

Sinüs Teoremi

Teorem 1:

ABC üçgeninde kenarlar ve açılar arasında

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

bağıntısı vardır.

İspat:

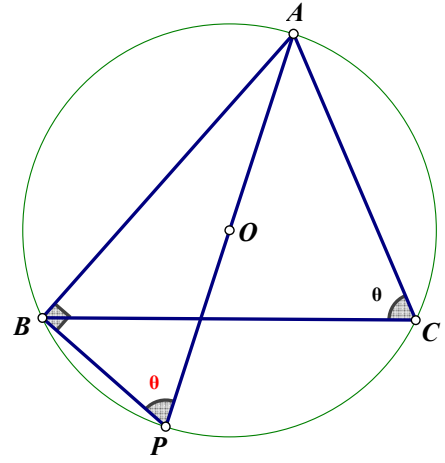
O kadar da zor bir teorem değil. AO dan geçen AP çapını çizelim. $\angle APB = \angle ACB = \theta$ olacaktır.

$AP = 2R$ ve $\angle APB = \theta$ ise

$AB = AP \cdot \sin \theta \Rightarrow AB = c = 2R \cdot \sin \theta$

elde edilir.

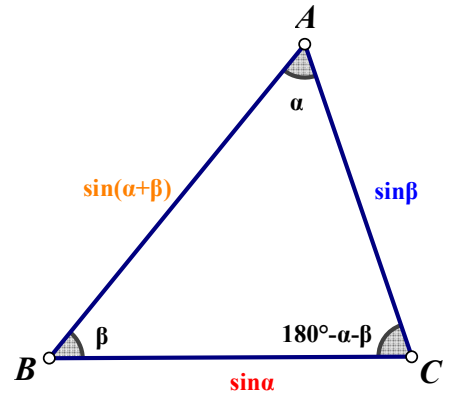
Benzer şekilde $AC = b = 2R \cdot \sin \beta$ ve $BC = 2R \cdot \sin \alpha$ olacaktır.



Pratik:

- Teoremde dört unsurun birbirine eşitliği verilmiş. Oran-orantının özellikleri kullanılarak $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ bağıntısını elde etmek zor olmasa gerek.
- Kenar uzunluklarını açılar cinsinden ifade edebiliriz. $\angle A = \alpha$ ve $\angle B = \beta$ olsun. Elimizde böyle bir veri geçtiğinde kenarlar arasındaki orantıyı yazabileceğimizi hatırlayalım. $a = \sin \alpha$ dersek, $b = \sin \beta$ çıkacaktır. Bu durumda $c = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ olacaktır. Yani açıları (α, β, θ) olan bir üçgende kenar arasındaki orantı $\sin \alpha, \sin \beta, \sin(\alpha + \beta)$ olacaktır.

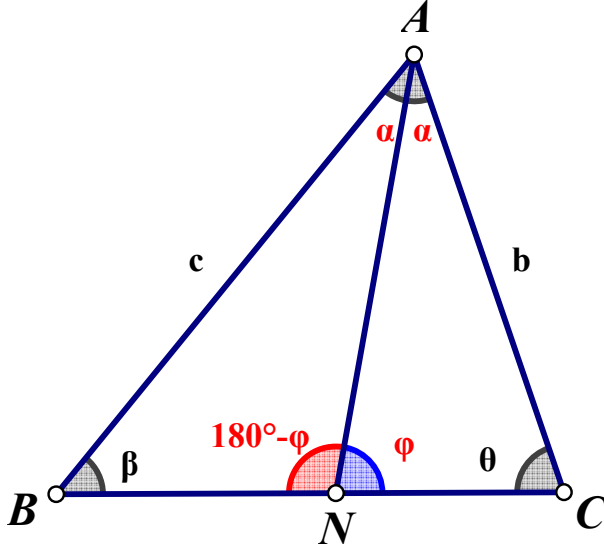
Burada üçüncü açığı θ demek zorunda olmadığımızı fark edelim. $\theta = 180^\circ - \alpha - \beta$ olacağı için c kenarı yerine kısaca $\sin(\alpha + \beta)$ yazdık.



Örnek 1:

ABC üçgeninde AN iç açıortay olsun. Buna göre açıortay kenarı $\frac{BA}{AC} = \frac{AN}{NB}$ oranında böler.

Çözüm:



$\angle BAN = \angle NAC = \alpha$, $\angle ANC = \varphi$ olarak adlandıralım. $\angle ANB = 180^\circ - \varphi$ olacaktır.

ABN üçgeninde Sinüs Teoreminden

$$\frac{BN}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin(180 - \varphi)} \Rightarrow BN = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}$$

elde edilir.

ACN üçgeninde Sinüs Teoreminden

$$\frac{CN}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \Rightarrow CN = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}$$

elde edilir.

Taraf tarafa oranlarsak,

$$\frac{BN}{CN} = \frac{c}{b}$$

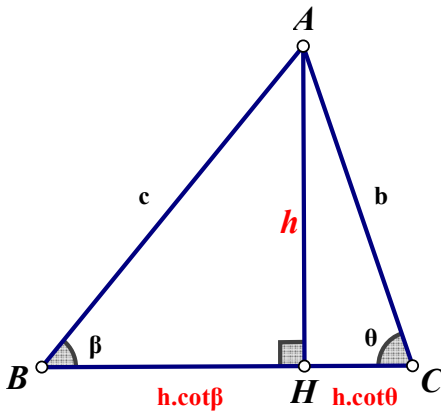
elde edilir.

