsun.
ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ün köşeleri ABC üçgeninin içteğet çemberi üzerinde olan bir üçgen belirttiğini kanıtlayınız.

27 IMO - 2001, Amerika Birleşik Devletleri

27.1 Yarışma Problemleri

1. Dar açılı ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. BC üzerindeki P, A dan geçen yüksekliğin ayağı olsun.
   $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$ olduğunu kabul edelim.
   $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$ olduğunu kanıtlayınız.

2. Her pozitif gerçel a, b, c sayıları için

   $$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

   olduğunu kanıtlayınız.

3. Yirmi bir kız ile yirmi bir erkek bir matematik yarışmasına katılıyor.

   - Her yarışmacı en fazla altı soru çözmüştür.
   - Her kız ve erkek için, ikisinin de çözdüğü bir soru vardır.

   Buna göre, en az üç kız ve en az üç erkek tarafından çözülen bir sorunun bulunduğunu kanıtlayınız.

4. n, 1 den büyük tek bir tam sayı olsun. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tam sayıları verilsin. $1, 2, \ldots, n$ sayılarının her $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ permütasyonu için

   $$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

   şeklinde tanımlanıyor. $n!$, $S(b) - S(c)$ yi bölecek şekilde b ve c permütasyonlarının ($b \neq c$) olduğunu kanıtlayınız.

5. ABC üçgeninde, BC üzerine P noktası, CA üzerinde Q noktası, AP doğrusu $\angle BAC$ nin açıortayı, BQ doğrusu da $\angle ABC$ nin açıortayı olacak şekilde alınıyor. $\angle BAC = 60^\circ$ ve $AB + BP = AQ + QB$ olduğunu biliniyor. Buna göre, ABC üçgeninin açılarının alabileceği değerleri bulunuz?

6. a, b, c, d tam sayıları $a > b > c > d > 0$ eşitsizliğini sağlasın.

   $$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

   ise, $ab + cd$ nin asal olmadığını kanıtlayınız.

28 IMO - 2006, Slovenya

28.1 Yarışma Problemleri

1. İçteğet çemberinin merkezi I olan bir ABC üçgeninin içinde,

$$m(\widehat{PBA}) + m(\widehat{PCA}) = m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PCB})$$

olacak şekilde bir P noktası seçiliyor. $|AP| \geq |AI|$ olduğunu ve eşitliğin ancak ve ancak $P = I$ olması halinde sağlanacağını gösteriniz.

2. Bir P düzgün 2006-geni veriliyor. P nin bir köşegenine, uçları P nin çevresini, her birisi P nin tek sayıda kenarından oluşan iki parçaya ayırması halinde, *güzel* adı veriliyor. P nin her kenarı da *güzel* kabul ediliyor.
P, herhangi ikisi çokgen içinde kesişmeyen 2003 köşegeni tarafından üçgensel bölgelere ayrıldığında, iki kenarı *güzel* olan en fazla kaç ikizkenar üçgen oluşabileceğini bulunuz.

3. Tüm a, b, c reel sayıları için

$$\left|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)\right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

eşitsizliğini geçerli kılan en küçük M reel sayısını bulunuz.

4. $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) tam sayı ikililerini belirleyiniz.

5. Katsayıları tam sayı ve derecesi $n > 1$ olan bir $P(x)$ polinomu ile bir $k > 0$ tam sayısı veriliyor. $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, P nin k kez kullanılmasıyla tanımlanan polinom olmak üzere, $Q(t) = t$ eşitliğini sağlayan t tam sayılarının sayısının en fazla n olacağını ispatlayınız.

6. Dışbükey bir P çokgeninin her b kenarına, çokgenin dışına taşmayan ve kenarlarından birisi b olan üçgenlerin sahip olabileceği en büyük alan değeri karşı tutuluyor. P nin tüm kenarlarına karşı tutulan değerler toplamının, P nin alanının iki katından küçük olamayacağını gösteriniz.

29 IMO - 2007, Vietnam

29.1 Yarışma Problemleri

1. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayıları verilmiş olsun. Her i $(1 \leq i \leq n)$ için,

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{aj : i \leq j \leq n\}$$

olarak tanımlayalım ve

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$$

olsun.

   (a) Tüm $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ gerçel sayıları için,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \qquad (*)$$

   olduğunu kanıtlayınız.

