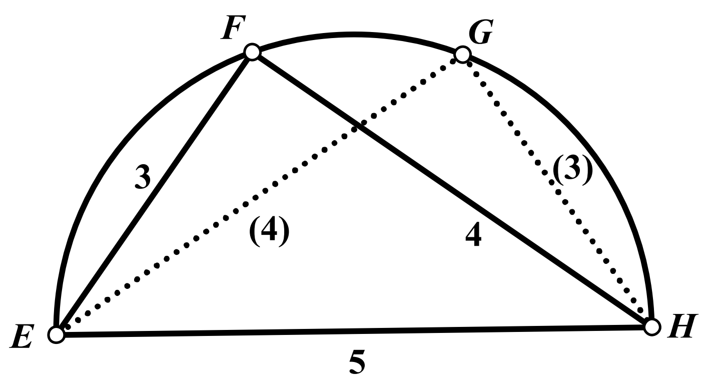
1989 AMRL
(American Regions Mathematics League)

Erk Sorusu [1]– Pisagor Çokgenleri

Bir dışbükey n-gene; tüm kenarları tam sayı ise, tüm köşeleri bir çember üzerinde yer alıyorsa ve bu çemberin bir çapı çokgenin bir kenarı ise "*Pisagor çokgeni*" diyeceğiz. Bir Pisagor çokgeni, P_n ile ya da $a, b, \dots$ çokgenin kenarları olmak üzere $P_n\colon (a, b, \dots)$ ile gösterilir. Pisagor çokgeninin en uzun kenarını her zaman d ile göstereceğiz. (P_3 bir Pisagor üçgenidir. En uzun kenarı çap olduğu için kenarları tam sayı olan bir dik üçgendir.)

I. (Bir Pisagor üçgeninin d hipotenüsü asal sayı ise, hipotenüsü d^2 olan iki Pisagor üçgeni, hipotenüsü d^3 olan üç Pisagor üçgeni vardır, … şeklinde devam eden bir teoremin var olduğunu kabul edin.)
   A. $d = 25$ olan iki tane P_3 bulun.
   B. $d = 125$ olan üç tane P_3 bulun.

II. Ptolemy Teoremi: Bir dışbükey dörtgenin kirişler dörtgeni olabilmesi için gerek ve yeter koşul köşegenlerinin çarpımının karşılıklı kenarların çarpımları toplamına eşit olmasıdır.



   A. $P_3\colon (3, 4, 5)$ yukarıdaki gibi yansıtıldığında $EFGH$ dörtgeni oluşmaktadır (bu dörtgen bir P_4 değildir; çünkü FG bir tam sayı değildir). Bu dörtgenin tüm kenarları 5 ile çarpılınca bir P_4 elde edeceğiz. Bu P_4 dörtgeninin kenarlarını bulun.
   B. IIA'daki cevaptan farklı olmak üzere; iki kenarı eşit ve $d = 25$ olan bir P_4 bulun. (İki P_n; kenarları eşit, fakat farklı sırada ise farklı kabul edilmiyor.)
   C. Her $n \geq 3$ tam sayısı için bir P_n'in var olduğunu gösteriniz. (Böyle bir P_n'in nasıl oluşturulduğunu açıklayabilirsiniz.)

III.
   A. $P_3\colon (a, b, d)$ için $d^2 = a^2 + b^2$ dir. $P_4\colon (a, b, c, d)$ için $d^2 > a^2 + b^2 + c^2$ olduğunu gösteriniz.

[1] 15 kişilik takıma, Erk Sorusunu çözmek için 1 saat süre veriliyor. Bu bölüm toplamda 50 puan değerindedir.

B. P_4: (a, b, c, d) olmak üzere; $d > 2$ ise d nin bileşik bir sayı olduğunu gösteriniz.

C. P_n'in tüm köşegenleri tam sayı ise, P_n'e "Süper Pisagor çokgeni" diyoruz ve $\overline{P_n}$ ile gösteriyoruz.

1. Herhangi bir $\overline{P_4}$'ün alanının tam sayı olduğunu gösteriniz. (İpucu: Çözüm yöntemlerinden biri $\overline{P_n}$'ün alanının rasyonel, çevresinin çift olması gerektiğini göstermek olbilir.)
2. $\overline{P_3}$ ve $\overline{P_4}$'ün alanının tam sayı olduğunu varsayarak, her $\overline{P_n}$'in alanının tam sayı olduğunu gösteriniz. (IIC1'i yapmamışsanız bile, bu kısmı yapabilirsiniz.)

