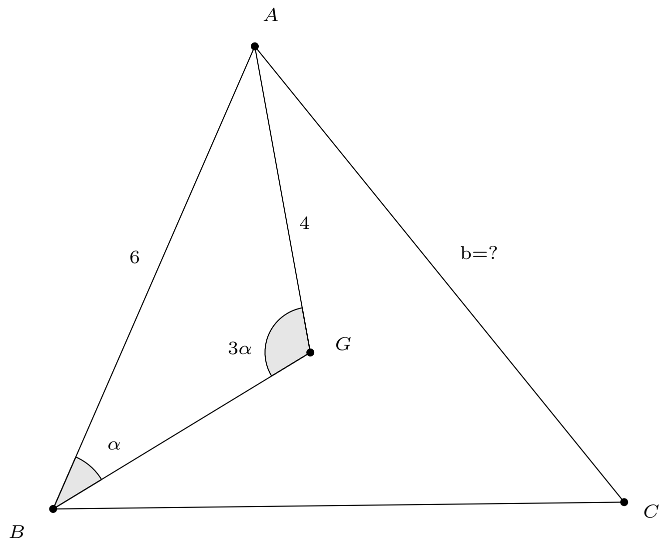
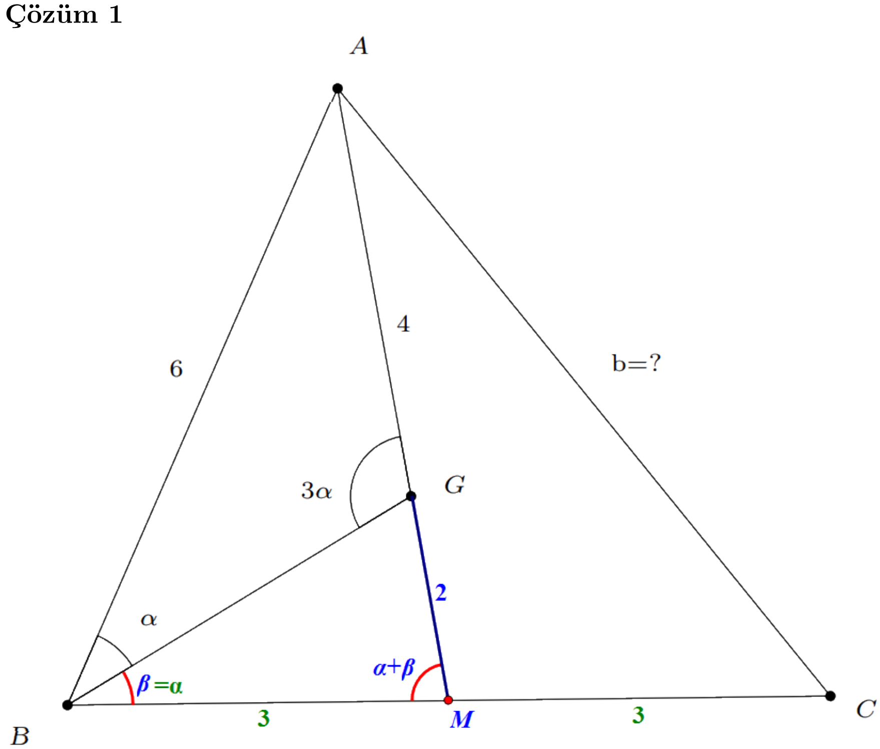
G0001



ABC üçgeninde G ağırlık merkezidir. $AB = 6$, $AG = 4$ ve $\angle AGB = 3\angle ABG$ ise, $AC =$?

Çözüm 1



AG'yi uzatalım. G, ağırlık merkezi olduğu için BC kenarını orta noktasında, M'de kesecek. $AG : GM = 2 : 1$ olduğu için de $GM = 2$ olacak. $AM = 4 + 2 = 6 = AB$ olduğu için ABM üçgeni ikizkenar olacak. $\angle ABG = \alpha$ ve $\angle GBM = \beta$ dersek, $\angle ABM = \angle AMB = \alpha + \beta$ olacaktır. BGM üçgeninde dış açı denklemini yazarsak

$$\angle AGB = \angle BMG + \angle MBG \Rightarrow 3\alpha = (\alpha + \beta) + \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

eşitliğini elde edeceğiz. İster ABM üçgeninde iç açıortay teoreminden $AM = 3 \Rightarrow BC = 6$ bulunur, ister ABC üçgeninde BG'nin hem açıortay, hem de kenarortay olduğu bilgisiyle $AB = BC = 6$ bulunur. ABC üçgeninde kenarortay teoreminden

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2) \Rightarrow 6^2 + b^2 = 2(6^2 + 3^2) \Rightarrow b^2 = 54 \Rightarrow b = 3\sqrt{6}$$

elde edilir.

Çözüm 2

Çözüm 1'deki $AB = BC$ bilgisini kullanıyoruz. ABM üçgeninde A'dan geçen AH yüksekliğini çizersek, üçgen ikizkenar olduğundan $AH = HM$ ve

$$AB^2 - AH^2 = AC^2 - CH^2 \Rightarrow 6^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 = 54 \Rightarrow b = 3\sqrt{6}$$

elde edilir.

Çözüm 3

Çözüm 1'deki $AB = BC$ bilgisini kullanıyoruz. C noktasının, A merkezli $R = AB = AM = 6$ yarıçaplı çembere göre kuvvetinden

$$AC^2 - R^2 = CM \cdot CB \Rightarrow AC^2 = 3 \cdot 6 + 6^2 = 54 \Rightarrow AC = 3\sqrt{6}$$

elde edilir.

Çözüm 4

Çözüm 1'deki $AB = BC$ bilgisini kullanıyoruz. ABM üçgenine içaçıortay uzunluğu

$$BG^2 = AB \cdot BM - AG \cdot GM \Rightarrow BG = \sqrt{6 \cdot 3 - 4 \cdot 2} = \sqrt{10}$$

olacaktır. BG doğrusu AC kenarını N'de kessin. $AB = BC$ olduğu için $BN \perp AC$ ve

$$BG = 2 \cdot GN \Rightarrow BN = \sqrt{10} \cdot \frac{3}{2}$$

olcaktır. ABN üçgeninde pisagordan

$$AN^2 = AB^2 - BN^2 \Rightarrow AN^2 = 6^2 - \left(\sqrt{10} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = 36 - \frac{90}{4} = \frac{54}{4} \Rightarrow AN = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

ve

$$AC = 2 \cdot AN = 3\sqrt{6}$$

olacaktır.

Çözüm 5

ABG üçgeninde Sinüs teoreminden

$$\frac{AB}{AG} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{\sin \alpha} = 3 - 4 \sin^2 \alpha = \frac{6}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

elde edilir.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

ve

$$\cos 3\alpha = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha = -3 \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + 4 \frac{5\sqrt{5}}{16\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$$

olur. A'nın BG üzerine izdüşümü H olsun.

$$\frac{BH}{GH} = \frac{-\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}} = 2$$

ve BG kenarortay olduğu için H noktası AC üzerindedir. Bu durumda BH hem açıortay hem de kenarortay olacaktır.

$$\sin \alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{2 \cdot AB} = \frac{AC}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow AC = 3\sqrt{6}$$