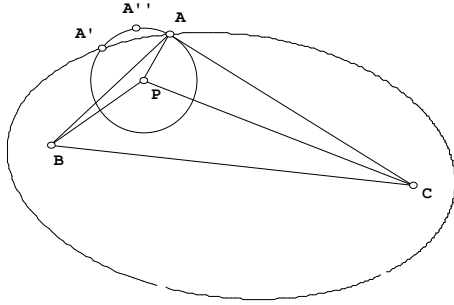
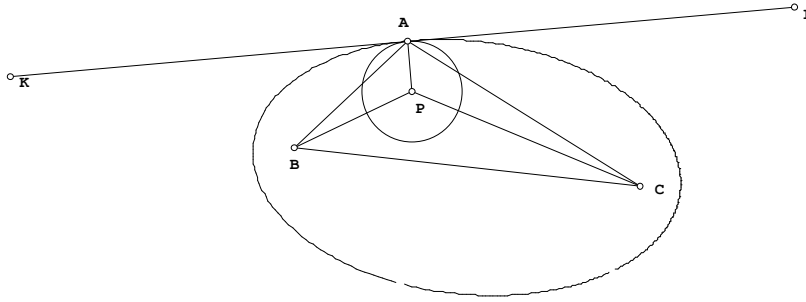


Problem. Uzunlukları bilinen ortak P uçlu $[PA]$, $[PB]$, $[PC]$ için ABC üçgeninin çevresi en çok ve en az kaç olabilir?



Çözüm (Nikolaos Dergiades): ABC üçgeni $x = PA$, $y = PB$ ve $z = PC$ olmak üzere çizilebilecek en büyük çevreli üçgen olsun. P , B ve C noktalarının sabit olduğu düşünülürse, A noktası, P merkezli x yarıçaplı bir çember üzerinde hareket eder. A' 'dan geçen B ve C odaklı elips, bu çembere başka bir noktada daha keser. Bu noktaya A' diyelim. Diğer yandan elipsin dışında ama çember üzerinde başka noktalar da görülür ki (A'' gibi) hem P 'ye olan uzaklıkları x , hem de üçgenin

çevresini daha büyük yapıyor. Elipsin üzerindeki her noktanın odaklara yani B 'ye ve C 'ye olan uzaklıkları toplamı sabittir ya, A'' noktası elipsin dışında diye yani. Bu durum bize maksimum çevreli üçgenin ne ABC ne de $A'BC$ olduğunu söyler. Çünkü $A'BC$ üçgeninin çevresi her ikisinden de daha büyük. İşte bu yüzden elips ile çember birbirlerine teğet olmalı ve gerçek A noktası da bu teğet değme noktası olmalıdır. Şimdi şeklimizi tekrar çizelim.



Ortak teğet doğrusuna yan şekilde gösterildiği üzere KL dersek; KL teğeti üzerindeki her S noktası için $SB + SC > AB + AC$ olur. Bu ise A noktasının B 'den C 'ye KL 'ye uğramak üzere gidilebilecek yollardan en kısa olanının $AB + AC$ olduğunu anlatır. Doğrunun

analitiği dersinden hatırlarsınız; A bu yolu en kısa yapan nokta ise $m(KAB) = m(LAC)$ olmalıdır. Aynı zamanda $PA \perp KL$ olduğundan $m(BAP) = m(CAP)$ olur. Benzer şekilde işlemler yaparak $m(CBP) = m(ABP)$ ve $m(ACP) = m(BCP)$ eşitliklerine de ulaşabiliriz. O halde maksimum çevreli ABC üçgeni için P noktası bu ABC üçgeninin iççember merkezi olmalıdır.

Bu kanıt çok anlaşılır ve sade görünse de maksimum yapan noktanın varlığı kanıtlanmadan faraziyeler üzerine kurulduğundan zayıf kalmaktadır. Bu verilerle bu ABC üçgeninin çevre ve pergel yardımıyla çizilebilmesi de mümkün değildir. Zira ABC üçgeninin iççember yarıçapı olan r değeri, r 'ye göre 3.dereceden olan $2r^3xyz + (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)r^2 - x^2y^2z^2 = 0$ denkleminin pozitif köküdür. Bu yüzden r bu verilerle çizilemez. Fakat $y = z$ gibi bir eşitlik verilseydi çizimleri yapmak mümkün olurdu.

İşin bundan sonrası kolay. r hesaplandıktan sonra ABC üçgeninin açı ölçüleri (ölçü olmasa da trigonometrik değerleri) bulunabileceği gibi kolaylıkla kenarları da hesaplanarak maksimum çevreye erişilebilir.