MATEMATİK OLİMPİYATLARI 1991-2012

İkinci Aşama ile Takım Seçme Sınavı
Soru ve Çözümleri

JANUARY 1, 2013

32. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1991

Commented [A1]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

Commented [A2]: Tarih bilinmiyor. 3 soru 3 saat. İki oturum.

1. Bir ABC üçgeninin AB, AC ve BC kenarları üzerinde sırası ile C', B' ve A' noktaları işaretleniyor.
$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{BC'}{C'A} = \frac{CA'}{A'B} = k$$
olduğu bilindiğine göre, AA', BB' ve CC' doğrularının sınırladığı üçgenin alanının, ABC üçgeni alanına oranının
$$\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$$
olduğunu gösteriniz.

2. $a^2+b^2+c^2+d^2 = a^2b^2c^2d^2$ denklemini sağlayacak şekilde a, b, c, d pozitif tam sayılarının bulunamayacağını gösterin.

3. a_i katsayıları $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinden olmak üzere $|x| < 1$ için tanımlı $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ fonksiyonu için $f\left(\frac{1}{10}\right)$ bir rasyonel sayıdır. Tamsayı katsayılı uygun $p(x)$ ve $q(x)$ polinomları ile fonksiyonun ($|x| < 1$ için)
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$
şeklinde yazılabileceğini kanıtlayınız.

4. Bir havuzun ortasında yanyana sıralanmış N-tane taşın üzerinde bir kurbağa sıçrıyor. Kurbağa bulunduğu taştan p olasılıkla soldaki, $1-p$ olasılıkla ise sağdaki taşa sıçrıyor. En soldaki taştan sola, ya da en sağdaki taştan sağa sıçrayan kurbağa suya düşüyor. Sol baştan k-ıncı taşta bulunan kurbağanın ilk olarak sağ uçtan suya düşme olasılığını p_k ile gösterirsek; $p < \frac{1}{3}$ için $p_1 > \frac{1}{2}$ olduğunu kanıtlayınız.

5. p yolcu, n vagondan oluşan bir trene içinde yolculuk edecekleri vagonu rastgele seçerek binerler. Her vagonda en az bir yolcu bulunması olasılığını hesap ediniz.

6. Köşeleri O, A, B, C olabir bir dörtyüzlünün (üçgen piramidin) kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden (dışbükey) cismin hacmi V ve bütün kenarlarının uzunlukları toplamı U ise
$$V \leq \frac{(U-|OA|-|BC|)(U-|OB|-|AC|)(U-|OC|-|AB|)}{2^7 \cdot 3}$$
olacağını gösteriniz.

32. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1991 – Çözümler

1. $AA' \cap CC' = \{K\}, AA' \cap CB' = \{L\}$ ve $BB' \cap CC' = \{M\}$ olsun. $CL \cap AB = \{C''\}$ olsun.
   Ceva teoremine göre $\frac{AC''}{C''B} = \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} = k^2$.
   $\frac{[CAL]}{[CLB]} = k^2, \frac{[ALB]}{[BCL]} = k$ olduğuna göre $[ABC] = (k^2 + k + 1) \cdot [BCL]$ olur.
   Benzer şekilde $[ABC] = (k^2 + k + 1) \cdot [AKC]$ ve $[ABC] = (k^2 + k + 1) \cdot [BAL]$ elde edilir. Bu durumda $[BCM] = [BAL] = [AKC]$ olur. Bu durumda $[KLM] = [ABC] - [BAL] - [CAK] - [CMB] = [ABC] - 3k[BCL] = [BCL](k^2 - 2k + 1)$.
   $\frac{[KLM]}{[ABC]} = \frac{[BCL](k^2-2k+1)}{[BCL](k^2+k+1)} = \frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$.

   Not: Bu sorunun genel hali Routh Teoremi olarak geçiyor.
   $\frac{AB'}{B'C} = x, \frac{BC'}{C'A} = y, \frac{CA'}{A'B} = z$ ise AA', BB' ve CC' doğrularının sınırladığı üçgenin alanının, ABC üçgeni alanına oranı $\frac{(xyz-1)^2}{(xy+y+1)(yz+z+1)(zx+x+1)}$ dir.

2. Sayıların hepsi çift olmalı. Sayıların hepsi tek ise; sol taraf çift, sağ taraf tek olur. Sayılardan en az bir tanesi çift olduğunda, mod 4 sağ taraf 0 olacak. Sol tarafın mod 4 te alabileceği değerler $\{1,2,3\}$ kümesinden olabilir. Bu durumda sayıların hepsi çifttir. $a, b, c, d > 0$ olduğu için $a, b, c, d > 1$ dir. Pozitif çift sayılarda $\frac{y}{y-1} < 2 \leq x \Rightarrow y < xy - x \Rightarrow x + y < xy$ bağıntısı vardır.
   $a^2 + b^2 < a^2b^2$ ve $c^2 + d^2 < c^2d^2, \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < a^2b^2 + c^2d^2 < a^2b^2c^2d^2$. Buna göre $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2$ denkliğinin pozitif tamsayılarda çözümü yoktur.

3. $f\left(\frac{1}{10}\right) = \overline{0.a_1a_2a_3a_4 \ldots}$ rasyonel olduğuna göre (a_i) dizisi bir yerden sonra periyodik. N-inci terimden sonra k terimlik periyodik olduğunu varsayalım. Her $n > N$ için $a_{k+n} = a_n$ olacaktır. Örneğin $0.12345674567456 \ldots = 0.123\overline{4567}$ sayısı için her $n > N = 3$ için $a_{4+n} = a_n$ olacaktır. $g(x)$ ile tekrarlamayan kısmı $h(x)$ ile de tekrarlayan kısmı gösterelim.
   $f(x) = g(x) + h(x)$, $g(x) = a_1x^1 + \cdots + a_Nx^N$ ve
   $h(x) = a_{N+1}x^{N+1} + a_{N+2}x^{N+2} + \cdots + a_{N+1}x^{N+k+1} + a_{N+2}x^{N+k+2} + \cdots$ olacaktır.
   Yeniden düzenlediğimizde $h(x) = a_{N+1}\left(x^{N+1} + x^{N+k+1} + x^{N+2k+1} + \cdots\right) + a_{N+2}\left(x^{N+2} + x^{N+k+2} + x^{N+2k+2} + \cdots\right) + \cdots + a_{N+k}\left(x^{N+k} + x^{N+2k} + x^{N+3k} + \cdots\right)$ elde ederiz. $\left(x^{N+i} + x^{N+k+i} + x^{N+2k+i} + \cdots\right) \cdot \left(1 - x^k\right) = x^{N+i}$ olacağı için
   $h(x) \cdot \left(1 - x^k\right) = a_{N+1}x^{N+1} + a_{N+2}x^{N+2} + \cdots a_{N+k}x^{N+k}$ sonlu katsayılı bir polinom elde edilir.
   $f(x)\left(1 - x^k\right) = g(x)\left(1 - x^k\right) + h(x)(1 - x^k)$ eşitliğinde her tarafı $\left(1 - x^k\right)$ ile bölelim. $f(x) = \frac{g(x)\left(1-x^k\right)+h(x)\left(1-x^k\right)}{1-x^k} = \frac{p(x)}{q(x)}$ eşitliğinden
   $p(x) = g(x)\left(1 - x^k\right) + h(x)(1 - x^k)$ ve $q(x) = 1 - x^k$ şeklinde tam katsayılı sonlu terimli iki polinom bulunabilir.

4. Kurbağanın ilk olarak sağ uçtan suya düşme olasılığı p_k, p olasılıkla sola atlayacağı için, $p \cdot p_{k-1}$; $(1 - p)$ olasılıkla sağa atlayacağı için $(1 - p) \cdot p_{k+1}$ ifadelerinin toplamına eşittir. $p_k = pp_{k-1} + (1 - p)p_{k+1}$ elde edilir. Sorunun doğası gereği $p_0 = 0$,

$p_{N+1} = p_{N+2} = \cdots = 1$ dir. $(1-p)p_{k+1} - p_k + pp_{k-1} = 0$ doğrusal indirgemeli dizisinde $r_1 = 1$ ve $r_2 = \frac{p}{1-p}$ çıkacaktır. $p_k = \left(\frac{p}{1-p}\right)^k c_1 + c_2$ dizisindeki sabit terimleri bulmaya çalışalım. $p_0 = 0$ olduğu için $p_k = \left(\frac{p}{1-p}\right)^k c_1 - c_1 = c_1\left(\left(\frac{p}{1-p}\right)^k - 1\right)$. $p_{N+1} = 1$ olduğu için $c_1 = \frac{(1-p)^{N+1}}{p^{N+1}-(1-p)^{N+1}}$ elde edilir.

$p_k = \frac{(1-p)^{N+1}}{p^{N+1}-(1-p)^{N+1}} \frac{(p^k-(1-p)^k)}{(1-p)^k} \Rightarrow p_1 = \frac{(1-p)^{N+1}}{p^{N+1}-(1-p)^{N+1}}\left(\frac{2p-1}{1-p}\right)$

$\Rightarrow p_1 = \frac{1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{N+1}-1}\left(\frac{1}{1-p} - 2\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{N+1}}\left(2 - \frac{1}{1-p}\right) > \frac{1}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{N+1}}\left(2 - \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)$

$> \frac{1}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{N+1}} \cdot \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ elde edilir.

5. Her yolcu için n seçenek olduğu için toplamda n^p seçenek vardır.

S_0: $0,1,2,\ldots n-1$ adet vagonun boş kaldığı durumlar.
S_1: $1,2,\ldots n-1$ adet vagonun boş kaldığı durumlar.
S_k: $k, k+1,\ldots n-1$ adet vagonun boş kaldığı durumlar.
S_{n-1}: $n-1$ adet vagonun boş kaldığı durumlar.
İçerme-Dışarma prensibine göre $S = S_0 - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^{n-1}S_{n-1}$ kümesi boş vagonun kalmadığı durumları verir. Dağıtım yapılacak vagonlar $\binom{n}{a}$ şekilde seçilebilir. Bu a vagona p kişi a^p şekilde dağıtılabilir. Bu durumda $S_k = \binom{n}{n-k}(n-k)^p$ olacaktır. Aradığımız değer $S = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^p$. Bu durumda her vagonda en az bir yolcu bulunması olasılığı $\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^p}{n^p}$ dir. Aslında yukarıdaki ifade saymada bilinen bir sayının özel bir hali. Stirling sayısı, $S(p,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^p$ şeklinde tanımlanan bir sayı. Bu durumda soruda bahsi geçen olasılık $P = \frac{S(p,n)n!}{n^p}$ olacaktır.

6.

33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1992

Commented [A3]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

Commented [A4]: Tarih bilinmiyor. 3 soru 3 saat. İki oturum.

1. Her terimi $2 \leq p \leq 11$ koşulunu sağlayan p asal sayılarından en az biri ile bölünen 14 ardışık pozitif tamsayı bulunup bulunmadığını saptayınız.

2. ABC üçgeninin B köşesinden geçerek AC kenarına E noktasında dik olan doğru, bu üçgenin O merkezli çevrel çemberini D noktasında kesiyor. D den BC kenarına inilen dikmenin ayağı F noktası olduğuna göre BO doğrusunun EF doğrusuna dik olduğunu ispatlayınız.

3. $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ pozitif reel sayıları
$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n+1}} = 1$$
koşulunu sağlıyorsa
$$x_1 x_2 \ldots x_{n+1} \geq n^{n+1}$$
olduğunu gösteriniz.

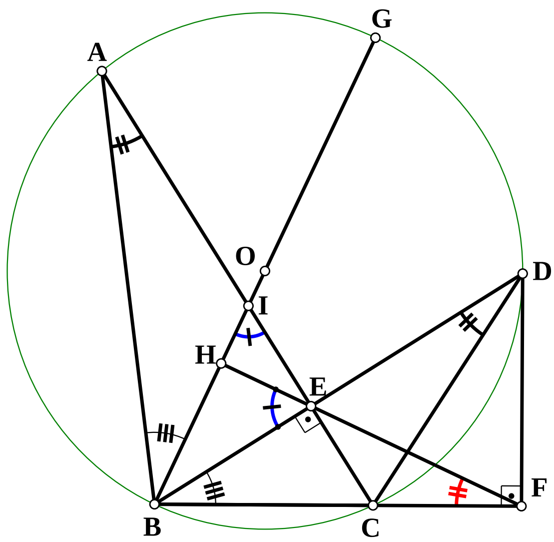
4. $ABCD$ konveks kirişler dörtgeninin köşegenlerinin kesim noktasından AB, BC, CD, DA kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sıra ile P, Q, R, S noktaları olduğuna göre,
$$PQ + RS = QR + SP$$
eşitliğini ispatlayınız.

5. 1 den n ye kadar numaralanmış n kutudan 1 numaralı olanın kapağı açık; diğerlerinin kapakları kapalı bulunmaktadır. Birbirinin eşi m toptan $(m \geq n)$ bir tanesi bu açık kutuya koyulunca 2 numaralı kutunun kapağı açılıyor. Şimdi açık bulunan iki kutudan rastgele birine top koyulunca üçüncü kutu açılıyor. Bu şekilde devam edilerek son kutu da açıldıktan sonra geriye kalan top(lar) kutulara rastgele dağıtılıyor. Bu şartlar altında topların kutulara dağıtımı kaç farklı şekilde yapılabilir?

6. Yarıçapı 4 birim olan bir dairenin içinde 251 tane farklı nokta veriliyor. Bu noktalardan en az 11 tanesini içeren, yarıçapı bir birim olan bir daire çizilebileceğini gösteriniz.

1. 14 ardışık sayının 7 tanesi tektir. Bunlardan en fazla 1 tanesi 7 ile bölünür. En fazla 1 tanesi 11 ile bölünür. En fazla 2 tanesi 5 ile bölünür. En fazla 3 tanesi 3 ile bölünür. Hiçbiri 2 ile bölünmez. $1+1+2+3+0=7$ olduğu için her bir sayının sadece bir asal sayı ile bölünmesi gerekir. Aksi durumda en az bir sayı $2 \leq p \leq 11$ arasındaki asal sayılardan en az biri ile bölünmez. En fazla 3 tanesi 3 ile bölünür demiştik. Bu durumda en baştaki ve en sondaki sayılar 3 ile bölünmek zorunda. En fazla 2 tanesi 5 ile bölünür demiştik. (Daha iyi anlamak için 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27 dizisi üzerinden sayıları seçebilirsiniz.) Bu durumda ya ilk sayı ile sondan ikincisi, ya da ikinci sayı ile son sayı 5 ile bölünmek zorunda. Demek ki bu sayılardan en az bir tanesi $2 \leq p \leq 11$ arasındaki asal sayılardan en az biri ile bölünmez.

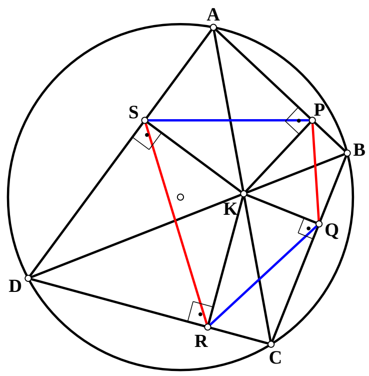
2. BO ile AC, I da; EF ile BO da H noktasında kesişsin. $EDFC$ dörtgeni karşılıklı açıları (E ve F) toplamı $180°$ olduğu için kirişler dörtgenidir.
$\angle EDC = \angle EFC = \angle BAC$ (1).
$\angle ABO = \angle DBC = 90° - \angle ACB$ (2).
$\angle BIE = \angle BAC + \angle ABO$ ve $\angle HEB = \angle DBC + \angle EFC$ olduğu için $\angle BIE = \angle HEB \Rightarrow \angle EHB = 90°$ olur.



Not: AC, G nin Simson doğrusu; EF, D nin Simson doğrusudur. İki noktanın Simson doğruları arasındaki açı, bu iki noktanın belirlediği yayın ölçüsünün yarısı kadardır. Bir başka deyişle, bu yayı göre çevre açının ölçüsüne eşittir. Bu durumda $\angle OEH = \angle GBD$ ve $BO \perp EF$ olacaktır.

3. $y_i = \frac{1}{1+x_i}$ dediğimizde soru $y_1 + y_2 + \cdots + y_{n+1} = 1$ ve $x_1 x_2 \ldots x_{n+1} = \frac{1-y_1}{y_1}\frac{1-y_2}{y_2}\ldots\frac{1-y_{n+1}}{y_{n+1}} \geq n^{n+1}$ şekline dönüştü. $\frac{1-y_1}{y_1}\frac{1-y_2}{y_2}\ldots\frac{1-y_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{(y_2+y_3+\cdots y_{n+1})}{y_1}\frac{(y_1+y_3+\cdots y_{n+1})}{y_2}\ldots\frac{(y_1+y_2+\cdots y_n)}{y_{n+1}}$ olacaktır. n terimli y_i toplamları için $A.O \geq GO$ uygularsak;
$\frac{y_2+y_3+\cdots y_{n+1}}{n} \geq \sqrt[n]{y_2 y_3 \ldots y_{n+1}} \Rightarrow \frac{y_2+y_3+\cdots y_{n+1}}{y_1} \geq \frac{n\sqrt[n]{y_2 y_3 \ldots y_{n+1}}}{y_1}$ elde ederiz.
$n+1$ adet terim için $A.O \geq GO$ uyguladıktan sonra taraf tarafa çarparsak $\frac{(y_2+y_3+\cdots y_{n+1})}{y_1}\frac{(y_1+y_3+\cdots y_{n+1})}{y_2}\ldots\frac{(y_1+y_2+\cdots y_n)}{y_{n+1}} \geq n^{n+1}\frac{y_1 y_2 \ldots y_{n+1}}{y_1 y_2 \ldots y_{n+1}} = n^{n+1}$ elde edilir.
Eşitlik durumu $y_1 = y_2 = \cdots = y_{n+1} \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ olduğunda elde edilir.

4. Çözüm 1:
Köşegenlerin kesişim noktası K olsun. $ABCD$ nin çemberinin yarıçapı R olsun. $KQCR$, $KPBQ$, $KPAS$, $KSDR$ dörtgenleri çevrel yarıçapları sırasıyla KC, KB, AK, BK olan birer kirişler dörtgenidir.



$ABCD$ dörtgenin iki köşegeni, diğer dört dörtgenin çap olmayan köşegenleri için Sinüs Teoremini uygulayalım. $\frac{AC}{\sin\hat{B}} = 2R$, $\frac{BD}{\sin\hat{A}} = 2R \Rightarrow AC \cdot \sin\hat{A} = BD \cdot \sin\hat{B}$ (1).
$\frac{RQ}{\sin\hat{C}} = \frac{RQ}{\sin\hat{A}} = KC \Rightarrow RQ = KC \cdot \sin\hat{A}$. Benzer şekilde $PS = AK \cdot \sin\hat{A}$, $PQ = KB \cdot \sin\hat{B}$ ve $RS = DK \cdot \sin\hat{B}$. Buna göre $PQ + SR = BD \cdot \sin\hat{B}$ ve PS+$RQ = AC \cdot \sin\hat{A}$ olur. (1) e göre $PQ + RS = QR + SP$ dır.

Çözüm 2:
Aslında ilk çözümde biraz fazla iş yaptık. Aynı şekli kullanalım. $\angle CAB = \angle CDB$, $\angle KAP = \angle KSP$ ve $\angle KSR = \angle KDR$ eşitlikleri $\angle PSK = \angle KSR$ yani $PQRS$ dörtgeninde SK yı açıortay yapar. Benze şekilde RK, PK, QK da açıortaydır. Bu durumda $PQRS$ bir teğetler dörtgeni yani $PQ + RS = QR + SP$ olur.

5.

6. 251 noktayı merkez kabul eden 251 tane 1 yarıçaplı daireleri çizelim. 5 yarıçaplı ve merkezi 4 yarıçaplı daireyle kesişen bir daire, bu 251 dairenin hepsini içine alabilir. Söz konusu büyük dairenin alanı 25π iken küçük dairelerin toplam alanı 251π. Demek ki öyle bir nokta var ki, 11 daire tarafından da içeriliyor. Bu noktayı merkez kabul eden

1 yarıçaplı daire, söz konusu 11 çemberin merkezlerini içereceğine göre soruda bahsi geçen daire çizilebilir.

34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1993

4 Nisan 1993

1. İlk terimi 16 olan ve her teriminin pozitif bölenleri sayısı 5 ile bölünebilen sonsuz bir aritmetik dizinin var olduğunu gösteriniz. Bu tarzdaki diziler arasından en küçük ortak farka sahip olanı bulunuz.

2. Dar açılı ABC üçgeninin çevrel merkezi M olsun. BMA üçgeninin çevrel çemberi BC'yi P'de, AC'yi de Q'da kestiğine göre, $CM \perp PQ$ olduğunu gösteriniz.

3. Her $n \geq 1$ için $b_n \geq 0$ ve
$$b_{n+1}^2 \geq \frac{b_1^2}{1^3} + \cdots + \frac{b_n^2}{n^3}$$
olmak üzere (b_n) dizisi tanımlanıyor.
$$\sum_{n=1}^{K} \frac{b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} > \frac{1993}{1000}$$
eşitsizliğini sağlayan bir K doğal sayısının var olduğunu gösteriniz.

4. Herhangi iki şehir arasında en fazla bir yol olacak şekilde şehirler birbirine bağlanmıştır. v ile şehir sayısı, e ile de yol sayısı gösterilmek üzere;

   (a) $e < v - 1$ ise birinden diğerine gitmenin mümkün olmadığı iki şehir var olduğunu,
   (b) $2e > (v-1)(v-2)$ ise herhangi bir şehirden diğerine gitmenin mümkün olduğunu
   gösteriniz.

5. AB çaplı, O merkezli bir yarım çemberin üzerinde E ve C noktaları, $OE \perp AB$ ve AC ile OE'nin kesişim noktası olan D noktası yarım çemberin iç bölgesinde olacak şekilde alınıyor. $OBCD$ teğetler dörtgeni ise $m(\widehat{CAB})$'nin alabileceği değerleri belirleyiniz.

6. Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için
$$f\left(x + \frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y$$
şartını sağlayan tüm $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Commented [A5]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

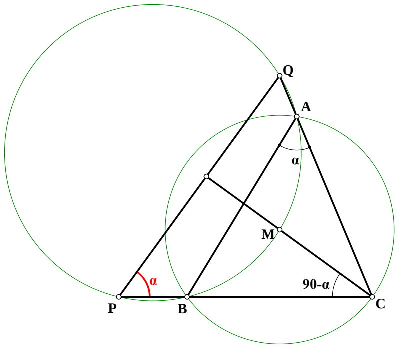
Commented [A6]: 19 Aralık 1992'de Matematik Dünyası'nda
yer alan
sınav yapılıyor. Anlaşılan kampa katılacak 34 öğrenci seçiliyor. Bi
nevi 0. Ulusal Matematik Olimpiyatı düzenlenmiş oluyor.

Commented [A7]: 3 soru 3 saat. İki oturum.

34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1993 – Çözümler

1. $16 = 2^4$ sayısının 5 pozitif böleni var. 16 dan sonra 5 bölenli en küçük sayı $3^4 = 81$. 10 bölenli en küçük sayı $2^4 \times 3 = 48$. Bu durumda ilk adayımız $16, 48, \dots 16 + 32k$ dizisi. Gerçekten de $16 + 32k = 16(2k+1) = 2^4(2k+1)$ sayılarının bölen sayısı her zaman 5 e bölünür. Bundan sonra bu özelliği sağlayan dizi varsa, ortak farkı 32 den büyük olacağı için bu tarzdaki diziler arasından en küçük ortak farka sahip olanı $16 + 32k$ dizisidir.

2. $\angle BMC = 2 \cdot \angle BAC \Rightarrow \angle MCB = 90° - \angle BAC$. $AQPB$ kirişler dörtgeninde $\angle BPQ = 180° - \angle QAB = \angle BAC$ olacağından $\angle QPC + \angle PCM = \angle BAC + 90° - \angle BAC = 90°$.



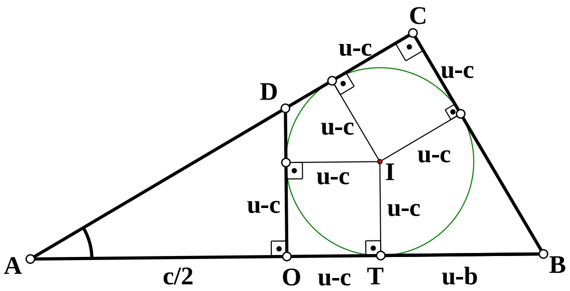
Not: Soru çok basit. Biraz terim kullanarak karmaşıklaştıralım. AB ile PQ doğruları anti-paraleldir. ABC üçgeninde CM doğrusu C den geçen yüksekliğin izogonal eşleniğidir (isoganal conjugate). Bu durumda CM doğrusu CQP üçgeninde yüksekliktir.

3.

4. a) 2 şehir için en az 1 yol gerekli. 3 şehir için en az 2 yol gerekli. $v-1$ şehir için en az $v-2$ yol gereksin. v şehir için en az $v-1$ yol gerekeceğini tümevarımla göstereceğiz. Çizge kuramında $\sum d(v) = 2|E|$ şeklinde köşelere ait derecelerin toplamı kenar sayısının iki katıdır diye bir kural var. Buna takılı kalmadan, her şehirden geçen yol sayısına o şehrin derecesi diyelim. Her yol iki köşeden geçtiğine göre, derecelerin toplamı yol sayısının iki katı kadar olacaktır. Tümevarıma geri dönersek, her şehrin derecesi 1 den büyük olsaydı, $\frac{2v}{2} = v$ yol olurdu. Demek ki en az 1 tane şehrin derecesi 1. (Derecenin 0 olması demek, o şehrin diğer şehirlerle bağlantısı yok demektir.) Bu şehrin bağlantısını diğer şehirlerden kopardığımızda, diğer şehirlerden birbirlerine gidilebilme koşulunda bir değişiklik yapmamış oluyoruz. Çünkü çıkardığımız şehir üzerinden başka bir şehre gidilemiyor. Bu $v-1$ şehir için en az $v-2$ yol gerekeceği tümevarım hipotezinde belirtildi. Şimdi bu çıkardığımız şehri, $v-1$ şehirli yol dağıtımına eklediğimizde en az $(v-2)+1 = v-1$ yol gerekmiş olacak. Bu durumda $e < v-1$ için en az bir şehir çifti için güzergah yoktur.

b) Şehirler arasında böyle bir ulaşımın olmadığını varsayalım. Çizge kuramı üzerinden konuşursak, G nin birbirinden bağımsız iki bileşenini ele alalım. $A = \frac{V(G)}{B}$, $B \subset V(G)$, $v - 1 \geq |B| = k \geq 1$ ise $|A| = v - k$. B deki şehirler ile A nın herhangi bir şehrini bağlayan yol yok. A da en fazla $\binom{v-k}{2}$, B de de en fazla $\binom{k}{2}$ kadar yol bulunabilir. Toplamda en fazla $\binom{k}{2} + \binom{v-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(v-k)(v-k-1)}{2} = \frac{v^2-2vk+2k^2}{2}$ yol bulunabilir. Bu ifade $k = v - k$ olduğunda en küçük değerini, dolayısıyla da $k = 1$ veya $k = v - 1$ olduğunda en büyük değerini alacak. Demek ki bağlantısız bir çizge en fazla $\binom{1}{2} + \binom{v-1}{2} = \frac{(v-1)(v-2)}{2}$ adet kenar içerebiliyor. Bunun üzerine bir yol daha eklediğimizde, $e > \frac{(v-1)(v-2)}{2}$ şartı sağlanmış, çizge bağlı olmuş olacak. Bu durumda herhangi bir şehirden diğerine gitmek mümkün olmuş olacak.

5. $DCBO$ teğetler dörtgeninin çemberi, üçgeninin içteğet çemberidir.



$AB = c, BC = a, AC = b$ ve $u = \frac{a+b+c}{2}$ dersek, içteğet çember AB ye T de dokunuyorsa $OT = r = u - c$ ve $BT = u - b$ elde edilir. $OT + TB = 2u - b - c = a = \frac{c}{2}$ olduğundan $\sin\frac{\angle CAB}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CAB = 30°$ olur.

6. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere; $y = kx^2$ değeri ile fonksiyonel denklemi tekrar yazalım. $f\big((k+1)x\big) = f(x) + f(kx) + 2kx^2$. $f(kx)$ dizisinin genel terimi
$f(kx) = kf(x) + k(k-1)x^2 \quad (1)$
olacaktır ($k = 1,2,\ldots k-1$ değerleri için denklemleri alt alta toplayın). $x = 1$ değeri için
$f(k) = kf(1) + k^2 - k \quad (2)$

elde etmiş olduk. Yani en azından tam sayılar da f nin davranışını belirledik. Tüm pozitif tam sayılarda bu şekilde davranan bir fonksiyon, pozitif rasyonel sayılarda da bu şekilde davranır mı? Hislerimiz evet diyor; ama matematiksel olarak henüz bu yargıya varamıyoruz. Her rasyonel sayı iki tam sayının bölümü şeklinde yazılabileceği için $m \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}^+$ için $x = \frac{m}{k}$ değerini (1) numaralı bağıntıda yerine yazarsak $f(m) = kf\left(\frac{m}{k}\right) + m^2 - \frac{m^2}{k}$ elde edilir. m tam sayı olduğu için $f(m)$ değerini (2) den hesaplayabiliriz.
$f(m) = mf(1) + m^2 - m = kf\left(\frac{m}{k}\right) + m^2 - \frac{m^2}{k}$. Bu durumda $f\left(\frac{m}{k}\right) = \left(\frac{m}{k}\right)^2 - \frac{m}{k} + f(1)\frac{m}{k}$ elde edilir. $x = \frac{m}{k}$ olduğuna göre her $x \in \mathbb{Q}^+$ için $f(x) = x^2 - x + f(1)x$ elde edilir. $f(1) = C \in \mathbb{Q}^+$ için
$f(x) = x^2 - x + Cx$ elde edilir.

1. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1993

Commented [A8]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

17-18 Aralık 1993

1. On tabanına göre yazılışı 1994 ile biten ve bir $n \geq 1$ tamsayısı için $1994 \cdot 1993^n$ şeklinde olan bir tamsayının varlığını gösteriniz.

2. Bir ABC $(m(\hat{B}) = 90°)$ üçgeninin I merkezli iç teğet çemberi, $[BC], [CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına sırası ile D, E ve F noktalarında değiyor. $[CI] \cap [EF] = \{L\}$ ve $[DL] \cap [AB] = \{N\}$ olduğuna göre $|AI| = |ND|$ olduğunu gösteriniz.

3. n pozitif bir tamsayı ve $A = \{1, \dots, n\}$ olsun. $f: A \to A$ ve $\sigma: A \to A$ gibi iki permütasyon için, eğer $(f \circ \sigma)(1), \dots (f \circ \sigma)(k)$ artan ve $(f \circ \sigma)(k), \dots, (f \circ \sigma)(n)$ azalan bir dizi olacak şekilde bir $k \in A$ var ise, f, σ'ya göre "tek tepeli"dir diyeceğiz. S_σ ile σ'ya göre tek tepeli permütasyonların kümesinin gösterelim. $n \geq 4$ ise, $S_\sigma \cap S_\pi = \phi$ olacak şekilde σ ve π permütasyonlarının var olduğunu gösterelim.

4. Her $n \geq 1$ için $0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}$ koşulunu sağlayan bir (a_n) pozitif tamsayılar dizisi veriliyor. $0 < x < y < 1$ koşulunu sağlayan herhangi x, y reel sayıları için
$$x < \frac{a_k}{a_m} < y$$
olacak şekilde a_k ve a_m terimleri bulunduğunu gösteriniz.

5. Dışbükey bir dörtgeni alanca iki eşit bölgeye ayıran ve dörtgenin bir köşesinden geçen doğrunun pergel ve cetvelle nasıl çizilebileceğini belirleyiniz.

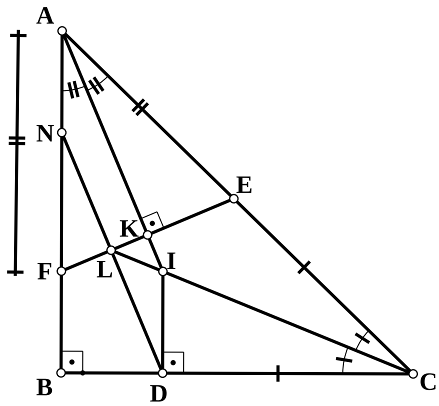
6. Aşağıdaki koşulları sağlayan $n_1, n_2, \dots n_k$ ve a pozitif tamsayıları veriliyor.
   i) Her $i \neq j$ için $(n_i, n_j) = 1$
   ii) Her i için $a^{n_i} \equiv 1 \ (mod\ n_i)$.
   iii) Her i için $n_i \nmid a - 1$

   Bu durumda $a^x \equiv 1 \ (mod\ x)$ denkliğinin gerçekleştiği en az $2^{k+1} - 2$ tane $x > 1$ tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

1. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1993 – Çözümler

1. $1994 \cdot 1993^n \equiv 1994 \ (mod\ 10^4)$ olacak şekilde n leri arıyoruz. $(1993, 10^4) = 1$ ve $\phi(10^4) = 10^4\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 4000$. Bu durumda
$1993^{4000} \equiv 1 \ (mod\ 10^4) \Rightarrow 1994 \cdot 1993^{4000k} \equiv 1994 \ (mod\ 10^4)$ olur. 4000 in katı olan her n doğal sayısı için sonu 1994 ile biten bir sayı vardı.

2. AI ile FE, K da kesişsin. LCD ile LCE üçgenleri eş üçgenler olup, $\angle LEA = \angle LDB$ dir.

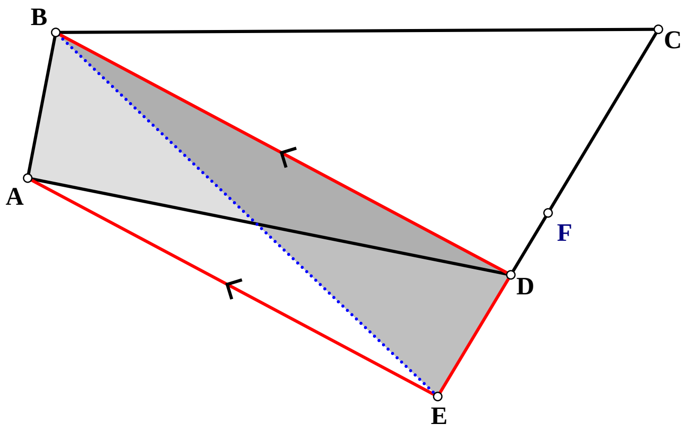


$\angle AIE = \angle LEA = \angle NBD$ ve $BD = IE$ olduğundan, $\Delta NBD \cong \Delta AEI \Rightarrow AI = ND$ olacaktır.

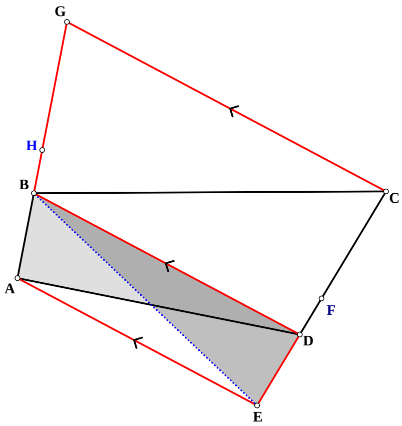
3. $\sigma\binom{1\,2\,3\,4\,\ldots\,n}{1\,2\,3\,4\,\ldots\,n}$ ve $\pi\binom{1\,2\,3\,4\,5\,\ldots\,n}{2\,1\,4\,3\,5\,\ldots\,n}$ olsun. $(f \circ \sigma)$ nın ilk dört elemanı tek tepeli bir diziliş gösterecek. Bu dört sayıyı $a < b < c < d$ ile göstermek yerine $1 < 2 < 3 < 4$ ile gösterirsek, tek tepelilik özelliğini takip daha kolay olacaktır.
(1,4,3,2) (2,4,3,1) (3,4,2,1) (1,2,4,3) (1,3,4,2) (2,3,4,1) (1,2,3,4) (4,3,2,1)
Görüldüğü gibi 4 elemanla 8 farklı şekilde tek tepeli bir diziliş oluşturabiliyor.
$(f \circ \pi)$ fonksiyonunun bu ilk dört elemanı
(4,3,2,3) (4,2,1,3) (4,3,1,2) (2,1,3,4) (3,1,2,4) (3,2,1,4) (2,1,4,3) (3,4,1,2) şeklinde olacaktır. Bu durumda f, σ'ya göre tek tepeli iken; π'ye göre tek tepeli değildir. Bu durumda S_σ kümesinin hiçbir elemanı S_π kümesinde yer almaz. Yani $S_\sigma \cap S_\pi = \phi$ dır.

