1. n kişiden oluşan herhangi bir grupta, doğum günü aynı olan en az iki kişi varsa, n en az kaçtır? (367)

Çözüm:
Olası doğum günleri (29 Şubat'ı saymayı unutmuyoruz) 366 tanedir. Bu durumda n güvercin, 366 güvercin yuvası var demektir. $\lceil \frac{n}{366} \rceil = 2$ denklemini sağlayan ilk sayı 367 dir.

2. 100 kişilik herhangi bir grupta aynı ayda doğan en fazla n kişi varsa, n en az kaç olabilir? (9)

Çözüm:
100 güvercini 12 güvercin yuvasına dağıtalım. En az $\lceil \frac{100}{12} \rceil = 9$ güvercin aynı yuvadadır.
Dağılım nasıl olursa olsun aynı ayda doğan en az 9 kişi bulunduğundan, aynı ayda doğanların sayısı $\{9, 10, 11, \ldots 100\}$ kümesinden biri olacaktır. Bunların en küçüğü 9 dur.

3. 20 soruluk bir testte cevaplamalar nasıl yapılırsa yapılsın, doğru sayıları aynı olan 6 öğrenci bulunuyorsa, bu teste katılan öğrenci sayısı en az kaçtır? (106)

Çözüm.
n öğrenciyi 21 olası (sıfırı saymayı unutmuyoruz) sonuca dağıtırsak $\lceil \frac{n}{21} \rceil = 6$ denklemini sağlayan en küçük n 106 olur.

4. 25 milyon telefon abonesi bulunan bir ülkede, telefon numaraları bölge kodundan sonra $NXX - XXXX$ $(N = [2 \ldots 9]\,,\; X = [0 \ldots 9])$ biçimindedir. Buna göre bu ülkede en az kaç bölge vardır? (4)

Çözüm:
Bir bölgede 8×10^6 olası telefon numarası var. 25 milyon telefon numarası arasından en az $\lceil \frac{25 \times 10^6}{8 \times 10^6} \rceil = 4$ tanesi aynıdır. Bu durumda en az 4 bölge gerekir.

5. $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2006\}$ kümesinin n elemanlı altkümelerinin hepsinde a , b yi bölecek şekilde a ve b gibi farklı iki eleman bulunuyorsa n en az kaç olabilir? (1004)

Çözüm:
S kümesini q tek sayı olmak şartıyla elemanları $q \cdot 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ olan kümelere ayıralım.

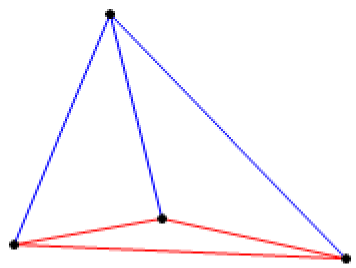
$\{1,2,4,8,\ldots,1024\}$
$\{3,6,12,\ldots,1536\}$
$\{5,10,20,\ldots,1280\}$
$\vdots$
$\{2003\}$
$\{2005\}$
Toplam 1003 ayrık küme vardır. 1004 tanesi seçildiği zaman aynı altkümeden iki eleman seçeceğiz . Bu durumda da aynı altkümedekiler birbirini böleceği için istediğimiz durum sağlanacak. Örnek:
$\{1004, 1005, 1006,\ldots,2006\}$ kümesinde hiçbir eleman diğerini bölmez. 1 eleman daha eklersek istenen durum sağlanacak.

6. Boyları birbirinden farklı 50 öğrenci soldan sağa doğru rasgele sıralanmışlardır. Sıralama nasıl olursa olsun, sıranın solundan ya da sağından başlayarak boyları artan bir dizi oluşturacak şekilde n kişi seçilebiliyorsa, n en çok kaç olabilir? (8)

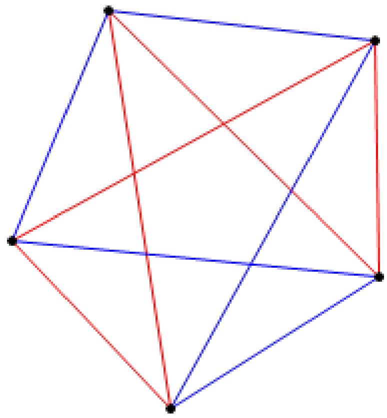
Çözüm:
i ninci sıradaki öğrenci için kendisine kadarki en uzun artan ya da azalan (sağdan artan soldan azalan demektir) boy sırasını (a_i, b_i) ile gösterelim. $i<j$ farklı öğrencileri için i ye kadar artan a_i kişi varsa j nin boyu i den uzunsa, j ye kadar artan en az a_i+1 kişi vardır. $i<j$ farklı öğrencileri için i ye kadar azalan b_i kişi varsa j nin boyu i den kısaysa, j ye kadar azalan en az b_i+1 kişi vardır. Bu durumda hiçbir (a_i, b_i) sıralı ikilisi eşit olamaz. Aradığımız sayı n ise olası n^2 tane çiftin hiç birinin çakışmaması gerekir. Bu durumda $n^2 \geq 50$. Buradan $n=8$ çıkar. Sorudaki "en çok" ifadesi dizi seçimi yapılırken artan sıralamayı yarıda kesmemek, yani en uzun diziyi bulmak için koyulmuş. Mesela $\{1,2,3,\ldots 50\}$ dizisinden 1 elemanlı artan bir dizi oluşturulabilineceği gibi 50 elemanlı artan dizi de oluşturulabilir.
Örnek durum:
$\{7,6,,\ldots,14,13,,\ldots,21,20,\ldots,28,27,\ldots,35,34,\ldots 42,41,\ldots,49,48,\ldots,50\}$ kümesi için artan sırada en fazla 8 kişi seçebiliriz.