   (b) $(*)$ da eşitliğin gerçekleşmesini sağlayan $x_1 \leq x_2 \leq \ldots x_n$ gerçel sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

2. A, B, C, D ve E den oluşan beş nokta, $ABCD$ bir paralelkenar ve $BCED$ konveks bir kirişler dörtgeni olacak biçimde verilmiş olsun. A dan geçen bir ℓ doğrusu, $[DC]$ doğru parçasını bir F iç noktasında ve BC doğrusunu da bir G noktasında kessin. $|EF| = |EG| = |EC|$ olduğunu varsayalım. ℓ nin, $\widehat{DAB}$ açısının açı ortayı olduğunu kanıtlayınız.

3. Bir matematik yarışmasına katılan yarışmacılardan bazıları arkadaştır. Arkadaşlık her zaman karşılıklıdır. Bir yarışmacı grubundaki her yarışmacı çifti arkadaşsa, bu gruba bir *klik* diyelim. (Özellikle, ikiden az yarışmacıdan oluşan her grup bir kliktir.) Bir kliğin eleman sayısına bu kliğin *büyüklüğü* diyelim.

   Bu yarışmadaki kliklerin büyüklüklerinin aldığı en büyük değer bir çift sayı olsun. Tüm yarışmacıların, bir odadaki kliklerin büyüklüklerinin en büyük değeri, diğer odadaki kliklerin büyüklüklerinin en büyük değerine eşit olacak biçimde iki odaya yerleştirilebileceğini kanıtlayınız.

4. Bir ABC üçgeninde, $\widehat{BCA}$ açısının açı ortayı, üçgenin çevrel çemberini ikinci kez R de, $[BC]$ nin orta dikmesini P de ve $[AC]$ nin orta dikmesini de Q da kesiyor. $[BC]$ nin orta noktası K ve $[AC]$ nin orta noktası L olsun. RPK ve RQL üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu kanıtlayınız.

5. a ve b pozitif tam sayılar olsun. $4ab - 1$, $(4a^2 - 1)^2$ yi bölüyorsa, $a = b$ olduğunu kanıtlayınız.

6. n pozitif bir tam sayı olsun. Üç boyutlu uzayda $(n+1)^3 - 1$ noktadan oluşan

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}$$

   kümesi veriliyor. Birleşimleri S kümesini kapsayan, ama $(0, 0, 0)$ noktasını içermeyen düzlemlerin sayısının alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

30 IMO - 2008, İspanya

30.1 Yarışma Problemleri

1. Daraçılı ABC üçgeninin ortasantrı (yüksekliklerinin kesişim noktası) H olsun. Merkezi BC nin orta noktası olup H den geçen çember BC doğrusunu A_1 ve A_2 noktalarında kesiyor. Benzer şekilde, merkezi CA nin orta noktası olup H den geçen çember CA doğrusunu B_1 ve B_2 noktalarında ve merkezi AB nin orta noktası olup H den geçen çember AB doğrusunu C_1 ve C_2 noktalarında kesiyor. $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ noktalarının aynı çember üzerinde bulunduklarını gösteriniz.

2. (a) Herbiri 1 den farklı olan ve $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z gerçel sayıları için

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

   (b) Herbiri 1 den farklı olan ve $xyz = 1$ koşulunu sağlayan sonsuz tane x, y, z rasyonel sayı üçlüsü için yukarıdaki eşitsizliğin eşitliğe dönüştüğünü gösteriniz.

3. Sonsuz tane n doğal sayısı için n^2+1 sayısının $2n+\sqrt{2n}$ den büyük asal böleninin olduğunu kanıtlayınız.

4. $wx = yz$ olmak üzere, tüm w, x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{\left(f(w)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2}{f\left(y^2\right) + f\left(z^2\right)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

koşulunu sağlayan tüm $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (diğer deyişle f, pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlı ve pozitif değerler alan bir fonksiyondur) fonksiyonlarını bulunuz.

5. n ve k pozitif tam sayı olmak üzere, $k \geq n$ ve $k-n$ çift sayıdır. $1, 2, \ldots, 2n$ sayılarıyla numaralandırılmış $2n$ tane lambanın herbiri *açık* veya *kapalı* durumda olabiliyor. Başlangıçta lambaların hepsi kapalı durumdadır. Her hamlesinde bir lamba seçilerek, seçilen lambanın durumunu değistiren (açıktan kapalıya veya kapalıdan açığa) *hamleler* dizileri tanımlayalım.
Sonucunda 1 den n ye kadar olan lambaları açık ve $n+1$ den $2n$ ye kadar olan lambaları kapalı duruma getiren ve k hamle içeren tüm hamleler dizilerinin sayısı N olsun.
Sonucunda yine 1 den n ye kadar olan lambaları açık ve $n+1$ den $2n$ ye kadar olan lambaları kapalı duruma getiren ve k hamle içeren, fakat $n+1$ den $2n$ ye kadar olan lambalarla hiç hamle yapmayan tüm hamleler dizilerinin sayısı M olsun.
N/M oranının değerini bulunuz.