4.

5. BD köşegenini çizelim. A dan geçen BD ye paralel olan doğru CD yi E de kessin.



$BDEA$ yamuğunda $[BAD] = [BED]$ olacağından
$[ABC] = [BAD] + [BDC] = [BED] + [BDC] = [BEC]$ olacaktır. F, $[EC]$ nin orta noktası olsun. $[BFC] = \frac{[BEC]}{2} = \frac{[ABC]}{2}$ olacağından BF doğrusu dörtgeni alanca iki eşit parçaya böler.
Peki ya $F \in [DE]$ olsaydı?



Bu durumda çizim yöntemimizi şöyle değiştirelim: BD köşegenini çizelim. A dan geçen BD ye paralel olan doğru CD yi E de kessin. C den geçen BD ye paralel olan doğru AB yi G de kessin. F ve H sırasıyla $[CE]$ ve $[AG]$ nin orta noktaları olsun. $FH \parallel BD \parallel AE \parallel GC$ olacaktır. AE ile CG doğrularından BD ye uzaklığı az olanı aldığımızda, örneğin şekilde AE, çizimi mümkün kılan orta nokta üçgen içerisinde kalacaktır.

35. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1994

Commented [A9]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

30 Nisan – 1 Mayıs 1994

1. Tamsayılar üzerinde tanımlı olan bir f fonksiyonu tüm x tamsayıları için $f(x) + f(x+3) = x^2$ eşitliğini sağlamaktadır. $f(19) = 94$ olduğuna göre $f(94)$ değerini hesaplayınız.

2. O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberin bu çapı üzerinde O ile B arasındaki bir E noktasından $[AB]$ çapına çıkılan dikme, çemberi D noktasında kesiyor. $[DE]$ ve $[EB]$ doğru parçalarına sıra ile K ve C noktalarında teğet olan bir çember BD yayına da F noktasında içten teğettir. Buna göre $\widehat{EDC} = \widehat{BDC}$ olduğunu ispatlayınız.

3. Bir 25-genin bütün kenarları ve köşegenleri kırmızı ve beyaza boyanırsa, köşeleri 25-genin köşelerinde bulunup bütün kenarları aynı renk olan en az 500 üçgen bulunacağını gösteriniz.

4. ABC üçgeninin kenarları üzerinde $P \in [AB], Q \in [BC], R \in [CA]$ ve
$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|BQ|}{|BC|} = \frac{|CR|}{|CA|} = k \qquad \left(k < \frac{1}{2}\right)$$
olacak biçimde P, Q, R noktaları alınıyor. G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğuna göre
$$\frac{\text{Alan}(PQG)}{\text{Alan}(PQR)}$$
değerini bulunuz.

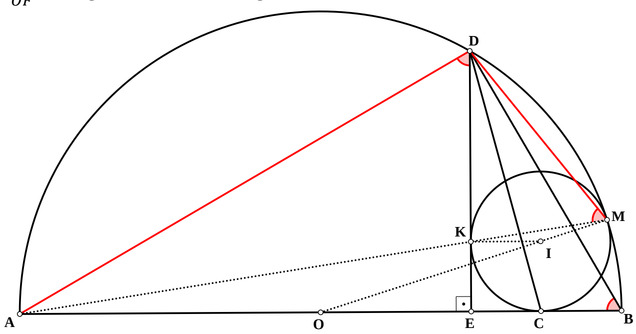
5. $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{2^{n_i}}{3^{m_i}} = 1$ olacak şekilde n_i, m_i $(i = 1,2,3 \ldots)$ pozitif tamsayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

6. $a^2 + b^2 + 3$ sayısının $a \cdot b$ ile bölünebilmesini sağlayan tüm (a, b) tamsayı ikililerini bulunuz.

35. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1994 – Çözümler

1. $f(x+3) = x^2 - f(x)$
   $f(22) = 19^2 - f(19) = 19^2 - 94$
   $f(25) = 22^2 - 19^2 + 94$
   $\vdots$
   $f(94) = 91^2 - 88^2 + 85^2 - 82^2 + \cdots + 25^2 - 22^2 + 19^2 - 94$
   $f(94) = 3(91 + 88 + 85 + \cdots + 25 + 22) + 19^2 - 94$
   $f(94) = 3 \cdot 12 \cdot 113 + 361 - 94 = 4335$

2. Çözüm 1:
   $KI \parallel OA$, $\frac{KI}{OA} = \frac{IF}{OF}$ olduğu için A, K, F doğrusaldır. $\angle ADE = \angle ABD = \angle AFD$ olduğu için



   $AD^2 = AK \cdot AF$. A noktasının I merkezli çembere göre kuvvetinden $AC^2 = AK \cdot AF$ olduğu için $AD = AC$ elde edilir.
   Bu durumda $\angle ADC = \angle ACD \Rightarrow \angle ADE + \angle EDC = \angle CDB + \angle DBC \Rightarrow \angle EDC = \angle BDC$ olur.

   Çözüm 2:
   $OA = R$ ve $IC = r = 1$ olsun. Açıortay teoreminden $\frac{DE}{EC} = \frac{DB}{BC}$ elde edileceği için
   $\frac{DE^2}{BD^2} = \frac{EC^2}{BC^2} = \frac{1}{BC^2}$ olduğunu göstermemiz gerekecek.
   $BD^2 = DE^2 \cdot BC^2 \Rightarrow BE^2 = BD^2 - DE^2 = DE^2(BC^2 - 1) = DE^2(BC - 1)(1 + BC)$
   $= DE^2(BC - 1)BE \Rightarrow BE = 1 + BC = DE^2(BC - 1)$ olduğunu göstereceğiz.
   $OI = R - r = R - 1$, $OC = \sqrt{R^2 - 2R} \Rightarrow BC = R - \sqrt{R^2 - 2R}$ olur.
   $DE^2 = OD^2 - OE^2 = R^2 - \left(\sqrt{R^2 - 2R} - 1\right)^2 = 2\sqrt{R^2 - 2R} + 2R - 1$.
   $DE^2 \cdot (BC - 1) = \left(2\sqrt{R^2 - 2R} + 2R - 1\right)\left(R - \sqrt{R^2 - 2R} - 1\right)$
   $= 2R\sqrt{R^2 - 2R} - 2(R^2 - 2R) - 2\sqrt{R^2 - 2R} + 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - 2R} - 2R - R +$
   $\sqrt{R^2 - 2R} + 1 = R - \sqrt{R^2 - 2R} + 1 = BC$ olur.

3. Her çift renkli üçgenin tam olarak 2 köşesinden çıkan kenarların biri beyaz, diğeri kırmızıdır. Her i köşesinden a_i kırmızı kenar çıkıyorsa, $24 - a_i$ beyaz kenar çıkar. Her köşeden $a_i(24 - a_i)$ adet çift renkli üçgen elde edilir. Her çift renkli üçgenin tam olarak bir tane daha çift renkli köşesi olduğundan toplam çift renkli üçgen sayısı $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{25} a_i(24 - a_i)$ olacaktır. Bu değer en çok $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{25} 12(24 - 12) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 25 = 1800$

tane çift renkli üçgen olabilir. 25 köşe $\binom{25}{3} = 2300$ üçgen belirteceği için, bunlardan en az $2300 - 1800 = 500$ tanesi tek renklidir.

4. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ şeklinde tanımlansın. $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ olacaktır. $P\left(\frac{x_2-x_1}{k} + x_1, \frac{y_2-y_1}{k} + y_1\right)$, $Q\left(\frac{x_3-x_2}{k} + x_2, \frac{y_3-y_2}{k} + y_2\right)$ ve R$\left(\frac{x_1-x_3}{k} + x_3, \frac{y_1-y_3}{k} + y_3\right)$ olur. PQR üçgeninin ağırlık merkezi $G'\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ olacağı için $G = G'$ olur. Bu durumda $\frac{Alan(PQG)}{Alan(PQR)} = \frac{1}{3}$ olacaktır.

5.

2. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1994

Commented [A10]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

23-24 Aralık 1994

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{n}$ sayısına en yakın tam sayıya a_n diyelim. Buna göre
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^3}$$
toplamını hesaplayınız.

2. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde, $m(\widehat{BAD}) < 90°$, $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{DCA})$ dır. $[DA]$ üzerinde $|BD| = 2|DE|$ koşulunu sağlayan E noktasından geçen ve $[CD]$ kenarına paralel olan doğru $[AC]$ köşegenini F noktasında kestiğine göre,
$$\frac{|AC| \cdot |BD|}{|AB| \cdot |FC|} = 2$$
olduğunu gösteriniz.

3. Düzlemde ikişer kesişen ve herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen n tane mavi doğru çiziliyor. Bu doğruların kesiştiği noktalara "mavi nokta" dersek, $\binom{n}{2}$ tane mavi noktamız olur. Daha sonra bir mavi doğru ile birleştirilmemiş olan bütün mavi nokta çiftlerinden geçen kırmızı doğrular çiziliyor. İki kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya "kırmızı nokta"; bir mavi ve bir kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya da "mor nokta" diyelim. Bu işlemden sonra en fazla kaç tane mavi, kırmızı ve mor nokta olur?

4. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ artan bir fonksiyon olsun. Her $u \in \mathbb{R}^+$ için $\left\{f(t) + \frac{u}{t} : t > 0\right\}$ kümesinin en büyük alt sınırına $g(u)$ diyelim.
   (a) $x \le g(xy)$ ise $x \le 2f(2y)$
   (b) $x \le f(y)$ ise $x \le g(xy)$

5. $s \ge 1$ ve $t \ge 1$ olmak üzere
$$t^2 + 1 = s(s+1)$$
eşitliğini sağlayan tüm (s, t) sıralı tam sayı ikililerini bulunuz.

6. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarına sıra ile D ve E noktalarında değmektedir. $[CB]$ üzerine $|CK| = |BD|$, $[CA]$ üzerinde $|AE| = |CL|$ koşulunu sağlayan K ve L noktaları için $AK \cap BL = \{P\}$ dir. İç teğet çemberin merkezi I, $[BC]$ nin orta noktası Q ve ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olduğuna göre
   (a) $IQ \parallel AK$,
   (b) $Alan(AIG) = Alan(QPG)$
olduğunu ispatlayınız.

2. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1994 – Çözümler

1. $\ldots(k-1)^2, (k-1)^2+1, \ldots, (k-1)^2+r, \ldots, k^2, \ldots$ dizisinin kökünü alalım.
   $(k-1)+0.5 \le \sqrt{(k-1)^2+r}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük r sayısını bulalım.
   $k^2-k+\frac{1}{4} \le k^2-2k+1+r \Rightarrow k-\frac{3}{4} \le r \Rightarrow k \le r$ elde edilir. Bu durumda k^2-k+1 den k^2+k ya kadar tüm terimlerin karekökü k olacaktır. Soruda verilen ifadeyi yeniden düzenlersek $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^3} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k}\frac{1}{a_n^3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{k^3} = 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 2\cdot\frac{\pi^2}{6} < 4.$
   Serinin değeri $\frac{\pi^2}{6}$; fakat integral ile en azından $1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2} = 2$ den küçük olduğunu bulabiliriz.

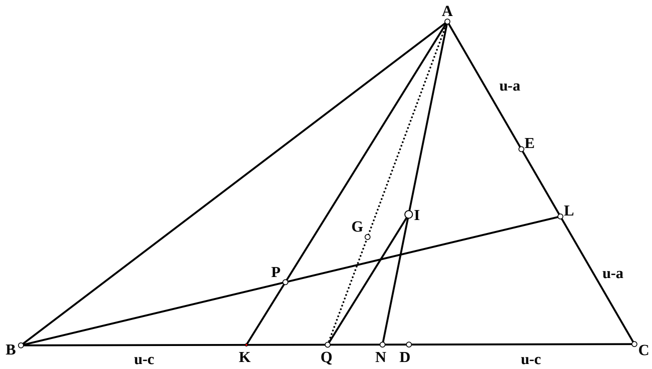
2. Açık şekilde $\frac{FC}{AC} = \frac{ED}{AD} = \frac{\frac{BD}{2}}{AB} \Rightarrow 2 = \frac{AC\cdot BD}{AB\cdot FC}$ olduğu görülür.

3.

4.

5.

6. AN üçgenin iç açırotayı olsun. $BK = CD = u-c,\ AE = CL = u-a,$
   $KQ = \left|\frac{a}{2}-(u-c)\right| = \frac{|c-b|}{2},\ CN = \frac{ab}{b+c},\ QN = \left|\frac{a}{2}-\frac{ab}{b+c}\right| = \frac{|ac-ab|}{2(b+c)} = \frac{a|c-b|}{2(b+c)}$ olacaktır.



Açıortay teoreminden $\frac{AI}{IN} = \frac{AC}{CN} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$ ve $\frac{KQ}{QN} = \frac{\frac{|c-b|}{2}}{\frac{a|c-b|}{2(b+c)}} = \frac{b+c}{a}$ olduğu için $IQ \parallel AK$ dır.
AKC üçgeninde P, L, B noktaları için Menelaus uygularsak $\frac{AP}{PK}\cdot\frac{KB}{BC}\cdot\frac{CL}{AL} = 1$ olacağından $\frac{AP}{PK}\cdot\frac{u-c}{a}\cdot\frac{(u-a)}{b-(u-a)} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PK} = \frac{a}{u-c}\cdot\frac{u-c}{u-a} = \frac{a}{u-a} \Rightarrow \frac{AP}{AK} = \frac{a}{u}$ elde edilir. $IQ \parallel AK$ olduğu için $\frac{IQ}{AK} = \frac{QN}{KN} = \frac{a}{a+b+c} = \frac{a}{2u}$ olur. Bu durumda $AP = 2\cdot IQ$ elde edilir.
$3\cdot[PGQ] = [APQ] = 2\cdot[AQI] = 2\cdot\left(\frac{3\cdot[AIG]}{2}\right) \Rightarrow [PQG] = [AGI]$ elde edilir.

Not: İç teğet çemberin değme noktalarını köşelerle birleştiren doğrular üçgenin Gergonne noktasında kesişir. Dış teğet çemberlerin kenarlara değme noktalarını köşelerle birleştiren doğrular üçgenin Nagel noktasında kesişir. İç teğet çemberin bir kenara değdiği noktanın o kenarın orta noktasına göre simetriği dış teğet çemberin o kenara değdiği noktadır. Yani sorudaki P noktası, üçgenin Nagel noktasıdır. Nagel noktası, ağırlık merkezi ve iç merkez doğrusaldır. Bu doğruya Nagel doğrusu denir. $IG = \frac{1}{2}GP$ bağıntısı vardır. Bu bilgiler eşliğinde $\frac{GQ}{AG} = \frac{1}{2} = \frac{IG}{GP} \Rightarrow IQ \parallel AP$ ve yamuktaki alan özelliğinden $[PQG] = [AIG]$ olacaktır.

36. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1995

Commented [A11]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

15 Nisan – 16 Nisan 1995

1. $b \geq a$ olmak üzere verilen a, b gerçel sayıları için aşağıdaki sistemin tüm çözümlerini bulunuz.
$$\begin{aligned} x_1^2 + 2ax_1 + b^2 &= x_2 \\ x_2^2 + 2ax_2 + b^2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}^2 + 2ax_{n-1} + b^2 &= x_n \\ x_n^2 + 2ax_n + b^2 &= x_1 \end{aligned}$$

2. n pozitif bir tamsayı olmak üzere $\sigma(j) \geq j$ koşulunu sağlayan tam olarak iki j'nin bulunduğu $\sigma: \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ permütasyonlarının sayısını bulunuz.

3. Bir ABC eşkenar üçgeni veriliyor. Bu üçgenin O merkezli çevrel çemberinin $\widehat{AC}$ (küçük) yayı üzerinde A ve C'den farklı bir D noktası alınıyor. D'den BC ve AC doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla E ve F olmak üzere, EF ile OD'nin kesim noktasının geometrik yeri nedir?

4. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $m(\widehat{CAB}) = 40°$, $m(\widehat{CAD}) = 30°$, $m(\widehat{DBA}) = 75°$ ve $m(\widehat{DBC}) = 25°$dir. $m(\widehat{BDC})$ yi bulunuz.

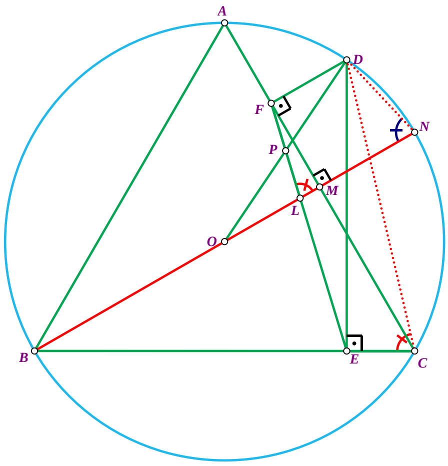
5. Aşağıdaki önermeyi ispatlayınız:
Her a pozitif tamsayısı için $n | a^n - n \Leftrightarrow n$'nin her p asal böleni için $p^2 \nmid n$ ve $p - 1 | n - 1$.

6. $\{x_n\}$ gerçel sayı dizisi
$$x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + x_n^{1/3} \qquad (n \geq 1)$$
biçiminde tanımlanıyor.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{an^b} = 1$$
olacak şekilde a ve b gerçel sayılarının varlığını gösteriniz.

1.

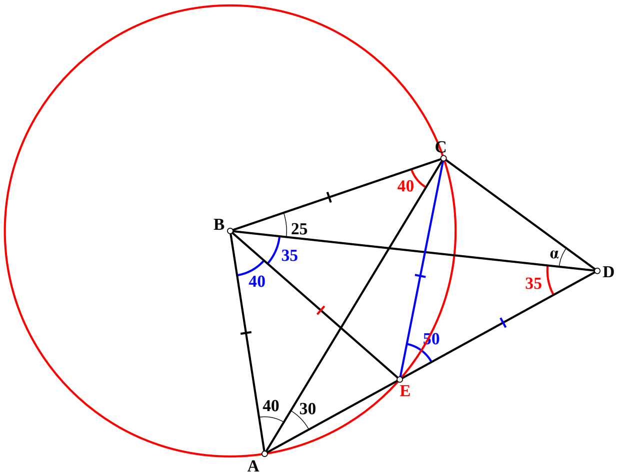
2.

3. Söz konusu nokta P olsun. BO doğrusu AC yi M de, çemberi N de kessin. Kolaylık olsun diye D yi AN küçük yayı üzerinde alalım. $DF \perp AC$ ve $BN \perp AC$ olduğu için $DF \parallel BN$, dolayısıyla da $\angle DFL + \angle NLF = 180°$ olacaktır. $DFEC$ dörtgeninde $\angle DFC = \angle DEC = 90°$ olduğu için, $DFEC$ dörtgeni bir kirişler dörtgenidir, dolayısıyla da $\angle DFE + \angle DCE = 180°$ elde edilir. Bu durumda $\angle NLF = \angle DCE$ bağıntısı elde edilir. Çembersel olan B, C, N, D noktaları için de $\angle DCB = \angle DNB$ eşitliği söz konusu olduğu için $\angle NLF = \angle DNL$ elde edilir. $DF \parallel NL$ olduğu için $DFLN$ bir ikizkenar yamuktur.



Bu durumda $\angle FNL = \angle DLN$ eşitliği elde edilir. $OM = MN$ olduğu için $OF = NF$ ve $\angle FOM = \angle FNM = \angle DLN$ olacaktır. Bu durumda $DL \parallel OF$ elde edilir. Halihazırda $DF \parallel OL$ olduğu için, $DFOL$ bir paralelkenardır. Köşegenler birbirlerini ortalayacağı için $OP = \frac{OD}{2} = \frac{ON}{2} = OM$ olacaktır. O ve M sabit noktalar olduğu için, P noktasının geometrik yeri, O merkezli M den geçen çember, yani içteğet çember üzerindedir. N noktası, AC küçük yayı üzerinde olduğu için, geometrik yer $[AO]$ nun içteğet çemberi kestiği nokta ile $[CO]$ nun içteğet çemberi kestiği nokta arasında kalan $120°$ lik içteğet çember yayıdır.

4. Çözüm 1:
$\angle BDA = 35°$. $\angle BAC = \angle BCA = 40°$ olduğu için $BA = BC$ dir. B merkezli $|BA|$ yarıçaplı çember AD yi E de kessin. $BA = BE = BC$ ve $\angle EBC = 2 \cdot \angle CAE = 60°$ olacaktır. BEC üçgeni eşkenar olur. $BE = EC = BC$.



$\angle EBD = \angle EBC - \angle CBD = 60° - 25° = 35° = \angle BDE$ olduğu için $BE = ED = EC$ olur. Aslında burada hemen E merkezli $BE = EC = ED$ yarıçaplı çemberde $\angle BDC = \frac{\angle BEC}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$ elde edilebileceği gibi; basit açı hesapları ile $\angle CED = 50°$ bulunabilir. ECB ikizkenar üçgeninde taban açısı 65°, $\angle BDC$ de 30° olarak elde edilebilir.

Çözüm 2:
BAC ikizkenar üçgeninde AC ait yükseklik AD yi E de kessin. $\angle ABE = \angle CBE = 50°$ ve $\angle EBD = \angle CBD = 25°$ olacaktır. $BAEC$ deltoid olacağı için $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60°$. BCE üçgeninde BD bir iç açıortay, ED bir dış açıortay olduğu için CD de bir dış açıortaydır (D dış merkezdir.). Basit açı hesaplarıyla $\angle BDC = 30°$ olarak bulunur.

5.

3. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1995

Commented [A12]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

8-9 Aralık 1995

1. $m_1, m_2, \dots, m_k$, $2 \le m_1$ ve $2m_i \le m_{i+1}$ $(i = 1,2,\dots,k-1)$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. Bu durumda, $a_1, a_2, \dots, a_k$ tamsayılar olmak üzere
$$\begin{gathered} x \equiv a_1 \ (mod\ m_1) \\ x \equiv a_2 \ (mod\ m_2) \\ \vdots \\ x \equiv a_k \ (mod\ m_k) \end{gathered}$$
bağıntılarından hiçbirini gerçeklemeyen sonsuz sayıda x tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

2. Dar açılı bir ABC üçgeni ile bu üçgenin düzleminde, üçgenin $[BC], [CA], [AB]$ kenarlarını sırasıyla çap kabul eden k_1, k_2, k_3 çemberleri çiziliyor. Çemberlerin kuvvet merkezi K, $[AK] \cap k_1 = \{D\}$, $[BK] \cap k_2 = \{E\}$ ve $[CK] \cap k_3 = \{F\}$ olmak üzere, $Alan(\Delta ABC) = u$, $Alan(\Delta DBC) = x$, $Alan(\Delta ECA) = y$ ve $Alan(\Delta FAB) = z$ ise, $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ olduğunu ispatlayınız.

3. ℕ, pozitif tamsayılar kümesi olsun. Bir A gerçel sayısı ile $a_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için
$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \le A$$
koşulunu sağlayan, üstten sınırlı olmayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi verliyor.
   (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için
   $$1 < \frac{A^{k(n)}}{a_n} \le A$$
   eşitsizliklerini sağlayan tek bir $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun bulunduğunu ve k'nin azalmayan ve örten bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.
   (b) Yukarıdaki k fonksiyonu her değeri en fazla m kez alıyorsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $C^n \le Aa_n$ olacak şekilde bir $C > 1$ gerçel sayısının var olduğunu gösteriniz.

4. Bir ABC $(|AB| \ne |AC|)$ üçgeninin A açısının iç ve dış açıortayları BC doğrusunu sırayla D ve E noktalarında kesiyor. $[DE]$ çaplı (ve üçgenin düzleminde bulunan) çemberin herhangi bir F noktasından BC, CA, AB doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla K, L, M ise, $|KL| = |KM|$ olduğunu ispatlayınız.

5. A boş olmayan sonlu bir tamsayı kümesi ise, A'ya ait elemanları toplamını $t(A)$ ile gösterelim ve $t(\emptyset) = 0$ olarak tanımlayalım. Pozitif tamsayılardan oluşan öyle bir X kümesi bulunuz ki, her k tamsayısı için, A_k ve B_k, X'in sonlu altkümeleri olmak üzere, $A_k \cap B_k = \emptyset$ ve $t(A_k) - t(B_k) = k$ koşullarını sağlayan tek bir (A_k, B_k) sıralı ikilisi bulunsun.

6. ℕ ile pozitif tamsayılar kümesini gösterelim. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için
$$m|n \Leftrightarrow f(m)|f(n)$$
koşulunu sağlayan ve örten olan tüm $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz.

3. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1995 – Çözümler

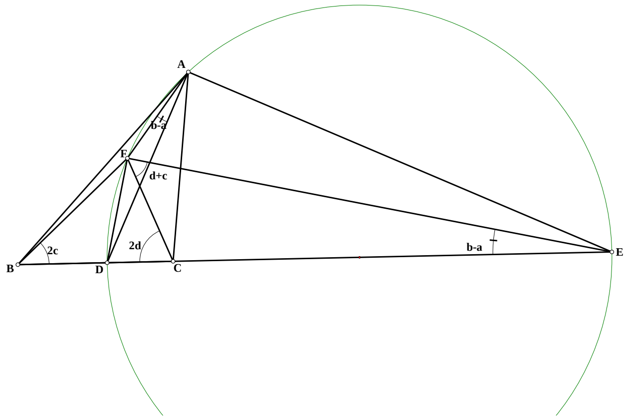
1.
2. Çözüm 1:
Kenarları çap kabul eden çemberler yüksekliklerin ayaklarından geçer. Yükseklikler bu çemberlerin ikişerli kuvvet eksenidir. Üç çemberin ikişerli kuvvet eksenleri tek bir noktada kesişir. Sorudaki kuvvet eksenleri yükseklik olduğu için K noktası da üçgenin diklik merkezidir.
$[BC], [CA], [AB]$ kenarlarına ait yükseklik ayakları X, Y, Z olsun. $BX = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ ve $CX = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. Öklid teoreminden
$DX^2 = BX \cdot XC \Rightarrow [BDC]^2 = \frac{BC^2 \cdot DX^2}{4} = \frac{BC^2 \cdot BX \cdot XC}{4} = \frac{(a^2+b^2-c^2)\cdot(a^2+c^2-b^2)}{16}$
$\Rightarrow 16 \cdot [BDC]^2 = a^4 - (b^2 - c^2)^2$.
Benzer şekilde $16 \cdot [ECA]^2 = b^4 - (a^2 - c^2)^2$ ve $16 \cdot [FAB]^2 = c^4 - (a^2 - b^2)^2$ elde edilir. $16 \cdot [ABC]^2 = 16 \cdot [BDC]^2 + 16 \cdot [ECA]^2 + 16 \cdot [FAB]^2$ olduğunu göstereceğiz.
$16 \cdot [ABC]^2$
$= 16 \cdot u(u-a)(u-c)(u-b) = (a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)$
$= ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (b-a)^2) = (a+b)^2c^2 - c^4 - (a+b)^2(b-a)^2 + c^2(b-a)^2 = c^2(a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab) - c^4 - (b^2-a^2)^2$
$= 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$ elde edilir. Diğer taraftan
$16 \cdot [BDC]^2 + 16 \cdot [ECA]^2 + 16 \cdot [FAB]^2$
$= a^4 - (b^2-c^2)^2 + b^4 - (a^2-c^2)^2 + c^4 - (a^2-b^2)^2$
$= 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$ çıkar. Bu durumda $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ eşitliği sağlanmış olur.

Çözüm 2:
$[BC], [CA], [AB]$ kenarlarına ait yükseklik ayakları X, Y, Z olsun. A, B, C den geçen yükseklikler (ABC) yi sırasıyla A', B', C' noktalarında kessin. $KX = XA'$ olması gerektiği bilinen bir özellik (değilse, $\angle CBA' = \angle CAX = \angle KBC \Rightarrow BK = BA' \Rightarrow KX = XA'$). X noktasının (ABC) çemberine göre kuvveti $BX \cdot XC = AX \cdot XA' = AX \cdot KX$ olacaktır. Aynı zamanda Öklid teoreminden $BX \cdot XC = DX^2$ olduğunu biliyoruz. $DX^2 = AX \cdot KX$ eşitliğini elde etmiş olduk. $\frac{[BDC]^2}{[ABC][BHC]} = \frac{DX^2 \cdot BC^2}{AX \cdot BC \cdot KX \cdot BC} = \frac{DX^2}{AX \cdot KX} = 1 \Rightarrow [BDC]^2 = [ABC] \cdot [BKC]$ elde edilir. Benzer şekilde $[ECA]^2 = [ABC] \cdot [AKC]$ ve $[FAB]^2 = [ABC] \cdot [BKA]$ olacağından taraf tarafa topladığımızda
$x^2 + y^2 + z^2 = [ABC] \cdot ([AKC] + [ABK] + [BCK]) = [ABC] \cdot [ABC] = u^2$ elde edilir.

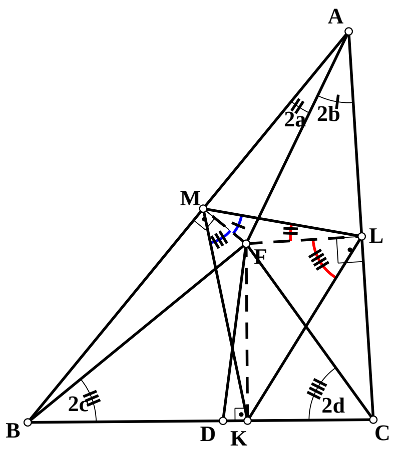
3.

4. Söz konusu çember B ve C noktalarına olan uzaklıkları oranı $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = k$ sabit olan noktalar kümesi, diğer bir adıyla Apollonius (Apolonyus) çemberidir. Çember üzerindeki her F noktası için $\frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = k$ sağlanır. Diğer bir deyişle FBC üçgeninde FD bir iç açıortay ve FE bir dış açıortaydır. Bunu fark ettikten sonra sorunun geri kalanı için birçok farklı çözüm yapılabilir. Bu sorunun benzerleri IMO 1996/2, IMO 2010/4 da karşımıza çıkıyor.

Çözüm 1:



$\angle BAF = 2a, \angle FAC = 2b, \angle FBC = 2c, \angle FCB = 2d$ olsun. CE dış açıortay olduğu için $\angle CFE = \frac{2c+2d}{2} = c + d \Rightarrow \angle FEB = 2d - (d + c) = d - c$ olur.
$\angle FAD = (a + b) - 2a = b - a$. $AFDE$ kirişler dörtgeninde $\angle FED = \angle FAD = b - a$ olduğundan $a + d = b + c$ elde edilir. Şimdi de soruda verilen dikmeleri indirelim. $KBMF$, $KCMF$ ve $LAMF$ dörtgenleri birer kirişler dörtgenidir.



$\angle MLF = \angle MAF = 2a$, $\angle FLK = \angle FCK = 2d \Rightarrow \angle MLK = 2a + 2d$. Benzer şekilde $\angle LMF = \angle LAF = 2b$, $\angle FMK = \angle FBK = 2c \Rightarrow \angle LMK = 2b + 2c$ elde edilir.
$a + d = b + c$ olduğunu daha önce göstermiştik. Bu durumda
$\angle LMK = \angle MLK \Rightarrow KL = KM$ olarak bulunur.

Çözüm 2:
$KFLC$ kirişler dörtgeninde $\frac{KL}{\sin \angle BCA} = 2 \cdot R = FC \Rightarrow KL = FC \cdot \sin \angle BCA$, benzer şekilde $KFMB$ kirişler dörtgeninde $KM = FB \cdot \sin \angle ABC$ elde edilir. $\frac{KL}{KM} = \frac{FC \cdot \sin \angle BCA}{FB \cdot \sin \angle ABC} = \frac{FC}{FB} \cdot \frac{AB}{AC}$ elde edilir. A ile F nin geometrik yerinden $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{FC}$ olduğu için $\frac{KL}{KM} = 1$ elde edilir.

37. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1996

Commented [A13]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

23 Mart – 24 Mart 1996

1. $\prod_{n=1}^{1996}(1+nx^{3n})$ çarpımının, $a_1, a_2, \dots, a_m$ sıfırdan farklı ve $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ olacak şekilde açılımını $1 + a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \cdots + a_mx^{k_m}$ ile gösterelim. a_{1996} katsayısını hesaplayınız.

2. Bir $ABCD$ paralelkenarında $\hat{A}$ açısı dar açı olup, $[AC]$ köşegeni çap alınarak çizilen çember CB ve CD doğrularını E ve F noktalarında kesmektedir. Bu çemberin A noktasındaki teğeti BD doğrusunu P noktasında kesiyorsa, P, F, E noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

3. $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$ olacak şekilde x_i gerçel sayıları veriliyor. Her $i \in \{1,2,\dots,2n\}$ için $x_{i+1} - x_i \le h$ ise,
$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1})$$
toplamının
$$\left(\frac{1-h}{2}, \frac{1+h}{2}\right)$$
aralığında olduğunu gösteriniz.

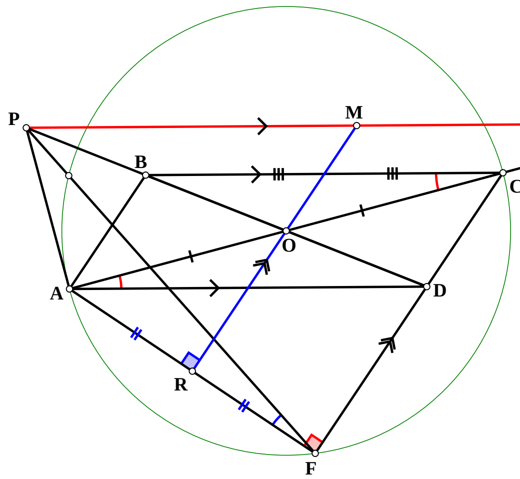
4. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $\text{Alan}(ABC) = \text{Alan}(ADC)$ olup, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin kesim noktası E'dir. E noktasından $[AD], [DC], [BC], [AB]$ kenarlarına çizilen paralel doğrular $[AB], [BC], [CD], [DA]$ kenarlarını sıra ile K, L, M, N noktalarında kestiğine göre,
$$\frac{\text{Alan}(KLMN)}{\text{Alan}(ABCD)}$$
oranını hesaplayınız.

5. Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $S_{a,b} = \{n^2 + an + b : n \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde tanımlanan kümelerin en çok kaç tanesinin ikişer ikişer ayrık olduğunu belirleyiniz.

6. Hangi a, b pozitif gerçel sayıları için,
$$\lim_{n\to\infty}(ax_{n+1} - bx_n) = 0$$
eşitliğini sağlayan her $\{x_n\}$ dizisinin limiti 0 olur?

1.

2. Çözüm 1:
BD ile AC nin kesişimi O olsun. BC ye paralel olan ve P den geçen doğru AC yi Q da kessin. CD ye paralel olan ve O dan geçen doğru PQ yu M de kessin.

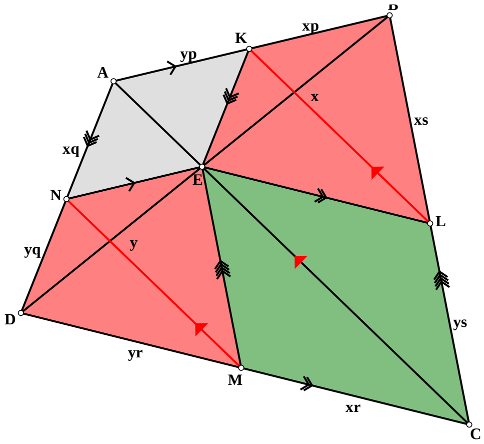


MO doğrusu BCO üçgeninde kenarortay, $PQ \parallel BC$ olduğu için de PQO üçgeninde de kenarortay olacaktır. MO ile AF, R de kesişsin. $MR \parallel CD$ ve $AO = OC$ olduğu için $AR = RF$ ve $MR \perp AF$ dir. Bu durumda MR, AF nin orta dikmesidir. Dolayısıyla $MA = MF$ dir. $\angle PAQ = 90^\circ$ olduğu için $PM = MQ = MA = MF$ yani M nin P, Q, F, A dan geçen çemberin merkezi olduğu sonucu çıkar. Paralel doğrulardan dolayı $\angle CAD = \angle BCA = \angle PQA$, $ECFA$ kirişler dörtgeni olduğu için $\angle EFA = \angle BCA$, $PQFA$ kirişler dörtgeni olduğu için de $\angle PFA = \angle PQA$ olur. Son durumda $\angle EFA = \angle EFA$ olduğu için P, F, A noktaları doğrusal olur.