7. Bir düzgün n -genin kenarları ve köşegenleri kırmızı ya da maviye boyanıyor. Boyama nasıl yapılırsa yapılsın, n -genin köşelerinin oluşturduğu tek renkli bir üçgen varsa, n en az kaç olabilir? (6)

Çözüm:
Tek renkli üçgen oluşturmamaya çalışalım.
Bir köşeden $n-1$ doğru parçası çıkar. Bunlardan $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ tanesi aynı renklidir. Bu renk mavi olsun. Bunların uçlarını ikişerli birleştirdiğimiz de oluşan doğru parçalarının hiçbiri mavi değildir. Bu durumda hepsi kırmızıdır. Üç nokta bir üçgen belirteceğinden en az $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = 3$ nokta varsa bu kırmızı renkli doğru parçaları bir üçgen belirtecek. Bunu sağlayan en küçük sayı $n=6$ dır. Biraz daha açık olmak gerekirse altıgenin bir köşesinden 5 doğru parçası çıkar. Bunların üçü aynı renktedir. Bu renk mavi olsun. Bu durumda bu üçünün uçlarını birleştirirsek oluşan üç doğru parçasından biri maviyse tek renkli üçgenimizi bulduk demektir. Değilse hepsi kırmızıdır. Bu üçü tek renkli üçgen oluşturur.



Nokta sayısı 5 olduğunda ise şekildeki gibi bir aykırı durum bulabiliyoruz.



Demek ki en küçük çokgen 6 kenarlı olmalı.

8. $S=\{1,2,3,\ldots,2006\}$ kümesinin n elemanlı her altkümesi ardışık iki sayı bulunduruyorsa, n en az kaç olabilir? (1004)

Çözüm:

1003 altküme arasından $\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{2005,2006\}$ 1004 tane seçilirse en az $[\frac{1004}{1003}]=2$ tanesi iki kez seçilir. Bu durumda seçilen sayılar ardışık olur. Örnek durum 1003 elemanlı $\{1,3,5,\ldots,2005\}$ kümesi ardışık sayı içermez. Bu kümeye yeni bir sayı ekleyince ardışık iki sayı bulunabilir.

9. $2\times n$ satranç tahtasındaki birim karelerin köşeleri kırmızı ya da maviye boyanıyor. Boyama işlemi nasıl yapılırsa yapılsın, köşeleri aynı renkten oluşan, kenarları birim karelerin kenarlarına paralel olan en az bir dikdörtgen olmasını garanti eden en küçük n sayısı kaçtır? (6)

Çözüm:

İlk önce yanlış bir çözüm yapacağız.
Sütunlar üzerinde 3 nokta var. Her bir nokta kırmızı ya da maviye boyanacağı için toplam 8 olası durum var. 9 tane sütun varsa en az ikisi aynı renk düzeninde boyanmış olacak. 3 noktadan ikisi aynı renkli olacağından, aynı renk düzenine sahip iki sütunun aynı renkte olan noktalarını birleştiren dikdörtgen tek renkli dikdörtgen olur.
9 sütun için kesinlikle tek renkli dikdörtgen bulunur. Peki, 8 , ya 7 sütun için de böyle bir durum söz konusu ise.
Sorunun doğru çözümü:

Her sütunda iki nokta aynı renkte olacak. Bu iki nokta $C_2^3=3$ seçilebilir. Bunlar ya kırmızı ya da mavi olacak. Bu durumda $C_2^3\times2=6$ değişik şekilde bu noktalar seçilebilir. 7 tane sütun varsa en az ikisinde aynı renkteki noktalar, sütunlarında aynı konumda bulunacak. Bu da tek renkli dikdörtgeni oluşturacak. O halde tahtanın boyutu 2×6 olmalı (Boyut 6 ise sütun sayısı 7 olur). Daha azı için tek renkli dikdörtgen bulunmayabilir.

KKMMMK
KMKMKM
MKKKMM

10. $3\times n$ satranç tahtasındaki birim karelerin köşeleri sarı, kırmızı ya da maviye boyanıyor. Boyama işlemi nasıl yapılırsa yapılsın, köşeleri aynı renkten oluşan, kenarları birim karelerin kenarlarına paralel olan en az bir dikdörtgen olmasını garanti eden en küçük n sayısı kaçtır? (18)

Çözüm:

4 noktadan $[\frac{4}{2}]=2$ si aynı renklidir. 4 noktadan 2 si $C_2^4=6$ şekilde seçilir. Her biri için üç boyama şekli olduğundan toplam 18 şekilde boyama yapılabilir. 19 sütun olursa en az iki sütunda aynı renkli noktalar aynı renkte olacak. O halde tahtanın boyutu 2×18 dir.

11. Birbirinden farklı herhangi n tamsayı arasından, toplamları veya farkları 2007 ile bölünen iki farklı tamsayı bulunabiliyorsa, n en az kaç olabilir? (1005)

Çözüm:

2007 ile bölündüğünde kalanlar kümesi $\{0,1,2,\ldots,1003,-1003,-1002,\ldots-1\}$ olur. Sayıların farkları bölünüyorsa kalanlar eşit, toplamı bölünüyorsa kalanlar toplamaya göre $\mod 2007$ de birbirinin tersi olmalı. Sayılar eşit olsun istemiyoruz. Birbirinin tersi olmasını da istemiyoruz. Bu durumda $\{0,1,2,\ldots,1003\}$ kümesine bu kümeden bir eleman eklersek farkları, $\{-1-,2,\ldots,-1003\}$ kümesinden bir eleman eklersek toplamları 2007 ile bölüneceğinden, $1004+1=1005$ elemanlı bir kümede kesinlikle toplamları veya farkı bölünen iki sayı bulunacak.

12. $S=\{1,2,3,\ldots,2006\}$ kümesinin K altkümesinin herhangi iki farkı elemanı a ve b için $a-b$ farkı $a+b$ toplamını tam bölmüyorsa K altkümesi en çok kaç elemanlı olabilir? (669)

Çözüm:

$\{1,2,3\},\{4,5,6\},\ldots,\{2002,2003,2004\},\{2005,2006\}$

670 eleman seçersek $[\frac{670}{669}]=2$ tanesi aynı kümeden olacak.

Bu durumda ardışık elemanların farkı (1) kesinlikle toplamını böler. Değilse ardışık olmayan elemanlar teklik çiftlik açısından aynı olacağından toplamları 2 ile yani farkları ile bölünür. İstenen özellikteki küme $K=\{2,5,8,\ldots2006\}$ şeklindedir. Farkları 3 ile bölünür. Toplamları bölünmez bu durumda toplamları farkları ile bölünmez.