Takım Soruları[2]

T1. Üç ardışık pozitif tek sayının kareleri toplamı $aaaa$ şeklinde dört basamaklı bir sayı ise, a nedir?

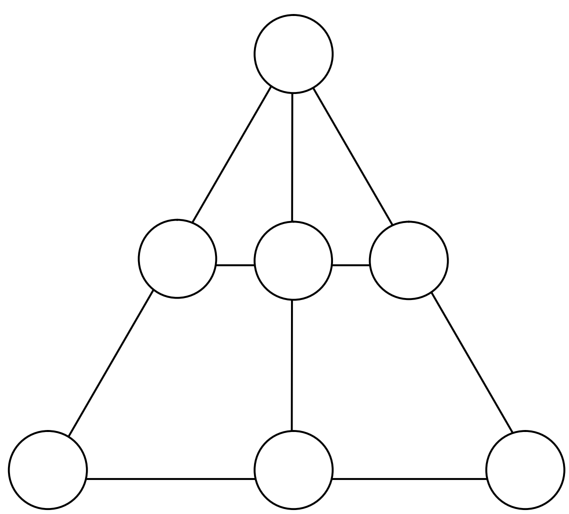
T2. 1 ile 500000 arasındaki 7'nin katı olan tam küplerin sayısını bulun.

T3. $p > 100$ ve q asal sayılar olmak üzere; $pq + 1$ sayısı tam kare ise, $p + q$ toplamını bölmesi gereken en büyük tam sayıyı bulun.

T4. ABC üçgeninde, AD ve BE açıortayları P noktasında kesişmektedir. x ve y aralarında asal tam sayılar olmak üzere; $a = 3, b = 5, c = 7, BP = x$ ve $PE = y$ ise x: y oranını hesaplayın.

T5. Ahmet, hilesiz bir zarı attığında gelen sayı 3'ten büyükse ödülü kazanıyor. Değilse, zarı tekrar attığında gelen sayı 4'ten büyükse ödülü kazanıyor. Değilse, zarı tekrar attığında gelen sayı 5'ten büyükse ödülü kazanıyor. Ahmet'in ödülü kazanma olasılığını hesaplayın.

T6. Aşağıdaki şekilde, 7 çemberden bazıları aynı doğru üzerinde (bir doğruda 3 çember, toplamda 5 doğru) olacak şekilde yerleştirilmiştir. 1'den 7'ye kadar olan sayılardan her biri bir çembere, her doğrudaki 3 sayının toplamı aynı olacak biçimde yerleştiriliyor. Buna göre sol-alt köşedeki çembere hangi sayı gelemez?

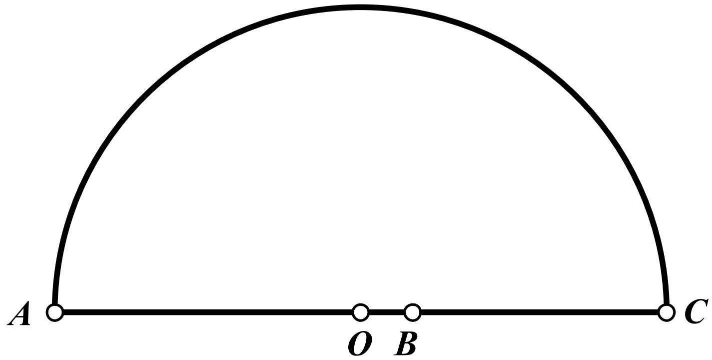


[2] 15 kişilik takıma, bu bölüm için ayrılan süre 20 dakikadır. Her soru 5 puan değerindedir.

T7. $y = x^2$ eğrisine 2. Bölgedeki bir (r, s) noktasından çizilen teğetlerin arasında kalan açının açıortayının eğimi 1 ise, s'yi bulun. ($y = x^2$ eğrisin (a, a^2) noktasındaki teğetinin eğimi $2a$'dır.)