Çözüm 2:

3.

4. Paralellikten dolayı $\frac{BE}{ED} = \frac{KB}{AK} = \frac{AN}{DN} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD}$. Bu durumda $AKNE$ ve $ELMC$ birer paralelkenar, $NM \parallel AC \parallel KL$ olur.



$[ANE] = [AKE] = [NEK] = A,\ [EMC] = [ELC] = [EML] = C,\quad [DNM] = D,\ [NEM] = B$ olur. $[ADC] = [ABC]$ olduğu için $[NEMD] = [KBLE] = B + D$ olacaktır.
$\frac{[NEM]}{[NEMD]} = \frac{B}{B+D} = \frac{AN}{AD} = \frac{BE}{BD}$ ve $\frac{[KBL]}{[KBLE]} = \frac{[KBL]}{B+D} = \frac{KB}{AB} = \frac{BE}{BD}$ olduğu için $[KBL] = [NEM] = B$ ve $[DNM] = [KEL] = D$ olacaktır. Son durumda $[KLMN] = A + B + C + D = \frac{[ABCD]}{2}$ elde edilir.

5.

4. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1996

Commented [A14]: Sorular Mathlinks'ten çeviridir. Orijinal değildir.

6-7 Aralık 1996

1. $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ve $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ birer pozitif tamsayı dizileri olsun. Her pozitif x tamsayısı için, $k = 1,2,\ldots N$ için $0 \leq x_k < a_k$, $x_N \neq 0$ ve $x = \sum_{k=1}^{N} x_k A_k$ koşulları sağlayan bir N pozitif sayısı ve bir $(x_1, x_2, \ldots x_N)$ sıralı N-lisi varsa,
   (a) $A_k = 1$ olacak şekilde bir k sayısının var olduğunu
   (b) $A_k = A_j$ olması için gerek ve yeter koşulun $k = j$ olduğunu
   (c) $A_k \leq A_j$ ise $A_k | A_j$ olduğunu
   gösteriniz.

2. Kenar uzunluğu 2 olan $ABCD$ karesinde, AB ve CD kenarları üzerinde sırasıyla M ve N noktaları alınıyor. CM ile BN doğruları P'de, AN ile DM doğruları Q'da kesiştiğine göre $|PQ| \geq 1$ olduğunu gösteriniz.

3. Sayı doğrusundaki n adet tamsayıyı boyayalım. k'nın hangi pozitif tamsayı değerleri için, aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathcal{K}$ kapalı aralıklar ailesi vardır:
   i. $\mathcal{K}$ 'daki aralıkların birleşimi, tüm boyalı noktaları içermekte,
   ii. $\mathcal{K}$ 'daki tüm aralıklar ayrık,
   iii. a_I ile I aralığındaki tamsayıların sayısı, b_I ile I aralığındaki boyalı tamsayıların sayısı gösterilmek üzere; $\mathcal{K}$ 'daki her I aralığı için $a_I = kb_I$ şartı sağlanır.

4. Dışbükey $ABCD$ dörtgeninin AD, DC, CB kenarlarına sırasıyla K, L, M noktalarında teğet olan bir çember veriliyor. L'den geçen ve AD'ye paralel olan l doğrusu; KM ile N'de, KC ile de P'de kesişiyor. $|PL| = |PN|$ olduğunu gösteriniz.

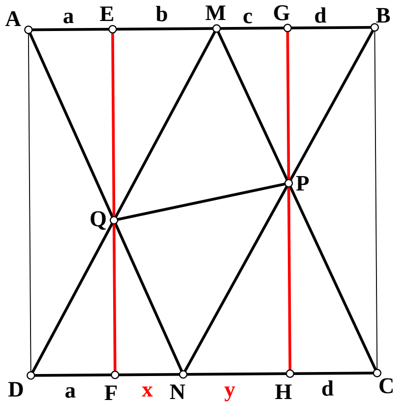
5. Her n pozitif tamsayısı için $\prod_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k)$ çarpımının $n!$ ile bölündüğünü gösteriniz.

6. Her $x, y > 0$ için $f(x+y) > f(x)\big(1 + yf(x)\big)$ olacak şekilde $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun olmadığını gösteriniz.

4. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1996 – Çözümler

1.

2. Q nun AB üzerindeki izdüşümü E, CD üzerideki izdüşümü F; P nin AB üzerindeki izdüşümü G, CD üzerindeki izdüşümü H olsun. $AE = DF = a$, $EM = b$, $MG = c$, $BG = HC = d$ olsun.



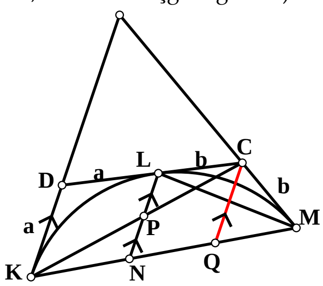
$\frac{DF}{AE} = \frac{FN}{EM} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{FN}{a} \Rightarrow FN = \frac{a^2}{b}$ ve $\frac{HC}{MG} = \frac{NH}{BG} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{NH}{d} \Rightarrow NG = \frac{d^2}{c}$ olur. Buradan da $EG = FH \Rightarrow b + c = \frac{a^2}{b} + \frac{d^2}{c}$ elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$(a+d)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b} + \frac{d}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{c}\right)^2 \le \left(\frac{a^2}{b} + \frac{d^2}{c}\right)(b+c) = (b+c)^2 \Rightarrow a + d \le b + c$$

$$\Rightarrow a + d + b + c \le 2(b+c) \Rightarrow 1 \le b + c \le PQ$$

3.

4. KM üzerinde $CQ \parallel LN \parallel DK$ olacak şekilde Q noktası alalım. $\angle DKM = \angle CMK$ olduğu aşikar (Değilse doğruları uzatın, ikizkenar üçgeni görün.).



$CQ \parallel DK$ olduğu için $\angle DKM = \angle CQM = \angle CMQ$ olacağından $CM = CQ$ olur.

$DK = DL = a$ ve $LC = CM = CQ = b$ olsun. CDK ve CKQ üçgenlerinde paralelliğin gerektirdiği benzerlikleri yazarsak $\frac{PL}{DK} = \frac{LC}{DL} \Rightarrow \frac{PL}{a} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow PL = \frac{ab}{a+b}$ ve $\frac{PN}{CQ} = \frac{KN}{NQ} = \frac{DL}{LC} \Rightarrow \frac{PN}{b} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow PN = \frac{ab}{a+b}$ olur.

38. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1997

Commented [A15]: Sorular Mathlinks'ten çeviridir. Orijinal değildir.

12 Nisan – 13 Nisan 1997

1. A açısı dik açı olan ABC üçgeninde, A'dan inilen yüksekliğin ayağı H olmak üzere; ABC, ABH ve AHC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçapları toplamının $|AH|$'a eşit olduğunu gösteriniz.

2. (a_n) ve (b_n) dizileri $a_1 = \alpha, b_1 = \beta$, her $n > 0$ için
$$a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n \text{ ve } b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n$$
olacak şekilde tanımlanıyor. $a_{1997} = b_1$ ve $b_{1997} = a_1$ eşitliklerini sağlayan kaç (α, β) sıralı gerçel sayı ikilisi vardır?

3. x oyunculu X takımından, y oyunculu Y takımına bir oyuncu transfer olunca $y \geq x$ ise Y takımı federasyona $y - x$ milyar lira veriyor, $x > y$ ise federasyon X takımına $x - y$ milyar lira ödüyor. Bir oyuncu bir sezonda istediği kadar takım değiştirebiliyor. Her biri 20 oyunculu 18 takımla başlanan bir sezonda, 12 takım sezonu 20'şer oyuncuyla, geri kalan 6 takım da sırasıyla 16,16,21,22,22,23 oyuncuyla sezonu bitiriyor. Federasyon sezon sonunda en fazla kaç lira kazanmış olabilir?

4. AE çaplı birim çember üzerinde dışbükey $ABCDE$ beşgeni oluşturuluyor. $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DE| = d$ ve $ab = cd = \frac{1}{4}$ olduğuna göre, $AC + CE$ toplamını a, b, c, d cinsinden bulunuz.

5. Her $p \geq 7$ asal sayısı için, $x_{n+1} = x_1$ olmak üzere; $x_i^2 + y_i^2 = x_{i+1}^2 \ (mod\, p)$ şartını sağlayan n pozitif tamsayısı ve p ile bölünmeyen x_i, y_i $(i = 1,2, \dots, n)$ sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

Commented [A16]: n de p ile bölünmeyecek mi, henüz belli değil.

6. $x_1, x_2, \dots x_n$ pozitif sayıları için $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ ise,
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^5}{x_1 + x_2 + \cdots x_n - x_i}$$
ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

38. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1997 – Çözümler

1. $r_{ABC} = u - a$ dır. $r_{ABC}{:}r_{ABH}{:}r_{AHC} = a{:}c{:}b$ olacağından
   $r_{ABC} + r_{ABH} + r_{AHC} = (u-a)\left(1+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right) = (u-a)\left(\frac{a+b+c}{a}\right) = \frac{r\cdot 2u}{a} = \frac{2\cdot\frac{ah}{2}}{a} = h$ elde edilir.

2.

3.

4.

5.

5. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1997

Commented [A17]: Sorular Mathlinks'ten çeviridir. Orijinal değildir.

12-13 Aralık 1997

1. $5x^2 - 6xy + 7y^2 = 383$ denklemini sağlayan tüm (x, y) sıralı tamsayı ikililerini bulunuz.

2. Dışbükey $ABCDE$ beşgeninin içerisinde alınan F noktasının $AB,\ BC,\ CD,\ DE,\ EA$ doğrularına olan uzaklıkları sırasıyla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 olsun. Beşgenin A, B, C, D, E köşelerine ait iç açıortayları üzerinde $AF_1 = AF, BF_2 = BF, CF_3 = CF, DF_4 = DF$ ve $EF_5 = EF$ olacak şekilde sırasıyla F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 noktaları alınıyor. F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 noktalarının EA, AB, BC, CD, DE doğrularına olan uzaklıkları sırasıyla b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 ise,
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \le b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$
olduğunu gösteriniz.

3. k pozitif bir sayı, n de 1'den büyük tek bir sayıdır. n adet seçmen A kümesine ait k adet aday arasından bir adayı aşağıda anlatılacak olan çoğunlukçu uzlaşı yöntemine göre seçecektir.
   Her seçmen $k \times n$ bir matrisinin bir sütununa adayları tercih sırasına göre sıralıyor. $a \in A$ adayının i-inci satırda kaç kez geçtiğini a_i sayısı ile gösteriyoruz. l_a ile $\sum_{i=1}^{l} a_i > \frac{n}{2}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük l sayısını gösteriyoruz. $l' = \min\{l_a | a \in A\}$. $\{a \in A | l_a = l'\}$ kümesini oluşturan matrislere uygun matris diyeceğiz. Her uygun matriste, kümedeki tek aday çoğunlukçu uzlaşıyla seçilmiş olacak. Her uygun seçim matrisinde $\omega_1 \ge \omega_2 \ge \cdots \ge \omega_k \ge 0$ sayıları verildiğinde $\sum_{i=1}^{k} \omega_i a_i$ sayısına $a \in A$ adayının toplam ağırlıklı skoru diyeceğiz. Seçilmiş adayın toplam skoru tüm adayların skorlarının en büyüğü ise, $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ ağırlıkları çoğunlukçu uzlaşı oluşturuyor diyeceğiz.
   (a) $k = 3$ olduğunda, çoğunlukçu uzlaşı oluşturan bir ağırlık sistemi olup olmadığını belirleyiniz.
   (b) $k > 3$ olduğunda, böyle bir sistemin olmadığını gösteriniz.

Commented [A18]: Murat Sertel'in majoritarian compromis adlı seçim sistemini anlatıyor. Çeviri de muhtemelen sorun var.

4. $e > 0$ gerçel sayısı verildiğinde, her a, b, c, d gerçel sayısı için
$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \le e^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + f(e)(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$$
eşitsizliğini sağlayan en küçük $f(e)$ değerini (e cinsinden) bulunuz.

5. ABC üçgeninde A köşesine ait iç ve dış açıortaylar BC'yi sırayla D ve E de kesiyor. DE çaplı F merkezli çemberle merkezi O olan ABC üçgeninin çevrel çemberinin ortak dış teğet doğrusu d olsun. Değme noktalarının FO üzerindeki izdüşümleri P ve Q olsun. Bu iki çemberine ortak kirişinin uzunluğu m ise $|PQ| = m$ olduğunu gösteriniz.

6. Uzayda kenarları x, y, z eksenlerine paralel olacak şekilde $D_1, D_2, \dots, D_n$ dikdörtgenler prizmaları veriliyor. Her D_i için, x_i, y_i, z_i ile D_i'nin sırasıyla x, y, z eksenleri üzerindeki izdüşümlerinin uzunluklarını gösterelim. Her D_i, Dj çifti için, $x_i < x_j$, $y_i < y_j$, $z_i < z_j$ eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa, $x_i \le x_j$, $y_i \le y_j$ ve $z_i \le z_j$ olduğunu varsayalım. $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ bölgesinin hacmi 1997 ise,
   i. $k \ne l$ ise $D_{i_k} \cap D_{i_l} \ne \emptyset$

ii. $\bigcup_{k=1}^{m} D_{i_k}$ bölgesinin hacmi en az 73
olacak şekilde $\{D_1, \dots, D_n\}$ kümesinin bir $\{D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_m}\}$ altkümesine sahip olduğunu gösteriniz.

5. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1997 – Çözümler

1.

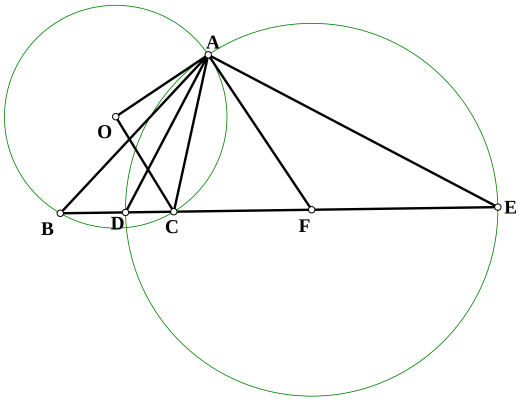
2.

3.

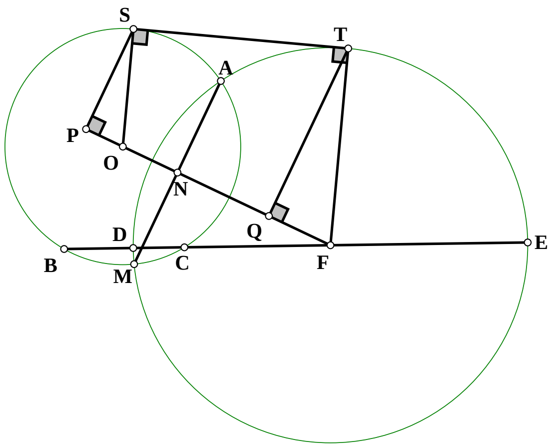
4.

5. F merkezli DE çaplı çember BC ye ait A dan geçen Apolonyus çemberidir. Gerçi Apolonyus çemberine has bir özellik kullanmayacağız.

İlk önce çevrel çember ile Apolonyus çemberinin dik kesiştiğini gösterelim.



$AF = DF \Rightarrow \angle ADF = \angle DAF \Rightarrow \angle ABC + \angle BAD = \angle DAC + \angle CAF$ olur. $\angle BAD = \angle DAC$ olduğu için $\angle CAF = \angle ABC$ olacağından AF, (ABC) çemberine teğettir (teğet kiriş açı ile çevre açının eşitliği). Yani $\angle OAF = 90°$ cepte.



Ortak teğet doğrusu çevrel çembere S de, diğer çembere de T de değsin. AM, bu iki çemberin ortak kirişi olsun. AM bu iki çemberin kuvvet eksenidir. (AM nin ST ile kesiştiği noktanın çemberlere göre kuvveti eşit olacağından AM ST yi ortalar.) OF doğrusuna diktir ($APMF$ deltoid olduğu için köşegenler diktir ve birbirini ortalar). Ortak teğet doğru parçası ST yi iki eşit parçaya böler. Bu durumda $SPQT$ dik yamuğunda AM orta taban doğrusu olacağından $PA = AQ$ ve AM ile PQ, N de kesişiyorsa $PN = NQ$ eşitlikleri elimizde var. $APMF$ deltoidinde $AN = AM$ olduğunda göre $AN = PN = NQ$ yani $\angle PAQ = 90°$ olduğunu göstereceğiz. İki çemberin dik kesiştiğini daha önce göstermiştik.

$\angle PAQ = \angle OAF \Leftrightarrow \angle FAQ = \angle OAP$ olduğunu göstereceğiz. $OS \parallel TF$ ve $SP \parallel TQ$ olduğu için $\angle PSO = \angle QTF$. Dolayısıyla da $\Delta OSP \sim \Delta FTQ$ olacaktır. $\frac{OP}{QF} = \frac{OS}{FT} = \frac{OA}{FA}$ orantısı elde edilir. O nun AN ye göre simetriği O' olsun. $AP = AQ$ olduğu için $\Delta QAO' \cong \Delta PAO$ olacaktır. Bu durumda $AO' = AO$, $O'Q = OP$ ve $\frac{OP}{QF} = \frac{OS}{FT} = \frac{OA}{FA}$olduğu için $\frac{O'Q}{QF} = \frac{O'A}{FA}$ orantısını elde ederiz. Bu da $O'AF$ üçgeninde AQ nun açıortay olduğu gösterir.

$\angle O'AQ = \angle QAF = \angle OAP \Rightarrow \angle OAF = \angle QAP \Rightarrow AN = PN = NQ \Rightarrow PQ = AM = m$ elde edilir.

39. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1998

Commented [A19]: Sorular Mathlinks'ten çeviridir. Orijinal değildir.

18 Nisan – 19 Nisan 1998

1. ABC üçgeninin $(AB = AC)$ dışına doğru $BAXX'$ ve $CAYY'$ kareleri kuruluyor. $[BC]$'nin orta noktası D, $[BC]$ üzerindeki bir K noktasından BY ve CX'e indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla E ve F ise
   (a) $|DE| = |DF|$ olduğunu gösteriniz.
   (b) $[EF]$ nin orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

2. (a_n) dizisi $a_1 = t$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$ olacak şekilde tanımlanıyor. $a_{1998} = 0$ ise t'nin alabileceği kaç değer vardır?

3. $A = \{1,2,3,4,5\}$ olsun. Herhangi bir $B \subset A$ için $f(B) \in B$, herhangi bir $B, C \subset A$ için $f(B \cup C)$ ya $f(B)$ ya da $f(C)$ olacak şekilde A'nın boş olmayan altkümelerinden A'ya tanımlı kaç f fonksiyonu vardır?

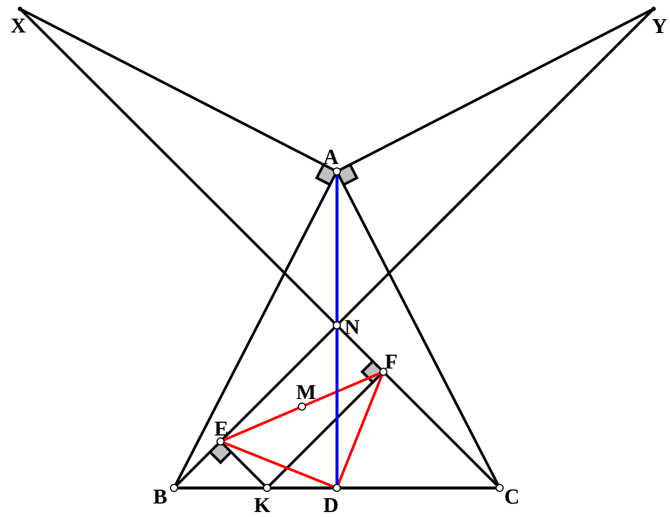
4. n kişi, n ev verilmiş olsun. Her kişi evleri beğenisine göre sıralıyor (eşitlik yok). Daha sonra herkese bir şekilde bir ev veriliyor. Daha sonra bakılıyor ki, evler başka bir şekilde verilmiş olsa her seferinde en az bir kişi daha az tercih ettiği bir evi almış olacak. Mevcut ev dağılımında, en az bir kişinin birinci tercihini almış olduğunu ispatlayınız.

5. ABC üçgeninde AB ye A da teğet olan, C den geçen çember ile AC ye A da teğet olan B den geçen çemberlerin yarıçapları farklı olup çemberler ikinci kez D de kesişiyorlar. $[BA$ üzerinde $AB = AE$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. A, D, E noktalarından geçen çemberle $[AC$ ikinci kez F de kesiştiklerine göre $|AF| = |FC|$ olduğunu gösteriniz.

6. $f(x_1, \ldots, x_n)$ toplam derecesi n'den küçük tamsayı katsayılı bir polinomdur. $0 \leq x_i \leq 12$ olmak üzere $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \ (mod\ 13)$ denkliğini sağlayan $(x_1, \ldots, x_n)$ sıralı n-lilerinin sayısının 13 ile bölündüğünü gösteriniz.

39. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1998 – Çözümler

1. $\angle BAC = 2\alpha \Rightarrow \angle ABY = \angle AYB = \angle AXC = \angle XCA = 45° - \alpha \Rightarrow \measuredangle(XC, YB) = 90°$.



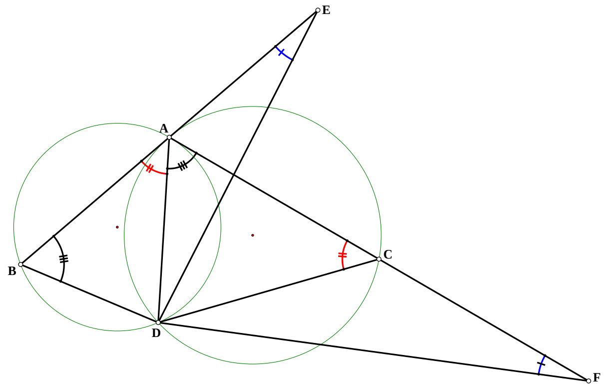
$XC \cap YB = \{N\}$ olsun. $\angle ABN = \angle ACN$ olduğu için $N \in AD$ dir. BNC üçgeni N açısı dik açı olan ikizkenar bir dik üçgendir. $ENFK$ bir dikdörtgendir. $ENFK$ dikdörtgeninin çevrel çemberinin merkezi M olacaktır. $ENDK$ karşılıklı dik açıların toplamından dolayı kirişler dörtgeni olduğundan D de bu çember üzerindedir. ND açıortay olduğu için $DE = DF$ olur. M merkezinden ND kirişine inilen dikme ND kirişini ortalar. Bu noktanın D ye uzaklığı $\frac{DN}{2} = \frac{\frac{BC}{2}}{2} = \frac{BC}{4} = Sabit$ tir. Bu durumda M, BC paralel olan ve BC den uzaklığı $\frac{BC}{4}$ olan doğru üzerindedir. M nin geometrik yerinin sınırları $K = B$ ve $K = C$ olduğunda elde edilir. Son durumda M nin geometrik yeri BN ile CN doğru parçalarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.

2.

3.

4.

5. Soruyu sade bir şekilde çizmek çok önemli. Çevre açı ile teğet-kiriş açıların eşitliğinden



$\angle ABD = \angle DAC$ ve $\angle ACD = \angle BAD$. A, D, F, E aynı çember üzerinde bulunduğundan $\angle AED = \angle AFD$ dir. Açı-Açı benzerliğinden $\Delta ABD \sim \Delta CAD$ ve $\Delta AFD \sim \Delta BED$ elde edilir. $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AD}$ ve $\frac{BE}{AF} = \frac{2 \cdot AB}{AF} = \frac{BD}{AD}$ eşitliklerini birleştirirsek $AF = 2 \cdot AC \Rightarrow AC = CF$ çıkar.

6. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1998

Commented [A20]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

11-12 Aralık 1998

1. İkizkenar ABC üçgeninin ($|AB| = |AC|$) $[BC]$ tabanı üzerinde $|BD|:|DC| = 2:1$ olacak biçimde bir D noktası, $[AD]$ üzerinde ise $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BPD})$ olacak biçimde bir P noktası alınıyor. $m(\widehat{DPC}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$ olduğunu gösteriniz.

2. Tüm $0 \leq a \leq b \leq c$ gerçel sayıları için
$$(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \geq 60abc$$
olduğunu gösteriniz.

3. Bir çemberin üstündeki noktalar üç renge boyanıyorlar. Köşelerini çember üstünde aynı renge boyanmış noktaların oluşturduğu sonsuz sayıda ikizkenar üçgenin bulunduğunu gösteriniz.

4. $x^3 + 3367 = 2^n$ eşitliğini sağlayan tüm x ve n pozitif tamsayılarını bulunuz.

5. XOY açısının $[OX$ ve $[OY$ ışınları üzerinde sırasıyla M ve N değişken noktaları alındığında $|OM| + |ON|$ sabit ise, $[MN]$'nin orta noktasının geometrik yerini belirleyiniz.

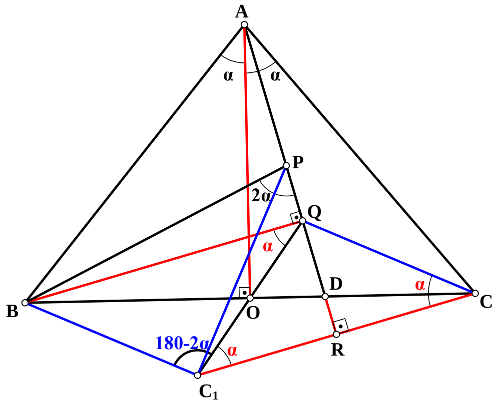
6. $n \times n$ bir satranç tahtasındaki karelerin köşelerinden bazıları, bu satranç tahtasının karelerinden oluşan her $k \times k$ $(1 \leq k \leq n)$ karenin en az bir kenarının üstünde boyanmış bir nokta olacak biçimde boyanıyor. Eğer bu koşulu sağlamak için boyanması gereken en az nokta sayısını $l(n)$ ile gösterirsek,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$$
olduğunu kanıtlayınız.

6. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1998 – Çözümler

1. Çözüm 1:

C noktasının AD doğrusuna göre simetriği C_1, B noktasından AD doğrusuna indirilen dikmenin ayağı Q; A noktasınndan $[BC]$ ye çizilen yüksekliğin ayağı Q olsun. (Şekilden izleyiniz.)

$CC_1 \parallel BQ$, $|BD|:|DC| = |BQ|:|CR| = 2:1$ olduğu için $BQCC_1$ bir paralelkenardır ve $|BC_1| = |QC| = |C_1Q|$'dur.



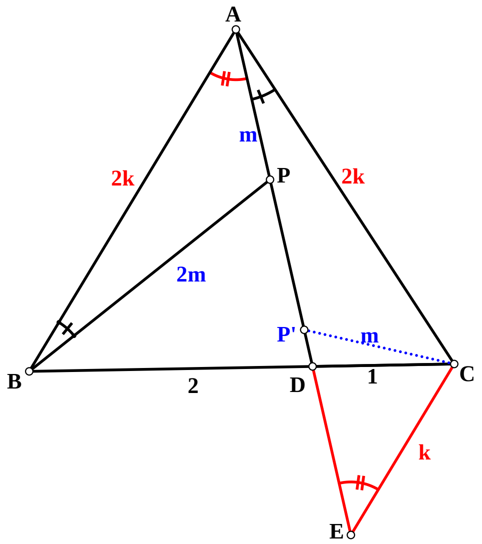
Şimdi, $\angle BAC = 2\alpha$ olsun. Bu takdirde, $\angle BPD = 2\alpha$, $\angle BAO = \alpha$ olur ve B, O, Q, A noktaları çembersel olduğu için $\angle BQO = \angle QBC_1 = \angle QCC_1 = \alpha$ olur. Diğer yandan,

$\angle BC_1Q = 180 - 2\alpha$ ve $\angle BPQ = 2\alpha$ olduğundan, B, P, Q, C_1 noktalarının çembersel olduğu ve böylece, $\angle QPC_1 = QBC_1 = \alpha$ olduğu görülür. Sonuç olarak,

$\angle CPD = \angle C_1PD = \angle QPC_1 = \alpha = \frac{1}{2}\angle BAC$

Çözüm 2:

$\angle ABP = \angle BAC$ olduğu aşikar. C den AB ye çizdiğimiz paralel AD ile E de kesişsin.



$\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{AB}{EC} = \frac{AC}{EC} = \frac{2}{1}$. $\angle AEC = \angle PAB$ olacağı için $\Delta CAE \sim \Delta PAB$ olacaktır.
$\frac{BP}{AP} = \frac{AC}{EC} = 2$ olur. Şimdi de BPA üçgenini AC üzerinde yapıştıralım. $P'AC \cong PBC$ olur. $P'A = BP = 2 \cdot AP \Rightarrow PP' = AP = P'C \Rightarrow \angle BPD = \angle CP'E = 2 \cdot \angle P'PC = 2 \cdot \angle DPC$ olacaktır.

Çözüm 3:

AP, ABC üçgeninin çevrel çemberini E noktasında kessin. $\angle ABC = \angle ACB = \angle AEC = \angle AEB$ olduğu için BEC üçgeninde EA açıortay olur. Açıortay teoreminden $BE : CE = 2:1$ elde edilir.

$\angle EAC = \angle CBE$, $\angle ABC = \angle PBE$ ve $\angle ABC = \angle ACB = \angle AEB$ olduğu için $PB = PE$ dir. P den BE ye inilen dikme BE yi ortalar. BE nin orta noktası F olsun. $BF = FE = EC$ ve $\angle PEF = \angle ECP$ olduğu için $\Delta PEF \cong \Delta PEC$ olur. Bu durumda, $\angle BPF = \angle FPE = \angle EPC = \angle BAC/2$ elde edilir.

2.

Çözüm 1:

$(a+3b)(b+4c)(c+2a) - (a+3b)(b+2a)(c+4c)$
$= (a+3b)\big((b+4c)(c+2a) - (b+2a)(c+4c)\big) = (a+3b)\underbrace{(b-c)}_{\leq 0}\underbrace{(2a-4c)}_{\leq 0} \geq 0$

ve $(a+3b)(b+2a) - (a+2a)(b+3b) = \underbrace{(a-b)}_{\leq 0}\underbrace{(2a-3b)}_{\leq 0} \geq 0$ olduğu görülür.
Dolasıyla, $(a+3b)(b+4c)(c+2a) > (a+3b)(b+2a)(5c) \geq (3a)(4b)(5c) = 60abc$ 'dir.

Çözüm 2:

Aritmetik-geometrik ortalamalar eşitsizliğinden,
$a+b+b+b \geq 4\sqrt[4]{ab^3}$,
$b+c+c+c+c \geq 5\sqrt[5]{bc^4}$,

$c + a + a \geq 3\sqrt[3]{ca^2}$ ' dir.
Taraf tarafa çarparsak,

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{5}}c^{\frac{4}{5}}c^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} = 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}} = 60abc\frac{c^{\frac{2}{15}}}{a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{20}}}$$
$$= 60abc\frac{c^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{12}}}\frac{c^{\frac{1}{20}}}{b^{\frac{1}{20}}} \geq 60abc(1)(1) = 60abc.$$

Çözüm 3:

b nin bir kısmını a olarak, c nin bir kısmını da b olarak yazarsak eşitsizlikten daha küçük bir değer elde etmiş oluruz.

$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq \left(a+\frac{1}{3}a+\frac{8}{3}b\right)\left(b+\frac{2}{3}b+\frac{10}{3}c\right)(c+2a)$
$= \frac{4}{3}(a+2b)\cdot\frac{5}{3}(b+2c)(c+2a)$ elde edilir.
$a+b+b \geq 3\sqrt[3]{ab^2}$, $b+c+c \geq 3\sqrt[3]{bc^2}$ ve c+$a+a \geq 3\sqrt[3]{ca^2}$ olduğu için
$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq \left(a+\frac{1}{3}a+\frac{8}{3}b\right)\left(b+\frac{2}{3}b+\frac{10}{3}c\right)(c+2a)$
$= \frac{4}{3}(a+2b)\cdot\frac{5}{3}(b+2c)(c+2a) \geq \frac{20}{9}\cdot 27abc = 60abc$ elde edilir.

3. Köşeleri çember üstünde bulunan herhangi bir düzgün 13-gen alalım. Bu 13-genin aynı renge boyanmış en az beş köşesi vardır. Bu beş köşeden en az üçünün ikizkenar bir üçgen oluşturduğunu göstereceğiz. Bu ise $\mathbb{Z}_{13} = \{1,\dots,13\}$ kümesinin 5 elemanlı herhangi bir P altkümesinde $x \neq y,\ x+y \equiv 2z\ (mod\ 13)$ olacak biçimde $x,y,z \in P$ bulunduğunu göstermeye eşdeğerdir. Son önermenin doğru olmadığını varsayalım. $S = \{x+y\ \ (mod\ 13) | x,y \in P, x \neq y\}$ dersek, S'nin en az 9 değişik elemanının olduğu görülür. ($= \{x,y,z,u,v\}$ olsun ve $x+y \equiv z+u$ olduğunu varsayalım. Bunun dışında P'den alınan iki değişik çiftin toplamları (mod 13) eşitse, genelliği yitirmeden, bunun $z+y \equiv x+v$ biçiminde olacağı görülür. O zaman da, varsayımımızın aksine $u+v \equiv 2y$ olur.) Ancak bu durumda da, S'ye ait en az bir eleman olacak $\{2x,2y,2z,2u,2v\}$ kümesine aittir.

4. 3367 nin asal çarpanlara ayrılışı $3367 = 7\cdot 13\cdot 37$ dir. Eğer $x^3 \equiv 2^n\ (mod\ 7)$ ise, uygun bir $m \in N$ için $n = 3m$ olur. Böylece, $3367 = 2^n - x^3 = \underbrace{(2^m - x)}_{a}\underbrace{(2^{2m}+2^m x + x^2)}_{b}$, $a^2 < b$ ve $ab = 7\cdot\ 13\cdot 37$ olduğu için aşağıdakilerden biri doğrudur:
   i. $a = 1, b = 7\cdot 13\cdot 37$,
   ii. $a = 7, b = 13\cdot 37$,
   iii. $a = 13, b = 7\cdot 37$,

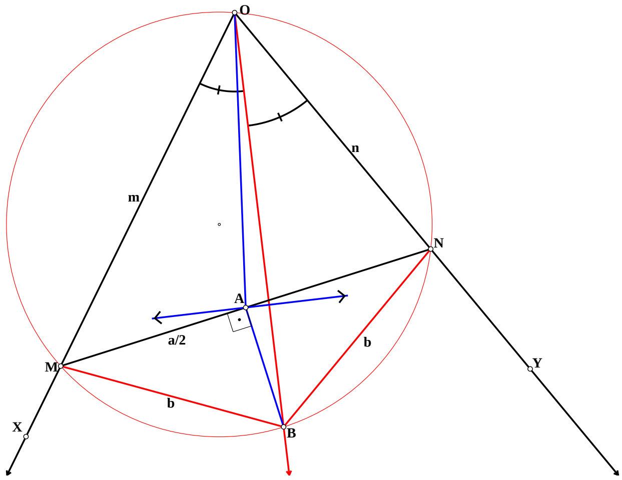
   $b - a^2 = 3\cdot 2^m\cdot x$, $2^m \geq \sqrt[3]{3367} > 14$ olduğu için
   i. $b - a^2 = 3\cdot 2\cdot 561$ ve
   iii. $b - a^2 = 90 = 2\cdot 3\cdot 15$ geçerli olamaz; ancak ii. durumu sözkonusu olabilir. Bu durumda $b - a^2 = 481 - 49 = 432 = 3\cdot 2^4\cdot 3^2$ olduğunda $n = 12$, $x = 9$ olmalı. Gerçekten $9^3 + 3367 = 2^{12}$ 'dir.

5. Çözüm 1:

$[MN]$'nin bir konumu şekildeki gibi olsun ve $|OM| = m$, $|ON| = n$, $|MN| = a$ diyelim. OMN üçgeninin çevrel çemberi ile MON açısının açıortayının kesişim noktası

B ile gösterilmek üzere, $MOB = 2\alpha$ ise, $\measuredangle(MB) = \measuredangle(BN) = 2\alpha$ dır. Buradan $|MB| = |BN|$ elde edilir. $OMBN$ dörtgeninde Ptolemy Teoremi uygulandığında, $|BM| = b$ olmak üzere,

$|OM| \cdot |BN| + |ON| \cdot |MB| = |OB| \cdot |MN|$ ya da $mb + nb = |OB| \cdot a$ elde edilir. Buradan $b(m+n) = |OB| \cdot a$, $b \cdot k = |OB| \cdot a$ (1).