13. $S=\{1,2,3,\ldots,1000\}$ kümesinin hiçbir elemanı diğer elemanlardan birinin 3 katı olmayacak şekilde en fazla kaç elemanlı altkümesi vardır? (750)

Çözüm:

3 ile bölünenleri çıkaralım. $1000-\lfloor\frac{1000}{3}\rfloor=667$. Hiçbir eleman 3 ile bölünmediğinden hiçbiri bir diğerinin 3 katı olamaz. Bu kümenin bir elemanı 7. 21 i bu kümeye dahil edemeyiz Ama 63 ü edebiliriz. 63 ün özelliği hiçbir elemanın 3 katı olmaması; fakat bir elemanın 9 katı olması. 63 ü kümeye eklersek 189 u ekleyemeyiz. Çünkü 189, 63 ün 3 katı. 189 un özelliği ise 27 ile bölünmesi. Benzer özellikteki sayıları da kümeye eklersek $\lfloor\frac{1000}{9}\rfloor-\lfloor\frac{1000}{27}\rfloor=74$. Benzer şekilde $\lfloor\frac{1000}{81}\rfloor-\lfloor\frac{1000}{243}\rfloor=8$. Bir de 729 u ekleriz. Toplam $667+74+8+1=750$ sayı elde etmiş olduk.

14. Dünya üzerindeki 100 ülke kendi arasında, her biri en fazla 50 ülkeden oluşan birlikler kuruyor. Herhangi iki ülkenin birlikte üye olduğu bir ülke varsa, kurulmasını gereken birlik sayısı en az kaçtır? (6)

Çözüm:

Bir ülke aynı anda 49 ülkeyle aynı birlikte yer alabilir. Bu durumda her ülke en az $\lceil\frac{100}{49}\rceil=3$ birlikte yer almalı. Birliğe katılan her ülkeye katılım belgesi verelim. Toplam en az 300 katılım belgesi verilir. Her birlik için en fazla 50 katılım belgesi dağıtıldığı için en az 6 farklı birlik vardır. Cevap en az 6 olacak. Peki 6 birlikle bu bahsedilen dağılım gerçekleştirilebilinir mi? Ülkeleri 25 erli 4 gruba ayıralım. Bu grupları ikişerli şekilde birleştirelim. Birleştirdiğimiz her grup 50 kişiden oluşacak. Bu 50 kişilik gruba birlik diyelim. $C_2^4=6$ farklı birlik olacaktır. Her grup diğer bir grupla kesinlikle bir birlikte yer almıştır. Bu durumda her ülke diğer ülkelerden herhangi biriyle birlikte bir birliğe üyedir. Yani 6 birlik böyle bir dağılım için yeterli.

$G_1=x_1x_2\ldots x_{25}, G_2=x_{26}x_{27}\ldots x_{50}, G_{31}=x_{51}x_{52}\ldots x_{75}, G_4=x_{76}x_{77}\ldots x_{100}$
$B_1=G_1G_2, B_2=G_1G_3, B_3=G_1G_4, B_4=G_2G_3, B_5=G_2G_4, B_6=G_3G_4$

15. Bir kasanın beş kilidine ait anahtarlar çoğaltılarak sekiz kişiye, bu sekiz kişiden herhangi beşinin birlikte kasayı açmalarını olanaklı kılacak şekilde dağıtılacaktır. Anahtarların toplam sayısı en az ne olmalıdır? (20)

Çözüm:

Anahtarlardan her biri en az 4 kişiye dağıtılmalı. Aksi takdirde 5 kişi de anahtarlardan biri olmayacak. Bu durumda kasayı açamayacaklar. Bu durumda en az $5\times4=20$ anahtar olmalı.

Aşağıda 20 anahtarla kasayı açmayı olanaklı kılacak bir dağılımı yer almakta.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	*	*	*	*				
B	*	*	*	*				
C	*	*	*	*				
D	*	*	*	*				
E	*	*	*	*				

16. 20 kişilik bir toplulukta, 10 kişi İngilizce, 10 kişi Almanca, 10 kişi de Fransızca biliyor. Bu topluluğun 3 kişilik bir altkümesinde İngilizce bilen en az bir kişi, Almanca bilen en az bir kişi ve Fransızca bilen en az bir kişi varsa, bu altkümeye komite diyoruz. Bu toplulukta en çok kaç farklı komite olabilir? (1020)

Çözüm:
3 elemanlı altküme sayısı $C_3^{20}=1140$ tır. İngilizce bilmeyen $20-10=10$ kişi, İngilizce bilmeyen 3 elemanlı altküme sayısı $C_3^{10}=120$. Benzer şekilde Almanca bilmeyenlerin oluşturduğu $C_3^{10}=120$, Fransızca bilmeyenlerin oluşturduğu $C_3^{10}=120$ tane komite olmayan altküme vardır. 1140 sayısından bunları çıkaracağız. $1140-3\cdot120=780$ istediğimiz sayı olmayacak. Çünkü Fransızca bilmeyenler, İngilizce bilmeyenler Almanca bilmeyenler aynı kişiler olabilir. Bu durumda $1140-120=1020$ istediğimiz sayı olur. Bu durumda toplulukta yabancı dil bilen her kişi 3 yabancı dili de bildiği takdirde 10 kişi hiçbir yabancı dili bilmeyecektir. Bu durumda komite olmayan altküme sayısı 120 olacak. Komite sayısı da 1020 olacaktır.

17. $S=\{1,2,3,\ldots,32\}$ olmak üzere; S nin hangi k elemanlı A altkümesini alırsak alalım, A kümesinde a , b yi; b de c yi bölecek şekilde farklı a , b , c sayılarının bulunmasını sağlayan en küçük k değeri nedir? (25)

Çözüm:
24 elemanlı $\{9,10,11,12,\ldots,32\}$ kümesinde hiçbir eleman verilen şartı sağlamaz. 1 eleman daha eklersek verilen şart sağlanır.

18. 2002 koltuk kapasiteli bir salona en az kaç kişi gelsin ki; dizilim nasıl olursa olsun, ardışık numaralı üç koltuk da dolu olsun? (1336)

Çözüm:
$\{1,2,3\},\{4,5,6\},\ldots,\{1999,2000,2001\},\{2002\}$ kümelerinden sonuncusu hariç her birinden en fazla iki eleman seçilebilir. $667\times2+1=1335$ eleman verilen şartı sağlamayabilir. 1336 verilen şartı sağlar.
Örnek:
3 e bölünenleri çıkarırsak 1335 elemanlı $\{1,2,4,5,7,8,\ldots,1999,2000,2002\}$ kümesini elde ederiz. 3 e bölünen bir sayı ekledik mi ardışık üç sayı bulunur.

