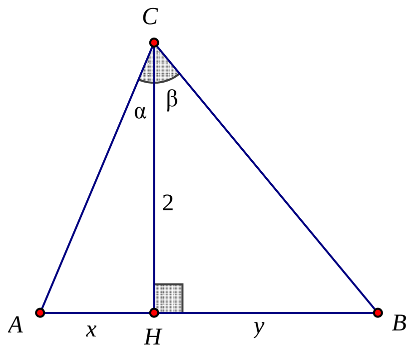
UMO 2007 – Problem 9: Bir ABC üçgeninde $|AB|=3$ ve C ye ait yüksekliğin uzunluğu 2 ise, diğer iki yükseklik uzunluklarının çarpımı en fazla kaç olabilir?

a) $\frac{144}{25}$ b) 5 c) $3\sqrt{2}$ d) 6 e) Hiçbiri

Çözüm (*L. Gökçe*)**:** ABC üçgeninin kenarları a, b, c ve yükseklikleri h_a, h_b, h_c olmak üzere $A(ABC)=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}=\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2}$ alan eşitliklerinden $a\cdot h_a=6$, $b\cdot h_b=6$ yazılır. Bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa $(ab)\cdot h_a\cdot h_b=36$ olur. $a\cdot b\cdot \sin C=6$ olduğundan

$$h_a\cdot h_b=6\cdot\sin C \quad \ldots (*)$$

elde edilir. (*) eşitliğinde $\sin C$ maksimum olduğunda $h_a\cdot h_b$ çarpımı da maksimum değerine ulaşacaktır. İlk akla gelen yaklaşımlardan biri ‘ $m(C)=90^o$ için $\sin C=1$ maksimum olur, bu nedenle cevap 6 dır’ şeklinde olabilir. Fakat bu yaklaşım maalesef doğru değildir, sırf bu nedenle bile çeldiriciliği yüksek bir sorudur. [AB] çaplı çemberi çizersek yarıçap 3/2 olduğundan C noktasının bu çemberin dışına düşer. Böylece C açısının dar olduğunu anlarız.

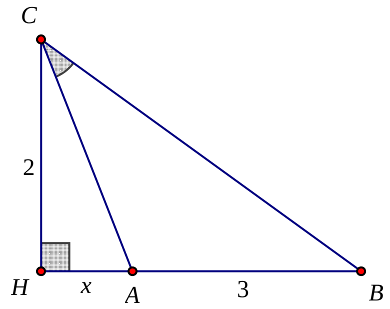


Şekil – 1

C den AB doğrusuna çizilen yükseklik ayağı H olsun. $|AH|=x$, $|BH|=y$ dersek Şekil – 1 e göre $x+y=3$ tür. $m(ACH)=\alpha$, $m(BCH)=\beta$ dersek $\sin(\alpha+\beta)$ nın maksimum değerini bulmalıyız. Bunun için $\tan(\alpha+\beta)$ nın maksimum değerini hesaplamak işimizi kolaylaştırabilir. Toplam formülünden $\tan(\alpha+\beta)=\frac{(x/2)+(y/2)}{1-(xy/4)}=\frac{6}{4-xy}$ yazabiliriz. $x+y=3$ toplamı sabit olduğundan aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğini kullanabiliriz. $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ olup $\tan(\alpha+\beta)\le\frac{24}{7}$ elde edilir. 7 – 24 – 25 dik üçgeninden dolayı $\sin(\alpha+\beta)\le\frac{24}{25}$ olup $h_a\cdot h_b\le 6\cdot\frac{24}{25}=\frac{144}{25}$ elde edilir.

O zaman bir an önce $\frac{144}{25}$ cevabın işaretleyelim diye düşünülebilir. Acele etmeyelim …

C den AB doğrusuna çizilen yükseklik ayağı H olsun dedik ama $H \in [AB]$ olmak zorunda değildi. Belki de Şekil – 2 deki gibi bir durum söz konusudur.



Şekil – 2

Bu durumda $\beta - \alpha$ nın en büyük olmasını istiyoruz. $|AH| = x$, $|BH| = y$ dersek $y - x = 3$ ve $x \geq 0$ olur. $\tan(\beta - \alpha) = \dfrac{(y/2) - (x/2)}{1 + (xy/4)} = \dfrac{12}{4 + xy}$ eşitliğinde $y = x + 3$ yazarsak $\tan(\beta - \alpha) = \dfrac{12}{x^2 + 3x + 4}$ olup $x = 0$ için en büyük değer elde edilir. $\tan(\beta - \alpha) = 3$ için $\sin(\beta - \alpha) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ olur. $h_a \cdot h_b \leq 6 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{18}{\sqrt{10}}$ elde edilir.

Son adımda $\dfrac{144}{25}$ ve $\dfrac{18}{\sqrt{10}}$ sayılarından hangisinin daha büyük olduğuna karar vermeliyiz. Aslında bu sayılar birbirine oldukça yakındır ve aralarındaki fark yaklaşık 0,06 kadardır. Biz $\dfrac{144}{25} > \dfrac{18}{\sqrt{10}}$ olduğunu söyleyerek çözümü sonlandıralım …