$[MN]$ nin orta noktası A ile gösterilmek üzere, $\angle MAB = 90°$ ve BON açısı ile aynı yayı gördükleri için $MNB = \alpha$ olur. Bu dik üçgende, $\cos\alpha = \frac{a}{2b}$, $a = 2b\cos\alpha$ dır. Bu değer (1) 'de yazılarak $bk = |OB| 2b\cos\alpha \Rightarrow |OB| = \frac{k}{2\cos\alpha} = sabit$ elde edilir. O noktası, $|OB|$ ve açıortay sabit olduğundan B noktası sabittir. OMN üçgeninde $[OA]$ kenarortay olup, $|OA|^2 = \frac{m^2+n^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, (2)

MBN üçgeninde $[BA]^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$, (3) 'tür.

(2) ve (3)'ten $|OA|^2 - |BA|^2 = \frac{m^2+n^2}{2} - b^2$ (4).

OMB üçgeninde,

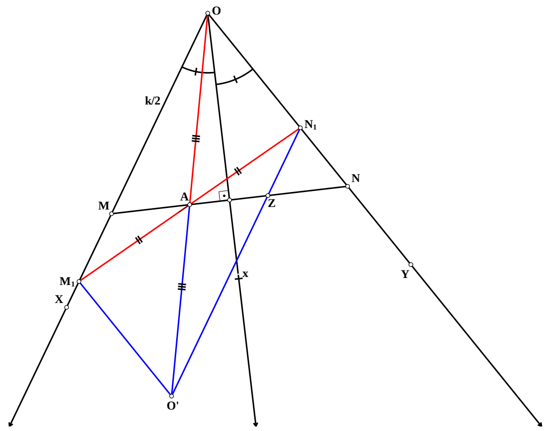
$b^2 = m^2 + \left(\frac{k}{2\cos\alpha}\right)^2 - 2m\frac{k}{2\cos\alpha}\cos\alpha$, ONB üçgeninde,

$b^2 = n^2 + \left(\frac{k}{2\cos\alpha}\right)^2 - 2n\frac{k}{2\cos\alpha}\cos\alpha$ dır (Kosinüs Teoremi). Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanarak, $2b^2 = m^2 + n^2 + 2\left(\frac{k}{2\cos\alpha}\right)^2 - k^2$,

$b^2 = \frac{m^2+n^2}{2} + \left(\frac{k}{2\cos\alpha}\right)^2 - \frac{k^2}{2} \Rightarrow \frac{m^2+n^2}{2} - b^2 = \frac{k^2}{2} - \left(\frac{k}{2\cos\alpha}\right)^2 = sabit$ bulunur.

O halde (4) ifadesi $|OA| - |BA|^2 = sabit$tir. "Sabit iki noktaya uzaklıklarının kareleri farklı noktaları birleşirse n doğruya dik bir doğrudur" Dolayısıyla, A noktasının geometrik yeri, OB doğrusuna dik bir doğrudur.

Tersine $|OM| = |ON| = \frac{k}{2}$, Ox açıortay, $MN \perp Ox$, $A \in [M,N]$ olsun. OM_1N_1 üçgeninin $[M_1N_1]$ kenarının orta noktası A ise, $|OM_1| + |ON_1| = k$ olur. Çünkü A'yı orta nokta kabul edecek $[M_1N_1]$ 'in çizimi, O'nun A'ya göre simetriği olan O' bulunup $OM_1O'N_1$ paralelkenarının oluşturulması ile mümkündür. Bu durumda $O'N_1 \parallel OM_1$, $\angle OMN = \angle N_1ZN$ ve OMN üçgeni ikizkenar olduğundan,

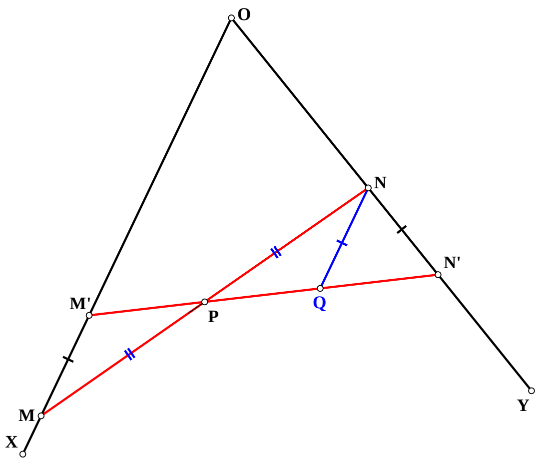


$\angle N_1ZN = \angle N_1NZ \Rightarrow |N_1Z| = |N_1N|$. $|OM_1| = |OM| + |MM'|$ ve $M_1MA \cong N_1ZA$ olduğundan $|MM_1| = |N_1Z| = |N_1N|$, $|ON_1| = |ON| - |NN_1|\ dir$. Bu eşitliklerden, $|OM_1| + |ON_1| = |OM| + |MM_1| + |ON| - |MM_1|$ =|OM|+|ON|=k bulunur.

Çözüm 2:

Geometrik yer ile ilgili soru çözümlerinde sonuca götüren yollardan biri de iki örneklem almak. Özellikle bu örneklemden biri sabit ise ona bağlı birçok şey sabit olacaktır.

$OM + ON = k$ olduğu için $OM' = ON' = \frac{k}{2}$ şartını sağlayan M', N' noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktası da geometrik yer üzerindedir. Bu arada $OM' = ON' = \frac{k}{2} = Sabit$ ve $\angle M'ON' = Sabit$ olduğu için $M'N'$ doğrusu da, doğru parçası da sabittir.



$MM' = NN'$ olduğu aşikar (değilse k dan MM' kadar alınıp NN' dar veriliyor, yine k elde ediliyor).

$M'N'$ ile MN, P de kesişsin. N den $M'M$ ye çizilen paralel $M'N'$ yü Q da kessin.

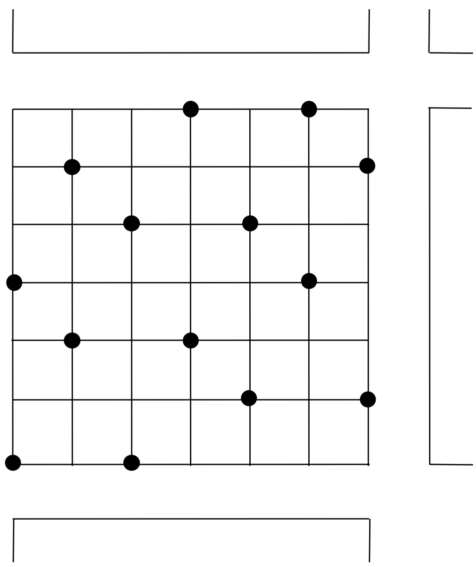
$OM' = ON' \Rightarrow QN = QN' = MM'$ olacaktır. Paralellikten $\frac{QN}{MM'} = \frac{PN}{PM} = 1$ olacaktır. Yani MN doğru parçalarının orta noktaları $P \in M'N'$ dür. Geometrik yer $M'N'$ doğru parçasıdır.

Bu paralel çekmeli çözüm aslında Menelaus'tan başka bir şey değil. AMN üçgeninde M', P, N' noktaları için Menelaus uyguladığımızda da $PM = PN$ eşitliğini elde edeceğiz.

Tersinin ispatı da düzünden farksız. Aynı şekilde $OM + ON = k$ olduğunu göstereceğiz. İster Menealus uygulayın, isterse tekrardan $NQ \parallel OM$ doğrusunu çizin. $NN' = MM'$, dolayısıyla da $OM + ON = \frac{k}{2} + MM' + \frac{k}{2} - NN' = k$ elde edeceksiniz.

Not: İlk çözüm, Matematik Dünyası dergisinde yayınlanan resmi çözümdür. Geometrik yerin tersini de, yani söz konusu geometrik yer üzerindeki her noktanın verilen özelliği sağladığının gösterilmesi kısmını es geçmediğinden dolayı, bu sorunun büyük ihtimalle, rahmetli Fikri GÖKDAL'a ait olduğunu düşünüyorum.

6. Şekilde görülen boyanmış parçayı kaydırarak boyama işlemini sürdürürsek $n = 7k + 6$, $k \geq 0$, için $l(n) \leq \frac{2}{7}(n+1)^2$

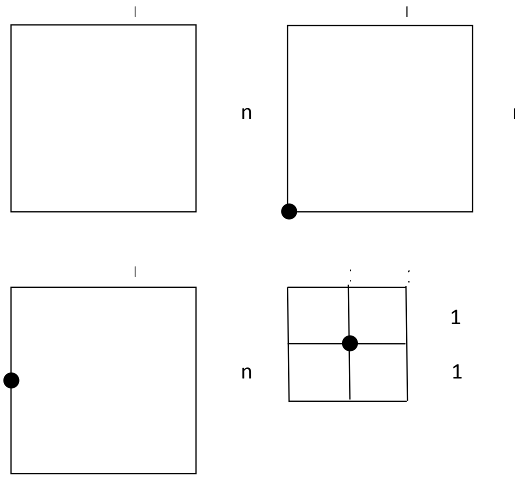


olduğunu görürüz. Eğer $n = 7k + s$, $0 \leq s < 6$ ise, $n = 7(k-1) + 6 + (s+1)$ ve $m = 7(k-1) + 6$ yazalım. Bu takdirde, $n \times n$ karenin içinde $m \times m$ karenin dışında kalan tüm noktaların boyandığı varsayılsa dahi

$l(n) \leq l(m) + (s+1)n + (s+1)m < l(m) + 12n$,

$l(n) < \frac{2}{7}(m+1)^2 + 12n < \frac{2}{7}(n+1)^2 + 12n$ olduğu görülür. Dolayısıyla her $n \geq 6$ için, $\frac{l(n)}{n^2} \leq \frac{2}{7}\frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{12}{n}$ (*) dir.

Şimdi, bir kare alalım. Bir 1×1 karenin kenarları üzerindeki boyanmış nokta sayısı t olsun. Problemin koşulu gereği $t \geq 1$ dir. Her 1×1 kare için $\frac{1}{t}$ sayısına o karenin ağırlığı diyelim. Boyanmış bir nokta alalım. Bu nokta ile kesişen tüm 1×1 karelerin ağırlıklar toplamına o noktanın puanı diyelim. Bu takdirde, boyanmış her bir noktanın puanı, nokta tam köşede ise, ≤ 1; nokta bir kenar üzerinde ise, ≤ 2 ve eğer nokta karenin içinde ise, o noktanın puanı $\leq \frac{7}{2}$ dir. (Son durumda, eğer dört kareden üçünün ağırlığı 1 ise, 2×2 karenin kenarında en az bir boyanmış nokta bulunacağından, dördüncü karenin puanı $\leq 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ eşitsizliğini sağlamalıdır.)



Diğer yandan, her biri 1×1 karenin boyanmış noktaların puanına yaptığı katkıların toplamı 1 dir. Çünkü, bir 1×1 kare üzerinde t adet boyanmış nokta varsa, karenin puanlara yapmış olduğu katkı $\frac{1}{t} + \cdots + \frac{1}{t} = t \cdot \frac{1}{t} = 1$ olur. Demek ki, boyanmış noktaların puan toplamın^2dir. Şimdi $l(n)$ tane boyanmış nokta ve her boyanmış noktanın puanı $\leq \frac{7}{2}$ olduğuna göre,

$n^2 < \frac{7}{2} l(n) \Rightarrow \frac{l(n)}{n^2} \geq \frac{2}{7}$ olduğunu görürüz (**). (*) ile (**) birleştirilirse,

$\frac{2}{7} \leq \frac{l(n)}{n^2} \geq \frac{2}{7} \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{12}{n}$ elde edilir ve Sandviç teoremi ile $\lim_{n \to \infty} \frac{l(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$ olduğu görülür.

40. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 1999

Commented [A21]: Sorular Mathlinks'ten çeviridir. Orijinal değildir.

20 Mart – 21 Mart 1999

1. $m \leq n$ şeklinde pozitif sayılar ve p asal sayısı verilmiş olsun. $a_r, b_s \neq 0$ ve her i, j için $0 \leq a_i, b_j < p$ olmak üzere
$$m = a_0 + a_1 p + \cdots + a_r p^r$$
$$n = b_0 + b_1 p + \cdots + b_s p^s$$
olsun. Her $i = 0,1, \dots r$ için $a_i \leq b_i$ ise $m \prec_p n$ diyeceğiz. $p \nmid \binom{n}{m}$ olması için gerek ve yeter koşulun $m \prec_p n$ olduğunu gösteriniz.

2. $ABCD$ kirişler dörtgeninde L ve N sırasıyla AC ve BD köşegenlerinin orta noktaları olsun. ANC açısının açıortayı BD ise, AC'nin BLD açısının açıortayı olduğunu gösteriniz.

3. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - x - 1$ şartını sağlayan ve
$$\left\{\frac{f(x)}{x} | x \neq 0\right\}$$
kümesini sonlu olduğu tüm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

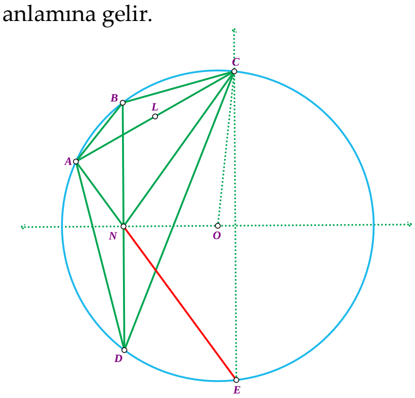
4. C kirişler dörtgeninin alanı A_C, çevresi de P_C dir. C nin çevrel çemberine C nin köşelerinde teğet olan dörtgenin alanı A_T, çevresi de P_T olsun.
$$\frac{A_C}{A_T} \geq \left(\frac{P_C}{P_T}\right)^2$$
olduğunu gösteriniz.

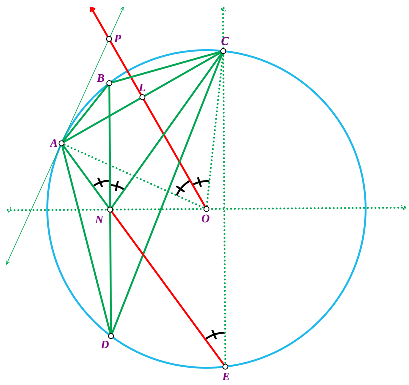
5. A, B, C, D, E ve F kişilerinden her birinin diğerlerine anlatmak istediği dedikodular var. Aynı anda sadece iki kişinin haberleşebildiği bir telefon şebekesi üzerinden birbirlerine bildiklerini anlatıyorlar. Her telefon görüşmesinde birbirlerine o ana kadar ne biliyorlarsa anlatıyorlar. Tüm dedikoduların herkes tarafından bilinmesini mümkün kılan en az sayıda telefon görüşmesi adedi nedir?

6. Sonlu sayıda parabolün iç bölgeleri ile düzlemin kaplanamayacağını gösteriniz.

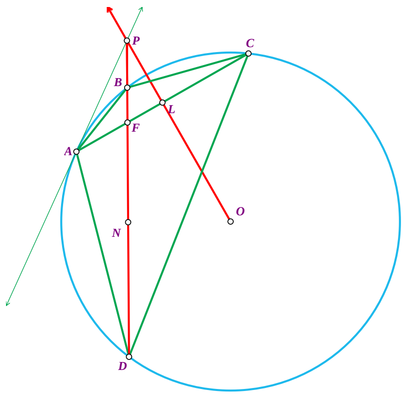
1.

2. Kirişler dörtgeninin çemberinin merkezi O olsun. C nin ON üzerindeki çapına göre simetriği E olsun. $CN = NE$ ve $ON \perp CE$ olacaktır. $BD \perp ON$ olduğu için $BD \parallel CE$ ve $\angle BNC = \angle NCE = \angle NEC = \angle ANB$ olur ki, bu da A, N, E noktalarının doğrusal olduğu anlamına gelir.





$\angle ANC = \angle AOC = 2 \cdot \angle AEC$ bağıntısı A, N, O, C noktalarının çembersel olduğu anlamına gelir. Bu çemberin OL yi kestiği nokta P olsun. AP küçük yayının ölçüsü $\angle AOP/2$ yani, $\angle ANB/2$ kadardır. Bu durumda NB doğrusu söz konusu çemberi P de keser. $\angle PNO = 90°$ olduğu için $\angle PAO = 90°$, yani PA doğrusu, $(ABCD)$ çemberine teğettir. $PA = PC$ olduğu için de PC doğrusu da teğettir.



Aslında bundan sonrası Pole-Polar gösterimi ve temel özellikleri ile ilgili. Biz soruya geri dönelim.

$PD \cap AC = \{F\}$ olsun.

F noktasının O merkezli çembere göre kuvvetinden $BF \cdot FD = AF \cdot FC$.

P noktasının O merkezli çembere göre kuvvetinden $PA^2 = PB \cdot PD$.

ΔPAC de, Stewart'ın özel halinden $PF^2 = PA^2 - AF \cdot FC$.

$PF^2 = PB \cdot PD - BF \cdot FD$

$\Rightarrow (PD - FD)^2 = PB \cdot PD - BF \cdot FD$

$\Rightarrow PD^2 + FD^2 - 2 \cdot PD \cdot FD = PD^2 - FD \cdot PD - BF \cdot PD - BF \cdot FD$

$\Rightarrow BF \cdot PD = -FD^2 + FD \cdot PD - FD \cdot BF = FD(PD - BF - FD) = FD \cdot PB$

Son elde edilen eşitliği orantı şeklinde yazarsak

$$\frac{BF}{FD} = \frac{BP}{PD}$$

elde ederiz. $\angle PLF = 90°$ bilgisini de dikkate aldığımızda, ΔBLD üçgeninin iç açıortayı LF, dış açıortayı da LP çıkar.

Bu son çıkarımımızı biraz daha teknik bir dille anlatmaya çalışalım.

P ve F noktalarının B ve D noktalarına uzaklıkları oranı aynıdır. Bu durumda, bu tip diğer noktaların geometrik yeri, B ve D noktalarına ait bir Apolonyus çemberidir. PF, bu çemberin bir çapı; dolayısıyla da $\angle PLF = 90°$ olduğu için de L noktası da geometrik yer üzerindedir. Bu durumda

$$\frac{BF}{FD} = \frac{BP}{PD} = \frac{BL}{LD}$$

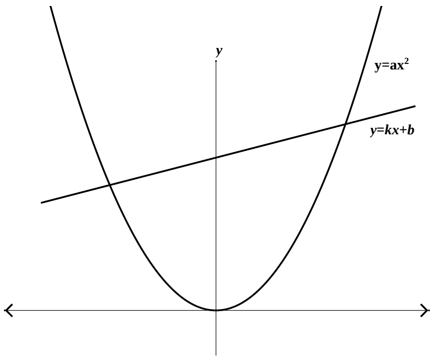
olur. Bu da, BLD üçgeninde LF nin iç açıortay olduğu anlamına gelir.

3. $k \neq 1$ ve $x_k - f(x_k) = k$ olsun. $\frac{f(x_k-1-f(x_k))}{k-1} = \frac{f(k-1)}{k-1} = \frac{f(x_k)-x_k-1}{k-1} = \frac{-k-1}{k-1} = -1 - \frac{2}{k-1}$ olacağından $\left\{\frac{f(k-1)}{k-1} | k \neq 1\right\}$ kümesinin sonlu sayıda elemanı olduğu için $-1 - \frac{2}{k-1}$ ifadesi sonlu sayıda farklı değer alabilmeli, bu da ancak sonlu sayıda $x_k - f(x_k) = k$ olduğunda mümkün. Yani $\{x - f(x) | x \in R\}$ kümesi sonludur. Sonlu kümelerin en büyük ve en küçük elemanları vardır. Bunlar arasıdan $|x - f(x)|$ ifadesini en büyük yapan değer $x = x_0$ olsun.
   $y = x_0 - 1 - f(x_0)$ değişkeni ile $y - f(y) = y - (f(x_0) - x_0 - 1) = 2(x_0 - f(x_0))$ olur. Bu da x_0 ın en büyük şartını $|x_0 - f(x_0)| = 0$ olmadıkça ihlal eder. $|x - f(x)|$ ifadesinin en büyük değeri $|x_0 - f(x_0)| = 0$ olduğuna göre tüm değerleri 0 dır. Buradan da $f(x) = x$ elde edilir. Yerine koyduğumuzda $f(x - 1 - x) = x - x - 1 = f(-1)$ olduğu için $f(x) = x$ verilen denklemi sağlar.

4.

5.

6. Çözüm 1:
   Düzlemde bir parabol alalım ve koordinat sistemini öyle seçelim ki, bu sistemde parabolün denklemi $y = ax^2$, $(a > 0)$ olsun. Parabolün iç bölgesindeki (x, y) noktaları (sınırlardaki noktalar dahil) için $y \geq ax^2$ sağlanacaktır.



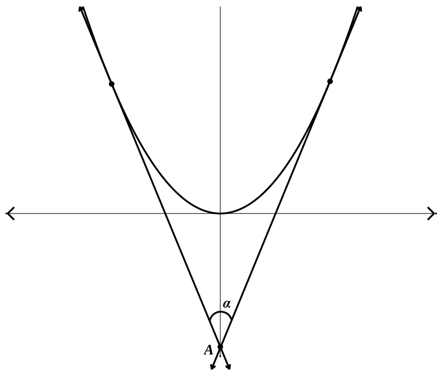
Şimdi, y-eksenine paralel olmayan herhangi bir $y = kx + b$ doğrusunu ele alalım. Bu doğrunun en fazla sonlu bir kısmının "aydınlanabileceğini" görelim. Aydınlanmış noktaların birinci koordinatı olan x için $kx + b \geq ax^2$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Buradan,

$ax^2 - kx + b \leq 0$ olduğu görülür. Eğer $P(x) = ax^2 - kx + b \ \ (a > 0)$ polinomunun diskriminantı $D = k^2 - 4ab$ negatif ise, doğru, parabolü hiç kesmiyor; $D \geq 0$ ise; doğru, parabolü $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ gibi, $D = 0$ durumunda çakışan, iki noktada keser ve doğrunun aydınlanan kısmı bu iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır. $D = 0$ durumunda doğrunun bir tek noktası aydınlanmıştır. Böylece, parabolün simetri eksenine paralel olmayan her doğrunun en fazla sonlu bir parçası aydınlanabilir.

Şimdi, sonlu sayıda fener, dolayısıyla, onların aydınlattığı sonlu sayıda parabol, düzlemde nasıl yerleştirilmiş olursa olsun, bu parabollerin hiç birinin simetri eksenine paralel olmayan bir doğrunun tamamı aydınlanamaz. (Böyle bir doğru var mıdır? Bir noktadan geçen n adet parabollerin simetri eksenlerine paralel olan n adet doğru vardır. Bu noktadan geçen diğer doğruların hiçbirisi bu parabollerin simetri eksenlerinden birine paralel değildir.) Bu nedenle düzlemin tamamı aydınlanamaz.

Çözüm 2:

Bir parabolün iç bölgesini istediğimiz kadar küçük bir açının iç bölgesi içine alabiliriz.



Çünkü, düzlemde koordinat sistemini, şekilde görüldüğü gibi, parabolün tepe noktası orijin ve simetri ekseni y-ekseni olacak şekilde seçersek; parabol üzerinde y-eksenine göre simetrik olan iki noktadan teğetler çizersek, bu teğetler y-eksenin üzerinde bir A noktasında kesişirler. Böylece oluşan açının iç bölgesi, parabolün iç bölgesini içerir. Teğetleri uygun yerden çizerek, oluşan α açısını istediğimiz kadar küçültebileceğimiz açıktır.

Parabollerin sayısı n olsun ver her bir parabolü köşesi A_i, $1 \leq i \leq n$ de olan ve $\frac{2\pi}{n}$ den küçük olan α_i açısının içine alalım. Eğer düzlem bu şekilde $\frac{2\pi}{n}$ den küçük n tane açı tarafından örtülebilseydi, köşeleri çakışan n tane $\frac{2\pi}{n}$ den küçük açı tarafından örtülebilmesi gerekirdi. Fakat bu mümkün değildir; çünkü sözü edilen ortak köşeyi merkez kabul eden bir çember çizilirse, çemberin bu açılarla örtülemeyeceği görülür.

7. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1999

Commented [A22]: Matematik Dünyası'ndan alındı.

3-4 Aralık 1999

1. $0 \leq x, y, z, w \leq 36$ olmak üzere,
$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \ (mod\ 37)$$
denkliğini sağlayan (x, y, z, w) sıralı tamsayı dörtlülerinin sayısını bulunuz.

2. O merkezli bir çembere, dışındaki bir S noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları P ve Q; SO doğrusunun çemberle kesişim noktaları A ve B; PB (küçük) yayının herhangi bir iç noktası X; QX ve PX doğrularının OS doğrusu ile kesişim noktaları C ve D ile gösterilmek üzere,
$$\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|} = \frac{2}{|AB|}$$
olduğunu ispatlayınız.

3. n ve p pozitif tamsayılar olmak üzere, $i, j \in \{1,2, \dots, n\}$ için $|f(i) - f(j)| \leq p$ şartını sağlayan
$$f: \{1,2, \dots, n\} \to \{-p, -p + 1, \dots, p - 1, p\}$$
fonksiyonlarının sayısının $(p + 1)^{n+1} - p^{n+1}$ olduğunu gösteriniz.

4. Her $n > 1$ için $a_n = a_{n-1}(2 - a_{n-1})$, $\frac{1}{2} < a_1 < 1$ ve $\sum_{n=1}^{2000} a_n = 1999$ koşullarını sağlayan tüm (a_n) gerçel sayı dizilerini bulunuz.

5. Çevrel çemberinin yarıçapı R olan dar açılı bir $A_1A_2A_3$ üçgeninde, A_1, A_2 ve A_3 noktalarından geçen yüksekliklerin ayakları sırasıyla Y_1, Y_2 veY_3, $|A_1Y_1| = h_1$, $|A_2Y_2| = h_2$, $|A_3Y_3| = h_3$; A_1, A_2 ve A_3 noktalarından $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine çizilen teğetlerin uzunlukları da sırasıyla t_1, t_2 ve t_3 ile gösterilmek üzere,
$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}}\right)^2 \leq \frac{3}{2} R$$
olduğunu ispatlayınız.

6. 40 sayının toplamını, 8 "işlemci" kullanarak bulmak istiyoruz. Başlangıçta, her işlemcinin ekranında 0 sayısı bulunuyor. Herhangi bir işlemci, kendisine dışarıdan verilen ya da başka bir işlemciden aktarılan sayıyı, ekranındaki mevcut sayıyla bir birim zamanda toplayarak, elde ettiği sonucu ekranına yazıyor. Ekranındaki sayıyı başka bir işlemciye aktaran bir işlemcinin ekranı kararıyor. Verilen 40 sayıdan istediklerimizi istediğimiz işlemciye girerek ve işlemcilerin elde ettiği kısmi toplamları da istediğimiz işlemciye aktararak, bu 40 sayıyı en az kaç birim zamanda toplayabiliriz?

7. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 1999 – Çözümler

1. Önce a bir tamsayı olmak üzere; $x^2+y^2 \equiv a \ \ (mod\, 37)$ denkliğini sağlaya (x,y) sıralı tamsayı ikililerinin sayısını bulalım. $a \equiv 0 \ \ (mod\, 37)$ ise, $x^2+y^2 \equiv 0 \ \ (mod\, 37)$ denkliği, $y^2 \equiv (6x)^2 \ \ (mod\, 37)$ e dolayısıyla $y \equiv \pm 6x \ \ (mod\, 37)$ denkliklerine eşdeğer olduğu için, çözüm olarak $2 \cdot 36 + 1 = 73$ (x,y) sıralı ikilisi elde edilir.

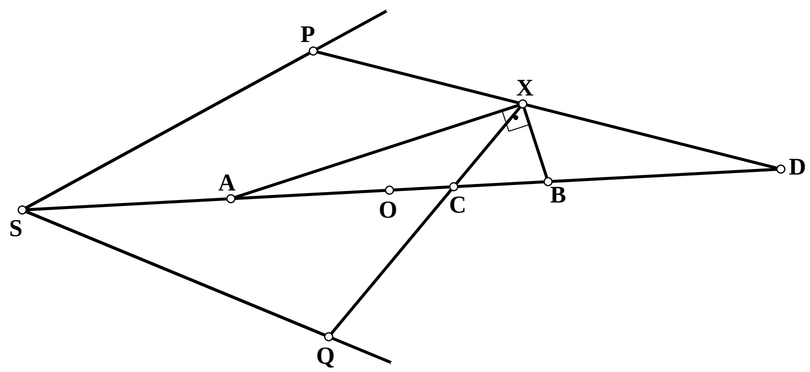
   Şimdi de $a \not\equiv 0 \ \ (mod\, 37)$ durumuna bakalım.

   $x^2+y^2 \equiv x^2 - 36y^2 \equiv (x-6y)(x+6y) \ \ (mod\, 37)$ olduğu için, aradığımız sayı $(x-6y)(x+6y) \equiv a \ \ (mod\, 37)$ denkliğini sağlayan (x,y) sıralı ikililerinin sayısıdır. Öte yandan, $a \not\equiv 0 \ (mod\, 37)$ olduğundan, her $1 \le u \le 36$ tamsayısı için, $uv \equiv a \ \ (mod\, 37)$ ve $1 \le v \le 36$ koşullarını sağlayan tam olarak bir v tamsayısı bulunur. Böyle (u,v) sıralı ikilileri ile $u \equiv x-6y$, $v \equiv x+6y$, $0 \le x, y \le 36$ koşullarını sağlayan (x,y) sıralı ikilileri arasında bire-bir bir eşleme bulunduğundan, bu durumda, $x^2+y^2 \equiv a \ \ (mod\, 37)$ bağıntısının çözümü olan 36 (x,y) ikilisi bulunur.

   Diğer taraftan $z^3+w^3 \equiv 0 \ \ (mod\, 37)$ denkliği, $w^3 \equiv -z^3 \ \ (mod\, 37)$, dolayısıyla da $w \equiv -z$ veya $11z$ veya $-10z \ \ (mod\, 37)$ bağıntılarına eşdeğerdir. Yani

   $z^3+w^3 \equiv 0 \ \ (mod\, 37)$, $0 \le z, w \le 36$ koşullarını sağlayan $36 \cdot 3 + 1 = 109$ (z,w) sıralı tamsayı ikilisi vardır. Sonuç olarak, (z,w) ikililerinin alabileceği toplam 37^2 değerden 109 u için, istene koşulu sağlayan 73 (x,y) ikilisi, 37^2-109 tanesi için de 36 (x,y) ikilisi vardır. Aranan sayı, $109 \cdot 73 + (37^2-109) \cdot 36 = 53317$ dir.

2. SPQ üçgeni $(SP = SQ)$ ikizkenar üçgen olup, A noktası PQ yayının orta noktası ve dolayısıyla



   XA, PXQ açısının açıortayıdır. Diğer taraftan, AXB açısı AB çapını gören bir çevre açı olduğundan bir dik açıdır. Bu nedenle XB, QXD açısının açıortayıdır. CXD üçgeninde XB ve XA açıortay olduklarından, açıortay teoremi gereğince,

   $$\frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} \left(\Leftrightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} \Leftrightarrow \frac{CB}{AC} = \frac{DB}{AD} \right) \Leftrightarrow \frac{CB}{AC} = \frac{DB}{AD} \Rightarrow \frac{CB}{AB \cdot AC} = \frac{DB}{AB \cdot AD} \Rightarrow \frac{AB-AC}{AB \cdot AC} = \frac{AD-AB}{AB \cdot AD}$$
   $$\Rightarrow \frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD} \Rightarrow \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$$

   bulunur.

3. Verilen koşulları sağlayan ve aldığı en yüksek değer q olan fonksiyonların sayısını $Q(q)$ ile gösterelim. Önce $q \in \{0, \dots, p\}$ olduğu duruma bakalım. Her $i, j \in \{0, \dots, n\}$ için $|f(i) - f(j)| \le p$ koşulu nedeniyle, bu durumda, her $k \in \{0, \dots, n\}$ için

$f(k) \in \{q-p, q-p+1, \dots, q\}$ olur. Aldığı tüm değerler bu kümeye ait olan $(p+1)^n$ tane fonksiyon bulunup, bunlardan q değerini hiç alamayanların sayısı p^n dir. Dolayısıyla, $Q(p) = (p+1)^n - p$ olur. Eğer $q \in \{1, \dots, p\}$ ise, benzer biçimde

$Q(-q) = (p-q+1)^n - (p-q)^n$ bulunur. Verilen koşulları sağlayan fonksiyonların toplam sayısı $(p+1)((p+1)^n - p^n) + \sum_{q=1}^{p}((p-q+1)^n - (p-q)^n)$

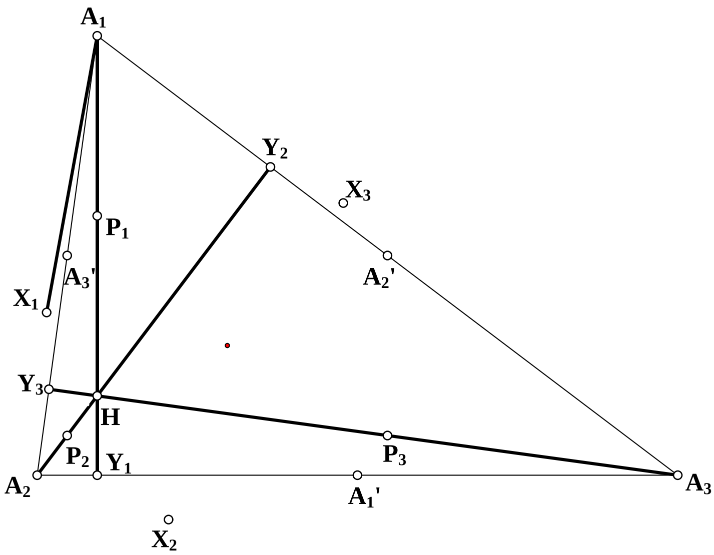
$= (p+1)^{n+1} - (p+1)p^n + p^n = (p+1)^{n+1} - p^{n+1}$ olur.

4. Her $n > 1$ için, $1 - a_n = 1 - a_{n-1}(2 - a_{n-1}) = (1 - a_{n-1})^2$; dolayısıyla da

$1 - a_n = (1 - a_1)^{2^{n-1}}$ olur. (a_n) verilen koşuları sağlayan bir gerçel sayı dizisi ise, $1 = 2000 - 1999 = 2000 - \sum_{n=1}^{2000} a_n = \sum_{n=1}^{2000} 1 - a_n = \sum_{n=1}^{2000} (1 - a_n)^{2^{n-1}}$

$< \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_1)^n = \frac{1-a_1}{a_1} < 1$ olacağı için, böyle bir dizinin bulunmadığı gösterilmiş olur.

5. Çevrel çemberin merkezi O, $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberi ile yüksekliklerin kesişim noktaları P_1, P_2 ve P_3 ile gösterilmek üzere A_1 noktasının $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine göre kuvveti: A_1 den çizilen teğetin uzunluğu t_1 olduğundan, $t_1^2 = A_1P_1 \cdot A_1Y_1 = A_1P_1 \cdot h_1 \Rightarrow \frac{t_1^2}{h_1} = A_1P_1$ ve benzer biçimde t_2, t_3 için de bu eşitlikle yazılarak, $\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} A_iP_i$ bulunur.



Yükseklik ayaklarından geçen çember, aynı zamanda kenarların orta noktaları olan A_1', A_2', A_3' den ve HA_1, HA_2, HA_3 ün orta noktaları olan P_1, P_2, P_3 den geçer ve $A_iP_i = OA_i'$ eşitliği sağlanır. Bu nedenle $\sum_{i=1}^{3} A_iP_i = \sum_{i=1}^{3} OA_i'$ olur. (İkinci tarafı hesaplayalım.) $A_1A_3'OA_2'$ kirişler dörtgeni olduğundan Ptolemy Teoremi gereğince,

$OA_1 \cdot A_2'A_3' = OA_2' \cdot A_1A_3' + OA_3' \cdot A_1A_2'$ (1)

ve benzer biçimde $A_2A_1'OA_3'$, $A_3A_2'OA_1'$ dörtgenlerinden de,

$OA_2 \cdot A_3'A_1' = OA_1' \cdot A_2A_3' + OA_3' \cdot A_2A_1'$ (2),

$OA_3 \cdot A_1'A_2' = OA_1' \cdot A_3A_2' + OA_2' \cdot A_3A_1'$ (3) dür.