19. Uzayda en az kaç farklı kafes noktası alınsın ki; bu noktaların ikişerli birleştirilmeleri sonucu oluşan doğru parçalarının orta nokta noktalarından en az biri kafes noktası olsun? (Kafes noktası : koordinatları tamsayı olan nokta) (9)

Çözüm:
(x, y, z) teklik çiftlik açısından 8 değişik biçim alabilir. 9 nokta varsa en az biri teklik çiftlik açısından aynı olmalı. $T+T=Ç$ ve $Ç+Ç=Ç$ olduğundan bu iki noktanın ortası kafes noktası olacaktır.

20. $S=\{1,2,3,\ldots,280\}$ kümesinin n elemanlı her altkümesi, herhangi ikisi aralarında asal olan en az beş tamsayı içeriyorsa, n en az kaç olmalıdır? (217)

Çözüm:
2 veya 3 veya 5 veya 7 ile bölünen sayı kümesini bulalım. İçerme dışarma ilkesinden
$A_2=140,\ A_3=93,\ A_5=56,\ A_7=40$
$A_{2,3}=46,\ A_{2,5}=28,\ A_{2,7}=20,\ A_{3,5}=18,\ A_{3,7}=13,\ A_{5,7}=8$
$A_{2,3,5}=9,\ A_{2,3,7}=6,\ A_{2,5,7}=4,\ A_{3,5,7}=2$
$A_{2,3,5,7}=1$
$A=A_2+A_3+A_5+A_7-A_{2,3}-A_{2,5}-A_{2,7}-A_{3,5}-A_{3,7}-A_{5,7}+A_{2,3,5}+A_{2,3,7}+A_{2,5,7}+A_{3,5,7}-A_{2,3,5,7}$
$A=216$ çıkar. Bu kümenin elemanları arasından seçilen 5 tam sayıdan 2 si 2,3,5,7 sayılarından birine bölüneceğinden $n>216$ olmalı. T 217 elemanlı mümkün olduğunca verilen şartı sağlamayan bir küme olsun.
1 sayısı aralarında asallığı sağladığı için 1 sayısını da asal kabul edelim. 280 den küçük 60 tane asal sayı var (1 dahil). Bu durumda 280 den küçük (eşit) bileşik sayılar kümesi 220 elemanlı olur. T de 5 asal sayı olamaz. Aksi halde 5 i aralarında asal olur. T de en fazla 4 asal sayı olacağından, T nin en az 213 elemanı bileşik sayılar kümesindendir. Bu durumda T en fazla 7 tane bileşik sayıyı içermez. T nin içermediği bu sayılar
$M_1=\{2\times23,\ 3\times19,\ 5\times17,\ 7\times13,\ 11\times11\}$
$M_2=\{2\times29,\ 3\times23,\ 5\times19,\ 7\times17,\ 11\times13\}$
$M_3=\{2\times31,\ 3\times29,\ 5\times23,\ 7\times19,\ 11\times17\}$
$M_4=\{2\times37,\ 3\times31,\ 5\times29,\ 7\times23,\ 11\times19\}$
$M_5=\{2\times41,\ 3\times37,\ 5\times31,\ 7\times29,\ 11\times23\}$
$M_6=\{2\times43,\ 3\times41,\ 5\times37,\ 7\times31,\ 13\times17\}$
$M_7=\{2\times49,\ 3\times43,\ 5\times41,\ 7\times37,\ 13\times19\}$
$M_8=\{2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 13^2\}$
kümelerinden en fazla 7 tanesinin elemanıdır. Bu durumda en az 1 küme T tarafından tamamen içerilir. Bu durumda T aralarında asal 5 sayı bulundurur.

21. Uzayda herhangi dördü düzlemsel olmayan 9 nokta veriliyor. Bu noktaların oluşturduğu 36 doğru parçasından bazıları kırmızı ya da maviye boyanıyor. Doğru parçalarının seçimi ve boyamaları nasıl yapılırsa yapılsın, üç köşesi de bu noktalardan oluşan tek renkli üçgen bulunuyorsa, boyanması gereken doğru parçası sayısı en az kaç olmalıdır? (33)

Çözüm:

22. Yedişer kişilik Türk ve Alman satranç takımları arasında aşağıdaki gibi bir karşılaşma yapılıyor.

- Türk takımının birinci oyuncusu ile Alman takımının birinci oyuncusu karşılaşır. Kaybeden oyuncu elenir, kazanan oyuncu rakip takımın sıradaki oyuncusu ile karşılaşır. Son oyuncusu yenilen takım karşılaşmayı kaybeder.

Buna göre karşılaşma kaç farklı şekilde Türk takımının galibiyeti ile biter? (1716)

Çözüm:
Yenilen oyuncuyu sırasıyla kenara alalım. Oyunu kazanmayı sağlayan oyuncuyu, varsa onun takımındaki hiç maç yapmamış oyuncuları da sıraya ekleyelim. Örnek bir dizilim $AAAATTATATATTT$ olsun. Türklerin birinci oyuncusu 4 Alman'ı yenmiş. Almanların beşinci oyuncusu Türklerin birinci ve ikinci oyuncularını yenmiş. Türklerin üçüncü oyuncusu, Almanların beşinci oyuncusunu yenmiş, altıncı oyuncusuna yenilmiş. Türklerin dördüncü oyuncusu, Almanların altıncı oyuncusunu yenmiş, yedinci oyuncusuna yenilmiş. Türklerin beşinci oyuncusu Almanların son oyuncusunu yenmiş ve oyunu Türk takımına kazandırmış. Kalan iki oyuncuyla birlikte sıraya katılmış. Bu şekilde sonda T olan tüm dağılımlar Türk takımının kazandığını gösterir. O halde kalan 6 T , 7 A toplam $\frac{13!}{7!\cdot 6!}=1716$ şekilde dağılabilir.