6. $|BA| \neq |BC|$ olmak üzere, $ABCD$ bir konveks dörtgen olsun. ABC ve ADC üçgenlerinin içteğet çemberleri sırasıyla ω_1 ve ω_2 olsun. BA ışınınına A dan sonraki bir noktada ve BC ışınınına C den sonraki bir noktada teğet olan ve aynı zamanda AD ve CD doğrularına da teğet olan bir ω çemberinin olduğunu varsayalım. ω_1 ve ω_2 çemberlerinin ortak dış teğetlerinin ω çemberi üzerinde kesiştigini kanıtlayınız.

31 IMO - 2009, Almanya

31.1 Yarışma Problemleri

1. n pozitif bir tam sayı; $a_1, \dots, a_k$ $(k \geq 2)$ de, $\{1, \dots, n\}$ kümesine ait olan ve, her $i = 1, \dots, k-1$ için, n sayısının $a_i(a_{i+1} - 1)$ sayısını bölmediğini kanıtlayınız.

2. O, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi; P ve Q da, sırasıyla, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarları üstünde, köşelerden farklı iki nokta olsun. K, L ve M sırasıyla, $[BP]$, $[CQ]$ ve $[PQ]$ doğru parçalarının orta noktaları olmak üzere; K, L ve M sırasıyla, $[BP]$, $[CQ]$ ve $[PQ]$ doğru parçalarının orta noktaları olmak üzere; K, L ve M den geçen çembere Γ diyelim. PQ doğrusu Γ çemberine teğet ise, $|OP| = |OQ|$ olduğunu kanıtlayınız.

3. Pozitif tam sayılardan oluşan ve kesin artan $s_1, s_2, s_3, \dots$ dizisinin

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \text{ ve } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

altdizilerinin her ikisi de birer artimetik dizi ise, $s_1, s_2, s_3, \dots$ dizisinin kendisinin de bir aritmetik dizi olduğunu kanıtlayınız.

4. $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninde $\widehat{CAB}$ ve $\widehat{ABC}$ açılarının açıortayları $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarını sırasıyla, D ve E noktalarında kesiyor. K, ADC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olmak üzere; $m(\widehat{BEK}) = 45°$ ise, $m(\widehat{CAB})$ nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

5. Pozitif tamsayılar kümesinden pozitif tamsayılar kümesine tanımlı olan ve tüm a ve b pozitif tamsayıları için, yoz olmayan ve kenar uzunlukları

$$a, f(b) \text{ ve } f\left(b + f(a) - 1\right)$$

olan bir üçgenin bulunmasını sağlayan bütün f fonksiyonlarını belirleyiniz.
(*Yoz* üçgen, köşeleri doğrudaş olan üçgendir.)

6. $a_1, a_2, \dots, a_n$ birbirinden farklı pozitif tamsayılar; M de, $n-1$ tane pozitif tam sayıdan oluşan ve $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sayısını içermeyen bir küme olsun. Bir çekirge, gerçel sayı doğrusu üstünde 0 noktasından başlayarak sağa doğru, uzunlukları kendi seçtiği bir sırada $a_1, a_2, \dots, a_n$ olan n sıçrayış yapacaktır. Çekirgenin sıçrayışlarının uzunluklarının sırasını, hiçbir sıçrayışta M ye ait bir noktaya düşmeyecek biçimde seçebileceğini kanıtlayınız.

32 IMO - 2010, Kazakistan

32.1 Yarışma Problemleri

1. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,
$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$
eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları belirleyiniz. (Burada $\lfloor z \rfloor$ ile, z yi aşmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.)

2. Bir ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi I ve çevrel çemberi Γ dır. AI doğrusu Γ yı ikinci kez D de kesiyor.
$$m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{CAE}) < \frac{1}{2} m(\widehat{BAC})$$
koşullarını sağlayacak biçimde, BDC yayı üstünde E ve $[BC]$ kenarı üstünde F noktası alınıyor. $[IF]$ doğru parçasının orta noktası G olsun. DG ve EI doğrularının Γ ya ait bir noktada kesiştiğini kanıtlayınız.