Bu $(1), (2), (3)$ eşitlikleri taraf tarafa toplanarak; $OA_1 = OA_2 = OA_3 = 1$ olduğu göz önünde tutulup, $A_2A_3 = a, A_3A_1 = b, A_1A_2 = c$ alındığında, $A'_3A'_2 = \frac{a}{2}, A'_3A'_1 = \frac{b}{2}, A'_1A'_2 = \frac{c}{2}$ olacağından, $\frac{a+b+c}{2} = OA'_1\left(\frac{c}{2}+\frac{b}{2}\right) + OA'_2\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}\right) + OA'_3\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)$

$= OA'_1\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{a}{2}\right) + OA'_2\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{b}{2}\right) + OA'_3\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{c}{2}\right)$

$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)(OA'_1 + OA'_2 + OA'_3) - \left(\frac{a\cdot OA'_1 + b\cdot OA'_2 + c\cdot OA'_3}{2}\right)$

$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sum_{i=1}^{3} OA'_i - Alan(A_1A_2A_3)$.

$Alan(A_1A_2A_3) = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)r$ (r: iç yarıçap) yazıldığında,

$\frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2}\sum_{i=1}^{3} OA'_i - \frac{a+b+c}{2}r \Rightarrow R = \sum_{i=1}^{3} OA'_i - r \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} OA'_i = R + r.$ Her üçgende çevrel yarıçap (R) ile iç yarıçap (r) arasında $R \geq 2r$ bağıntısı vardır. O halde $R \geq 2r \Rightarrow r \leq \frac{R}{2}$ ve $R + r \leq R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$ olur. Buradan

$\sum_{i=1}^{3} OA'_i = \sum_{i=1}^{3} A_iP_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}}\right)^2 \leq \frac{3R}{2}$ bulunur.

Not: Erdös-Mordell eşitsizliğine göre $3R = OA + OB + OC \geq 2(OA'_1 + OA'_2 + OA'_3)$ sonucu elde edilebilir. Ya da $OA' = R \cdot \cos\angle A$, $OB' = R \cdot \cos\angle B$ ve $OC' = R \cdot \cos\angle C$ eşitlikleri yazılarak problem $cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \leq \frac{3}{2}$ ye indirgenebilir. Bunları kullanarak sonuca gitmemizde bir sakınca var mı? Bu sorunun yanıtı biraz zor.

IMO gibi yarışma olsaydı, cevap evet olurdu. Dünya ülkeleri arasında hangi teorem çok bilinir, hangi teorem az bilinir gibi bir karşılaştırma yapılamayacağı için çözüm aşamasında literatürde olan bir teoreme gönderme yapılmışsa çözüm doğru sayılır. Bunun bir nedeni de, IMO sorularının bu şekilde bir teoreme bağlı kalınmayacak şekilde seçilmeye çalışılmasıdır. Seçici komiteden kimse önerilen sorunun bir teoreminin bariz bir sonucu olduğunu göremediyse, bunu gören bir yarışmacı iyi bir iş çıkarmış demektir.

Türkiye'nin matematik olimpiyatları sorularının özellikle ilk başlardaki soruların tam da böyle bir özellik taşıdığını söyleyemeyiz. Değerlendiriciler de Türk müfredatına yabancı olmadıkları için öğrencilerin iyi bildiği teoremlerin neler olduğu konusunda bir fikir sahibi. Soru açık bir şekilde bir teoremin ispatını istiyorsa, elbette ki "bunun adı şu, onun için doğrudur" şeklinde bir çözüm kabul edilmeyecektir. Bana göre yukarıdaki soruda Erdös-Mordell eşitsizliğinden çözüme gitmek legal; ama $cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \leq \frac{3}{2}$ olduğunu göstermek gerekir.

6. Belli bir anda, herhangi bir işlemciye girilmemiş sayılarla, işlemcilerin ekranlarındaki sayılara "işlem görecek kalem" diyelim. $n(c)$ ile, c zaman birimi sonundaki işlem görecek kalem sayısını gösterelim. $n(0) = 40 + 8 = 48$ dir. $\overline{c}$ zaman sonunda istenen toplam elde edilmişse $n(\overline{c}) = 1$ olur. (Burada genelliği yitirmeden her işlemcinin kullanıldığını varsayıyoruz.) Bir zaman biriminde en fazla 8 işlem yapılabilir; ayrıca yine bir zaman biriminde, işlem görecek kalem sayısı, en fazla yarıya indirilebilir. Dolayısıyla, $n(c) - n(c+1) \leq \min\left\{\frac{n(c)}{2}, 8\right\}$, ya da eşdeğer biçimde, $n(c+1) \geq \max\left\{\frac{n(c)}{2}, n(c) - 8\right\}$ olur. Şimdi $M(0) = 48$;
$M(c+1) = \max\left\{\left\lceil\frac{M(c)}{2}\right\rceil, M(c) - 8\right\}$ sistemine bakalım. ($\lceil x\rceil \coloneqq x$ ten büyük ya da x e eşit olan en küçük tamsayıdır.)

$\overline{C}, M(\overline{C}) = 1$ koşulunu sağlayan en küçük tamsayı; $\hat{C}$ da aranan yanıt ise; $\hat{C} \geq \overline{C}$ dir. $\overline{C}$ yı bulalım:

$M(0) = 48$; $M(1) = \max\left\{\left\lceil\frac{48}{2}\right\rceil, 40\right\} = 40$;

$M(2) = \max\left\{\left\lceil\frac{40}{2}\right\rceil, 32\right\} = 32$; $M(3) = \max\left\{\left\lceil\frac{32}{2}\right\rceil, 24\right\} = 24$;

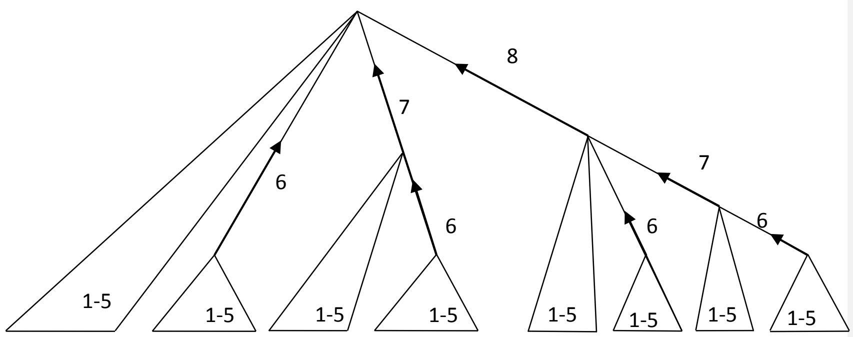
$M(4) = \max\left\{\left\lceil\frac{24}{2}\right\rceil, 16\right\} = 16$; $M(5) = \max\left\{\left\lceil\frac{16}{2}\right\rceil, 8\right\} = 8$;

$M(6) = \max\left\{\left\lceil\frac{8}{2}\right\rceil, 0\right\} = 4$; $M(7) = \max\left\{\left\lceil\frac{4}{2}\right\rceil, -4\right\} = 2$;

$M(1) = \max\left\{\left\lceil\frac{2}{2}\right\rceil, -6\right\} = 1$.

Yani $\overline{C} = 8$ dir. Aranan sayı $\hat{C} \geq 8$ olur.

Aşağıdaki çizelgede, köşeler işlemcileri; üçgenler ilk beş zaman biriminde işlemcilere girilen sayıyı; yönlü kenarlar da, hangi işlemcinin kısmi toplamının hangi işlemciye aktarıldığını göstermek üzere; istenen toplamın 8 zaman biriminde elde edilebileceği görülmektedir. Yani $\overline{C} = 8$ dir.



41. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2000

Commented [A23]: Sorular Mathlinks'ten çeviridir. Orijinal değildir.

1 Nisan – 2 Nisan 2000

1.
   (a) Her n pozitif sayısı için, $x^2 - xy + y^2 = n$ denklemini sağlayan (x, y) sıralı tamsayı ikililerinin sayısının 3 ile bölünebileceğini gösteriniz.
   (b) $x^2 - xy + y^2 = 727$ denklemini sağlayan tüm sıralı tamsayı ikililerini bulunuz.

2. ABC üçgeninde A köşesine ait iç ve dış açıortaylar BC yi sırasıyla D ve E de kesiyor. DE çaplı çember ile AC, ikinci kez F de kesişiyor. ABF üçgeninin çevrel çemberine A da teğet olan doğru DE çaplı çember ile ikinci kez G de kesişiyor. $|AF| = |AG|$ olduğunu gösteriniz.

3. $P(x) = x + 1$ ve $Q(x) = x^2 + 1$ olmak üzere; $(x_1, y_1) = (1,3)$ ve her k için, (x_{k+1}, y_{k+1}) 'in ya $\left(P(x_k), Q(y_k)\right)$ ya ya da $\left(Q(x_k), P(y_k)\right)$ ya eşit olduğu $\left((x_k, y_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dizilerini ele alalım.
   Bu dizililerden en az biri için $x_n = y_n$ ise n ye iyi sayı diyeceğiz. Tüm iyi sayıları bulunuz.

4. Herhangi bir sonsuz uzunluktaki üçgen prizmanın kesişimleri eşkenar üçgen olacak şekilde bir düzlemle kesilebileceğini gösteriniz.

5. $ABCD$ eşkenar dörtgeninin AB, BC, CD, DA kenarları üzerinde $MN \parallel LK$ ve MN ile KL arasındaki uzaklık $ABCD$ nin yüksekliğine eşit olacak şekilde sırasıyla M, N, K, L noktaları alınıyor. ALM üçgeni ile NCK üçgeninin çevrel çemberleri kesişirken, LDK üçgeni ile MBN üçgeninin çevrel çemberlerinin kesişmediğini gösteriniz.

6. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için
$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq 1$$
   olacak şekilde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanıyor. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|f(x) - g(x)| \leq 1$ ve $g(x+y) = g(x) + g(y)$ olacak şekilde bir $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonun var olduğunu gösteriniz.

41. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2000 – Çözümler

1.

2. F merkezli çember B, C noktalarına ait A, D, E den geçen Apolonyus çemberidir. Çember üzerindeki her F noktası için FBC üçgenlerinde DF iç açıortay ve EF dış açıortaydır. $\angle DFC = \frac{\angle BFC}{2} = \angle BEA$ ve $\angle DAC = \frac{\angle BAC}{2} = \angle BEF$.
   $\angle AEB + \angle BEF = \angle AEF = \angle AGF = \frac{\angle BFC}{2} + \frac{\angle BAC}{2}$ ve
   $\angle ABF = 180° - \angle BAF - \angle BFC = 180° - 2 \cdot \angle AGF \Rightarrow \angle AFG = AGF \Rightarrow AF = AG$ dir.

3.
4.
5.

6.

8. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2000

Commented [A24]: Sorular Mathlinks'ten çeviridir. Orijinal değildir.

8-9 Aralık 2000

1. O merkezli bir çember ile çemberin iç bölgesinde bir A noktası veriliyor. B çemberin üzerinde ($B \notin OA$) hareketli bir nokta ve $\widehat{ABC}$ açısının iç açıortayı ile $[AB]$ nin kesişim noktası P_B olmak üzere; P_B noktalarının geometrik yerini bulunuz.

2. Her n pozitif tamsayısı için $P_n(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1$ şeklinde tanımlanıyor. Her a pozitif tamsayısı için
$$P_n(x) = \left(1 + ax + x^2R(x)\right)Q(x)$$
şartını sağlayan tam katsayılı $R(x)$ ve $Q(x)$ polinomları ile n pozitif tamsayısının bulunabileceğini gösteriniz.

3. Her $x, y \in \{1,2,\dots,2000\}$ için tanımlı $f(x,y)$ ve $g(x,y)$ gerçel değerli fonksiyonlar verilmiş olsun. $x \notin X$ ve $y \notin Y$ nin $f(x,y) = g(x,y)$ yi gerektirdiği 1000 er elemanlı $X, Y \subset \{1,2,\dots,2000\}$ kümeleri varsa, $f(x,y) \neq g(x,y)$ şartını sağlayan (x,y) sıralı ikililerinin sayısı en çok kaç olabilir?

4. p asal bir sayı olsun. Derecesi p'den küçük olan, katsayıları $\{0,1,\dots,p-1\}$ kümesinde yer alan ve tüm m, n tam sayıları için
$$T(n) \equiv T(m) \pmod p \Rightarrow n \equiv m \pmod p$$
koşulunu sağlayan bir $T(x)$ polinomunun derecesinin en çok kaç olabileceğini belirleyiniz.

5. Pozitif a gerçel sayısı ile A noktasından geçen iki ışın veriliyor. $|AB| + |AC| = a$ olacak şekilde A dan geçen ve ışınları B ve C noktalarında kesen çemberlerin A'dan başka ortak bir noktalarının olduğunu gösteriniz.

6. $f^0(x) = x$ ve her k pozitif tamsayısı için $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ olmak üzere; $x \in [0,1]$ için $f^n(x) = x$ olacak şekilde n pozitif tamsayısının bulunabildiği tüm sürekli $f: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonlarını bulunuz.

8. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2000 – Çözümler

1. Çözüm 1:
P_B den OB ye çizilen paralel OB yi M de kesin. Paralellikten ve iç açıortay teoreminden $\frac{MP_B}{OB} = \frac{AP_B}{P_B B} = \frac{OA}{OB+OA} \Rightarrow MP_B = \frac{OA \cdot OB}{OB+OA}$ elde edilir. Paralellikten dolayı $MO = MP_B = \frac{OA \cdot OB}{OB+OA} = Sabit$ olacağı için M noktası sabit bir noktadır. P_B nin M ye uzaklığı da sabit olduğu için P_B, M merkezli $\frac{OA \cdot OB}{OB+OA}$ yarıçaplı çember üzerindedir. Soruda $B \notin OA$ dediği için geometrik yer M merkezli çemberin O dan geçen çapı hariç kısmıdır.

Çözüm 2:
$[OA$ çemberi B' de kessin. $P_B B = P_B B'$. Açıortay teoreminden $\frac{OA}{OB'} = \frac{OA}{OB} = \frac{AP_B}{P_B B} = \frac{AP_B}{P_B B'}$ elde edilir. P_B ile O, A ve B' noktalarına olan uzaklıkları oranı sabit $\left(\frac{OA}{OB}\right)$ olan noktalardır. Öyleyse P_B, A ve B' noktalarına ait O dan geçen Apolonyus çemberi üzerindedir.

2. n, ilk k asal sayının çarpımı olsun.

$k = 2$ için, $n = 6$ dır.
$$P_6(x)(x-1) = x^6 - 1 = (x-1)\underbrace{(x+1)(x^2+x+1)}_{x^2R(x)+2x+1} + \underbrace{(x^2-2x+1)}_{Q(x)}.$$
$a = 2$ için $n = 6$, $R(x) = x + 2$ ve $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ olarak bulunabiliyor.
Genel olarak $(\ldots + x + 1)$ şeklinde a ifadeyi yan yana çarpasak, ax li bir terim elde ederiz.

$k = 3$ için, $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.
$$P_{30}(x)(x-1) = x^{30} - 1$$
polinomunun $x^2 - 1$, $x^6 - 1$, $x^{10} - 1$ polinomları ayrı ayrı böler. Ama hep birlikte bölmez.
Benzer şekilde $x - 1$, $x + 1$, $x^3 - 1$, $x^3 + 1$, $x^5 - 1$, $x^5 + 1$ polinomları da $x^{30} - 1$ i ayrı ayrı böler. Ama hep birlikte bölmez.
Bu durumda $x^2 + x + 1$ ile $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinomları da $x^{30} - 1$ i ayrı ayrı böler. Bu iki polinomun $EBOB$ ları 1 ise $x^{30} - 1$ i ikisi birlikteyken böler. Yani
$$(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1) | x^{30} - 1$$
Bu iki polinomun aralarında asal olduğu
$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x^2+x+1) + x^2 + x + 1 - x^2 = (x^2+x+1)(x+1) - x^2$$
şeklinde gösterilebilir. Bu durumda
$$x^{30} - 1 = Q(x)(x-1)\underbrace{(x+1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}_{\ldots+3x+1}$$
şeklinde n sayısı ile $R(x)$ ve $Q(x)$ polinomları bulunabilir.

İddia:
$$ebob(x^m - 1, x^n - 1) = x^{ebob(m,n)} - 1$$
İspat:
$d = (m, n) \Rightarrow x^d - 1 | x^m - 1$ ve $x^d - 1 | x^n - 1$.
$(x^m - 1, x^n - 1) = t \Rightarrow x^d - 1 | t \Rightarrow x^d - 1 \le t$.

$mr - ns = d$ ya da eşdeğer olarak $mr = d + ns$ olacak şekilde r ve s pozitif tam sayıları vardır. (Bachet-Bezout Teoremi)
$t|x^{mr} - 1$ ve $t|x^{ns} - 1$ olduğu aşikar. Bu durumda

$$t\big|x^d(x^{ns} - 1) \Rightarrow t\big|x^{d+ns} - x^d \Rightarrow t|x^{mr} - x^d$$

ve

$$t|(x^{mr} - 1) - \left(x^{mr} - x^d\right) \Rightarrow t|x^d - 1 \Rightarrow t \leq x^d - 1$$

elde edilir. $x^d - 1 \leq t \leq x^d - 1$ ifadesinin tek bir anlamı vardır:

$$(x^m - 1, x^n - 1) = t = x^d - 1 = x^{(m,n)} - 1$$

p ve q farklı asal sayılar olmak üzere; ispatladığımız iddiaya göre

$$ebob(x^p - 1, x^q - 1) = x - 1$$

Soruya geri dönersek,
$k = a$ için, n sayısı ilk a asal sayının çarpımı olacak.
Her $p|n$ asal sayısı için $x^p - 1|x^n - 1$ olacağı aşikar. Bu durumda $1 + x + \cdots + x^{p-1}|x^n - 1$.
Bu şekilde asal sayılardan a tane olduğu için, en az a tane $(1 + x + \cdots)$ şeklinde bölen vardır. Bu a bölenin hepsinin ikişerli olarak aralarında asal olduğunu yukarıdaki iddiada gösterdik. Bu durumda bu a bölenin hepsi birlikte çarpandır. Bu durumda

$$x^n - 1 = (x - 1)\underbrace{\ldots}_{Q(x)}(1 + ax + \underbrace{\ldots}_{x^2R(x)})$$

elde edilir.

3.

4. $T(x) = x^{p-2}$ için,
$m = 0 \Leftrightarrow n = 0$ olması gerektiği aşikar.
$m, n \neq 0$ sayıları için

$$T(m) \equiv T(n) \equiv a\ (mod\ p)$$

olsun. $T(m) \equiv m^{p-2} \equiv a\ \ (mod\ p)$ ve $T(n) \equiv n^{p-2} \equiv a\ \ (mod\ p)$ olur.
$T(m) \cdot m \equiv m \cdot m^{p-2} \equiv am\ \ (mod\ p)$ ve $T(n) \cdot n \equiv n \cdot n^{p-2} \equiv an\ \ (mod\ p)$
$T(m) \cdot m \equiv m^{p-1} \equiv 1 \equiv am\ \ (mod\ p)$ ve $T(n) \cdot n \equiv n^{p-1} \equiv 1 \equiv an\ \ (mod\ p)$.
Bu durumda $1 \equiv am \equiv an\ (mod\ p) \Rightarrow a(m - n) \equiv 0\ (mod\ p) \Rightarrow m \equiv n\ \ (mod\ p)$ olacağından $p - 2$ dereceli polinom bulabildik.
$T(x)$ in derecesinin $p - 1$ olup olamayacağını araştıralım.
$p = 2$ için $T(x) = x$ polinomu soruda verilen şartı sağlar. Yani $p = 2$ için $T(x)$ in derecesi en fazla 1 olabilir.
$p > 2$ için, $T(x) = a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \cdots + a_0$ olsun.
$T(n) \equiv T(m)\ (mod\ p)$ olması $n \equiv m\ \ (mod\ p)$ olmasını gerektirmesi için, $T(x)$ in $mod\ p$ de tüm kalanları alabilmesi lazım. Aksi halde, Güvercin Yuvası İlkesine göre en az iki farklı x değeri için $T(x)$ polinomu $mod\ p$ de aynı sonucu verir.

$$\sum_{i=0}^{p-1} T(i) = T(0) + T(1) + \cdots + T(p-1) = 0 + 1 + \cdots + p - 1 = \frac{(p-1)p}{2}$$

ve p tek sayı olduğu için $p|\sum_{i=0}^{p-1} T(i)$.
Söz konusu toplamı, katsayılar parantezine alarak toplarsak

$$\sum_{i=0}^{p-1} T(i) = a_{p-1}(0^{p-1}+1^{p-1}+\cdots+(p-1)^{p-1}) + a_{p-2}(0^{p-2}+1^{p-2}+\cdots+(p-1)^{p-2}) + \cdots + a_1(0^1+1^1+\cdots+(p-1)^1) + p\cdot a_0$$

elde ederiz. Biraz daha formal bir dille

$$\sum_{i=0}^{p-1} T(i) \equiv \sum_{i=1}^{p-1} a_i \sum_{j=0}^{p-1} j^i \ (mod\ p)$$

İddia:

Her $0 \le i < p-1$ için $p | \sum_{j=0}^{p-1} j^i$.

İspat:

Soruya geri dönersek,

$$\sum_{i=0}^{p-1} T(i) \equiv \sum_{i=1}^{p-1} a_i \sum_{j=0}^{p-1} j^i \equiv a_{p-1}\sum_{j=0}^{p-1} j^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-2} a_i \cdot \sum_{j=0}^{p-1} j^i \equiv a_{p-1}\sum_{j=0}^{p-1} j^{p-1} \equiv 0\ (mod\ p)$$

$$a_{p-1}\sum_{j=0}^{p-1} j^{p-1} \equiv a_{p-1}(0+1^{p-1}+2^{p-1}+\cdots(p-1)^{p-1}) \equiv a_{p-1}\cdot(p-1) \equiv 0\ (mod\ p)$$

olduğu için, $a_{p-1} \equiv 0\ (mod\ p)$ olması gerekir. Bu da polinomun derecesinin $p-1$ olamayacağı anlamına gelir.

Sonuç olarak $p > 2$ için $T(x)$ in derecesi en fazla $p-2$ olabilir.

5. Çözüm 1:

$B' \in [AB$ ve $C' \in [AC$ olmak üzere $AB' + AC' = AB + AC = k$ olsun. $B'B = CC'$ olduğu aşikar. Bu iki üçgenin çevrel çemberleri A dışında A' noktasında kesişsin. $\angle B'A'C' = \angle BA'C$ olduğu için $\angle BA'B' = \angle CA'C'$, kirişler dörtgenlerinde $\angle A'B'B = \angle A'C'A$ ve $\angle A'CC' = \angle ABA'$ olduğundan $\Delta A'BB' \sim \Delta A'C'C$ olur. $BB' = CC'$ olduğundan $\Delta A'BB' \cong \Delta A'C'C$ yani $A'B = A'C$ ve $A'B' = A'C'$. Yani AA', BAC açısının açıortayıdır. $AB' = AC' = \frac{a}{2}$ alındığında A' noktası sabit bir üçgende açıortayın çevrel çemberi kestiği nokta, yani sabit bir nokta olacaktır. Demek ki (ABC) çemberlerinin hepsi A' noktasından geçer.

Çözüm 2:

$\angle BAC = \alpha$ olsun. (ABC) ile A açısının açıortayı P noktasında kesişsin. Ptolemy teoreminden

$(AB + AC)\cdot BP = AP \cdot BC$. BCP üçgeninde Sinüs teoreminden $\frac{BC}{\sin(180°-\alpha)} = BP/\sin\frac{\alpha}{2}$ elde edilir. İki eşitliği birleştirirsek $AP = \frac{a}{2\cos(\frac{\alpha}{2})} = Sabit$ elde ederiz. AP sabit ve $|AP|$ sabit olduğuna göre P noktası da sabittir. Tüm ABC üçgenleri sabit P noktasından geçer.

6.

9. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2001

Commented [A25]: Sorular Mathlinks'ten çeviridir. Orijinal değildir.

22-23 Aralık 2001

1. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $[AD]$ ve $[BC]$ kenarlarının orta dikmeleri dörtgenin içerisindeki P noktasında, $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta dikmeleri ise dörtgenin içerisindeki Q noktasında kesişiyor. $m(\widehat{APD}) = m(\widehat{BPC})$ olduğuna göre $m(\widehat{AQB}) = m(\widehat{CQD})$ olduğunu gösteriniz.

2. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $x_{n+1} = \frac{x_n^2+10}{7}$ şeklinde tanımlanan (x_n) gerçel sayılar dizisinin gerçel bir üst sınırı varsa, x_0 ın alabileceği değerleri bulunuz.

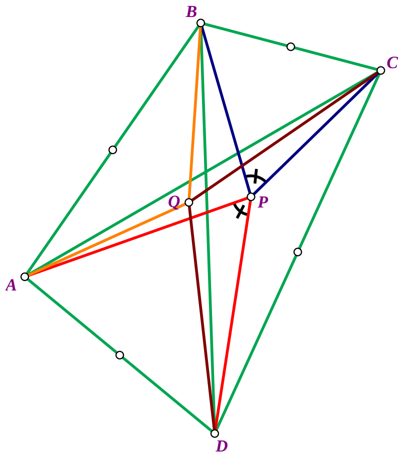
3. Aynı büyüklükteki n parçadan oluşan bir keki, her parçayı en çok bir kez keserek, k kişi arasında eşit olarak paylaştırmak istiyoruz. n nin pozitif bölenlerinin sayısı $d(n)$ ile gösterilmek üzere, k nın böyle bir paylaşımı olanıklı kılan değerlerinin sayısının $n + d(n)$ olduğunu gösteriniz.

4. $3^x + 11^y = z^2$ denklemini sağlayan tüm (x, y, z) sıralı pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

5. A dan geçen ve birbirine dik olmayan iki doğru ile bu doğrulardan birinin üzerinde bulunan A dan farklı bir F noktası veriliyor. Diğer doğrunun üzerinde alınan hareketli G noktası için; A, F, G noktalarından geçen çembere G ve F noktalarında teğet olan doğruların kesişim noktası P_G ile gösterilsin. P_G in geometrik yeri nedir?

6. $n \times n$ bir santranç tahtasında k değişik renk kullanılarak, her $i \in \{1,2,\dots,n\}$ için i. satırdaki ve i. sütundaki toplam $2n-1$ kareden her biri farklı renkle boyanıyor.
   a. $n = 2001$ ve $k = 4001$ için böyle bir boyamanın mümkün olmadığını ispatlayınız.
   b. $n = 2^m - 1$ ve $k = 2^{m+1} - 1$ için böyle bir boyamanın yapılabileceğini gösteriniz.

1. $\angle APD = \angle BPC$ olduğu için $\angle BPD = \angle APC$ ve $\frac{BP}{PC} = \frac{PD}{PA} = 1$ olduğu için de $K.A.K$ dan $\Delta PAC \cong \Delta PDB$ elde edilir. Yani $AC = BD$ dir.



Benzer mantıkla $\frac{BQ}{QA} = \frac{QD}{QC} = \frac{BD}{AC} = 1$ olduğu için $K.K.K$ dan $\Delta QBD \cong \Delta QAC$ eşliği elde edilir. Bu durumda $\angle AQC = \angle BQD$ elde edilir. Buradan da

$$\angle AQC - \angle BQC = \angle BQD - \angle BQC \Rightarrow \angle AQB = \angle CQD$$

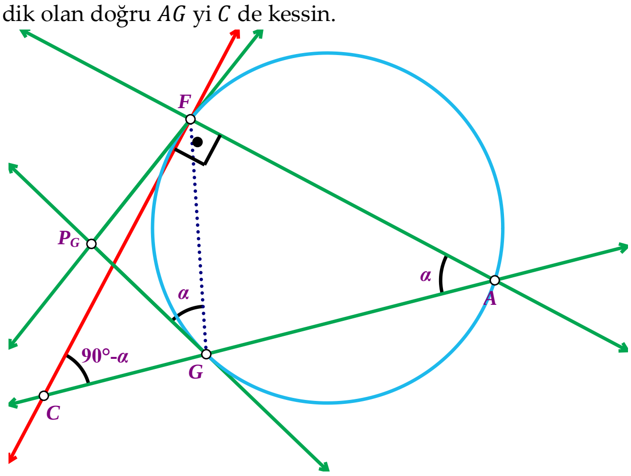
elde edilir.

2.

3.

4.

5. Çözüm 1:
FA ya F de dik olan doğru AG yi C de kessin.



Teğet-Kiriş açılardan $\angle FGP_G = \angle P_GFG = \angle FAG = \alpha$, $\angle BFG = 180° - 2\alpha$ ve $\angle FCA = 90° - \alpha$ elde edilecektir. $P_GF = P_GG$ ve $\angle BFG = 2 \cdot \angle FCA$ olduğu için C noktası P_G merkezli $P_GF = P_GG$ yarıçaplı çember üzerindedir. Bu durumda $PC = P_GF$ elde edilir. FC nin orta noktası M olsun. $P_GM \perp FC$ ve $P_GM \parallel AF$ olacaktır. Bu durumda P_G nin AF doğrusuna uzaklığı $\frac{FC}{2}$ dir. AFC dik üçgeninde $FC = AF \cdot \tan\alpha$ olduğu için P_G nin AF ye uzaklığı $\frac{AF \cdot \tan\alpha}{2}$ elde edilir. AF sabit, $\tan\alpha$ sabit olduğu için P_G noktasının AF den uzaklığı sabittir. Bu durumda P_G noktalarının geometrik yeri AF ye paralel bir doğrudur.

Şimdi de tersini ispatlayalım. Geometrik yer üzerindeki her P_G noktası için, A ve F den geçen çembere P_G noktasından çizilen teğetlerin çembere F de ve diğer doğru üzerinde bir noktada teğet olacağı G noktasının bulunabileceğini göstereceğiz.

P_G nin AF ye uzaklığının $\frac{AF \cdot \tan\alpha}{2}$ olduğunu biliyoruz. FA ya F de dik olan doğru diğer doğruyu C de kessin. $FC = \mathrm{AF} \cdot \tan\alpha$ olacağı için P_G den FC ye inilen dikme FC yi ortalayacaktır. Bu durumda $P_GC = P_GF$ olur. P_G merkezli, $P_GF = P_GC$ yarıçaplı çember AC yi G de kessin. $\angle GP_GF = 2 \cdot \angle FCG$ olacağı için $\angle P_GGF = \angle P_GFG = \angle FAG$ olacaktır. Bu durumda P_GG ile P_GF doğruları ΔAFG nin çevrel çemberine teğet olacaktır.

Çözüm 2:
$\angle FAG = \angle P_GFG = \angle P_GGF$,
$\frac{AF}{FG} = \frac{\sin\angle AGF}{\sin\angle FAG}$,
$\frac{FG}{P_GF} = \frac{\sin\angle FP_GG}{\sin\angle P_GFG} = \frac{\sin 2\cdot\angle FAG}{\sin\angle FAG} = 2 \cdot \cos\angle FAG.$
$\frac{AF}{FG} \cdot \frac{FG}{P_GF} = \frac{AF}{P_GF} = 2 \cdot \cot\angle FAG \cdot \sin\angle AGF.$

$\angle(FA, FP_G) = \angle AGF$ veya $\angle(FA, FP_G) = 180° - \angle AGF$ olacağı için, P_G nin AF ye uzaklığı $d(P_G, AF) = P_G F \cdot \sin \angle AGF = \frac{AF \cdot \tan \angle FAG}{2} = Sabit$ olacaktır. Bu durumda geometrik yer, AF uzaklığı $\frac{AF \cdot \tan \angle FAG}{2}$ olan paralel bir doğrudur.

6.

10. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2002

Commented [A26]: Sorular Mathlinks'ten çeviridir. Orijinal değildir.

14-15 Aralık 2002

1. $n \geq 2$ olmak üzere, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ile$1,2, \ldots, n$ sayılarının bir permütasyonunu gösterelim. Her $k = 1, \ldots, n$ için, sayı doğrusundaki k noktasına a_k tane elma yerleştiriliyor. A, B, C isimli çocuklara sırasıyla $x_A, x_B, x_C \in \{1,2, \ldots, n\}$ noktaları veriliyor. Her k için, sahip olduğu nokta k noktasına en yakın olan çocuk(lar) buradaki a_k elmayı eşit şekilde paylaşıyorlar. Eğer her çocuk, diğer ikisinin noktaları sabit tutulmak üzere, alabileceği en çok elmayı kendisine verile n noktayla aldıysa, (x_A, x_B, x_C) ye *uygun bir dağılım* diyeceğiz.En azından bir $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ permütasyonu için uygun bir dağılımın mümkün olduğu n sayılarını bulunuz.

2. Birbirlerine A noktasında dıştan teğet olan iki çember, Γ çemberine B ve C noktalarında içten teğettir. Γ çemberinin diğer çemberlere A da teğet olan kirişinin orta noktası D olsun. Bu üç çemberin merkezleri doğrudaş değilse, A nın BCD üçgeninin içmerkezi olduğunu gösteriniz.

3. Çizge Hava Yolları (ÇHY), Çizge Ülkesinin bazı şehirlerine uçak seferleri düzenliyor. Yalnız ÇHY'yi kullanarak herhangi bir şehirden diğerine gitmek mümkün ve her şehirden en az 3 farklı şehre ÇHY'ye ait uçak seferi var. ÇHY, herhangi bir şehirden bir diğerine gitmeyi engellemeyecek şekilde bazı uçak seferlerini iptal etmek istiyor. Bu iptallerin, şehirlerin en azından $\frac{2}{9}$ sinde tam olarak bir uçak seferi kalacak şekilde yapılabileceğini gösteriniz.

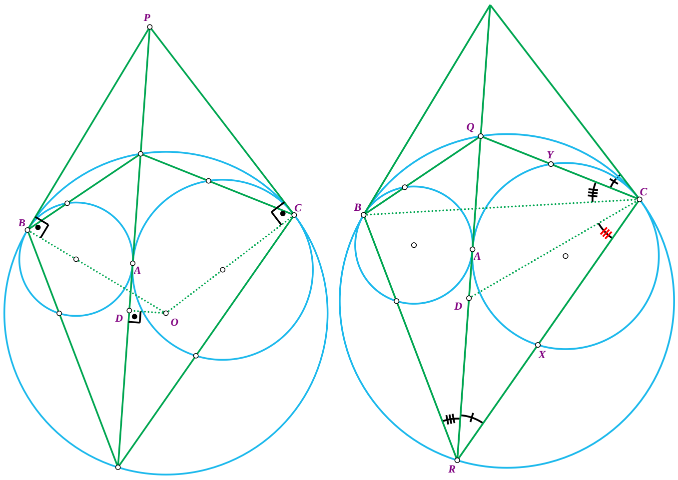
4. $y^2 \equiv x^3 - x \pmod{p}$ ve $0 \leq x, y < p$ şartını sağlayan (x, y) sıralı tam sayılarının sayısının p olduğu tüm p asal sayılarını bulunuz.

5. ABC üçgeninde D ve E sırasıyla BA ve CA üzerinde, $DB = BC = CE$ şartını sağlayan noktalardır. ABC üçgeninin çevrel merkezi O, iç merkezi de I olsun. ADE üçgeninin çevrel yarıçapının $|IO|$ ya eşit olduğunu gösteriniz.

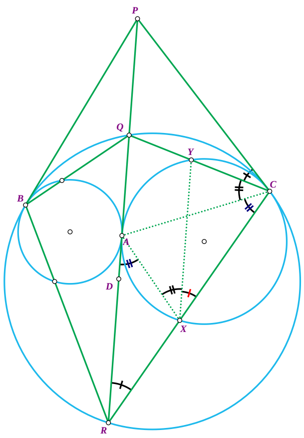
6. n pozitif bir tam sayı olmak üzere; T ile, her $i = 1,2, \ldots, n$ için $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)} \geq 1$ şartını sağlayan $1,2, \ldots, n$ sayılarının bir σ permütasyonlarının var olduğu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sayılarının kümesini gösterelim. Her $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $i = 1, \ldots, n$ için
$a_i = \frac{1}{2}(b_i + c_i)$, $|a_i - b_i| \leq d$ ve $|a_i - c_i| \leq d$ şartını sağlayan T'ye ait $(b_1, \ldots, b_n)$ ve $(c_1, \ldots, c_n)$ sayılarının bulunabilmesini sağlayan d gerçel sayısının var olduğunu gösteriniz.