23. Ankara'da sıcaklığın $18°$ olma olasılığı $1/4$, İstanbul'da sıcaklığın $18°$ olma olasılığı $1/6$ dır. Ankara ve İstanbul kentlerinden sıcak olanın sıcaklığının $18°$ olma olasılığı $1/3$ ise, Ankara ve İstanbul kentlerinden soğuk olanın sıcaklığının $18°$ olma olasılığı nedir? (0)

Çözüm:
$P(X=18°)=\frac{1}{4}$, $P(Y=18°)=\frac{1}{6}$, $P(X<18°,Y=18°)+P(X=18°,Y<18°)=\frac{1}{3}$,
$P(X>18°,Y=18°)+P(X=18°,Y>18°)=x$ olsun.
$P(X<18°)\cdot\frac{1}{6}+P(Y<18°)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ ve $P(X>18°)\cdot\frac{1}{6}+P(Y>18°)\cdot\frac{1}{4}=x$ yi taraf tarafa toplarsak $\left(P(X<18°)+P(X>18°)\right)\cdot\frac{1}{6}+\left(P(Y<18°)+P(Y>18°)\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+x$ elde edilir.
$P(X<18°)+P(X>18°)=1-P(X=18°)=\frac{3}{4}$ ve
$P(Y<18°)+P(Y>18°)=1-P(Y=18°)=\frac{5}{6}$ olduğundan $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+x\Rightarrow x=0$ çıkar.

24. Her $i=1,2,\ldots,10$ için $a_i\in Z^+$ olmak üzere; $a_1+a_2+\ldots+a_{10}\leq 2000$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı $(a_1,a_2,\ldots,a_{10})$ sıralı onlusu vardır? (C_{10}^{2000})

Çözüm:
Pozitif tam sayılarda çözüm istendiğinden herkese birer tane dağıtalım.
$a_1+a_2+\ldots+a_{10}\leq 1990$ olur. a_{11} sayısı sol tarafı 1990 a tamamlayan bir sayı olsun.
$0\leq a_{11}\leq 1990$ aralığında olacağından diğer sayılardan farksızdır.
$a_1+a_2+\ldots+a_{10}+a_{11}=1990$ denkleminin çözümlerinin sayısı $C_{(11-1)}^{(1990+11-1)}=C_{10}^{2000}$ dur.

25. Bir sekreter, beş değişik kişiye yazılmış beş mektubu, üstlerine daha önce bu kişilerin adresleri yazılmış olan beş zarfa telaş içinde rasgele koyar. Hiç kimsenin kendisine ait olan mektubu almama olasılığı nedir? ($\frac{11}{30}$)

Çözüm:

$1 \le i \le 5$ olmak üzere; $P(E_i) = \frac{(5-1)!}{5!} = \frac{1}{5}$ ile i ninci kişinin kendisine ait mektubu almış olma olasılığını gösterelim. Farklı i, j ler için $P(E_i E_j) = \frac{(5-2)!}{5!} = \frac{1}{20}$. Farklı i, j, k lar için $P(E_i E_j E_k) = \frac{(5-3)!}{5!} = \frac{1}{60}$. Farklı i, j, k, l ler için $P(E_i E_j E_k E_l) = \frac{(5-4)!}{5!} = \frac{1}{120}$.

Beşinin de kendisine ait mektubu alma olasılığı $\frac{(5-5)!}{5!} = \frac{1}{120}$ dir. İçerme dışarma ilkesinden herhangi birinin kendisine ait mektubu almış olma olasılığı

$C_1^5 \cdot \frac{1}{5} - C_2^5 \cdot \frac{1}{20} + C_3^5 \cdot \frac{1}{60} - C_4^5 \cdot \frac{1}{120} + C_5^5 \cdot \frac{1}{120} = \frac{19}{30}$.

Bizden istenen $1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$ dur.

Sorunun daha genel hali ise n mektup, n zarfla

$1 - \left(C_1^n \cdot \frac{(n-1)!}{n!} - C_2^n \cdot \frac{(n-2)!}{n!} + \ldots + (-1)^{k+1} C_n^n \cdot \frac{0!}{n!} \right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{n!}$ şeklinde ifade edilir.

26. Ardışık köşeye sahip iki kare komşu kareler olmak üzere; yandaki tahtanın boş karelerine istediğimiz sırayla, her koyduğumuz beyaz taş komşu karelerdeki taşları beyazsa siyaha, siyahsa beyaza çevirmek şartıyla, beyaz taşlar koyacağız. Tüm kareler dolduğunda taşların hepsinin beyaz olduğu kaç farklı yerleştirme yapılabilir? (16)

B	S	S	S	B

Çözüm:

2	3	3	3	2

Hangi sırada yerleştirme yapılırsa yapılsın. Beyaz taşların komşu sayısı 2, siyahların 3 olduğu için, 2 hamle sonrası beyazlar yine beyaza, 3 hamle sonrası siyahlar beyaza çevrilir. O halde üst sıradaki tüm taşlar, kareler dolduğunda beyaza dönüşür.

Alt sıradaki kareleri soldan sağa doğru numaralandıralım. 1 ve 5 numaranın 1 tane komşusu olduğu için ilk sırada yerleştirilemezler. Aksi takdirde komşu kareye taş konduğunda, bu karelerdeki taşlar siyaha dönüşür. İlk taş 3 numaralı kareye konursa, 4 ve 5 in sadece bir komşusu olacağı için bunlardan önce yerleştirilen siyaha çevrilecek. Bu durumda ilk taş 3 numaralı kareye de konamaz.

İlk taşı 2 numaraya yerleştirelim. 1 numaraya istediğimiz sırada yerleştirme yapabiliriz.

3 veya 5 ten biri 4 ten önce konursa, bu taş siyaha çevrileceğinden 4 bunlardan önce konmalı. Bu durumda 3 veya 5 i 4 ten sonra olmak şartıyla hangi sırada koyarsak koyalım, tüm taşlar beyaza dönüşecektir. 1 numaralı için 4 değişik konum. 3 ve 5 için 2 farklı konum bulunur. Bu durumda 2 den başlayarak $4 \times 2 = 8$ değişik yerleştirme yapılabilir. 4 ten başlarsak simetrik durumlar elde edeceğimiz için toplam $2 \times 8 = 16$ farklı yerleştirme yapılabilir.

