2012 American Invitational Mathematics Examination – II

Ülkemizde yapılan çeşitli matematik yarışmalarına, olimpiyatlara katılacak öğrencilerin ve meraklı olan herkesin incelemesinde fayda gördüğümüz kısa adı *AIME* olarak bilinen bu sınavının Türkçe çevirisini *www.geomania.org* aracılığıyla sizlere sunuyoruz. Sayfanın sonunda cevap anahtarını da bulabilirsiniz. Çalışmalarınızda kolaylıklar dileriz…

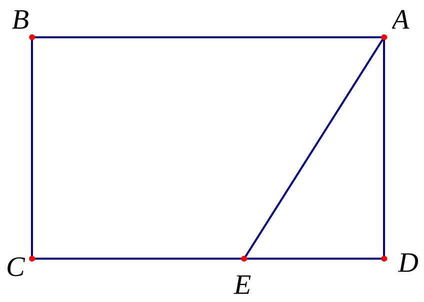
L. Gökçe

Problem 1: $20m+12n=2012$ denklemini sağlayan (m,n) pozitif tamsayı ikililerinin sayısını bulunuz.

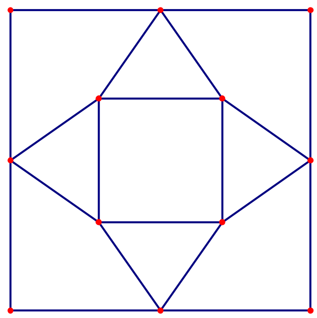
Problem 2: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ve $b_1, b_2, b_3, \ldots$ aynı ortak çarpana sahip iki geometrik seridir. $a_1=27$, $b_1=99$ ve $a_{15}=b_{11}$ ise a_9 nedir?

Problem 3: Bir üniversitenin matematik bilimleri bölümünde matematik, istatistik, bilgisayar bilimleri departmanları vardır. Her departmanda iki erkek, iki bayan profesör vardır. 6 profesörden oluşan bir komitede üç erkek, 3 bayan profesör olmak zorundadır. Ayrıca komitede üç departmanın her birinden ikişer profesör bulunmak zorundadır. Bu şartları sağlayan tüm mümkün komitelerin sayısını bulunuz.

Problem 4: Ana, Bob ve Cao sabit hızlı olarak sırasıyla saniyede 8.6 m, 6.2 m, 5 m bisiklet sürüyorlar. Hepsi aynı anda dikdörtgen bir arsanın kuzeydoğu köşesinden (*A* noktasından) bisiklet sürmeye başlıyorlar. Ana arsanın kenarı üzerinden ilk olarak batı yönünde sürerek *A–B–C–E* yolunu gidiyor. Bob ilk olarak güney yönünde sürerek *A–D–E* yolunu gidiyor. Cao ise arsanın içinden geçerek *A–E* yolunu gidiyor. Cao *E* noktasına vardığında, Ana ve Bob da ilk kez *E* noktasına ulaşmış oluyorlar. *p*, *q*, *r* pozitif tamsayılar olmak üzere *p* ile *q* aralarında asaldır. [*AB*], [*AD*], [*AE*] uzunlukları sırasıyla *p*, *q*, *r* ise $p+q+r$ nedir?



Problem 5: Aşağıda verilen şekilde merkezleri aynı ve karşılıklı kenarları paralel olan iki karenin kenar uzunlukları sırasıyla 40 ve 15 dir. Büyük karenin köşelerindeki parçalar kesilip çıkarılarak oluşan yıldız katlanarak bir kare piramit elde ediliyor. Bu piramidin hacmini bulunuz.



Problem 6: $|z|=5$, $b>0$ olmak üzere $z=a+bi$ karmaşık sayısı $(1+2i)z^3$ ve z^5 arasındaki uzaklığı maksimum yapıyor. $z^4=c+di$ ise $c+d$ kaçtır?