1.

2. Γ çemberinin B ve C noktalarındaki teğetleri P de kesişsin. OP çaplı çember, B, C ve D noktalarından geçeceği için O, B, C, D noktaları çemberseldir. Bu durumda $\angle BDP = \angle BOP = \angle POC = \angle PDC$ olduğu için, DA doğrusu BCD üçgeninde bir iç açıortaydır.



PD doğrusu çemberi şekildeki gibi Q ve R noktalarında kessin.
$2 \cdot \angle BRC = \angle BOC = \angle BDC \Rightarrow \angle QDC = \angle BRC$ ve
$\angle BRQ = \angle QCB \Rightarrow \angle QDC = \angle QCB + \angle QRC = \angle DCR + \angle QRC \Rightarrow \angle DCR = \angle BCQ$ elde edilir. Bu durumda CA nın $\angle BCD$ nin açıortayı olması için CA nın $\angle QCR$ nin açıortayı olması gerekir. Bu da aslında bilindik bir problem. İspatlayalım.
CQ ile CR, çemberi sırasıyla Y ve X noktalarında kessin.

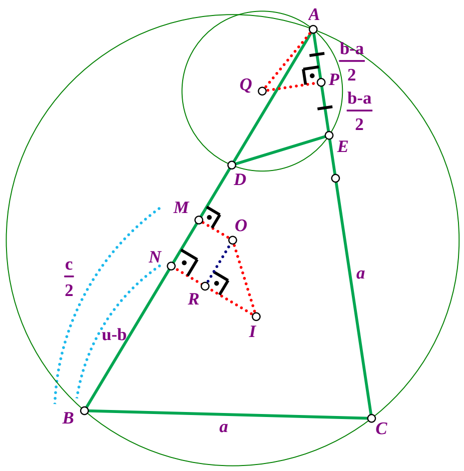


Teğet-Kiriş açıların eşitliğinden $\angle PRC = \angle QCP = \angle YXC$ olduğu için $XY \parallel RQ$ elde ettik. Bu durumda $\angle ACX = \angle RAX = \angle AXY = \angle ACY$ olur ki, bu da CA nın $\angle QCR$ nin açıortayı olduğu anlamına gelir.

3.

4.

5. Çözüm 1:
İç teğet çember AB ye N de dokunsun. AB nin orta noktası M, AE nin orta noktası P olsun.



$BN = u - b, \quad BM = \frac{c}{2} \Rightarrow MN = \frac{c}{2} - (u-b) = \frac{b-a}{2}$ olarak bulunur. Bu durumda $\sin\angle OIN = \frac{NM}{OI} = \frac{\frac{b-a}{2}}{OI}$ olur.
AQP üçgeninde

$$\sin\angle AQP = \frac{AP}{AQ} = \frac{\frac{b-a}{2}}{AQ}$$

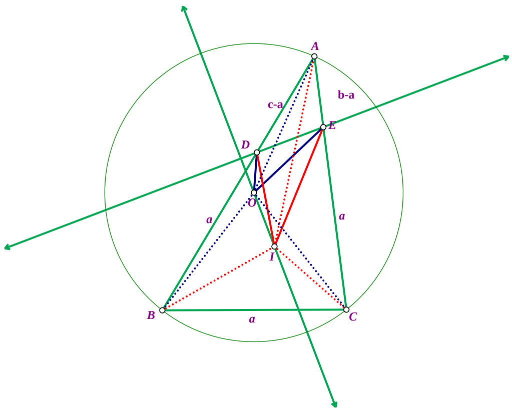
ve

$$2\cdot\angle ADE = \angle EQA \Rightarrow \angle AQP = \angle ADE$$

olduğu için de $\sin\angle ADE = \frac{\frac{b-a}{2}}{AQ}$ olarak bulunur.
Bu durumda,

$$\angle ADE = \angle AQP \Rightarrow OI = AQ$$

olacağı için, $\angle ADE = \angle AQP$ olduğunu göstereceğiz.
OI ile ED yi kesiştirirsek, $\angle ADE = \angle AQP \Leftrightarrow DE \perp OI$ olur.



$OE^2 - OD^2$ farkıyla O nun DE üzerindeki izdüşümünün yerini tespit edebiliriz.
$IE^2 - ID^2$ farkıyla da I nın DE üzerindeki izdüşümünün yerini tespit edebiliriz.
Bu iki fark eşitse, bu durumda $OI \perp DE$ olacaktır.

Bu farkları hesaplamaya çalışalım. Üçgenlerde Stewart Teoremini uygulayacağız.
Stewart'ın Özel Halinden $OE^2 = OC^2 - AE \cdot EC = R^2 - (b-a)a$,
Stewart'ın Özel Halinden $OD^2 = OB^2 - AD \cdot DB = R^2 - (c-a)a$ olacağı için

$$OE^2 - OD^2 = a(c-a) - a(b-a) = a(c-b)$$

elde ederiz.
I noktası için her şey bu kadar kolay olmayacak tabii ki.
Stewart'tan $IE^2 = \frac{IC^2 \cdot AE + AI^2 \cdot CE}{AC} - AE \cdot CE$,

$$IE^2 = \frac{IC^2(b-a) + AI^2 \cdot a}{b} - a(b-a)$$

Benzer şekilde $ID^2 = \frac{IB^2 \cdot AD + AI^2 \cdot BD}{AB} - AD \cdot BD$,

$$ID^2 = \frac{IB^2(c-a) + AI^2 \cdot a}{c} - a(c-a)$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\begin{aligned} IE^2 - ID^2 &= a(c-a) - a(b-a) + \frac{IC^2(b-a) + AI^2 \cdot a}{b} - \frac{IB^2(c-a) + AI^2 \cdot a}{c} \\ &= OE^2 - OD^2 + \frac{IC^2 \cdot c(b-a) + AI^2 \cdot ac - IB^2 \cdot b(c-a) - AI^2 \cdot ab}{bc} \\ &= OE^2 - OD^2 + \frac{IC^2 \cdot c(b-a) + IA^2 \cdot a(c-b) + IB^2 \cdot b(a-c)}{bc} \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $IC^2 \cdot c(b-a) + IA^2 \cdot a(c-b) + IB^2 \cdot b(a-c) = 0$ olduğunu göstermeye çalışacağız.
I dan AC ye inilen dikme, kenarı $b = (u-c) + (u-a)$ şeklinde böleceği için,

$$CI^2 - AI^2 = (u-c)^2 - (u-a)^2 = (2u-a-c)(u-c-u+a) = b(a-c)$$

elde ettik.
Benzer şekilde, $BI^2 - CI^2 = a(c-b)$ ve $AI^2 - BI^2 = c(b-a)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} &IC^2 \cdot c(b-a) + IA^2 \cdot a(c-b) + IB^2 \cdot b(a-c) \\ &\qquad = IC^2(AI^2 - BI^2) + IA^2(BI^2 - CI^2) + IB^2(CI^2 - AI^2) = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz.

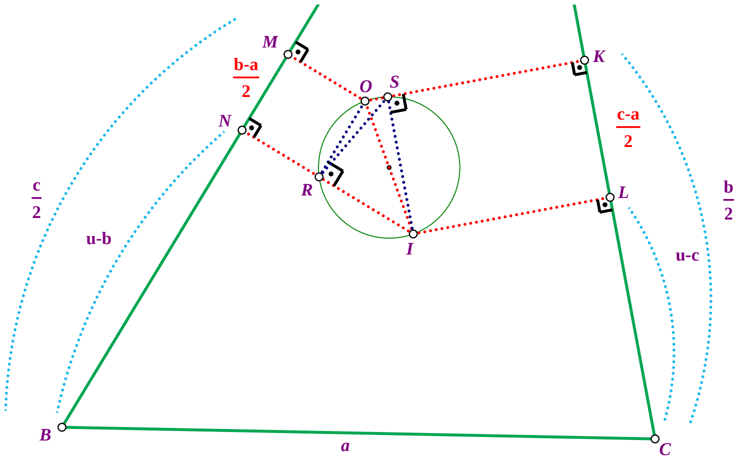
Demek ki,

$$IE^2 - ID^2 = OE^2 - OD^2.$$

Öyleyse, $OI \perp DE$ dir.

Çözüm 2:

AB nin orta noktası M, AC nin orta noktası K olsun.



İçteğet çember AB ye N de, AC ye L de dokunsun.

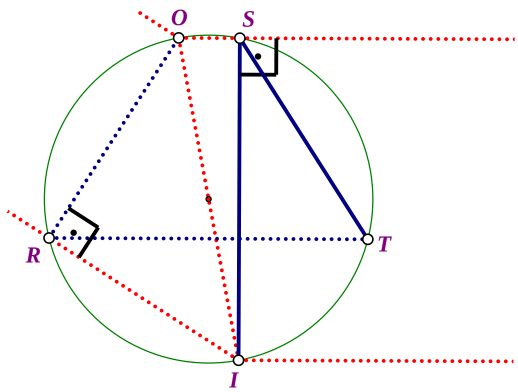
$$BM = \frac{c}{2}, BN = u - b \Rightarrow MN = \frac{b-a}{2}$$

Benzer şekilde,

$$KL = \frac{c-a}{2}$$

elde edilir.

OI çaplı çember, IN yi R de, OK yı S de kessin. Çember üzerinde $OS \parallel RT$ olacak şekilde T noktası alalım. $ST = OR = \frac{b-a}{2} = \frac{AE}{2}$ ve $SI = \frac{c-a}{2} = \frac{AD}{2}$ olacaktır.



Aynı zamanda

$$OS \parallel RT \Rightarrow SI \perp RT \Rightarrow \angle TRI + \angle RIS = \angle TSI + \angle RIS = 90^\circ \Rightarrow \angle RIS = 90^\circ - \angle TSI.$$

ANIL kirişler dörtgeninde,

$$\angle BAC + \angle NIL = 180^\circ \Rightarrow \angle RIS = \angle NIL - 90^\circ = 90^\circ - \angle BAC$$

elde edilir.

Bu durumda $\angle BAC = \angle TSI$ ve $\frac{ST}{AE} = \frac{SI}{AD} = \frac{1}{2}$ olduğu için $K.A.K$ dan $\Delta TSI \sim \Delta EAD$ olacaktır. Benzerlik oranları $\frac{1}{2}$ dir. Bu durumda ΔADE nin çevrel çemberinin yarıçapı, ΔTSI nın çevrel çemberinin yarıçapının iki katı, yani ΔTSI nın çapı kadar olacaktır. Bu durumda, ΔADE nin çevrel çemberinin yarıçapı OI ya eşittir.

6.

11. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2003

13-14 Aralık 2003

1. $n \geq 2$ arabanın katıldığı bir yarışta, 1 den n ye kadar numaralanmış arabalar, başlangıç noktasından numara sırasına göre belli aralıklarla ayrılıyor. Yarış boyunca bir araba bir başkasını en çok bir kez geçiyor ve her araba toplam olarak aynı sayıda araba tarafından geçiliyor. Ayrıca herhangi farklı iki arabanın yarış boyunca geçtikleri arabaların sayıları birbirinden farklı olup, arabalar bitiş noktasına farklı zamanlarda varıyor. n nin bu durumu olanaklı kılan tüm değerlerini bulunuz.

2. Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin AB, BC, CD ve DA kenarları üstünde sırasıyla K, L, M ve N noktaları alınıyor. $\text{Alan}(AKN) = s_1$, $\text{Alan}(BKL) = s_2$, $\text{Alan}(CLM) = s_3$, $\text{Alan}(DMN) = s_4$ ve $\text{Alan}(ABCD) = s$ olmak üzere,
$$\sqrt[3]{s_1} + \sqrt[3]{s_2} + \sqrt[3]{s_3} + \sqrt[3]{s_4} \leq 2\sqrt[3]{s}$$
olduğunu gösteriniz.

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, her $t \in (0,1)$ ve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için,
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$
eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$
$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2003} \text{ ve } a_{2004} = a_1$$
koşullarını sağlayan gerçel sayılar olmak üzere,
$$\sum_{k=1}^{2003} f(a_k)a_{k+1} \geq \sum_{k=1}^{2003} f(a_{k+1})a_k$$
olduğunu gösteriniz.

4. $2^{2n+1} + 2^n + 1$ sayınsın tam kuvvet olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

5. Bir ABC üçgeninin AB ve BC kenarlarına teğet olan bir S çemberi, ABC üçgeninin çevrel çemberine de bir T noktasında teğettir. I, ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi ise, $\widehat{ATI} = \widehat{CTI}$ olduğunu gösteriniz.

6. $m \times n$ bir satranç tahtasının her birim karesine 0 ya da 1 yazılarak elde edilen bir yazılıma, 0 ve 1 lerin sayısı eşitse, eşit bir yazılım diyoruz. a gerçel bir sayı olmak üzere, m satır ve n sütunun her biri için, o satır ya da sütun içindeki 1 lerin yüzdesi a dan küçük ya da $100 - a$ dan büyük olmayacak şekilde bir eşit yazılımı olanaklı kılan m ve n sayıları bulunuyorsa, a ya güzel sayı diyoruz. En büyük güzel sayıyı bulunuz.

1.
2.

$\frac{s_1}{s} = \frac{s_1}{[ABD]} \cdot \frac{[ABD]}{s} = \frac{AN \cdot AK}{AD \cdot AB} \cdot \frac{[ABD]}{s} = \frac{AN}{AD} \cdot \frac{AK}{AB} \cdot \frac{[ABD]}{s} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{s_1}{s}} = \sqrt[3]{\frac{AN}{AD} \cdot \frac{AK}{AB} \cdot \frac{[ABD]}{s}}.$

$AO \geq GO$ dan

$\frac{\frac{AN}{AD}+\frac{AK}{AB}+\frac{[ABD]}{s}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{AN}{AD} \cdot \frac{AK}{AB} \cdot \frac{[ABD]}{s}} = \sqrt[3]{\frac{s_1}{s}}$ elde edilir.

Benzer şekilde

$\frac{\frac{BK}{AB}+\frac{BL}{BC}+\frac{[BAC]}{s}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{s_2}{s}},$

$\frac{\frac{CL}{BC}+\frac{CM}{CD}+\frac{[CBD]}{s}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{s_3}{s}},$

$\frac{\frac{DM}{CD}+\frac{DN}{AD}+\frac{[DAC]}{s}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{s_4}{s}}$

elde edilir. Taraf tarafa toplarsak,

$\frac{\frac{AN}{AD}+\frac{DN}{AD}+\frac{AK}{AB}+\frac{BK}{AB}+\frac{BL}{BC}+\frac{CL}{BC}+\frac{CM}{CD}+\frac{DM}{CD}+\frac{[ABD]+[BCD]+[BAC]+[DAC]}{s}}{3} \geq \frac{\sqrt[3]{s_1}+\sqrt[3]{s_2}+\sqrt[3]{s_3}+\sqrt[3]{s_4}}{\sqrt[3]{s}}$

olur. Düzenlersek,

$$\frac{1+1+1+1+\frac{s+s}{s}}{3} = \frac{6}{3} = 2 \geq \frac{\sqrt[3]{s_1}+\sqrt[3]{s_2}+\sqrt[3]{s_3}+\sqrt[3]{s_4}}{\sqrt[3]{s}}$$

Eşitlik durumu,

$$\frac{AN}{AD} = \frac{AK}{AB} = \frac{[ABD]}{s} \Rightarrow \frac{AN}{DN} = \frac{AK}{BK} = \frac{[ABD]}{[CBD]},$$
$$\frac{BK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{[BAC]}{s} \Rightarrow \frac{BK}{AK} = \frac{CL}{BL} = \frac{[BAC]}{[CAD]},$$
$$\frac{CL}{BC} = \frac{CM}{CD} = \frac{[CBD]}{s} \Rightarrow \frac{CL}{BL} = \frac{CM}{DM} = \frac{[CBD]}{[ABD]},$$
$$\frac{DM}{CD} = \frac{DN}{AD} = \frac{[DAC]}{s} \Rightarrow \frac{DM}{CM} = \frac{DN}{AN} = \frac{[DAC]}{[ABC]},$$

iken sağlanır. Birleştirsek, $KLMN$ kenarları $ABCD$ nin köşegenlere paralel olan bir paralelkenar ve

$$\frac{AK}{BK} = \frac{[ABD]}{[CBD]} = \frac{[CAD]}{[BAC]} = \frac{[CBD]}{[ABD]} = \frac{[BAC]}{[CAD]}$$

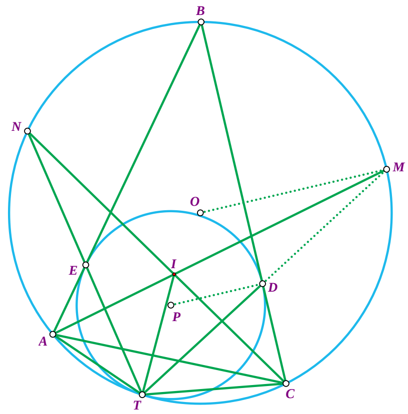
olur. Bu durumda $[ABD] = [CBD]$ ve $[CAD] = [BAC]$ olduğu için köşegenler birbirlerini ortalar, yani $ABCD$ paralelkenar olur.

Yani, eşitlik durumu $ABCD$ dörtgeni paralelkenarken ve K, L, M, N noktaları orta noktalar iken sağlanır.

3.

4.

5. O, ΔABC nin çevrel merkezi; P, kenarlara teğet olan çemberin merkezi olsun.
P merkezli çember, AC ye D de, AB ye E de dokunsun.



AI, çevrel çemberi M de kessin. M, AC yayının orta noktası olduğu için $OM \perp BC$ dir. Aynı zamanda, $PD \perp BC$ olduğu için, $PD \parallel OM$ dir. O, P, T noktaları doğrusal olduğu için, $\Delta TOM \sim \Delta TPD$ olacaktır. Bu durumda T, D, M noktaları doğrusaldır.
Benzer şekilde, CI çemberi N de kesiyorsa, T, E, N noktaları da doğrusal olacaktır.
A, T, C, M, B, N noktaları için Pascal Teoremi uygulandığında E, I, D noktaları doğrusal olur.
Pascal Teoremine takılmadan (aslında Pascal'ın ispatını yapıyoruz) şöyle yapabiliriz:
$\angle ANE = \angle IMD$, $\angle ENI = \angle DMC$, $\angle NAE = \angle ICD$, $\angle IAE = \angle BCM$ olduğu için, INA üçgeninde E noktası için, IMC üçgeninde D noktası için Ceva Teoreminin Trigonometrik halini uyguladığımızda, $\angle NIE = \angle DIC$ ve $\angle EIA = \angle DIM$ çıkacaktır. Bu da E, I, D noktalarının doğrusal olduğu anlamına gelir.
$\angle BAC = 2\alpha$ ve $\angle BCA = 2\theta$ dersek, $\angle ATN = \theta$, $\angle CTM = \alpha$, $\angle NTM = \angle AED = \angle ADE = \alpha + \theta$, $\angle EIA = \theta$ ve $\angle DIC = \alpha$ olacaktır.
$\angle EIA = \angle ETA = \theta$ olduğu için $EITA$ dörtgeni kirişler dörtgeni olacaktır. Bu durumda, $\angle ETI = \angle EAI = \alpha$, dolayısıyla da $\angle ATI = \alpha + \theta = \angle CTI$ olacaktır.

Not: IMO 1993 Shortlist'inde (İspanya-1) I nın DE üzerinde olduğu sorulmuş.
IMO 1978, $AB = BC$ iken $I \in DE$ sorulmuş.

6.

45. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2004

3-4 Nisan 2004

1. 11×11 satranç tahtası bir □ tane ve kırk tane □□□ ile kapatılırsa, □ şeklinin tahtadaki hangi karelere gelebileceğini belirleyiniz.

2. P, ABC üçgeninin iç bölgesinde bir nokta ise,
$$\min\{|PA|, |PB|, |PC|\} + |PA| + |PB| + |PC| < |AB| + |BC| + |CA|$$
olduğunu gösteriniz.

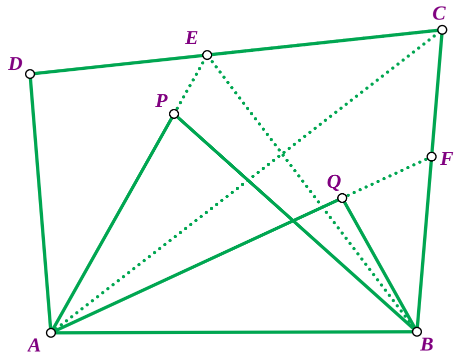
3. n pozitif bir tam sayı olsun. Hangi $n + 1 \leq r \leq 3n + 2$ tam sayıları için,
$$a_1 b_1^k + a_2 b_2^k + \cdots + a_m b_m^k = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$
koşulunu sağlayan tüm $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ tam sayılarının,
$$r \mid a_1 b_1^r + a_2 b_2^r + \cdots + a_m b_m^r$$
koşulunu da sağlayacağını belirleyiniz.

4. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ve $x = 5^{2003} \sin(2004\alpha)$ ise, $x - [\![x]\!]$ sayısının alabileceği bütün değerleri bulunuz.

5. D, dar açılı bir ABC üçgeninin O merkezli çevrel çemberinin küçük AC yayı üzerinde A ve C den farklı bir nokta olsun. $[AB]$ kenarı üzerinde $\widehat{ADP} = \widehat{OBC}$ olacak biçimde P noktası, $[BC]$ kenarı üzerinde ise $\widehat{CDQ} = \widehat{OBA}$ olacak biçimde bir Q noktası alınıyor. $\widehat{DPQ} = \widehat{DOC}$ olduğunu gösteriniz.

6. Bir sınıftaki öğrencilerin her birinin elinde 0,1,2,3,4,5 veya 6 tane şeker vardır. Öğretmen her adımda, bazı öğrencileri seçip, bu öğrencilere ve bu öğrencilerden herhangi biri ile arkadaş olan her öğrenciye birer şeker veriyor. Elindeki şeker sayısı 7 ye ulaşan öğrenci bunların hepsini yiyor. Sınıftaki herhangi iki öğrenci için bunlardan yalnızca biriyle arkadaş olan üçüncü bir öğrenci bulunuyorsa, başlangıçtaki şeker sayıları ne olursa olsun, öğretmenin sonlu sayıda adım sonucunda her öğrencinin elinde istediği sayıda şeker kalmasını sağlayabileceğini gösteriniz.

1.
2. Dışbükey $ABCD$ dörtgeni içerisinde bir P noktası alalım.
   AP ya $[BC]$ yi kesecek, ya da $[CD]$ yi kesecek.



$[BC]$ yi F de kesen noktalardan biri Q olsun.

$$AQ + QB \leq AQ + QF + FB \leq AF + FB \leq AC + CB < AD + DC + CB$$

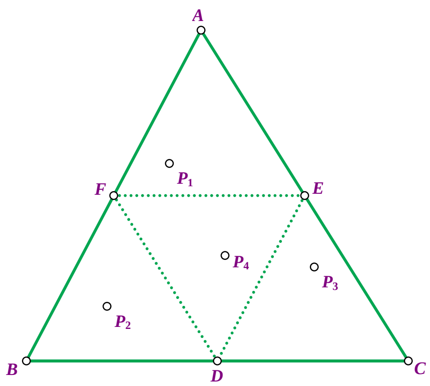
AP, $[CD]$ yi E de kessin.

$$AP + BP \leq AP + PE + EB = AE + EB < AD + DE + EC + CB = AD + DC + CB$$

Bu durumda dışbükey $ABCD$ dörtgeni içerisinde alınan her P noktası için,

$$AP + BP < BC + CD + DA.$$

$D,\ E,\ F$ noktaları sırasıyla BC, AC, AB kenarlarının orta noktaları olsun. AEF üçgeni içerisinde (ya da üzerinde fark etmez) bir P_1 noktası, aynı şekilde BDF üçgeni içerisinde P_2 noktası, CDE üçgeni içerisinde P_3 noktası, DEF üçgeni içerisinde de P_4 noktası alalım.



P_1 noktası için $ABDE$ dörtgeninde $AP_1 + BP_1 < AE + ED + BD$ bağıntısı vardır.
P_1 noktası için $ACDF$ dörtgeninde $AP_1 + CP_1 < AF + FD + DC$ bağıntısı vardır.
Taraf tarafa toplarsak

$$AP_1 + BP_1 + CP_1 + AP_1 < AE + FD + AF + ED + BD + DC < AC + AB + BC$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\min\{AP_1, BP_1, CP_1\} + AP_1 + BP_1 + CP_1 \leq AP_1 + BP_1 + CP_1 + AP_1 < AC + AB + BC$$

olacaktır.

P_2 noktası için, $ABDE$ ve $BCEF$ dörtgeninde elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplandığında

$$\min\{AP_2, BP_2, CP_2\} + AP_2 + BP_2 + CP_2 \leq AP_2 + BP_2 + CP_2 + BP_2 < AC + AB + BC$$

P_3 noktası için, $ACDF$ ve $BCEF$ dörtgeninde elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplandığında

$$\min\{AP_3, BP_3, CP_3\} + AP_3 + BP_3 + CP_3 \leq AP_3 + BP_3 + CP_3 + CP_3 < AC + AB + BC$$

elde edilir.

P_4 noktası için, $ABDE$, $BCEF$, $ACDF$ dörtgenlerinden herhangi ikisini seçtiğimizde,

$$\min\{AP_4, BP_4, CP_4\} + AP_4 + BP_4 + CP_4 \leq AP_4 + BP_4 + CP_4 + \max\{AP_4, BP_4, CP_4\}$$
$$< AC + AB + BC$$

elde edilecektir.

Yani her P iç noktası için,

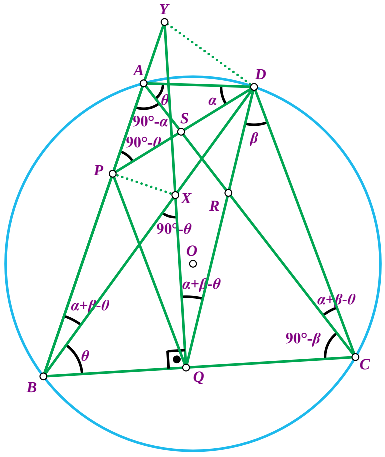
$$\min\{|PA|, |PB|, |PC|\} + |PA| + |PB| + |PC| < |AB| + |BC| + |CA|$$

Not: Bu soru IMO 1999 Shortlist'indeki G1 numaralı sorunun aynısıdır.

3.

4.

5. $\angle OCB = \alpha$, $\angle OAB = \beta$ ve $\angle DBC = \theta$ olsun.



$\angle ADP = \alpha, \angle QDC = \beta, \angle DAC = \theta, \angle BAC = \angle BDC = 90° - \alpha, \angle BCA = \angle ADB = 90° - \beta,$ $\angle DBA = \alpha + \beta - \theta = \angle ACD$ olur.

APD üçgeninde $\angle ADP + \angle PAC = 90°$ olduğu için $\angle APD = 90° - \angle CAD = 90° - \theta$ olacaktır.

Benzer şekilde, DQC üçgeninde $\angle DQC = 90° - (\alpha + \beta - \theta)$ olur.

BC ye Q da dik olan doğru BD yi X te, AB yi Y de kessin.

$\angle YQD = 90° - \angle DQC = \alpha + \beta - \theta = \angle YBD$ olduğu için Y, B, Q, D noktaları çemberseldir.

Aynı zamanda, $\angle YXD = \angle BXQ = 90° - \angle XBQ = 90° - \theta$ ve $\angle YXD = \angle APD = \angle YPD = 90° - \theta$ olduğu için, Y, P, X, D noktaları da çemberseldir.

Bu durumda $\angle YQB = \angle YDB = 90°$ elde edilir. $YPXD$ kirişler dörtgeninde $\angle YDX = \angle YPX = 90°$ olacaktır. $\angle XPB + \angle BQX = 180°$ olduğu için $BQXP$ dörtgeni kirişler dörtgenidir. Yani $\angle XPQ = \angle XPQ = \theta$ olacaktır.
Daha önce $\angle APD = 90° - \theta$ bulmuştuk. Böylelikle $\angle DPX = 90° - (90° - \theta) = \theta$ çıkar. Sonuç olarak $\angle DPQ = 2\theta = \angle DOC$ elde ettik. (Dikkat edilirse, X noktası, DPQ üçgeninin iç merkezi oldu.)

6.

12. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2004

11-12 Aralık 2004

1. $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$ olan bir ABC üçgeninde, A köşesine ait yükseklik, açıortay ve kenarortayın ayakları, sırasıyla, H, L ve D noktalarıdır. $m(\widehat{HAL}) = m(\widehat{DAL})$ olması için gerek ve yeter koşulun, $m(\widehat{BAC}) = 90°$ olması olduğunu gösteriniz.

2. Bir ülkedeki 80 kentten bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. Her kentten en az 7 başka kente doğrudan uçak seferi bulunmakta olup, herhangi bir kentten bir diğerine doğrudan ya da sonlu sayıda aktarma yaparak uçakla ulaşmak mümkündür. Karşılıklı uçak seferleri hangi kentler arasında düzenlenmiş olursa olsun, herhangi bir kentten bir diğerine en çok k aktarmayla ulaşılmasını olanaklı kılan en küçük k sayısını bulunuz.

3.
   a. $n^2 - 1$, $n^2 - 2$ ve $n^2 - 3$ sayılarından her biri için, bu sayının pozitif bölenlerinin sayısını 10 yapan bir n tam sayısı bulunuz.
   b. $n^2 - 4$ ün pozitif bölenlerinin sayısının, n tam sayısının hiçbir değeri için 10 olamayacağını gösteriniz.

4. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini göstermek üzere, tüm $m, n \in \mathbb{Z}$ için, $f(n) - f(n + f(m)) = m$ koşulunu sağlayan bütün $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

5. Bir ABC üçgenin, $[BC]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, BC, CA ve AB doğrularına değme noktaları, sırasıyla, A_1, B_1 ve C_1; $[CA]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, aynı doğrulara değme noktaları, yine sırasıyla, A_2, B_2 ve C_2; $[AB]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, aynı doğrulara değme noktaları, yine sırasıyla, A_3, B_3 ve C_3 olsun. $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ve $A_3B_3C_3$ üçgenlerinin çevrelerinin toplamının, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapına oranının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

6. $n, m \geq 0$ tam sayıları için,
   $K(n, 0) = \phi$ ve
   $$K(n, m+1) = \{k | 1 \leq k \leq n \text{ ve } K(k, m) \cap K(n-k, m) = \phi\}$$
   ise, $K(2004,2004)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

12. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2004 – Çözümler

1.

2. İddia: $\angle HAL = \angle DAL$ ise $\angle BAC = 90°$
   AL açıortay olduğu için $\angle BAH = \angle AEC$.
   $[AD$, ΔABC nin çevrel çemberini E de kessin. $\angle ABH = 90° - \angle BAH = \angle AEC$ ve $\angle AEC + \angle EAC = 90°$ olduğu için AE çevrel çemberin çapıdır. Çemberin merkezi hem BC nin orta dikmesi olacak, hem de AE üzerinde olacak. AE doğrusu ile BC doğru parçasının orta dikmesi D noktasında kesişir. O halde D, çevrel çemberin merkezi, yani, $\angle BAC = 90°$.

   İddia: $\angle BAC = 90°$ ise $\angle HAL = \angle DAL$
   $\angle ACB = \angle DAC = \angle BAH$ ve AL açıortay olduğu için
   $$\angle HAL = \angle LAB - \angle BAH = \angle LAC - \angle DAC = \angle DAL$$
   elde edilir.

   Bu durumda $\angle HAL = \angle DAL \Leftrightarrow \angle BAC = 90°$.

   Not: Bir açının köşesinden geçen bir doğrunun, o açının açıortayına göre simetriğine o doğrunun izogonal eşleniği denir. Özel olarak, kenarortayın izogonal eşleniğine kenarortaysın denir. Bir üçgende yüksekliğin izogonal eşleniği, çevrel çemberin merkezinden geçer. Dik üçgende hipotenüse ait yükseklik, hipotenüse ait kenarortaysıdır.
   Bu soru Ulusal Matematik Olimpiyatı 1. Aşama – 2012'de de soruldu.

3.

4.

5.

46. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2005

2-3 Nisan 2005

1. Her $x \in [0, \infty)$ için,
$$4f(x) \geq 3x$$
$$f(4f(x) - 3x) = x$$
$$(f(x) + x)f\big(f(x)\big) \leq 2xf(x)$$
koşullarını sağlayan tüm $f: [0, \infty) \Rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarını bulunuz.

2. $m(\hat{A}) > m(\hat{B})$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde $[AB]$ kenarının orta noktası N dir. $[AC$ ışını üstünde C den sonra gelecek ve $|BC| = |CD|$ olacak biçimde bir D noktası; $[DN$ ışını üstünde de, $m(\widehat{PBC}) = m(\hat{A})$ olacak biçimde bir P noktası alınıyor. PC ile AB nin kesiştiği nokta E; BC ile DP nin kesiştiği nokta T ise,
$$\frac{|BC|}{|TC|} - \frac{|EA|}{|EB|}$$
ifadesinin değerini bulunuz.

3. Başlangıçta 1 den 2005 e kadar olan bütün tam sayılar işaretleniyor. Ardışık tam sayılardan oluşan sonlu bir dizideki tüm tam sayılar işaretli olup, dizinin en küçük teriminin bir eksiği ile en büyük teriminin bir fazlası işaretsiz ise, bu diziye bir blok diyoruz. Her hamlede, işaretlenmiş sayıların hiçbir blokun ilk ya da son terimini içermeyen bir altkümesini seçip, bu altkümenin elemanlarının işaretlerini siliyor ve işaretli en büyük sayının iki fazlasından başlayarak, işaretini sildiğimiz sayıda tam sayıyı yeni bir blok oluşturacak şekilde işaretliyoruz. Bu hamleleri, her biri tam olarak bir tam sayıdan oluşan 2005 blok elde etmek amacıyla yaparsak, bu amaca en az kaç hamlede ulaşabiliriz?

4. $n \geq 2$ olmak üzere, tüm $a_1, a_2, \dots, a_n$ tam sayıları için, $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(j - i)$ sayısının $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)$ sayısını böldüğünü kanıtlayınız.

5. $m(\hat{A}) = 90°$ ve $m(\hat{C}) > m(\hat{B})$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninde, A noktasından bu üçgenin Γ çevrel çemberine çizilen teğet, BC doğrusunu D noktasında kesiyor. A noktasının BC doğrusuna göre simetriği E; A noktasından BE ye çizilen dikmenin ayağı X; $[AX]$ nın orta noktası Y; Γ çemberinin BY doğrusunu B dışında kestiği nokta Z olsun. BD doğrusunun ADZ üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

6. Elimizde, her renkten aynı sayıda top olacak biçimde, k farklı renkte 5040 tane top var. Topları, her torbaya farklı renkte iki top düşecek biçimde, 2520 torbaya koyuyoruz. Topların torbalara dağılımı nasıl olursa olsun, bu torbaları bir çember üstüne, herhangi ardışık iki tanesinde aynı renkte iki top olmayacak biçimde yerleştirebiliyorsak, k en az kaç olabilir?

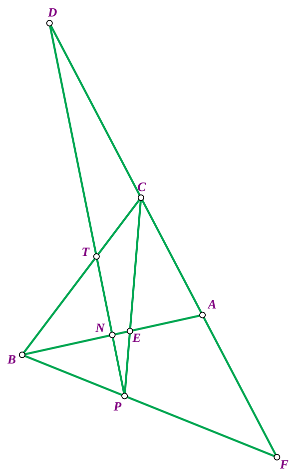
2-3 Nisan 2005

1.

2. Önce $\frac{AE}{BE}$ oranını hesaplayacağız.

$DA \cap BP = \{F\}$ olsun. $A.A$ dan $\Delta ABC \sim \Delta BFC$ olur.

$$AC \cdot FC = BC^2 = DC^2$$



ΔABF de P, E, C noktaları için Menelaus'tan

$$\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BF}{FP} \cdot \frac{FC}{AC} = 1$$

ΔABF de P, N, D noktaları için Menelaus'tan

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BF}{FP} \cdot \frac{FD}{AD} = 1$$

Eşitliklerini taraf tarafa oranlarsak:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{FC} \cdot \frac{FD}{AD}$$

elde ederiz.

$$FC \cdot AD = FC(AC + CD) = AC \cdot FC + FC \cdot CD = CD^2 + FC \cdot CD = CD \cdot FD$$

eşitliğini yerine yazarsak

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{FC} \cdot \frac{FD}{AD} = \frac{AC}{CD}$$

olur.

Şimdi de $\frac{BT}{TC}$ yi hesaplayalım.