Tüm durumlar:

```
2 1 4 3 5   2 1 4 5 3
2 4 1 3 5   2 4 1 5 3
2 4 3 1 5   2 4 3 5 1
2 4 5 1 3   2 4 5 3 1
4 2 1 3 5   4 2 1 5 3
4 2 3 1 5   4 2 3 5 1
4 2 5 1 3   4 2 5 3 1
4 5 2 1 3   4 5 2 3 1
```

27. Yuvarlak bir masa etrafındaki 1 den 10 kadar sıralı koltuklara oturan 10 kişiden her biri bir sayı tutup, tuttuğu sayıyı solundaki ve sağındaki arkadaşına söylüyor. Daha sonra her biri solundaki ve sağındaki arkadaşının kendisine söylediği sayıların aritmetik ortalamasını hesaplayıp diğer arkadaşlarına duyuruyor. Masa etrafındaki her kişi oturduğu koltuk numarasını anons ettiğine göre 8 numaralı koltukta oturan hangi sayıyı tutmuştur? (13)

Çözüm:

x_i ile koltuk numarası i olan kişinin tuttuğu sayıyı gösterelim.

$$x_2+x_{10}=2$$
$$x_2+x_4=6$$
$$x_4+x_6=10$$
$$x_6+x_8=14$$
$$x_8+x_{10}=18$$

Olacağından taraf tarafa toplarsak $x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}=25$ elde ederiz. $x_2+x_4=6$ ve $x_8+x_{10}=18$ olduğu için $x_6=1$ ve $x_8=13$ çıkar.

28. Her seferinde 1 ya da 2 basamak çıkan bir çocuk 10 basamaklı bir merdiveni kaç farklı şekilde çıkar? (89)

Çözüm:

a_n ile n basamaklı merdivene çıkma şekillerinin sayısını gösterelim. $(n-2)$. basamağa a_{n-2} şekilde gelinebilir. $(n-1)$. basamağa a_{n-1} şekilde gelinebilir. Bu durumda $a_n=1\cdot a_{n-2}+1\cdot a_{n-1}$ olacaktır. Bu durumda $\{a_n\}$ dizisi $1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots$ şeklinde olacaktır.

29. Düzlemde herhangi ikisi 2 farklı noktada kesişen, herhangi üçünün ortak noktası bulunmayan 10 çember, düzlemi kaç parçaya böler? (92)

Çözüm:

a_n ile n çemberin düzlemi böldüğü parça sayısını gösterelim. Daha önceki $n-1$ çember n ninci çemberi $2(n-1)$ yaya böleceğinden (her çember 2 yaya) $a_1=2$ ve $a_n=a_{n-1}+2(n-1)$ olur. $a_{10}-a_1=\sum_{n=2}^{10}(a_n-a_{n-1})=\sum_{n=2}^{10}2(n-1)=90\Rightarrow a_{10}=92$ çıkar.

30. $1,2,3,\ldots,n$ sayıları k ($1\le k\le n$) tam sayısı ilk sırada değilse, $k+1$ veya $k-1$ sayısı k sayısından önce gelmek şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabilir? (2^{n-1})

Çözüm:
Birinciden sonraki her sayı kendisinden önce gelenlerin en büyüğünden 1 fazla ya da en küçüğünden 1 eksik olmalı. Bu durumda istenen dizilim 1 ya da n ile biter. $A_1=1$, $A_2=2$, $A_n=2A_{n-1}$ olacağından $A_n=2^{n-1}$ çıkar.

31. Boyları $1,2,\dots,12$ olan 12 çubuk arasından 3 çubuk, bir üçgen belirtmek şartıyla kaç farklı biçimde seçilebilir? (95)

Çözüm:

32. $ABCD$ tabanlı $VABCD$ piramidi ortak kenara sahip yüzler farklı renkte olmak koşuluyla, farklı renkteki 5 boyayla kaç farklı biçimde boyanabilir? (420)

Çözüm:

33. Düzlemde n farklı nokta ve sekiz farklı çember veriliyor. Birinci çember bu noktalardan birinden, ikinci çember bu noktalardan ikisinden, benzer şekilde a. çember bu noktalardan a tanesinden geçiyorsa, n en az kaç olabilir? (15)

Çözüm:
İlk önce çemberleri $C_8, C_7, \dots, C_1$ sırasında çizdiğimizi daha sonra da noktaları seçtiğimizi kabul edelim. C_8 i çizdikten sonra üzerinde 8 nokta alalım. C_7 ile C_8 en fazla iki noktada kesişeceğinden, C_7 üzerindeki 7 noktadan en fazla 2 si önceki 8 noktaya ait olabilir. Bu durumda en az 5 yeni nokta almamız gerekir. C_6 üzerindeki 6 noktadan en çok 2 si C_8 üzerinde, en çok 2 si de C_7 üzerinde olabileceğinden en az $6-2-2=2$ yeni nokta almamız gerekecek. Toplam $8+5+2=15$ nokta aldık. Bunların 6 tanesi C_8, C_7, C_6 in ikişerli kesişimleri, 9 undan 4 ü sadece C_8 üzerinde, 3 ü sadece C_7 üzerinde, 2 si sadece C_6 üzerinde yer almakta. C_5 5 noktadan, C_4 4 noktadan geçeceği için bu ikisi bahsedilen 9 noktadan geçecek şekilde seçilebilir. Aynı çember üzerinde yer almayan 3 nokta ile C_3 ü, 2 nokta ile C_2 yi, kalan noktalardan herhangi biri ile C_1 i çizebiliriz.

34. S, a ve b harflerinden oluşan bir kelime olsun. Her adımda aynı anda S deki bütün a ların sağına bir b ve bütün b lerin sağına bir a yazarak yeni kelimeler elde ediyoruz. Örneğin $S=baab$ kelimesi bir adım sonra $S'=baababba$ oluyor. $S=a$ kelimesinin 10 adım sonraki halinde kaç tane bb vardır? (171)

Çözüm:
n adım sonrası oluşan bb lerin sayısını P_n ile, ab lerin sayısını Q_n ile gösterelim. Bu durumda $P_n=Q_{n-1}$. Q_{n-1} ise $(n-2)$. adımdaki bb lerin sayısı ile a ların sayısının toplamına eşittir. $(n-2)$. adımda 2^{n-2} harf olacağından bunların yarısı yani 2^{n-3} tanesi a dır. Bu durumda $P_n=Q_{n-1}=2^{n-3}+P_{n-2}$ olur. $P_{10}=2^7+2^5+2^3+2^1+P_2$ ve $P_2=1$ olduğu için $P_{10}=171$.