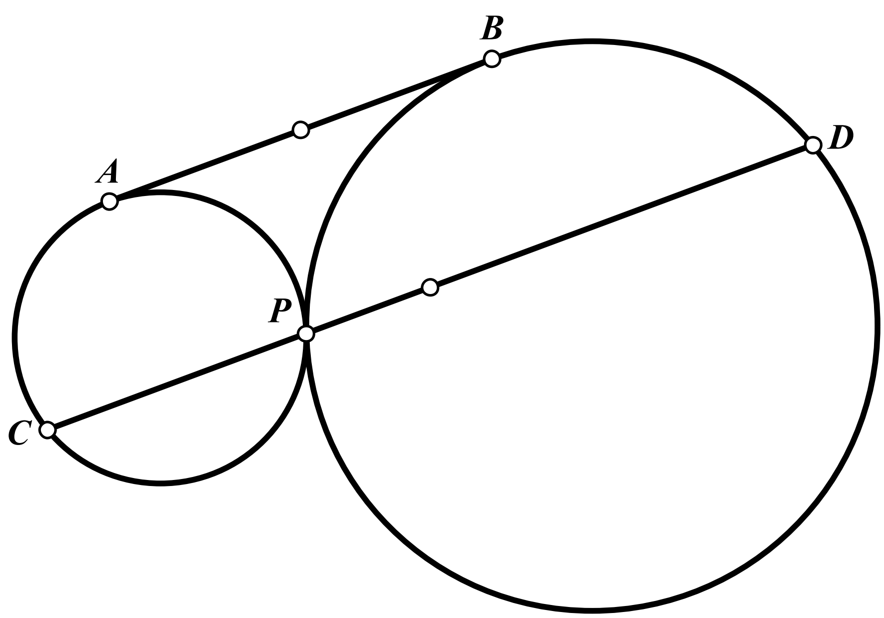
T8. $(3,4)$, $(6,8)$ ve $(5,13)$ noktalarından geçen çembere orijinden çizilen teğetin uzunluğunu hesaplayın.

T9. O merkezli AC çaplı bir yarım çemberin çapı üzerinde $AB = 8$, $BC = 6$ olacak şekilde bir B noktası alınıyor.



B merkezli, C'den geçen çember AO'yu D'de kesiyor. D merkezli C'den geçen çember ile C merkezli D'den geçen çember, E'de kesişiyor. BE, yarım çemberi F'de kesiyor. A merkezli, O'dan geçen çember yarım çemberi G'de kestiğine göre; $FG = \sqrt{k}$ ise, k'yı bulun.

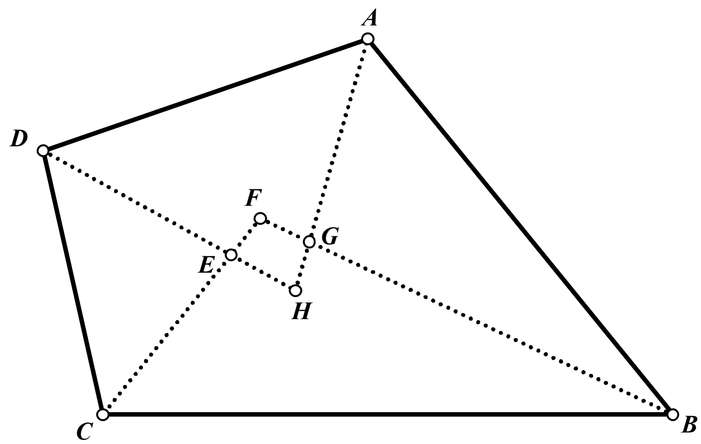
T10. Birbirlerine P noktasında dıştan teğet olan iki çemberin ortak dış teğet doğrularından biri çemberlere A ve B'de dokunmaktadır. P'den AB'ye çizilen paralel çemberleri C ve D'de kesiyor. Çemberlerin yarıçapları 2 ve 18 olduğuna göre, AB ile CD doğru parçalarının orta noktaları arasındaki uzaklık ne kadardır?



Bireysel Sorular[3]

B1. x pozitif bir tam sayı ve $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=379^2$ ise, x'i bulun.

B2. $ABCD$ dışbükey dörtgeninin iç açıortayları $EFGH$ dörtgenini oluşturuyor. $\angle E+\angle F=193°$ ve $\angle A>\angle C$ ise $\angle A-\angle C$ nedir?



B3. $P(x)$ polinomu, $x^{23}+23x^{17}-18x^{16}-24x^{15}+108x^{14}=(x^4-3x^2-2x+9)\cdot P(x)$ özdeşliğini sağladığına göre; $P(x)$'in katsayılar toplamını bulun.

B4. Bir dikdörtgenin alanı kendisini çevreleyen çemberin alanının yarısına eşitse, köşegenler arasındaki dar açıyı en yakın derece cinsinden hesaplayın. (4°'ye kadar yaklaşık sonuçlar kabul edilebilir. Hesap makinesi kullanılmayacak)

B5. Pascal Üçgeni'nin terimlerini yan yana yazdığımızda, 1,1,1,1,2,1,1,3,3,1,1,4,6,4,1,1,5,10,10, ... dizisini elde ederiz. Bu dizinin ilk 212 teriminin toplamı 2^k+k ise, k'yı bulun.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \dots & & & & \end{array}$$

B6. $[\![a]\!]$ ile a'yı aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim.

$$[\![x]\!]-19\cdot\left[\!\!\left[\frac{x}{19}\right]\!\!\right]=9=[\![x]\!]-89\cdot\left[\!\!\left[\frac{x}{89}\right]\!\!\right]$$

denklemini sağlayan 9'dan büyük en küçük x tam sayısını bulun.