ΔABC de N, T, D noktaları için Menelaus'tan

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BT}{CT} \cdot \frac{CD}{AD} = 1$$

olacaktır.

$$\frac{BC}{TC} = \frac{BT}{TC} + 1 = \frac{AD}{CD} + 1 = \frac{AC + CD}{CD} + 1 = \frac{AC}{DC} + 2$$

Son olarak

$$\frac{BT}{TC} - \frac{AE}{BE} = \frac{AC}{DC} + 2 - \frac{AC}{DC} = 2$$

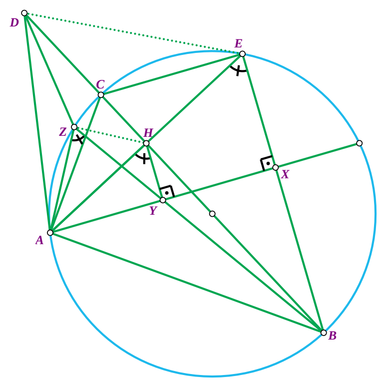
elde edilir.

Not: Dikkat edilirse, ΔABF de BD bir dış açıortaydır. Son durumda ise CP doğrusu, $\angle BCA$ nın açıortayı oluyor.

3.

4.

5. $AE \cap BC = \{H\}$ olsun. E, A nın BC ye göre simetriği olduğu için $AE \perp BC$ ve $AH = HE$ dir.



$AY = YX$ ve $AH = HE$ olduğu için $HY \parallel EX$ yani $HF \perp AY$ dir. Bu durumda $\angle AHY = \angle AEX = \angle AZB$ olduğu için $AZHY$ dörtgeni kirişler dörtgenidir. $\angle AYH = 90°$ olduğu için AH bu dörtgenin çevrel çemberinin bir çapıdır. $AH \perp CB$ olduğu için de DH doğrusu bu çembere H de teğettir. Yani $\angle ZAH = \angle ZHD$.

Öte yandan DE de (ABC) çemberine teğettir. $\angle DEZ = \angle ZAE = \angle ZHD$ olacaktır. Bu da $DEHZ$ dörtgeninin kirişler dörtgeni olması demektir. $\angle ZDH = \angle ZEA = \angle ZAD$ olduğu için de BD doğrusu (AZD) çemberine teğettir.

6.

13. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2005

10-11 Aralık 2005

1. Tüm a, b, c, d pozitif gerçel sayıları için,
$$\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^4}+\sqrt{b^4+d^4} \geq 2\sqrt{2}(ad+bc)$$
olduğunu gösteriniz.

2. $|CB| > |AC| > |AB|$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde, $[AC]$ nın orta dikmesi $[BC]$ yi K; $[BC]$ nin orta dikmesi de AC yi L de kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O; CKL ve OAB üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri de sırasıyla O_1 ve O_2 olmak üzere, OCO_1O_2 dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu gösteriniz.

3. $n+1$ kentin bulunduğu bir ülkede, bu kentlerden bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. A ve B kentleri arasında yapılan bir karşılıklı sefer, aynı gün içinde hem A dan B ye, hem de B den A ya yapılan bir uçuş ikilisi anlamına gelip, bir kentten diğerine karşılıklı olmayan tek yönlü bir sefer mevut değildir. İki kent arasında aynı gün içinde birden çok sayıda karşılıklı sefer yapılabilmektedir. İki kent arasında aynı gün içinde birden çok sayıda karşılıklı sefer yapılabilmektedir. A kenti için, bir günde A dan kalkan uçak sayısını d_A ile gösteriyoruz. Başkent dışındaki tüm A kentleri için $d_A \leq n$ ve yine başlent dışındaki ve aralarında karşılıklı uçak seferi bulunmayan farklı herhangi iki A, B kenti için, $d_A + d_B \leq n$ koşulları sağlanmaktadır. $n+1$ kent arasında yer alan başkentten bir gün içinde yapılan uçak seferlerinin sayısı konusunda ise, herhangi bir kısıtlama yoktur.
Bu ülkede bir günde en çok kaç karşılıklı uçak seferi yapılabileceğini ve bu en çok karşılıklı sefer sayısını olanaklı kılan tüm uçuş çizelgelerini belirleyiniz.

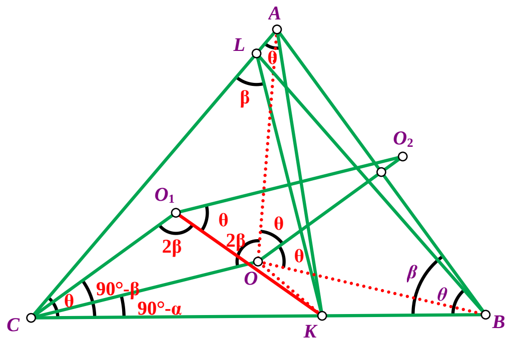
4. $5^m + 7^n = k^3$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n, k) negatif olmayan tam sayı üçlülerini bulunuz.

5. Kenar uzunlukları a, b, c ve iç teğet çemberinin yarıçapı r olan bir üçgende,
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}$$
olduğunu gösteriniz.

6. Terimleri tam sayılar olan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinde, her $n \geq N$ için,
$$a_n = |\{i | i \leq i < n \text{ ve } a_i + 1 \geq n\}|$$
olacak şekilde bir N pozitif tam sayısı varsa, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin en çok kaç değeri sonsuz kere alabileceğini belirleyiniz?

1.

2. $\angle ALB = 2\angle ACB = \angle AKB = \angle AOB$ olduğu için, A, L, O, K, B noktaları çemberseldir. LK doğru parçası, O_1 ve O_2 merkezli çemberlerin ortak kirişi olduğu için, O_1O_2 doğrusu, LK doğru parçasının orta dikmesidir. Benzer şekilde OO_2 doğrusu, AB doğru parçasının orta dikmesidir.



Bu durumda, $\angle ACB = \angle AOO_2$ ve $\angle COA = 2\angle CBA$ ve $\angle COO_2 = 2\angle CBA + \angle ACB$.
$ALKB$ kirişler dörtgeninde, $\angle ABC = \angle ABK = \angle CLK$ olduğu için, $\angle CO_1K = 2\angle CLK = 2\angle ABC$ olacaktır. $\angle O_2O_1K = \frac{\angle AO_1K}{2} = \angle ACK$ olduğundan $\angle CO_1O_2 = 2\angle ABC + \angle ACB$ elde edildi. Bu durumda $\angle CO_1O_2 = \angle COO_2 = 2\angle ABC + \angle ACB = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC - \angle BAC + \angle ABC = 180° - (\angle BAC - \angle ABC)$ olur.
$\angle CO_1K = 2\angle ABC$ ve $\angle COB = 2\angle CAB$ olduğu için, $\angle O_1CO = \angle O_1CK - \angle OCK = 90° - \angle ABC - (90° - \angle BAC) = \angle BAC - \angle ABC = 180° - \angle CO_1O_2$ olur. Böylelikle, CO_1O_2O bir paralelkenar olmuş oldu.

3.

4.

5. $\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = ur \Rightarrow (u-a)(u-b) = \frac{ur^2}{(u-c)}$
$\frac{(u-a)+(u-b)}{2} \geq \sqrt{(u-a)(u-b)} \Rightarrow c \geq 2\sqrt{(u-a)(u-b)} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4(u-a)(u-b)} = \frac{u-c}{4ur^2}$
Benzer şekilde, $\frac{1}{a^2} \leq \frac{u-a}{4ur^2}$ ve $\frac{1}{b^2} \leq \frac{u-b}{4ur^2}$ elde edilir. Taraf tarafa topladığımızda,
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{u-a}{4ur^2} + \frac{u-b}{4ur^2} + \frac{u-c}{4ur^2} = \frac{3u-2u}{4ur^2} = \frac{1}{4r^2}$$
elde ederiz.

6.

47. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2006

1-2 Nisan 2006

1. Köşeleri 1 yarıçapında bir çember üstünde bulunan ve köşegenlerinden ikisi dik kesişen bir yedigenin alanının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

2. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $2 \times n$ lik bir dikdörtgeni, kenar uzunlukları tam sayılar olan dikdörtgenlere kaç farklı biçimde ayırabiliriz?

3. x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $xy + yz + zx = 1$ ise,
$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \geq \left(\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}\right)^2 \geq 6\sqrt{3}$$
olduğunu gösteriniz.

4. x_1 bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $n \geq 1$ tam sayısı için $x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ ise, x_{2006} sayısının 2006 ile bölünmesini sağlayan en küçük x_1 sayısını bulunuz.

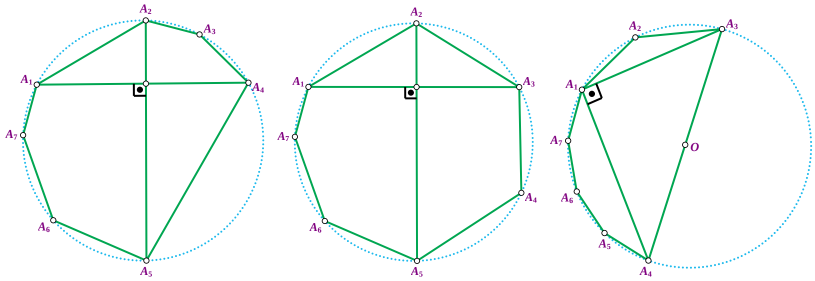
5. $[AB]$ çaplı bir çemberin üstündeki A ve B den farklı herhangi bir Q noktasından $[AB]$ çapına, $H \in [AB]$ olmak üzere, $[QH]$ dikmesi iniliyor. Q merkezli ve $|QH|$ yarıçaplı çemberin $[AB]$ çaplı çemberi kestiği noktalar C ve D ise, CD doğrusunun $[QH]$ nı iki eşit parçaya böldüğünü gösteriniz.

6. 2006000 öğrencinin katıldığı bir Üniversite Giriş Sınavı'nda, her öğrenci 2006 bölüm arasından 12 bölümlük bir liste yapıyor. Herhangi 6 öğrenciyi aldığımızda, bu öğrencilerden her birinin en az birini kendi listesine dahil etmiş olduğu iki bölümün bulunduğu gözleniyor. Her öğrencinin listesinden en az bir bölüm içeren bir bölüm listesine, kapsamlı bir liste diyoruz.
    a. Öğrencilerin verdikleri listeler ne olursa olsun, 12 elemanlı bir kapsamlı liste oluşturulabileceğini kanıtlayınız.
    b. Daha küçük bir listenin kendilerine göre kapsamlı olmadığı öğrenci listelerinin bulunduğunu gösteriniz.

1.

2.

Çemberin merkezi O ve yedigenin köşeleri sırasıyla $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ olsun.
$\alpha_i = \angle A_i O A_{i+1}$ olsun ($\alpha_7 = \angle A_7 O A_1$).
Dik kesişen köşegenlerin gördüğü karşılıklı yayların toplamı 180° olacak.



Dik kesişen köşegenleri koordinat sistemine, kesiştikleri nokta orijin olacak şekilde yerleştirelim. Bu durumda α_i açılarını her kümedeki elemanların toplamı $\pi = 180°$ olacak şekilde iki ayrık kümeye ayırabiliriz. Bu kümelerin eleman sayıları (1,6), (2,5) ya da (3,4) şeklinde olabilir (diğerleri simetrik). β_i ile bu kümelerin elemanlarını gösterelim.
(1,6) durumu için $\beta_1 = \pi, \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = \pi$ olacaktır.
(2,5) durumu için $\beta_1 + \beta_2 = \pi, \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = \pi$ olacaktır.
(3,4) durumu için $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi, \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = \pi$ olacaktır.
Yedigenin alanı $\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \sum_{i=1}^{7} \sin \beta_i$ olduğundan açıların sinüsleri toplamını maksimize etmek istiyoruz.
Jensen Eşitsizliğine göre $\frac{\sin a_1 + \sin a_2 + \cdots + \sin a_n}{n} \leq \sin\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)$ olacağı için,
(1,6) durumu için,

$$\sum_{i=1}^{7} \sin \beta_i \leq \sin \beta_1 + 6 \sin \frac{\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7}{6} = \sin \pi + 6 \sin \frac{\pi}{6} = 0 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

(2,5) durumu için,

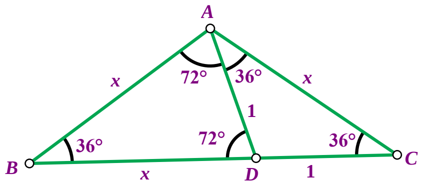
$$\sum_{i=1}^{7} \sin \beta_i \leq 2\sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + 5 \sin \frac{\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7}{5} = 2\sin \frac{\pi}{2} + 5 \sin \frac{\pi}{5} = 2 + 5\sin 36°$$

(3,4) durumu için,

$$\sum_{i=1}^{7} \sin \beta_i \leq 3\sin \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{3} + 4 \sin \frac{\beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7}{4} = 3\sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$3 < 2 + 5 \sin 36° < \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{2}$ olduğunu göstermeye çalışacağız.
Şekildeki gibi $36° - 36° - 108°$ üçgenini kuralım.

$AB = AC = x,\ AD = DC = 1$ olsun. $\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 72° = \angle BDA$ olduğu için, $BD = x$ olacaktır. $\Delta ADC \sim \Delta BAC$ olduğu için $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$.



ΔADC de, $\frac{AC}{DC} = \frac{x}{1} = \frac{\sin 108°}{\sin 36°} = \frac{\sin 72°}{\sin 36°} = 2\cos 36° = x$ dir. Denklemi çözersek;

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos 36° = \frac{x}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ elde ederiz.

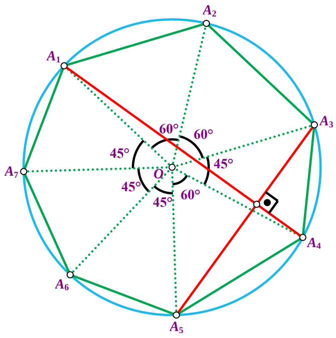
$\sin 36° = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$2 + 5\sin 36° < 2 + 5 \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{4}}}{4} = \frac{8+5\sqrt{6}}{4}$ elde edilir.

$2 + 5\sin 36° < \frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{2}$ iddiasının doğruluğunu sınamak için her iki tarafın karesini alalım.

$$\frac{8+5\sqrt{6}}{2} < 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} \Rightarrow 64 + 150 + 80\sqrt{6} < 108 + 128 + 96\sqrt{6} \Rightarrow 0 < 22 + 16\sqrt{6}$$

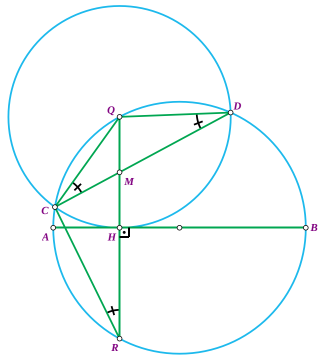
olduğu için, (3,4) durumda, yani $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi, \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = \pi$ olduğu zaman yedigenin alanı en büyük değerini alacak. Jensen'deki eşitlik durumundan, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{\pi}{3} = 60°$ ve $\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = \frac{\pi}{4} = 45°$ elde edilir.



Alanı hesaplarsak, $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (4 \cdot \sin 45° + 3 \cdot \sin 60°) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \sqrt{2}$ elde ederiz.

3.
4.

5. CD ile QH doğruları M de kesişsin.



$QD = QC \Rightarrow \angle QDC = \angle QCD = \angle QRC$ olduğu için $QC^2 = QM \cdot QR = QM \cdot 2QH = QH^2 \Rightarrow 2QM = QH$

6.

14. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2006

16-17 Aralık 2006

1. Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin $[CD]$ kenarı üzerinde $0 < |DE| = |FC| < |CD|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ADE ve ACF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez K noktasında; BDE ve BCF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez L noktasında kesişiyor. A, B, K, L noktalarının çemberdeş olduğunu ispat ediniz.

2. 2006 öğrenci ve 14 öğretmenin bulunduğu bir okulda, her öğrencinin en az bir öğretmen ile tanışık olması koşuluyla, öğretmenler ve öğrenciler arasındaki tanışıklı bağıntısı ne olursa olsun; öğretmenin tanıdığı öğrenci sayısının, öğrencinin tanıdığı öğretmen sayısına oranının en az t olduğu, birbirini tanıyan bir öğrenci-öğretmen ikilisinin bulunmasını sağlayan en büyük t gerçel sayısını belirleyiniz.

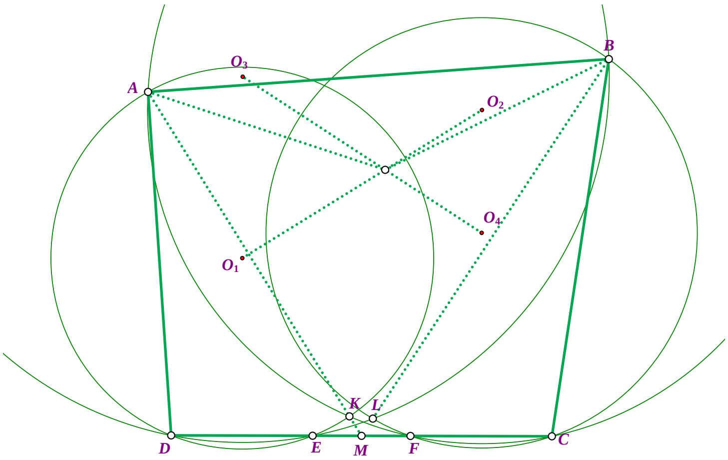
3. $$P_n(x) = (x^2 + x + 1)^n - (x^2 + x)^n - (x^2 + 1)^n - (x + 1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$
polinomunun tüm katsayılarının 7 ile bölünmesini sağlayan bütün n pozitif tam sayılarını bulunuz.

4. $n \geq 2$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere
$$t = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$
ise,
$$\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} \geq \frac{(n-1)^2 t}{t-1}$$
olduğunu gösteriniz.

5. Dar açılı bir ABC üçgeninin yükseklikleri $[AA_1]$, $[BB_1]$ ve $[CC_1]$ olsun. AB_1C_1, BC_1A_1 ve CA_1B_1 üçgenlerinin iç merkezleri, sırasıyla, O_A, O_B ve O_C olsun. ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC, CA ve AB kenarlarına, sırasıyla, T_A, T_B ve T_C noktalarında teğet ise, $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ altıgeninin eşkenar olduğunu gösteriniz.

6. Kenarları, alanı ve iç açılarının derece cinsinden ölçüleri rasyonel sayılar olan bir üçgenin bulunmadığını ispat ediniz.

1. AK doğrusu CD yi M de kessin.



(ADE) çemberine göre, $MK \cdot MA = ME \cdot MD = ME(ME + ED)$.

(ACF) çemberine göre, $MK \cdot MA = MF \cdot MC = MF(MF + FC)$.

$$\begin{aligned} ME^2 + ME \cdot ED = MF^2 + MF \cdot FC &\Rightarrow ME^2 - MF^2 + ED(ME - MF) = 0 \\ &\Rightarrow (ME - MF)(ME + MF + ED) = 0 \\ &\Rightarrow ME = MF \end{aligned}$$

Aynı şekilde, BL doğrusu da CD yi M de kesecek.

$$EM \cdot MD = MF \cdot MC$$

$$\Rightarrow MK \cdot AM = ML \cdot MB$$

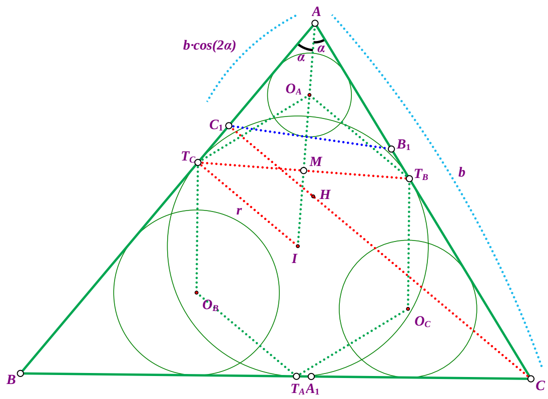
olduğu için A, K, L, B noktaları çemberseldir.

2.

3.

4.

5. $AC = b$ ve $\angle BAC = 2\alpha$ olsun. $AC = b \cdot \cos 2\alpha$ olacaktır.
İster BC_1B_1C kirişler dörtgeni olduğu için $(A.A)$ dan, ister $AB_1 = c \cdot \cos 2\alpha$ eşitliğinden dolayı $(K.A.K)$ dan $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$ olacaktır. Benzerlik oranı $\cos 2\alpha$ dır.



Benzer üçgenlerin, açıortayları da benzer olacağından $\frac{AO_A}{AI} = \cos 2\alpha$ olur.
T_C den AI ya inilen dikmenin ayağı M ve $IT_C = r$ olsun. $\angle MT_CI = \alpha$ olacağı için $MI = r \cdot \sin\alpha$, $MT_C = r \cdot \cos\alpha$ ve $AM = r \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$ olacaktır. Diğer taraftan, ΔAT_CI üçgeninde $AI = \frac{r}{\sin\alpha}$, dolayısıyla da $AO_A = r \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$ olacaktır.

$$AM - MI = r \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - r \cdot \sin\alpha = r \cdot \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} = r \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} = AO_A$$

olduğu için

$$AM = MI + AO_A = MO_A + AO_A \Rightarrow O_AM = MI \Rightarrow O_AT_C = T_CI = r$$

elde edilir. Diğer uzunluklar için de aynı şeyleri yaptığımızda $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ altıgeninin tüm kenarlarının r ye eşit olduğu görülür.

6.

48. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2007

24-25 Mart 2007

1. Bir havayolu şirketi A, B, C, D, E ve F kentlerinden bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri başlatacaktır. Bu altı kentten herhangi ikisi arasında yalnızca bu şirketin seferlerini kullanarak ulaşımı mümkün kılacak biçimde, bu seferlerin kaç farklı biçimde düzenlenebileceğini belirleyiniz.

2. Farklı A ve B noktaları ile bu noktalardan geçen bir Γ çemberi verilmiş olsun. P, Γ üstünde A ve B den farklı, değişen bir nokta olmak üzere, $\widehat{APB}$ nın açıortayının P noktasından Γ çemberinin dışına doğru uzantısı üstünde yer alan ve $|MP| = |AP| + |PB|$ koşulunu sağlayan M noktasının geometrik yerini belirleyiniz.

3. a, b, c pozitif gerçel sayıları, $a + b + c = 1$ koşulunu sağlıyorsa,
$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geq \frac{1}{ab + bc + ca}$$
olduğunu kanıtlayınız.

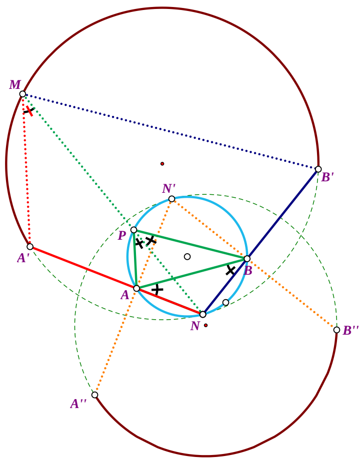
4. Dar açılı bir ABC üçgeniyle; bu üçgenin dışında ve sırasıyla $[AC$, $[BA$ ve $[CB$ ışınları üstünde yer alan B_1, C_1 ve A_1 noktalarının oluşturduğu $A_1B_1C_1$ üçgeni benzerdir. $A_1B_1C_1$ üçgeninin diklik merkezi ile ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin çakıştığını kanıtlayınız.

5. Hangi n pozitif tek sayıları için,
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n^4$$
eşitliğini sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_n$ tek sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

6. 2007×2007 bir satranç tahtasının her birim karesine 1 veya -1 yazıyoruz. Bu yazımın, tahtanın birim karelerinden oluşan her karenin içindeki sayıların toplamının mutlak değeri 1 i aşmayacak biçimde, kaç farklı şekilde gerçekleştirilebileceğini belirleyiniz.

1.

2. Elimizde $PA+PB$, açıortay ve çevrel çember var. Bu üç bilgi, Ptolemy'nin özel halini hatırlatıyor. $\angle APB$ nin açıortayı çemberi N de kessin.



Ptolemy'den $PA \cdot BN + PB \cdot AN = PN \cdot AB$ olacaktır. Biraz düzenlersek,

$$\frac{PA+PB}{PN} = \frac{AB}{AN} = Sabit$$

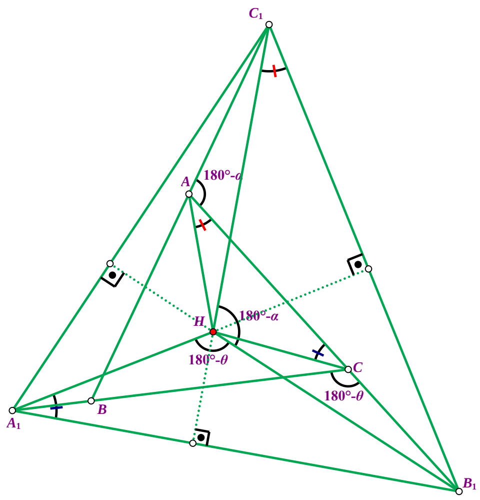
olarak elde edilir. $[NA$ üzerinde ($[NA]$ dışında) A' noktası, $AA' = AB$ olacak şekilde alınsın.

$$\frac{MP}{PN} = \frac{PA+PB}{PN} = \frac{AB}{AN} = \frac{A'A}{AN} \Rightarrow PA \parallel MA'$$

olacaktır. Bu da $\angle NMA' = \angle NPA = Sabit$ olmasını gerektirir.
Benzer şekilde B' noktası aldığımızda, $\angle NMB' = \angle NPB = Sabit$ olacaktır.
Bu durumda $\angle A'MB' = \angle APB = Sabit$ olur. A' ve B' noktaları sabit olduğundan, M noktası bir $A'B'$ yayı üzerindedir. Yayın tanımını biraz daha düzgün yazmaya çalışalım. $A'N = B'N$ olduğu için $\angle BA'N = \angle BAN = \angle B'MN$ olur. Bu durumda N, A', B' ve M noktaları çemberseldir. A', B', N noktaları sabit olduğundan M noktası $(A'NB')$ çemberinin N yi içermeyen $A'B'$ yayı üzerindedir.
P noktası, AB yanının diğer kısmında da olabileceği için, bu yayın orta noktası N' olsun. A' ve B' ne benzer şekilde A'' ve B'' noktalarını tanımlayalım. M noktası, $(A''N'B'')$ çemberinin N' yü içermeyen $A''B''$ yayı üzerindedir.
Yani, M noktalarının geometrik yeri bir çift çember yayıdır.

Not: $\frac{MP}{PN} = Sabit \Rightarrow \frac{MP+PN}{PN} = \frac{MN}{PN} = Sabit$ olacağı için, Ptolemy'yi uyguladıktan, aslında N merkezli bir homoteti uygulamış olduk.

3.
4.
5. Üçgenin açılarına $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ ve $\angle C = \theta$ dersek, $\angle A_1CB_1 = 180° - \theta$ ve $\angle B_1AC_1 = 180° - \alpha$ olur.



H noktası, $\Delta A_1B_1C_1$ nin diklik merkezi olsun. $\angle C_1 = \theta$ olduğu için $\angle A_1HB_1 = 180° - \theta$ olacaktır. Benzer şekilde $\angle A_1 = \alpha$ olduğu için $\angle C_1HB_1 = 180° - \alpha$ dır.
AHB_1C_1 dörtgeninde $\angle C_1AB_1 = \angle C_1HB_1 = 180° - \alpha$ olduğu için, dörtgen kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla, $\angle HC_1B_1 = \angle HAB_1 = 90° - \angle B_1$.
Benzer şekilde, A_1HCB_1 dörtgeni, $\angle A_1HB_1 = \angle A_1CB_1 = 180° - \theta$ olduğu için, bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla, $\angle HA_1B_1 = \angle HCA = 90° - \angle B_1$.
Bu durumda $AH = HC$ ve $\angle AHC = 180° - 2(90° - \angle B_1) = 2\angle B_1 = 2\angle B$ olduğu için, H noktası, ΔABC nin çevrel merkezidir.

6.

15. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2007

8-9 Aralık 2007

1. Dar açılı bir ABC üçgeninin AC kenarını çap kabul eden çember, AB ve BC yi, A ve C dışında, sırasıyla K ve L noktalarında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberi, CK doğrusunu C dışında F noktasında; AL doğrusunu ise, A dışında D noktasında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin $[AC]$ kirişinin küçük yayı üstünde bir E noktası alıp, BE ile AC nin kesiştiği noktaya N diyelim. Eğer
$$|AF|^2 + |BD|^2 + |CE|^2 = |AE|^2 + |CD|^2 + |BF|^2$$
ise, $m(\widehat{KNB}) = m(\widehat{BNL})$ olduğunu gösteriniz.

2. 2007×2007 bir satranç tahtasının bazı birim kareleri kırmızıya boyanıyor. Tahtanın i. satır ve j. sütunundaki birim kareyi (i, j) ile $x \leq i$ ve $y \leq j$ koşullarını sağlayan kırmızı boyalı (x, y) birim karelerinin kümesini de $S_{i,j}$ ile gösteriyoruz. Başlangıçta boyalı her (i, j) birim karesine $S_{i,j}$ ye ait boyalı karelerin sayısı yazılıyor. Daha sonraki her adımda, boyalı her (i, j) birim karesine, $S_{i,j}$ deki karelere bir önceki adım sonunda yazılmış olan sayıların toplamı yazılıyor. Sonlu sayıda adım sonunda boyalı birim karelere yazılı tüm sayıların tek sayı haline geleceğini gösteriniz.

3. $a + b + c = 3$ eşitliğini sağlayan tüm $a, b, c > 0$ gerçel sayıları için,
$$\frac{a^2 + 3b^2}{ab^2(4 - ab)} + \frac{b^2 + 3c^2}{bc^2(4 - bc)} + \frac{c^2 + 3a^2}{ca^2(4 - ca)} \geq 4$$
olduğunu gösteriniz.

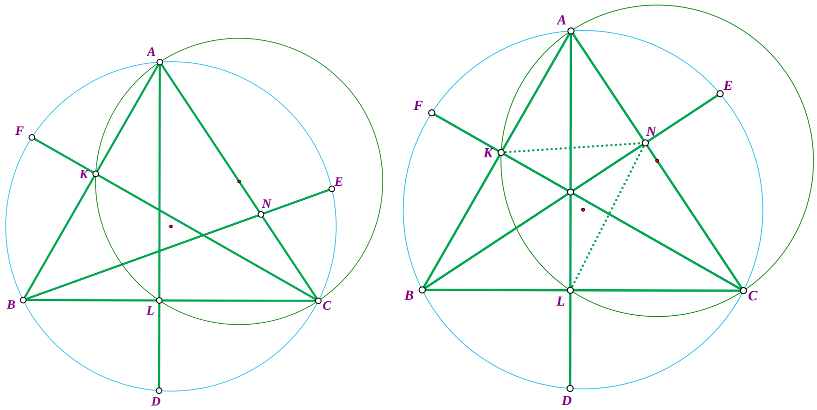
4. $k > 1$ bir sayı, $p = 6k + 1$ bir asal sayı ve $m = 2^p - 1$ olmak üzere,
$$\frac{2^{m-1} - 1}{127m}$$
sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

5. $m(\hat{B}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi, BC kenarına D noktasında değiyor. ABD ve ACD üçgenlerinin iç merkezleri sırasıyla X ve Z olmak üzere, XZ ve AD doğruları K noktasında kesişiyor. XZ nin ABC nin çevrel çemberini kestiği noktalar U ve V; UV doğru parçasının orta noktası M; AD nin ABC nin çevrel çemberini A dışında kestiği nokta Y olmak üzere, $|CY| = 2|MK|$ olduğunu gösteriniz.

6. n kentin bulunduğu bir ülkede, herhangi iki kent arasında, bu kentleri doğrudan birleştiren en çok bir yol bulunuyor. Farklı yolların sadece kentlerde kesiştiği bu ülkede, iki kenti doğrudan birleştiren yollardan herhangi biri kapansa bile, her kentten başka her kente, gerekirse diğer kentlerden geçerek ulaşılabiliyor. Farklı A ve B kentleri verildiğinde, seçtiğimiz en çok k yolu istediğimiz gibi tek yönlü yapmak suretiyle, geri kalan yollar nasıl tek yönlü yapılırsa yapılsın, iki kenti doğrudan birleştiren herhangi bir l yolu için, A dan başlamak, belirlenmiş yönlere uymak, l yolunu kullanmak ve herhangi bir kentten en çok bir kez geçmek üzere B ye ulaşabiliyorsak, *A kenti B kentine k-yönlü bağlanabilir* diyoruz. Her A kenti başka her B kentine k-yönlü bağlanabiliyorsa, k en az kaç olur?

15. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2007 – Çözümler

1. Soruda yükseklikler uzun uzun anlatılmış.



AC çap olduğu için AL yükseklik. Aynı şekilde, AK da yükseklik.

$$BF^2 - AF^2 = BK^2 - AK^2 = BC^2 - AC^2$$
$$CD^2 - BD^2 = CL^2 - BL^2 = AC^2 - AB^2$$

Taraf tarafa toplarsak,

$$CE^2 - AE^2 = BF^2 + CD^2 - AF^2 - BD^2 = BC^2 - AB^2$$

elde ederiz. Bu da $BE \perp AC$ demektir. Buradan gerisi de yüksekliklerin kesişimiyle oluşan kirişler dörtgenlerini görme.

BC çaplı çember K ve N den geçer, $\angle ANK = \angle ABC$. $\angle KNB = 90° - \angle ABC$.

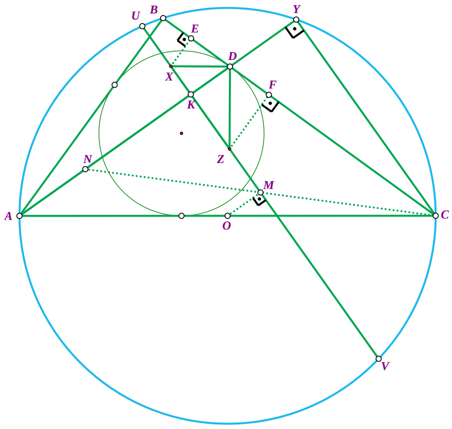
AB çaplı çember L ve N den geçer, $\angle LNC = \angle ABC$. $\angle BNL = 90° - \angle ABC = \angle KNB$.

2.

3.

4.

5. X merkezli içteğet çember BC ye E de dokunsun. Z merkezli içteğet çember BC ye F de dokunsun.



DE ve DF uzunluklarını hesaplayacağız.

$AD = x$, $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ ve $u = \frac{a+b+c}{2}$ olsun.

$BD = u - b$ ve $CD = u - c$

ΔABD üçgeninde $DE = \frac{c+u-b+x}{2} - c = \frac{x+u-b-c}{2}$ elde edilir.

ΔADC üçgeninde $DF = \frac{b+u-c+x}{2} - b = \frac{x+u-b-c}{2} = DE$ olur.

X merkezli çemberin AD ye dokunduğu nokta ile Z merkezli çemberin AD ye dokunduğu nokta aynı olacağından, bu nokta, X ve Z doğrusal olacaktır. Bu durumda çemberler AD ye K da dokunurlar. Yani, $AD \perp XZ$.

M, UV kirişinin orta noktası olduğu için $OM \perp AD$. Bu durumda $AD \parallel OM$ olacaktır. Dolayısıyla $\frac{OC}{OA} = \frac{CM}{MN}$ elde edilir. $AD \perp XZ$ ile $AY \perp YC$ olduğu için $KM \parallel YC$ olur. Bu durumda, paralellikten, $\frac{NM}{NC} = \frac{1}{2} = \frac{MK}{YC}$ elde edilir.

6.

49. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2008

29-30 Mart 2008

1. $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$ olan bir ABC üçgeninde, A açısının iç ve dış açıortayları BC yi sırasıyla D ve E noktalarında kesiyor. $[EA$ ışını üstünde, A ya göre E ile farklı tarafta bir P noktası alınıyor. DP ve AC doğruları M noktasında, ME ile AD ise, Q noktasında kesişiyor. P noktası değişirken elde edilen PQ doğrularının hepsinin bir noktada kesiştiğini gösteriniz.