35. 12 farklı kadın soluna kızını, sağına da kız kardeşini alarak 12 fotoğraf çektiriyor. Fotoğraflarda en az kaç farklı kadın yer almıştır? (19)

Çözüm:

36. Bir düzgün dörtyüzlü her köşesi ve yüzü mavi ya da kırmızıya boyanmak şartıyla kaç farklı biçimde boyanabilir? (36)

Çözüm:
Mavi köşelerin sayısı x, mavi yüzlerin sayısı y olsun. $x=0$ ise yüzleri 5 farklı şekilde boyarız ($y=0,1,2,3,4$ düzgün dörtyüzlüde her yüz diğer yüzle komşu olduğundan bu boyamalar tek şekilde yapılabilir). $x=1$ ise mavi köşenin karşısındaki yüzü 2 şekilde, kalanları 0,1,2 ya da 3 tanesi mavi olacak şekilde boyarız. Yani bu durumda toplam $2\times4=8$ yol vardır. $x=2$ ise mavi köşeleri birleştiren kenara "ana kenar" diyelim. Ana kenarı taşıyan yüzlere de ana yüz diyelim. Ana yüzler 2K, 2M, 1K1M olmak üzere 3 farklı şekilde boyanabilir. Baştaki 2 durum için diğerleri 3 farklı şekilde, kalan durum için de yüzlerin rengini ters çevirme yeni bir durum oluşturacağı için 4 farklı şekilde boyama yapılır. Yani $3+3+4=10$ farklı yol vardır. Simetriden dolayı $x=3$ için 8, $x=4$ için 5 durum olacağından, toplam $5+8+10+8+5=36$ farklı boyama vardır.

37. 15 öğrencinin katıldığı bir yaz kursunda her gün 3 öğrenci sınıfı temizlemek için nöbetçi olarak seçiliyor. Kurs sona erdiğinde her öğrenci çiftinin birlikte nöbetçi olduğu tam olarak bir gün varsa, kurs kaç gün sürmüştür? (35)

Çözüm:
Her gün $C_2^3=3$ öğrenci çifti nöbetçi oluyor. Toplam $C_2^{15}=105$ öğrenci çifti olduğu için kurs $105\div3=35$ gün sürmüştür.

38. n pozitif tam sayısının rakamları ters çevrildiğinde oluşan sayı n den büyükse n sayısına artan bir sayı diyeceğiz. Örneğin 2003 sayısı ters çevrildiğinde 3002 elde edildiği için, 2003 sayısı artandır. Dört basamaklı kaç artan sayı vardır? (4005)

Çözüm:
Artan sayılar 0 ile bitemez. Bu durumda $9\times10\times10\times9=8100$ sayı vardır. Bunların 9×10 tanesi $ABBA$ şeklindedir. Kalan $8100-90=8010$ sayının yarısı $\frac{8010}{2}=4005$ artandır.

39. 201 kenarlı düzgün çokgenin köşelerini birleştirerek üçgenler elde ediyoruz. Bu üçgenlerden kaçı çokgenin merkezini içinde barındırır? (338350)

Çözüm:
A köşesini sabit tutarak A dan geçen çapı çizelim. $P_1, P_2, \dots, P_{100}$ noktaları bu çapın üstünde $Q_1, Q_2, \dots, Q_{100}$ noktaları bu çapın altında $AQ_i = AP_i$ olacak şekilde adlandırılsın. Çokgenin merkezini içeren üçgen $i+j>100$ olmak üzere AP_iQ_j şeklinde olmalı. Bu

durumda $1+2+3+\ldots+100=5050$ üçgen vardır. Her köşe için 5050 üçgen olacağından $5050\times 201=1015050$ üçgen olur. Bunların her biri 3 kez sayıldığından cevap $1015050\div 3=338350$ olur.

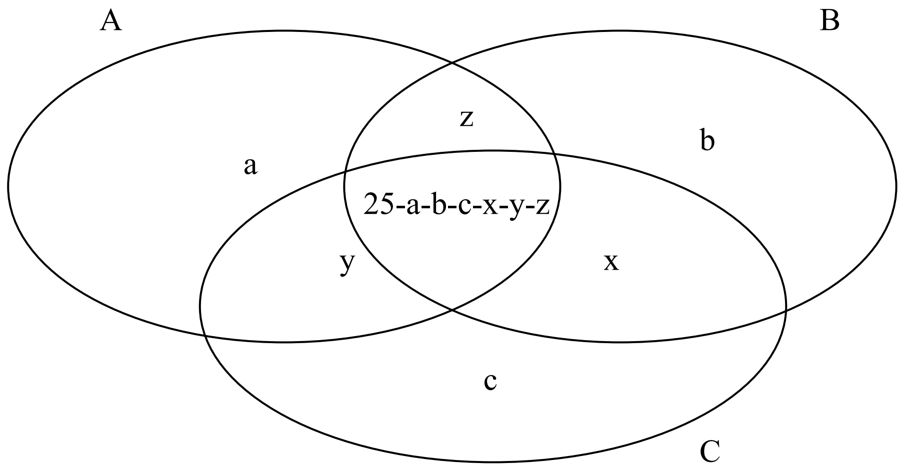
40. $ABCDEFGH$ küpünde $ABCD$ yüzünün tam karşısında $HGFE$ yüzü, AH , BG , CF , DE küpün ayrıtları olacak şekilde yer almaktadır. Küpün yer köşesine bir gerçel sayı yazıyoruz. Daha sonra her köşe için komşu köşelerdeki üç sayının aritmetik ortalamasını hesaplıyoruz. A,B,C,D,E,F,G,H köşeleri için hesaplanan aritmetik ortalamalar sırasıyla $1,2,3,4,5,6,7,8$ ise F köşesine hangi sayı yazılmıştır? (13)

Çözüm:

a,b,c,d,e,f,g,h sırasıyla A,B,C,D,E,F,G,H köşelerine yazılmış sayılar olsun.
$a+b+c+d+e+f+g+h=1+2+3+4+5+6+7+8=36$
$c+f=36-(b+d+h)-(a+e+g)$
A köşesi için $A=\dfrac{b+d+h}{3}=1$ ve H köşesi için $A=\dfrac{a+e+g}{3}=8$ olduğundan
$c+f=36-3(1+8)=9$. Benzer şekilde $c+f=36-3(1+2)=27$ ve
$f+g=36-3(1+4)=21$ çıkar.
$3f=(c+f)+(e+f)+(f+g)-(c+e+g)=9+27+21-3\cdot 6=39$ ve $f=13$ çıkar.