Problem 7: İkilik tabanda yazılışı tam olarak sekiz tane 1 rakamı içeren pozitif tamsayıların artan dizisi S olsun. S deki 1000. sayı N ise olsun. N nin 1000 ile bölümünden kalan nedir?

Problem 8: z ve w karmaşık sayıları $z+\dfrac{20i}{w}=5+i$, $w+\dfrac{12i}{z}=-4+10i$ denklemlerini sağlıyor. $|zw|^2$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

Problem 9: x ve y reel sayıları $\dfrac{\sin x}{\sin y}=3$, $\dfrac{\cos x}{\cos y}=\dfrac{1}{2}$ denklemlerini sağlıyor. p ve q aralarında asal sayılar pozitif tam olmak üzere $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}+\dfrac{\cos 2x}{\cos 2y}$ ifadesinin değeri $\dfrac{p}{q}$ şeklinde ifade edilebiliyorsa $p+q$ kaçtır?

Problem 10: $n=x[\![x]\!]$ olacak şekilde bir x pozitif reel sayısı bulunabilmesini sağlayan 1000 den küçük kaç n pozitif tamsayısı vardır?

NOT: $[\![x]\!]$, x den küçük veya eşit olan en büyük tamsayıdır.

Problem 11: $f_1(x)=\frac{2}{3}-\frac{3}{3x+1}$ ve $n\geq 2$ için $f_n(x)=f_1\left(f_{n-1}(x)\right)$ olarak tanımlanıyor. m ve n aralarında asal sayılar pozitif tam olmak üzere $f_{1001}(x)=x-3$ eşitliğini sağlayan x değeri $\frac{m}{n}$ olarak ifade edilebiliyorsa $m+n$ kaçtır?

Problem 12: Pozitif bir p tamsayısı için, p nin tüm katları ile arasındaki fark mutlak değerce 2 den büyük olan n pozitif tamsayılarına p – *güvenli* sayı diyelim. Örneğin 10 – *güvenli* sayıların kümesi $\{3,4,5,6,7,13,14,15,16,17,23,\ldots\}$ şeklindedir. 7 – *güvenli*, 11 – *güvenli* ve 13 – *güvenli* sayısı olup 10000 e eşit ya da daha küçük olan pozitif tamsayıların sayısını bulunuz.

Problem 13: ABC eşkenar üçgeninin bir kenarı $\sqrt{111}$ dir. Dört farklı AD_1E_1, AD_1E_2, AD_2E_3 ve AD_2E_4 üçgenlerinin her biri ABC üçgeni ile eştir. $|BD_1|=|BD_2|=\sqrt{11}$ ise $\sum_{k=1}^{4}|CE_k|^2$ nedir?

Problem 14: Bir gruptaki 9 kişiden her biri grup içindeki tam olarak 2 kişi ile tokalaşıyor. N grup içindeki farklı tokalaşabilmelerin sayısı olsun. İki tokalaşma düzeninin farklı olması için gerek ve yeter şart, bir düzen içinde tokalaşmış en az iki kişinin bir başka düzen içinde tokalaşmamış olmasıdır. N nin 1000 ile bölümünden kalanı bulunuz.

Problem 15: $|AB|=5$, $|BC|=7$, $|CA|=3$ olan ABC üçgeninin çevrel çemberi w dir. A nın açıortayı $[BC]$ kenarını D de, w çemberini de ikinci kez E de kesiyor. $[DE]$ çaplı çember γ olsun. w ve γ çemberleri E de ve ikinci kez F de kesişiyor. m ve n aralarında asal sayılar pozitif tam olmak üzere $|AF|^2=\frac{m}{n}$ ise $m+n$ kaçtır?

Cevap Anahtarı:

1. 034	7. 032	13. 667
2. 363	8. 040	14. 016
3. 088	9. 107	15. 919
4. 061	10. 496	
5. 750	11. 008	
6. 125	12. 958	