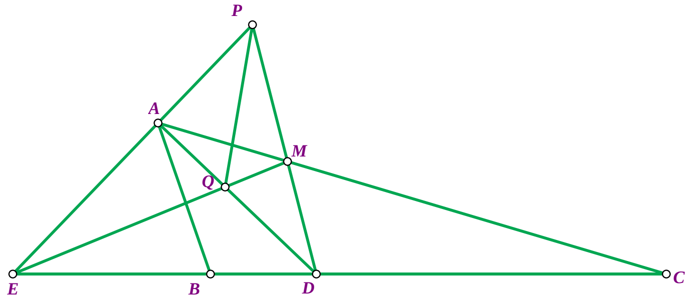
2. 30 köşesi ve 105 kenarı bulunan bir çizgede, ortak bir köşesi bulunmayan sırası kenar ikililerinin sayısı 4822 ise, bu çizgideki iki köşenin dereceleri arasındaki fark en çok kaç olur?

3. $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ denkleminin bütün köklerinin pozitif gerçel sayılar olmasını sağlayan a, b, c gerçel sayıları için
$$\frac{1 + a + b + c}{3 + 2a + b} - \frac{c}{b}$$
ifadesinin en küçük değerini bulunuz.

4. (x_n) dizisi, $x_1 = a$, $x_2 = b$ ve her $n \geq 1$ tam sayısı için
$$x_{n+2} = 2008x_{n+1} - x_n$$
bağıntıları aracılığıyla tanımlanıyor. Her $n \geq 1$ tam sayısı için,
$$1 + 2006x_n x_{n+1}$$
ifadesini tam kare yapan a ve b pozitif tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

5. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|AD| = \frac{|BD|^2}{|AB|+|AD|} = \frac{|CD|^2}{|AC|+|AD|}$ olacak şekilde bir D noktası ile $D \in [AE]$ ve $|CD| = \frac{|DE|^2}{|CD|+|CE|}$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. $|AE| = |AB| + |AC|$ olduğunu gösteriniz.

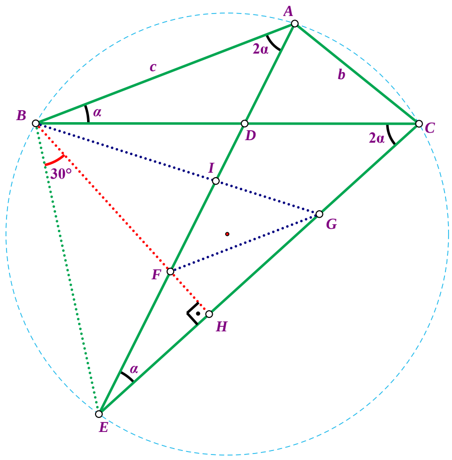
6. $m, n > 2$ tam sayılar olmak üzere, $N = \{1,2,\ldots,n\}$ topluluğu, m elemanlı bir A kümesinin bir altkümesini seçecektir. N topluluğunun bir tercih profili, her $i \in N$ seçmeninin A kümesindeki seçeneklere ilişkin bir kesin tercih sıralamasından oluşmaktadır. $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ olmak üzere, k-çoğulcu seçim sisteminde, her seçmen, ilk k sırada tercih ettiği k adaya, sırasını belirtmeksizin eşit ağırlıklı oy vermekte ve en çok sayıda toplam oy alan adaylar seçilmektedir. R ve R', N topluluğunun iki tercih profili ve $a \in A$ olmak üzere, eğer her $i \in N$, R profilindeki tercihine göre a dan kötü bulduğu bütün adayları, R' profilindeki tercihine göre de a dan kötü buluyorsa, "R' profili, R profiline a-üstündür" diyoruz. k=çoğulcu seçim sistemine göre R profilinde seçilen her $a \in A$, R ye a-üstün olan her R' profilinde de seçilmeye devam ediyorsa, k-çoğulcu seçim sistemine *tekdüze* diyoruz. $k > \frac{m(n-1)}{n}$ olmasının, k-çoğulcu seçim sisteminin tekdüze olması için gerek ve yeter olduğunu gösteriniz.

1. İç ve dış açıortay teoremlerinden
$$\frac{EB}{EC}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{EC}{DC}=\frac{EB}{BD}.$$


ΔPED de A, M, C noktaları için Menelaus'tan
$$\frac{PA}{AE}\cdot\frac{EC}{CD}\cdot\frac{DM}{MP}=1.$$
$\frac{EC}{DC}=\frac{EB}{BD}$ eşitliğini yerine yazarsak
$$\frac{PA}{AE}\cdot\frac{EB}{BD}\cdot\frac{DM}{MP}=1$$
elde edilir. Bu da, Ceva Teoreminin tersinden dolayı, PB, DA, EM doğrularının tek noktada kesiştiği anlamına gelir. Yani tüm PQ doğruları B den geçer.
2.
3.

4.

5. Elimizde $AD=\frac{BD^2}{AB+AD}\Rightarrow AB\cdot AD=BD^2-AD^2$ var.
D merkezli, DA yarıçaplı çember BA yı X te kessin. B nin bu çembere göre kuvveti, $BD^2-DA^2=BA\cdot BX$ olduğu için $BX=AD=XD\Rightarrow\angle BAD=2\angle ABD=2\alpha$.
Benzer şekilde, $\angle DAC=2\angle ACD=2\beta$.
Üçgenin açılarını toplarsak, $\alpha+\beta+2\alpha+2\theta=180°\Rightarrow\alpha+\beta=60°$ ve $\angle BAC=120°$ elde edilir.



Yine aynı şekilde, $\angle EDC = \angle BDA$ olduğu için $\angle DCE = 2\angle DEC = 2\alpha$ olacak. $\angle BCE = \angle BAE = 2\alpha$ olduğu için de, B, A, C, E noktaları çembersel olacaktır.

H noktası, B den EC ye inilen dikmenin ayağı olsun. BH ile AE doğruları F de kesişsin. $\angle BAC = 120^\circ \Rightarrow \angle BEH = 60^\circ$ olur. EC üzerinde ΔBEG eşkenar üçgen olacak şekilde bir G noktası alalım. AG ile AE doğruları I da kesişsin. F noktası, ΔEBG üçgeninin açıortayı üzerinde olduğu için $FG = FE$ ve $\angle IFG = 2\angle FEG = 2\alpha$ elde edilir. Dolayısıyla, $FG \parallel AB$ elde edilir.

EI ışını, (BEG) çevrel çemberini J de kessin. $\angle JBG = \angle JEG = \angle ABC = \alpha$ ve $\angle BJG = BAC = 120^\circ$ olduğu için, $A.A$ dan $\Delta JBG = \Delta ABC$ elde edilir. JI, $\angle BJG$ nin açıortayı olduğu için $\frac{AB}{AC} = \frac{BJ}{JG} = \frac{BI}{IG}$ olur.

$$AB \parallel FG \Rightarrow \frac{AB}{FG} = \frac{BI}{IG} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow FG = AC = EF$$

elde ederiz. $\angle BAF = 2\alpha$ ve $\angle EFH = \angle BFA = 90^\circ - \angle AEC = 90^\circ - \alpha$ olduğu için $AB = AF$ dir. Son durumda $AE = AF + FE = AB + AC$ elde etmiş olduk.

6.

16. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2008

29-30 Kasım 2008

1. Diklik merkezi H ve çevrel merkezi O olan dar açılı bir ABC üçgeninin BC, AC ve AB kenarlarının orta noktaları sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 olsun. $[HA_1$, $[HB_1$ ve $[HC_1$ ışınları, ABC üçgeninin çevrel çemberini, sırasıyla A_0, B_0 ve C_0 noktalarında kessin. $A_0B_0C_0$ üçgeninin diklik merkezi H_0 ise, O, H ve H_0 noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

2. (a) $\frac{7^{p-1}-1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.
   (b) $\frac{11^{p-1}-1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

3. $a+b+c=1$ koşulunu sağlayan tüm a,b,c pozitif gerçel sayıları için,
$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2-ab+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2-bc+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b^3(c^2-ca+a^2)}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}$$
olduğunu kanıtlayınız.

4. $\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayıların ve $\mathbb{Z}$ de tüm tam sayıların kümesini göstermek üzere, $f:\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu,
   i. $f(0,0)=1$, $f(0,1)=1$,
   ii. her $k\notin\{0,1\}$ için, $f(0,k)=0$ ve
   iii. her $n\geq 1$ ve k için, $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)$

   koşullarını sağlıyorsa
$$\sum_{k=0}^{\binom{2009}{2}} f(2008,k)$$
toplamının değerini bulunuz.

5. Düzlemde bir Γ çemberi ve onu kesmeyen bir l doğrusu verilmiş olsun. $PQ\cap RS=\{A\}$ ve $PS\cap QR=\{B\}$ olacak biçimde, Γ çemberi üstünde P,Q,R,S noktalarının bulunmasını sağlayan ve l doğrusu üstünde yer alan tüm $\{A,B\}$ nokta ikilileri için, $[AB]$ yi çap alan çemberlerin kesişim kümesini belirleyiniz.

6. 2008 tane bilgisayardan oluşan bir bilgisayar ağında, herhangi iki döngü kesişmiyor. $t=0$ anında, bir bilgisayar korsanı bu ağdaki bir bilgisayarı ele geçiriyor ve $t=1$ anında da, ağ yönetici, ele geçirilmemiş bir bilgisayara koruyucu bir program yüklüyor. Her k pozitif tam sayısı için, $t=2k$ anında, korsan, varsa, o ana kadar ele geçirdiği bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve koruyucu program yüklenmemiş olan bir bilgisayarı daha ele geçirebiliyor; $t=2k+1$ anında da, ağ yöneticisi, varsa, o ana kadar koruyucu program yüklenmiş bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve korsanın ele geçirmemiş olduğu bir bilgisayara daha koruyucu programı yükleyebiliyor. Bilgisayar ağı ne şekilde düzenlenmiş olursa olsun, korsanın en çok kaç tane bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebileceğini belirleyiniz.

[$m \geq 3$ olmak üzere, B_1 ve B_m bilgisayarları ve, her $2 \leq i \leq m$ için, B_{i-1} ve B_i bilgisayarları doğrudan bağlıysa, m elemanlı $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ kümesine bir *döngü* diyoruz.]

16. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2008 – Çözümler

1. H den BC ye inilen dikmenin ayağı F, HF nin çemberi kestiği nokta D olsun. H nin A_1 e göre simetriği H_1 olsun. $[HF] = [FD]$ ve $[HA_1] = [A_1H_1]$ olduğundan $FA_1 \parallel DH_1$ olur. HFA_1 ile HDH_1 benzer üçgenlerdir ve benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ dir. O zaman $[DH_1]$ in orta dikmesi A_1 den geçer ve aynı zamanda BC nin orta dikmesi olur. Bu durumda $[DH_1]$ in orta dikmesi A_1 den ve O dan geçer. O dan $[DH_1]$ e inilen dik, $[DH_1]$ in orta noktasından geçtiği için H_1 çember üzerinde olmak zorundadır, yani H_1 ile A_0 çakışıktır. O zaman $[HA_1] = [A_1A_0]$ dır. Dahası, $m(\widehat{ADA_0}) = 90°$ olduğundan $[AA_0]$ çaptır. (Yani A, O, A_0 doğrudaştır.)
   Benzer şekilde B, O, B_0 ve C, O, C_0 da doğrudaştır. Yani $A_0B_0C_0$ üçgeni ABC üçgeninin O etrafında 180° döndürülmesiyle elde edilmiştir. Bu durumda H_0 da H nin etrafında 180° döndürülmesiyle elde edilmiştir. O zaman $m(\widehat{HOH_0}) = 180°$ olur.

2. (a)

   (b)

3.

50. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2009

4-5 Nisan 2009

1. $\mathbb{Q}^+$ tüm pozitif rasyonel sayıların, $\mathbb{Z}$ ise tüm tam sayıların kümesini göstermek üzere, $x > 1$ olan her $x \in \mathbb{Q}^+$ için, $f(1/x) = f(x)$ ve $(x+1)f(x-1) = xf(x)$ bağıntılarını sağlayan bütün $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

2. Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninin iç teğet çemberinin merkezi O, yarıçapı ise r dir. AB ve CD doğruları P; AD ve BC doğruları Q; AC ve BD köşegenleri ise, K noktasında kesişiyor. O noktasından PQ doğrusuna olan uzaklık d ise, $|OK| \cdot d = r^2$ olduğunu gösteriniz.

3. 2009 kişilik toplulukta, hangi iki kişiyi alırsak alalım, bunların ikisiyle birden tanışık olan tam olarak bir kişi bulunuyor. Böyle bir toplulukta en çok tanıdığı olan ve en az tanıdığı olan kişilerin tanıdık sayıları arasındaki farkın alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Commented [A27]: matematikolimpiyati.org sitesinde ikinc gün eksik.
Bu noktadan sonrası Mathlinks'ten çeviri.

4. $Q(x)$ tam sayı katsayılı bir polinom olmak üzere;
$$1 + p + Q(x^1) \cdot Q(x^2) \ldots Q(x^{2p-2})$$
polinomunun tam sayı kökünün olmasını sağlayan p asal sayılarını bulunuz.

5. ABC üçgeninin içteğet çemberi AB, AC, BC kenarlarına sırasıyla C_1, B_1, A_1 noktalarında dokunmaktadır.
$$\sqrt{\frac{AB_1}{AB}} + \sqrt{\frac{BC_1}{BC}} + \sqrt{\frac{CA_1}{CA}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$$
olduğunu gösteriniz.

6. $n \ge 4$ öğrencili bir sınıfta öğrencilerden bazıları arkadaştır. Bu sınıfta, herhangi $n-1$ öğrenci yuvarlak bir masa etrafına her öğrencinin solunda ve sağında birer arkadaşı olacak şekilde oturtulabiliyorsa; ama n öğrenci bu şekilde oturtulamıyorsa n nin alabileceği en küçük değerin 10 olduğunu gösteriniz.

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2009

5-6 Aralık 2009

1. $p^3 - 4p + 9$ un tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını bulunuz.

2. Γ, ABC üçgeninin çevrel çemberi; D ve E de, sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde köşelerden farklı noktalar olsun. A', $\widehat{BAC}$ nin açıortayının Γ yı ikinci kez kestiği nokta; P ve Q da, sırasıyla $A'D$ ve $A'E$ doğrularının Γ yı ikinci kez kestiği noktalar olsun. R ve S sırasıyla APD ve AQE üçgenlerinin çevrel çemberlerinin AA' doğrusunu ikinci kez kestikleri noktalar ise; DS ve ER doğrularının, Γ ya A da teğet olan doğru üstünde bir noktada kestiğini gösteriniz.

3. Bir beldenin Elektrik İşleri görevlisi Ahmet, k gün boyunca her gün, ya seçtiği bir direkle yine kendisinin seçtiği istediği sayıda direk arasına birer tel bağlıyor, ya da en çok 17 direk ikilisi seçip her ikiliye ait direkler arasına birer tel bağlıyor. Beldenin Boya İşleri görevlisi Berna da, beldede kaç direk olursa olsun ve Ahmet telleri nasıl bağlarsa bağlasın, beldedeki tüm direklerin en çok 2009 renk kullanarak ve aralarına tel bağlanmış herhangi iki direk aynı renkte olmayacak biçimde boyanabileceğini iddia ediyor. k nin, Berna'nın iddiasının doğru olmasını sağlayan en büyük değerinin belirleyiniz.

4. Dar açılı ABC üçgeninin diklik merkezi H ve A, B, C köşelerine ait yüksekliklerinin ayakları da, sırasıyla A_1, B_1, C_1 dir. K, $[AB]$ çaplı çemberin küçük AB_1 yayı üstünde yer alan ve $m(\widehat{HKB}) = m(\widehat{C_1KB})$ koşulunu sağlayan bir nokta ve $[KB] \cap [CC_1] = \{L\}$ olmak üzere; C merkezli ve $[CL]$ yarıçaplı çember $[AA_1]$ i M noktasında kesiyor. B merkezli ve $[BM]$ yarıçaplı çemberin CC_1 doğrusunu kestiği noktalar P ve Q ise, A, K, P ve Q noktalarının çemberdeş olduğunu kanıtlayınız.

5. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,
$$\frac{(b+c)(a^4 - b^2c^2)}{ab + 2bc + ca} + \frac{(c+a)(b^4 - c^2a^2)}{bc + 2ca + ab} + \frac{(a+b)(c^4 - a^2b^2)}{ca + 2ab + bc} \geq 0$$
olduğunu gösteriniz.

6. $1 < k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ tam sayılar olmak üzere; her N tam sayısı için, $k_i | N - a_i$ olacak biçimde en az bir $1 \leq i \leq n$ bulunuyorsa, n nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

51. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2010

27-28 Mart 2010

1. ABC üçgeninin sırasıyla $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarları üstünde yer alan D, E, F noktaları, $|AD| = |AF|$, $|BD| = |BE|$ ve $|DE| = |DF|$ koşullarını sağlıyor. I, ABC üçgeninin iç merkezi olmak üzere; ABI üçgeninin çevrel çemberine A noktasında teğet olan doğru ile BI doğrusu K noktasında kesişiyor. $|AK| = |AD|$ ise, $|AK| = |KE|$ olduğunu kanıtlayınız.

2. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,
$$\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} + \sqrt[4]{\frac{(b^2+c)(b^2-bc+c^2)}{2}} + \sqrt[4]{\frac{(c^2+a^2)(c^2-ca+a^2)}{2}}$$
$$\leq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$
olduğunu gösteriniz.

3. Yıl boyunca yaptığı sınavlarda 2010 tane soru sormuş olan bir öğretmen, bu soruları her biri 670 tane soru içeren üç dosyaya ayırarak, her dosyayı o dosyadaki soruların hepsini çözmüş olan bir öğrenciye vermek istiyor. Herhangi bir soruyu çözemeyen en çok iki öğrenci olması koşuluyla; hangi soru hangi öğrenciler tarafından çözülmüş olursa olsun, öğretmenin bunu yapmasının olanaklı olması için toplam öğrenci sayısının en az kaç olması gerektiğini belirleyiniz.

4. $0 \leq k < n$ tam sayılar ve $A = \{a : a \equiv k \pmod n\}$ olmak üzere, hiçbir $(a, m) \in A \times \mathbb{Z}^+$ için,
$$\frac{a^m + 3^m}{a^2 - 3a + 1}$$
ifadesinin değeri tam sayı değilse, n nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

5. ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan bir D noktası için, $BD \cap AC = \{E\}$ ve $CD \cap AB = \{F\}$ olmak üzere; A, E, D, F noktaları çemberdeş ise, bu noktalardan geçen çemberi Γ_D ile gösterelim. Tüm Γ_D çemberlerinin A dan farklı bir ortak noktadan geçtiğini gösteriniz.

6. Λ düzlemdeki kafes noktalarının kümesi ve $\mathcal{F}$ de, Λ dan $\{-1,1\}$ ne fonksiyonların kümesi olsun. $\mathcal{F}$ deki bir f fonksiyonu, $\mathcal{F}$ ye ait olan ve f den farklı değer aldığı kafes noktalarının sayısı sonlu olan her g fonksiyonu için,
$$\sum_{\substack{P,Q\in\Lambda \\ 0<|PQ|<2010}} \frac{f(P)f(Q) - g(P)g(Q)}{|PQ|} \geq 0$$
koşulunu sağlıyorsa, f ye *şahane* diyelim. Birbirinin ötelemesi olmayan sonsuz çoklukta şahane fonksiyon bulunduğunu kanıtlayınız.

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2010

27-28 Kasım 2010

1. Bir ülkede başkente doğrudan karayolu ile bağlı kentlerin sayısı 2010 dur. Başkent dışındaki her kent 2010 dan az sayıda kente doğrudan karayolu ile bağlı olup, aynı sayıda kente doğrudan bağlı olan herhangi iki kent için bu sayı çifttir. Başkenti doğrudan çeşitli kentlere bağlayan yollardan k tanesi kapatılarak bakıma alınacaktır. Bu ülkedeki karayolu ağı nasıl oluşturulmuş olursa olsun, bunun aralarında karayolu ulaşımı mümkün olan herhangi iki kent arasındaki ulaşımın hala mümkün olacağı biçimde yapılmasını olanaklı kılan en büyük sayı k sayısını belirleyiniz.

2. P, ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan, A köşesine ait kenarortay üstünde olmayan ve $m(\widehat{CAP}) = m(\widehat{BCP})$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. $BP \cap CA = \{B'\}$ ve $CP \cap AB = \{C'\}$ olmak üzere; AP doğrusu ile ABC üçgeninin çevrel çemberi ikinci kez Q noktasında, $B'Q$ ve CC' doğruları R noktasında ve $B'Q$ doğrusu ile P den AC doğrusuna paralel çizilen doğru da S noktasında kesişiyor. $B'C'$ ve QB doğruları AB doğrusunun C den farklı yanında yer alan bir T noktasında kesişsin. $m(\widehat{BAT}) = m(\widehat{BB'Q})$ olması için, $|SQ| = |RB'|$ olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayınız.

3. Her n pozitif tam sayısı ve $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ koşulunu sağlayan tüm $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitif gerçel sayıları için,
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4 + 3}} \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$
olduğunu kanıtlayınız.

4. A ve B noktaları $[CD]$ çaplı çemberin üstünde ve CD doğrusunun farklı yanlarında bulunuyor. C ve D noktalarından geçen bir Γ çemberi $[AC]$ yi uçlarından farklı bir E noktasında, $[BC]$ yi de F noktasında kesiyor. E noktasında Γ çemberine teğet olan doğru ile BC doğrusunun kesiştiği nokta P olmak üzere; Q noktası, $|QP| = |EP|$ koşulunu sağlayan ve CEP üçgenin çevrel çemberi üstünde yer alan E den farklı bir nokta olsun. $AB \cap EF = \{R\}$ ve $|EQ|$ nun orta noktası S ise, DR ve PS doğrularının paralel olduğunu gösteriniz.

5. $0 \le a, b < 2010^{18}$ tam sayılar olmak üzere, $P(x) = ax^2 + bx$ biçimindeki polinomların kümesini $\mathcal{S}$ ile gösterelim. $\mathcal{S}$ ye ait kaç P polinomunun, tüm $0 \le n < 2010^{18}$ tam sayıları için $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ bağıntısını sağlayan ve $\mathcal{S}$ ye ait olan bir Q polinomunun bulunmasını olanaklı kıldığını belirleyiniz.

6. K, düzlemdeki dışbükey bir 2010-genin kenar ve köşegenlerinin kümesi olsun. A, K nin bir altkümesi olmak üzere; A ya ait her doğru parçası çifti kesişiyorsa, A ya *kesişimli küme* diyelim. İki kesişimli kümenin birleşiminin en çok kaç elemana sahip olabileceğini belirleyiniz.

52. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2011

Commented [A28]: Mathlinks'ten çeviri. Tarihi belli değil.

1. $\mathbb{Q}^+$ pozitif rasyonel sayılar kümesi olmak üzere; her $x \in \mathbb{Q}^+$ için
$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{f(x)}{x+1} \text{ ve } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^3}$$
şartını sağlayan tüm $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

2. ABC üçgeninin iç merkezi I ve AD çevrel çapı olsun. $[BA$ üzerindeki E noktası, $[CA$ üzerindeki F noktası
$$|BE| = |CF| = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2}$$
şartlarını sağlayan noktalarsa, EF nin DI ya dik olduğunu gösteriniz.

3. A ve B sırasıyla 2011^2 ve 2010 elemanlı kümeler olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $f: A \times A \to B$ fonksiyonunun var olduğunu gösteriniz.
Her $(x, y) \in A \times A$ için $f(x, y) = f(y, x)$ ve her $g: A \to B$ fonksiyonu için $g(a_1) = f(a_1, a_2) = g(a_2)$ ve $a_1 \neq a_2$ şartlarını sağlayan $(a_1, a_2) \in A \times A$ ikilileri vardır.

4. D, ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir noktadır. I, I_1, I_2 sırasıyla ABC, ABD, ADC üçgenlerinin iç merkezleri olsun. AI_1I ve ADI_2 üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kez kesiştiği nokta E, AII_2 ve AI_1D üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kez kesiştiği nokta F olsun. $AI_1 = AI_2$ ise,
$$\frac{EI}{FI} \cdot \frac{ED}{FD} = \frac{EI_1^2}{FI_1^2}$$
olduğunu gösteriniz.

5. a, b, c pozitif gerçel sayıları $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$ şartını sağladığına göre,
$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)} + \frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)} + \frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{3}{2}$$
olduğunu gösteriniz.

6. n sayısının ikilik gösterimindeki sayıların toplamını $t(n)$ ile gösterelim. $k \geq 2$ tam sayısı için
   a. Her $m \geq 1$ için, $a_m \geq 3$ tek sayı ve $t(a_1 a_2 \dots a_m) = k$ olan $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tam sayı dizisinin var olduğunu gösteriniz.
   b. Her $m \geq N$ için, $t\big(3 \cdot 5 \dots \cdot (2m+1)\big) > k$ olacak şekilde N tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

7. ABC üçgeninin içerisinde bir K noktası alınıyor. $ARBPCQ$ dışbükey altıgeninin köşeleri ABC nin çevrel çemberi olan Γ nın üzerindedir. Γ ya A da teğet olan ve K dan geçen çemberin AP yi ikinci kez kestiği nokta A_1 olsun. B_1 ve C_1 de benzer şekilde üretilsin.
$$\min\left\{\frac{PA_1}{AA_1}, \frac{QB_1}{BB_1}, \frac{RC_1}{CC_1}\right\} \leq 1$$
olduğunu gösterin.

8. Çizge Hava Yolları (ÇHY), Çizge Ülkesindeki 2011 şehir arasında her şehir çifti arasında tek yönlü uçuşlar düzenliyor. Bu uçuşlar nasıl düzenlenirse düzenlensin,

Çizge Ülkesindeki bir şehirden diğerine, sadece ÇHY uçuşlarını kullanarak, herhangi bir şehre gelen ve şehirden giden uçuşların farkının mutlak değeri k dan fazla olmayacak şekilde gitmek mümkün olduğuna göre; k tam sayısının alabileceği en büyük değer nedir?

9. p bir asal sayı, n de bir pozitif tam sayı olsun. $\mathbb{Z}_{p^n}$ ile $mod\ p^n$ deki denklik sınıfını gösterelim. Her $a, b \in \mathbb{Z}_{p^n}$ için $f(a) + f(b) \equiv f(a + b + pab)$ (mod p^n) şartını sağlayan tüm $f: \mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_{p^n}$ fonksiyonlarını bulunuz.

52. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2011 – Çözümler

1.
2.
3.
4.
5.
6.

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2011

3-4 Aralık 2011

1. $n \geq 2$ ve $E = \{1,2,\dots,n\}$ olsun. $A_1, A_2, \dots, A_k$; E nin altkümeleri olmak üzere, her $1 \leq i < j \leq k$ için, $A_i \cap A_j$, $A_i' \cap A_j$, $A_i \cap A_j'$ ve $A_i' \cap A_j'$ kümelerinden tam olarak bir tanesi boş ise, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.
   [A, E nin bir altkümesi ise, E nin A ya ait olmayan elemanlarının kümesini A' ile gösteriyoruz.]

2. D, ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta ve E, $[CD]$ nin orta noktası olsun. E den BC doğrusuna çizilen dikme $[AC]$ kenarını $|AF| \cdot |BC| = |AC| \cdot |EC|$ koşulunu sağlayan bir F noktasında kesiyor. ADC üçgeninin çevrel çemberi de, $[AB]$ kenarını A dan farklı bir G noktasında kesiyor. AGF üçgeninin çevrel çemberine F noktasından çizilen teğetin BGE üçgeninin çevrel çemberine de teğet olduğunu kanıtlayınız.

3. $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,
$$\frac{1}{x + y^{20} + z^{11}} + \frac{1}{y + z^{20} + x^{11}} + \frac{1}{z + x^{20} + y^{11}} \leq 1$$
olduğunu gösteriniz.

4. $a_1 = 5$ ve $n \geq 1$ için, $a_n + 1 = a_n^3 - 2a_n^2 + 2$ olsun. $p \equiv 3 \pmod 4$ koşulunu sağlayan bir p asal sayısı $a_{2011} + 1$ sayısını bölüyorsa, $p = 3$ olduğunu kanıtlayınız.

5. M ve N düzlemde yer alan düzgün dışbükey çokgensel bölgeler olmak üzere, uç noktalardan biri M ye, diğeri de N ye ait olan doğru parçalarının orta noktalarından oluşan kümeyi $K(M, N)$ ile gösterelim. $K(M, N)$ nin de düzgün dışbükey çokgensel bir bölge olmasını sağlayan tüm (M, N) ikililerini belirleyiniz.

6. A ülkesindeki 2011 kent ile B ülkesindeki 2011 kent arasında karşılıklı uçak seferleri yapılıyor. İki kent arasındaki seferleri yalnızca bir hava yolu şirketi işletebiliyor ve bir kentten çıkan seferleri en çok 19 farklı hava yolu şirketi işletebiliyor. Uçuşlar hava yolu şirketleri arasında bu koşulları sağlayacak biçimde nasıl paylaşılmış olursa olsun, yalnızca bir tek hava yolu şirketinin uçuşlarını kullanarak herhangi ikisi arasında gidebileceğimiz k kent bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

7.
8.
9.
10.
11.
12.

53. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2012

24-25-26 Mart 2012

1. $A = \{1,2,\ldots,2012\}$, $B = \{1,2,\ldots,19\}$ ve S de A nın tüm altkümelerinin kümesi olsun. Her $A_1, A_2 \in S$ için, $f(A_1 \cap A_2) = \min\{f(A_1), f(A_2)\}$ koşulunu sağlayan tüm $f: S \to B$ fonksiyonlarının sayısını belirleyiniz.

2. D, dar açılı bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta olmak üzere; M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 sırasıyla, $[AD], [AB], [AC], [BD], [CD]$ doğru parçalarının orta noktaları; O_1, O_2, O_3, O_4 sırasıyla, $ABD, ACD, M_1M_2M_4, M_1M_3M_5$ üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri; S ve T de sırasıyla, AO_1 ve AO_2 doğru parçalarının orta noktaları olsun. SO_3O_4T dörtgeninin bir ikizkenar yamuk olduğunu kanıtlayınız.

3. $ab + bc + ca \leq 1$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,
$$a + b + c + \sqrt{3} \geq 8abc\left(\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\right)$$
olduğunu gösteriniz.

4. Bir ABC üçgeninin içteğet çemberi $[BC], [CA], [AB]$ kenarlarına sırasıyla, D, E, F noktalarında değiyor. A noktasında geçen ve BC doğrusuna D de teğet olan çember ise, $[BF]$ ve $[CE]$ doğru parçalarını sırasıyla, K ve L noktalarında kesiyor. E den geçen ve DL ye paralel olan doğru ile F den geçen ve DK ye paralel olan doğru da P noktasında kesişiyor. R_1, R_2, R_3, R_4 sırasıyla, AFD, AED, FPD, EPD üçgnlerinin çevrel çemberlerinin yarıçapları olmak üzere, $R_1R_4 = R_2R_3$ olduğunu kanıtlayınız.

5. Hangi n pozitif tam sayıları için, her biri n ile bölünen n tnae tam sayının karelerinin toplamı olarak yazılabilen her pozitif tam sayının, hiçbiri n ile bölünmeyen n tane tam sayının karelerinin toplamı olarak da yazılabileceğini belirleyiniz.

6. Arda ile Başak $1 \times m$ bir satranç tahtası ve üzerlerinde 1 den 2012 ye kadar tam sayıların yazılı olduğu 2012 taşla bir oyun oynuyorlar. Her hamlede Arda bir taş seçiyor ve Başak bunu tahtanın istediği boş bir karesine yerleştiriyor. Bu biçimde yapılan k hamle sonucunda seçilen taşlar tahtaya artan bir sırada yerleştirilmişse, oyunu Başak; değilse, Arda kazanıyor. Hangi (m, k) ikilileri için Başak'ın oyunu kazanmayı garantileyebileceğini belirleyinizi.

7. Bir r rasyonel sayısı ve bir n pozitif tam sayısı için, $S_r(n) = 1^r + 2^r + \cdots + n^r$ olsun. Sonsuz çoklukta n pozitif tam sayısı için, $S_a(n) = \left(S_b(n)\right)^c$ olmasını sağlayan bütün a, b pozitif rasyonel sayılarını ve c pozitif tam sayılarını belirleyiniz.

8. $ABC \cong A'B'C'$ olacak biçimde düzlemde yer alan birbirinden farklı A, B, C, A', B', C' noktaları için, ABC üçgeninin ağırlık merkezi G noktası olsun. G den geçen A' merkezli çember ile $[AA']$ çaplı çember A_1 noktasında, G den geçen B' merkezli çember ile $[BB']$ çaplı çember B_1 noktasında, G den geçen C' merkezli çember ile $[CC']$ çaplı çember de C_1 noktasında kesişiyorsa,

$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 + |CC_1|^2 \leq |AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2$$

olduğunu gösteriniz.

9. Tüm pozitif tam sayıların kümesinin $\mathbb{Z}^+$ ile, tüm asal sayıların kümesini de $\mathbb{P}$ ile gösterelim.
   A ve S, $\mathbb{Z}^+$ nın altkümeleri olmak üzere; A nın tüm a elemanları ve $0 \leq b < a$ koşulunu sağlayan tüm b tam sayıları için, $b \equiv s_1 + s_2 + \cdots + s_n \pmod{a}$ ve $1 \leq n \leq N$ olacak biçimde S ye ait $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayılarının bulunmasını sağlayan bir N pozitif tam sayısı varsa, A kümesine *S-uygun* diyelim. $\mathbb{P}$ kümesi S-uygun olacak ve $\mathbb{Z}^+$ kümesi S-uygun olmayacak biçimde $\mathbb{Z}^+$ nın bir S altkümesini bulunuz.

53. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı – 2012 – Çözümler

1.
2.
3.
4.
5.
6.

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2012

24-25 Kasım 2012

1. Her n pozitif tam sayısı için $P(n!) = |P(n)|!$ koşulunu sağlayan tüm tam sayı katsayılı $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

2. ABC, $|AB| = |AC|$ koşulunu sağlayan bir ikizkenar üçgen ve D, A ya ait yüksekliğin ayağı olmak üzere, ADC üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktası $m(\widehat{APB}) > 90°$ ve $m(\widehat{PBD}) + m(\widehat{PAD}) = m(\widehat{PCB})$ koşullarını sağlıyor.
   $CP \cap AD = \{Q\}$ ve $BP \cap AD = \{R\}$ olsun. $[AB]$ üstünde yer alan bir T noktası ile $[AP$ üstünde ve $[AP]$ dışında yer alan bir S noktası, $m(\widehat{TRB}) = m(\widehat{DQC})$ ve $m(\widehat{PSR}) = 2m(\widehat{PAR})$ koşullarını sağlıyorsa, $|TR| = |RS|$ olduğunu gösteriniz.

3. Tüm x, y gerçel sayıları için,
   i. $f\big(f(x^2) + y + f(y)\big) = x^2 + 2f(y)$ ve
   ii. $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

   koşullarını sağlayan bütün $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $ fonksiyonlarını belirleyiniz.

4. Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,
   $$\frac{x(2x-y)}{y(2z+x)} + \frac{y(2y-z)}{z(2x+y)} + \frac{z(2z-x)}{x(2y+z)} \ge 1$$
   olduğunu kanıtlayınız.

5. $x_i \in \{1,2,\dots,20\}, (1 \le i \le 2012)$, biçimindeki tüm $(x_1, x_2, \dots, x_{2012})$ 2012-lilerinden oluşan kümeyi P ile gösterelim.
   Bir $S \subset P$ altkümesi, her $(x_1, x_2, \dots, x_{2012}) \in S$ için,
   $$y_i \le x_i \ \ (1 \le i \le 2012) \Rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_{2012}) \in S$$
   koşulunu sağlıyorsa, S ye *alçalan küme*;
   $$x_i \le y_i \ \ (1 \le i \le 2012) \Rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_{2012}) \in S$$
   koşulunu sağlıyorsa da, S ye *yükselen küme* diyelim.
   A ve B boş olmayan sırasıyla bir alçalan ve bir yükselen küme olmak üzere, $|A \cap B|/(|A|\,.\,|B|)$ nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

6. Sırasıyla, $[AE]$ ve $[AF]$ doğru parçaları üstünde yer alan B ve D noktaları için, ABF ve ADE üçgenlerinin A köşelerine ait dış teğet çemberleri aynıdır. Bu çemberin merkezi I, $[BF] \cap [DE] = \{C\}$ ve IAB, IBC, ICD, IDA, IAE, IEC, ICF, IFA üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla, P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 olsun.
   a. P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarının ve Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.
   b. Bu çemberlerin merkezleri sırasıyla, O_1 ve O_2 olmak üzere, O_1, O_2, I noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı – 2012 – Çözümler

1.
2.
3.
4.
5.
6.