3. $\mathbb{Z}^+$ ile pozitif tam sayılar kümesini gösterelim. Her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,
$$(g(m) + n)(m + g(n))$$
sayısının tam kare olmasını sağlayan tüm $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonskiyonlarını belirleyiniz.

4. P, ABC üçgeninin içinde yer alan bir nokta olsun. AP, BP ve CP doğruları, ABC üçgeninin çevrel çemberi Γ yı ikinci kez sırasıyla, K, L ve M noktalarında kesiyor. Γ ya C noktasında teğet olan doğru da, AB doğrusunu S noktasında kesiyor. $|SC| = |SP|$ ise, $|MK| = |ML|$ olduğunu kanıtlayınız.

5. $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ ile gösterilen altı kutunun her birinde başlangıçta birer madenî para bulunuyor. İki tip işleme izin veriliyor:

   Tip 1: $1 \leq j \leq 5$ olacak biçimde, boş olmayan bir B_j kutusu seçiyoruz. B_j den bir madenî para çıkarıyoruz ve B_{j+1} e iki madenî para koyuyoruz.

   Tip 2: $1 \leq k \leq 4$ olacak biçimde, boş olmayan bir B_{k+1} ile B_{k+2} kutularının içeriklerini birbiriyle değiştiriyoruz.

   Sonucunda, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 kutularının boş olmasını ve B_6 kutusunda da tam olarak $2010^{2010^{20}}$ madenî para olmasını sağlayan sonlu bir işlemler dizisi bulunup bulunmadığını belirleyiniz. (Burada $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ dir.)

6. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bir pozitif gerçel sayılar dizisi olsun. Her $n > s$ için,
$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$
olmasını sağlayan bir s pozitif tam sayısı bulunduğunu varsayalım. $\ell \leq s$ ve her $n \geq N$ için $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ olacak biçimde bir ℓ ve N pozitif tam sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.

33 IMO - 2011, Hollanda

33.1 Yarışma Problemleri

1. Dört farklı pozitif tam sayıdan oluşan bir $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ kümesi için, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ toplamını s_A ile gösteriyoruz. $1 \leq i < j \leq 4$ olmak üzere, $a_i + a_j$ nin s_A yı böldüğü (i, j) ikililerinin sayısını da n_A ile gösterelim. Dört farklı pozitif tam sayıdan oluşan ve n_A nın alabileceği en büyük değeri almasını sağlayan tüm A kümelerini bulunuz.

2. $\mathcal{S}$ düzlemde en az iki noktadan oluşan sonlu bir küme olsun. $\mathcal{S}$ nin herhangi üç noktasının doğrudaş olmadığını varsayalım. Bir *yeldeğirmeni*, $\mathcal{S}$ ye ait tek bir P noktasından geçen bir ℓ doğrusu ile başlayan bir süreçtir. Bu doğru, *dönme merkezi* P olmak üzere, $\mathcal{S}$ nin başka bir noktasından daha geçtiği ilk ana kadar saat yönünde dönüyor. Bu ikinci noktaya Q dersek, bundan sonra doğru, yeni dönme merkezi Q olmak üzere, tekrar $\mathcal{S}$ nin başka bir noktasından daha geçtiği ilk ana kadar saat yönünde dönmeyi sürdürüyor. Bu süreç sonsuza kadar devam ediyor.
   Oluşan yeldeğirmeninin $\mathcal{S}$ nin her noktasını sonsuz kez dönme merkezi olarak kullanmasını sağlayacak biçimde, $\mathcal{S}$ ye ait bir P noktası ve P den geçen bir ℓ doğrusu seçebileceğimizi gösteriniz.

3. Gerçel sayılar kümesinden kendisine tanımlı bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, tüm x, y gerçel sayıları için,
   $$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$
   koşulunu sağlıyor. Her $x \leq 0$ için, $f(x) = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

4. $n > 0$ bir tam sayı olsun. İki kefeli bir terazimiz ve ağırlıkları $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$ olan n tane ağırlığımız var. Bu ağırlıkları n hamlede birer birer ve hiçbir aşamada sağ kefe sol kefeden daha ağır olmayacak biçimde teraziye yerleştirmemiz gerekiyor. Tüm ağırlıklar teraziye konulana kadar her hamlede, teraziye henüz konulmamış ağırlıklarda birini seçerek bunu sol veya sağ kefeye yerleştiriyoruz. Bu hamleler dizisini kaç farklı biçimde yapabileceğimizi belirleyiniz.

5. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini ve $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayılar kümesini göstermek üzere; $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ bir fonksiyon olsun. Tüm m, n tam sayıları için, $f(m) - f(n)$ farkının $f(m - n)$ ile bölündüğünü varsayalım. $f(m) \leq f(n)$ koşulunu sağlayan tüm m, n tam sayıları için, $f(n)$ sayısının $f(m)$ ile bölündüğünü kanıtlayınız.

6. ABC, çevrel çemberi Γ olan dar açılı bir üçgen olsun. ℓ, Γ ya teğet olan bir doğru ve ℓ nin BC, CA ve AB doğrularına göre yansıtılmasıyla elde edilen doğrular da sırasıyla, ℓ_a, ℓ_b ve ℓ_c olsun. ℓ_a, ℓ_b ve ℓ_c doğrularının belirlediği üçgenin çevrel çemberinin Γ çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

34 IMO - 2012, Arjantin

34.1 Yarışma Problemleri

1. Bir ABC üçgeninde A köşesinin karşısındaki dışteğet çemberin merkezi J noktası olsun. Bu dışteğet çember BC kenarına M, AB ve AC doğrularına ise sırasıyla K ve L noktalarında teğettir. LM ve BJ doğruları F noktasında, KM ve CJ doğruları ise G noktasında kesişiyor. AF ve BC doğrularının kesişim noktası S, AG ve BC doğrularının kesişim noktası ise T olsun. M'nin $[ST]$ doğru parçasının orta noktası olduğunu kanıtlayınız.
   (ABC üçgeninin A köşesinin karşısındaki *dışteğet çember*; BC kenarına, B'nin ötesinde $[AB$ ışınına ve C'nin ötesinde $[AC$ ışınına teğet olan çemberdir.)

2. $n \geq 3$ bir tam sayı ve $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$ olsun.
   $$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \ldots (1+a_n)^n > n^n$$
   olduğunu gösteriniz.

3. *Yalancının sayısını tahmin etme oyunu*, A ve B oyuncuları arasında oynanan bir oyundur. Oyun, her iki oyuncuya da önceden bildirilen k ve n pozitif tam sayılarına göre oynanıyor.
   Oyunun başında A oyuncusu $1 \leq x \leq N$ olacak şekilde x ve N tam sayılarını seçer ve N sayısının ne olduğunu B oyuncusuna dürüstçe söyler, fakat x sayısını gizli tutar. Daha sonra B oyuncusu A oyuncusuna sorular sorarak x sayısı hakkında bilgi edinmeye çalışır. Her defasında B oyuncusu pozitif tam sayılardan oluşan bir S kümesi belirler (bu küme daha önceki bir soruda geçen küme de olabilir) ve A oyuncusuna "x sayısı S kümesinin elemanı mıdır?" diye sorar. B oyuncusu istediği kadar soru sorabilir. A oyuncusu istediği kadar yalan söyleyebilir, fakat herhangi ardışık $k+1$ cevabından en az biri doğru olmak zorundadır.
   B oyuncusu istediği kadar soru sorduktan sonra en fazla n pozitif tam sayıdan oluşan bir X kümesi belirlemelidir. Eğer x sayısı X kümesinin elemanı ise B oyunu kazanır, aksi durumda kaybeder.
   (a) $n \geq 2^k$ ise, B oyuncusunun oyunu kazanmayı garantileyebileceğini kanıtlayınız.
   (b) Yeterince, büyük her k tam sayısı için, B oyuncusunun oyunu kazanmayı garantilemesinin mümkün olmadığı bir $n \geq 1,99^k$ tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

4. $a+b+c=0$ olmak üzere, tüm a, b, c tam sayıları için
   $$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$
   eşitliğini sağlayan bütün $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.
   (Burada $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesidir.)

5. Bir ABC üçgeninde $\angle BCA = 90°$ ve C köşesinden indirilen yüksekliğin ayağı D olsun. $[CD]$ doğru parçası üzerinde C ve D noktalarından farklı bir X noktası alınıyor. $[AX]$ doğru parçası üzerinde $|BK| = |BC|$ olacak şekilde bir K noktası ve benzer şekilde $[BX]$ doğru parçası üzerinde $|AL| = |AC|$ olacak şekilde bir L noktası seçiliyor. AL ve BK doğrularının kesişim noktası M olsun. $|MK| = |ML|$ olduğunu gösteriniz.

6. Hangi n pozitif tam sayıları için,
   $$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$$
   eşitliklerini sağlayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ negatif olmayan tam sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.