# 2011 American Invitational Mathematics Examination – II

Ülkemizde yapılan çeşitli matematik yarışmalarına, olimpiyatlara katılacak öğrencilerin ve meraklı olan herkesin incelemesinde fayda gördüğümüz kısa adı *AIME* olarak bilinen bu sınavının Türkçe çevirisini *www.geomania.org* aracılığıyla sizlere sunuyoruz. Sayfanın sonunda cevap anahtarını da bulabilirsiniz. Çalışmalarınızda kolaylıklar dileriz…

*L. Gökçe*

**Problem 1:** Büyük bir miktar içecek alan Gary, $m$ ile $n$ aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere bu içeceğin $\frac{m}{n}$ kadarını içti. Eğer Gary öncekinin yarısı kadar içecek alıp, öncekinin iki katı kadar içecek içseydi, geriye ilk durumdaki içilmemiş içeceğinin $\frac{2}{9}$ u kadar içilmemiş içecek kalacaktı. Buna göre $m+n$ nedir?

**Problem 2:** *ABCD* karesinin [*AD*], [*BC*] kenarları üzerinden $|BE|=|EF|=|FD|=30$ olacak şekilde $E$, $F$ noktaları alınıyor. *ABCD* karesinin alanı nedir?

**Problem 3:** Dışbükey bir 18 – gen'in iç açılarının ölçüleri derece türünden tamsayı değerlere sahip olup artan bir aritmetik dizi oluşturmaktadır. En küçük açının ölçüsü nedir?

**Problem 4:** Bir *ABC* üçgeninde $|AB|=\frac{20}{11}|AC|$ dir. *A* nın açıortayı *BC* yi *D* noktasında kesiyor ve [*AD*] nin orta noktası *M* dir. *AC* ve *BM* doğrularının kesişimi *P* olsun. $m$ ile $n$ aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere $\frac{|CP|}{|PA|}=\frac{m}{n}$ ise, $m+n$ nedir?

**Problem 5:** Bir geometrik dizinin ilk 2011 teriminin toplamı 200, ilk 4022 teriminin toplamı 380 ise, ilk 6033 teriminin toplamı nedir?

**Problem 6:** $1\le a<b<c<d\le 10$ ve $a+d>b+c$ şartını sağlayan ($a$, $b$, $c$, $d$) sıralı tamsayı dörtlülerinin sayısı nedir?

**Problem 7:** Ed'in beş özdeş yeşil bilyesi ve büyük miktarda kırmızı özdeş bilyesi vardır. Ed yeşil bilyeleri ve bir miktar kırmızı bilyeyi düz bir sırada sıralayınca sağ komşusu ile aynı renkte olan bilye sayısı ile farklı renkte olan bilye sayısının eşit olduğunu görüyor. Böyle bir sıralamaya *YYKKKYYKY* örnek olabilir. Böyle bir sıralama için gerekli maksimum kırmızı bilye sayısı $m$, ve $m$ + 5 bilye ile bu koşulu sağlayan tüm sıralamaların sayısı $N$ olsun. $N$ nin 1000 e bölümünden kalanı bulunuz.

**Problem 8:** $z^{12} - 2^{36}$ polinomunun 12 tane sıfırı $z_1, z_2, ..., z_{12}$ olsun. Her $j$ için $w_j$ sayısı, $z_j$ veya $i \cdot z_j$ sayısından birisine eşit olsun. $m$ ile $n$ aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere $\sum_{j=1}^{12} w_j$ toplamının gerçel kısmının en büyük değeri $m + \sqrt{n}$ ise, $m + n$ nedir?

**Problem 9:** $x_1, x_2, ..., x_6$ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere, $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 1$ eşitliği ve $x_1x_3x_5 + x_2x_4x_6 \geq \frac{1}{540}$ eşitsizliği veriliyor. $p$ ile $q$ aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_1 + x_6x_1x_2$ ifadesinin en büyük değeri $\frac{p}{q}$ ise, $p$ + $q$ nedir?

**Problem 10:** $O$ merkezli bir çemberin yarıçapı 25 dir. $|AB| = 30$ ve $|CD| = 14$ uzunluğuna sahip iki kiriş bir $P$ noktasında kesişiyor. Bu iki kirişin orta noktaları arasındaki uzaklık 12 dir. $m$ ile $n$ aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere $|OP|^2 = \frac{m}{n}$ ise, $m + n$ toplamının 1000 ile bölümünden kalan nedir?

**Problem 11:** $M_n$, $n \times n$ türünde bir matris olsun. $1 \leq i \leq n$ için $m_{i,i} = 10$, $1 \leq i \leq n-1$ için $m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = 3$ ve $M_n$ nin diğer tüm elemanları 0 dır. $M_n$ matrisinin determinantı $D_n$ olsun. $p$ ile $q$ aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8D_n + 1} = \frac{p}{q}$ ise, $p$ + $q$ nedir?

**Problem 12:** Üç ülkeden üçer delegenin katıldığı 9 kişilik kurul bir sıraya rastgele biçimde oturuyorlar. $m$ ile $n$ aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere, her bir delegenin ardından gelen delegenin farklı bir ülkeden olması olasılığı $\frac{m}{n}$ ise, $m + n$ nedir?

**Problem 13:** *ABCD* karesinin [*AC*] köşegeni üzerinden $|AP|>|CP|$ olacak şekilde bir *P* noktası alınıyor. *ABP* ve *CDP* üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla $O_1, O_2$ olsun. $|AB|=12$ ve $\angle O_1PO_2=120^o$ veriliyor. *a* ile *b* aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere, $|AP|=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ise, *a* + *b* nedir?

**Problem 14:** $1,2,...,30$ sayılarının $(a_1,a_2,...,a_{30})$ şeklinde *N* tane permütasyonu vardır öyle ki $m\in\{2,3,5\}$ şeklindeki *m* sayıları ve $1\leq n<n+m\leq 30$ özelliğindeki her *n* tamsayısı için, *m* sayısı, $a_{m+n}-a_n$ sayısını böler. *N* sayısının 1000 ile bölümünden kalan nedir?

**Problem 15:** $P(x)=x^2-3x-9$ olsun. $5\leq x\leq 15$ aralığından rastgele bir *x* gerçel sayısı seçiliyor. $\left[\!\left[\sqrt{P(x)}\right]\!\right]=\sqrt{P\left([\![x]\!]\right)}$ olma olasılığı $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-d}{e}$ dir. Burada *a*, *b*, *c*, *d*, *e* pozitif tamsayılar ve *a*, *b*, *c* den hiçbiri bir asal sayının karesi ile bölünememektedir. *a* + *b* + *c* + *d* + *e* nedir?

**Cevap Anahtarı:**

1. 37
2. 810
3. 143
4. 51
5. 542
6. 80
7. 3
8. 784
9. 559
10. 57
11. 73
12. 97
13. 96
14. 440
15. 850