41. 25 yarışmacıdan her biri A,B,C problemlerinden en az birisini çözmüştür. A yı çözemeyip B yi çözenlerin sayısı A çözemeyip C yi çözenlerin sayısının iki katıdır. Sadece A yı çözenlerin sayısı A yı çözüp B ve C den en az birini çözenlerin sayısından bir fazladır. Sadece A yı çözenlerin sayısı sadece B yi çözenler ile sadece C yi çözenlerin toplamına eşitse, sadece B yi çözen kaç kişi vardır? (6)

Çözüm:



$b+x=2(c+x)\Rightarrow b-2c=x\geq 0$, $a=26-x-a-b-c$, $a=b+c$ ise $3b+3c=26-x$ ve $b-2c=x$. Buradan $4b+c=26$. $x=b-2c\geq 0$ ise $26\geq 9c\Rightarrow 2\geq c$ çıkar. $4b+c=26$ denklemi sadece $c=2$ için sağlanır. O halde $b=6$.

42. Ahmet ile Hakan; Avustralya, Brezilya, Litvanya, Türkiye ve Yunanistan basketbol milli takımlarının bulunduğu 5 takımlık bir gruptaki sıralama üzerine tahminde bulunurlar. Ahmet, sıralamanın Avustralya, Brezilya, Litvanya, Türkiye, Yunanistan şeklinde olacağını öngörürken; Hakan sıralamayı Türkiye, Avustralya, Yunanistan, Litvanya, Brezilya şeklinde tahmin etmiştir. Gruptaki maçlar bittikten sonra, Ahmet hiçbir takımın gruptaki sırasını tutturamadığını, üstelik birbiri ardına sıralanır diye tahmin ettiği hiçbir takımın birbiri ardına sıralanmadığı fark eder. Örneğin Türkiye, Yunanistan takımlarının sırası ne 1,2 ne 2,3 ne 3,4 ne de 4,5 sırada yer almıştır. Hakan ise tahmininde tam olarak iki takımın sırasını tutturduğunu, ek olarak tam olarak ayrık iki takım çiftinin tahminindeki gibi birbiri ardına sıralandığı fark eder. Buna göre grupta üçüncü sırada hangi takım yer almıştır? (Avustralya)

Çözüm:

Hakan'ın sıralamasında ardışık takımlar TA, AY, YL, LB dir. Bunlardan ayrık çift oluşturanlar AY-LB, TA-LB, TA-YL dir.
Ahmet'in tahmininden dolayı AY başta olamaz. AY 2,3 olmuşsa LB 4,5 olmuş demektir. Bu durumda Hakan 4 takımın yerini tutturur. AY 3,4 olursa LB 1,2 olacağından (B 2 olamaz) bu da sağlanmaz. AY 4,5 te Y=5 olacağından bu da olamaz. O halde AY-LB olamaz.
TA başta olursa LB ya 3,4 ya da 4,5 olur. 3,4 durumda Ahmet'in tahmini sağlanmaz. 4,5 durumunda Hakan 4 sıra tutturmuş olur. O halde TA başta olamaz. TA 2,3 ise LB 4,5 olmalı. Bu durumda sıralama YTALB olur. Hakan iki ayrık çift olan TA ve LB yi tutturmuş, LB nin tam yerini bilmiş, Ahmet hiçbir sırayı ve ardışık çifti bilememiş olur. O halde üçüncü takım Avustralya olur.
Biz yine de diğer durumlara da bakalım.
TA 3,4 ise LB 1,2 olacağından (B 2 olamaz) sağlanmaz. TA 4,5 ise T den dolayı sağlanmaz. Son çift ise TA-YL. TA başta ise YL 3,4 olamaz. 4,5 olursa AB ardışık olur. TA 2,3 ise Hakan'ın hiçbir tahmini tutmaz. TA 3,4 ise AB ardışık olur. TA 4,5 ise T den dolayı sağlanmaz.
O halde mümkün olan tek sıralama YTALB şeklindedir.

43. Oz diyarında, herhangi bir gün öğleden önce yağışlı değilse, öğleden sonra kesinlikle yağışlı geçiyor. Öğleden sonra yağışlı geçmişse, aynı günün öğleden öncesinde kesinlikle yağmur yağmamış oluyor. Bir hafta boyunca 9 gün yağışlı geçmiş, 7 öğleden sonra, 6 öğleden önce yağışsız geçmişse, Oz diyarında bir hafta kaç gündür? (11)

Çözüm:
x tane öğleden önce yağmurlu geçmişse $9-x$ tane öğleden sonra yağmurlu geçmiştir. Bu durumda $x+6$ tane öğleden önce, $9-x+7$ tane öğleden sonra olacağından bir haftadaki öğleden önce ve sonraların sayısı $x+6+9-x+7=22$ ise bir hafta $\frac{22}{2}=11$ gün sürer.

44. S kümesi, doğrusal olmayan herhangi A, B, C 3 noktası için, ABC üçgeninin diklik merkezini de içeriyorsa, S kümesi en çok kaç elemanlı olabilir? (4)

Çözüm:

45. Bir çember üzerindeki 10 nokta kaç dışbükey çokgen belirtir? (968)

Çözüm:
2^{10} altküme arasından 0 eleman içeren C_0^{10}, 1 eleman içeren C_1^{10}, 2 eleman içeren C_2^{10} tane altküme vardır. Bunları çıkarırsak 3 veya daha çok elemanlı altkümelerin sayısı $1024-1-10-45=968$ olur.