[3] Bu bölümde yarışmacılar soruları bireysel olarak cevaplandırıyorlar. Her soru 1 puan değerinde olup, bireysel puanların toplamı, takım puanına ekleniyor. Bu bölümdeki sorular, öğrencilere ikişer ikişer sunuluyor. Her soru çifti için verilen süre 10 dakikadır.

B7. 0’dan 7’ye kadar olan sayılarının ikilik gösteriminde (0,1,10,11,100,101,110,111) 12 tane 1 sayısı kullanılıyor. 0’dan 1023’e kadar olan sayıların gösteriminde kaç tane 1 kullanılır?

B8. Köşeleri bir çember üzerinde bulunan dışbükey bir altıgenin kenarları sırasıyla 2,2,7,7,11,11 ise, çemberin çapını bulun.

Ekip Çalışması [4][5]– 1

E1-1. Takım arkadaşına ileteceğin sayı n olsun. $6\sqrt{n} - 9$ sayısını arkadaşına ilet.

E1-2. $T = TAAS$ [6]olsun. $k = T - 4$ olmak üzere; cisim köşegeni $k\sqrt{3}$ olan küpün hacmini hesaplayın.

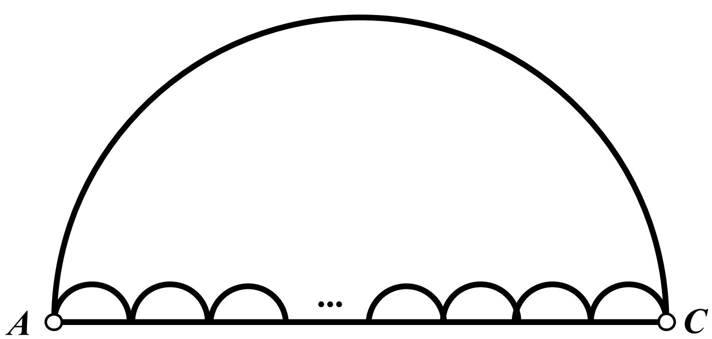
E1-3. $T = TAAS$ ve $k = \frac{T}{25} - 3$ olsun. Pozitif a, b, c tam sayıları için, c sayısı $(a + b)$’nin bir böleni ise bu durumu $a \equiv b \ (\mathrm{MAD}\ c)$ şeklinde tanımlıyoruz. $kx^3 + 5 \equiv 17 \ (\mathrm{MAD}\ 3)$ şartını sağlayan en küçük $x > 1$ tam sayısını bulun.

Ekip Çalışması – 2

E2-1. 1989 yılı $9 \cdot 13 \cdot 17$ şeklinde aritmetik dizi oluşturan üç pozitif sayının çarpımı olarak ifade edilebiliyor. 1989’tan sonra ilk kez hangi yıl; toplamları 57 olacak şekilde aritmetik dizi oluşturan üç pozitif tam sayının çarpımı şeklinde yazılabilir.

E2-2. $T = TAAS$ olsun. $n = \frac{T+5}{1000}$ olmak üzere; $x^{\log_{19} 89} = 89^n$ denklemini sağlayan x pozitif sayısını bulun.

E2-3. $k = TAAS$ olsun. Bir yarım çemberin içine şekildeki gibi birbirine teğet n tane özdeş yarım çember çiziliyor. Büyük yarım çemberin, küçük yarım çemberleri içermeyen kısmının alanı; küçük yarım çemberlerin alanları toplamının k katı ise, n’yi bulun.



[4] Üçerli gruplar halinde yarışılıyor. Her öğrenci bir sorudan sorumlu. İlk soruyu çözen, ikinci soruyu çözecek olana bulduğu değeri iletiyor. Benzer şekilde ikinci soruyu çözen de, üçüncü soruyu çözecek olana bulduğu cevabı iletiyor.

[5] Bir ekip çalışması için ayrılan süre 6 dakika. Bir ekip çalışması 3 puan değerinde olup, 3 dakikada başarıyla biten ekip çalışmaları için 5 puan veriliyor. Bu durumda 3’erli 5 grubun 2 ekip çalışmasından alabileceği puan maksimum 5x2x5=50 oluyor.

[6] $TAAS = Takım\ Arkadaşından\ Alacağın\ Sayı$