

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
25 Kasım 2012

4. Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{x(2x-y)}{y(2z+x)} + \frac{y(2y-z)}{z(2x+y)} + \frac{z(2z-x)}{x(2y+z)} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

5. $x_i \in \{1, 2, \dots, 20\}$, $(1 \leq i \leq 2012)$, biçimindeki tüm $(x_1, x_2, \dots, x_{2012})$ 2012-lilerinden oluşan kümeyi P ile gösterelim.

Bir $S \subset P$ altkümesi, her $(x_1, x_2, \dots, x_{2012}) \in S$ için,

$$y_i \leq x_i \ (1 \leq i \leq 2012) \implies (y_1, y_2, \dots, y_{2012}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa, S ye *alçalan küme*;

$$x_i \leq y_i \ (1 \leq i \leq 2012) \implies (y_1, y_2, \dots, y_{2012}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa da, S ye *yükselen küme* diyelim.

A ve B boş olmayan bir alçalan ve bir yükselen küme olmak üzere, $|A \cap B|/(|A| \cdot |B|)$ nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

6. Sırasıyla, $[AE]$ ve $[AF]$ doğru parçaları üstünde yer alan B ve D noktaları için, ABF ve ADE üçgenlerinin A köşelerine ait dış teğet çemberleri aynıdır. Bu çemberin merkezi I , $[BF] \cap [DE] = \{C\}$ ve $IAB, IBC, ICD, IDA, IAE, IEC, ICF, IFA$ üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla, $P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ olsun.

a. P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarının ve Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

b. Bu çemberlerin merkezleri sırasıyla, O_1 ve O_2 olmak üzere, O_1, O_2, I noktalarının doğrudan doğruya olduğunu gösteriniz.