Bu örnekte bir açıortayın üçgenin kenarını hangi oranda böldüğünü bulduk. Şimdi de aynı işlemi bir yükseklik için yapalım.

Örnek 2:

ABC üçgeninde AH yükseklik olsun. $\frac{AH}{HB}$ oranını hesaplayalım.

Çözüm:



$AH = h$ dersek

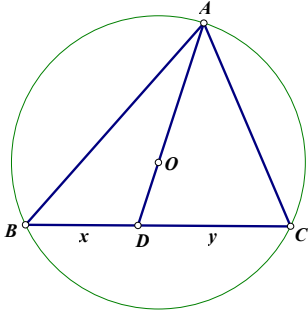
$BH = h \cdot \cot \beta$ ve $HC = h \cdot \cot \theta$ olacaktır.

Bu durumda $\frac{BH}{HC} = \frac{\cot \beta}{\cot \theta}$ elde edilir.

Aslında bu örneği çözerken Sinüs Teoremini ispatlayabilirdik. $h = c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \theta$,

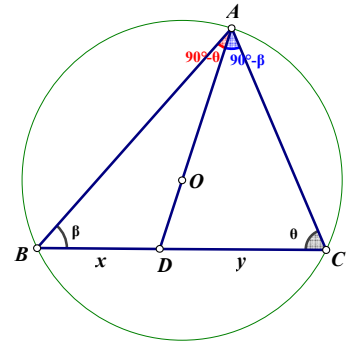
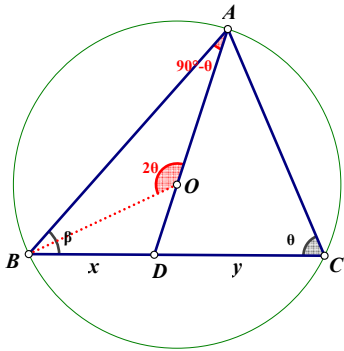
dolayısıyla da $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \theta}$ olacaktır.

Örnek 3:



ABC üçgeninde O çevrel çemberin merkezi olsun. AO doğrusu BC kenarını D de kessin. $\frac{BD}{DC}$ oranını hesaplayalım.

Çözüm:



B ile O yu birleştirelim. Merkez açısı, çevre açısının iki katı olacağından, $\angle BOA = 2\theta$ ve BOA üçgeni ikizkenar olduğundan $\angle ABO = \angle BAO = 90^\circ - \theta$, benzer şekilde $\angle CAO = 90^\circ - \beta$ olacaktır.

Örnek 1'de olduğu gibi ABD ve DAC üçgenleri için Sinüs Teoremini uygulayalım.

$$\frac{AD}{x} = \frac{\sin \beta}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{\sin \beta}{\cos \theta} \Rightarrow AD = x \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \theta}$$

ve

$$\frac{AD}{y} = \frac{\sin \theta}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{\sin \theta}{\cos \beta} \Rightarrow AD = y \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \beta}$$

elde edilir.

$$AD = x \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \theta} = y \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \beta} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \beta}{\cos \theta}} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{2 \cdot \sin \theta \cos \theta}{2 \cdot \sin \beta \cos \beta} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\beta}$$

Pratik:

Nasıl ki, $a = 3b$, $a = 4c$ gibi bir soruda kolaylık olsun diye $a = 12k$, $b = 4k$, $c = 3k$ diyorsak;

bu soruda da AD kenarı hem β hem de θ açıları tarafından görüldüğü için Sinüs Teoreminden dolayı, $AD = \sin \beta \sin \theta$ deriz. Bu durumda $BD = \sin \theta \cdot \cos \theta$ ve $DC = \sin \beta \cdot \cos \beta$ olacaktır.

Bu pratiği kullanarak Ceva Teoreminin Trigonometrik halini ispatlayalım.

Örnek 4:

ABC üçgeninin iç bölgesinde bir P noktası alınıyor. Buna göre AP, BP, CP doğru parçaları çizildiğinde üçgenin köşelerinde oluşan 6 açı arasında,

$$\frac{\sin \angle BAP \sin \angle ACP \sin \angle CBP}{\sin \angle PAC \sin \angle PCB \sin \angle PBA} = 1$$

bağıntısı vardır.

Bunun tersi de doğrudur. Yani üçgenin açılarını ikiye bölen doğruları çizdiğimizde saat yönünde oluşan $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2$ açıları arasında

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \theta_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \theta_2} = 1$$

bağıntısı varsa, bu doğrular noktadadır (tek bir noktada kesilir).

Çözüm:

AP, BP, CP doğru parçalarından her biri $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2$ açılarından ikisi tarafından görülüyor. Bu durumda $AP = \sin \beta_2 \sin \theta_1$ dersek, $BP = \sin \alpha_1 \sin \theta_1$ ve $CP = \sin \alpha_2 \sin \beta_2$ olacaktır. BPC üçgeninde Sinüs Teoremi uygularsak $\frac{BP}{CP} = \frac{\sin \alpha_1 \sin \theta_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \beta_1}$ olacaktır. Çapraz çarpım yaparsak, $\frac{\sin \alpha_1 \sin \theta_1 \sin \beta_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \theta_2} = 1$ olacaktır.

Teoremin tersini ispatlamadan önce, tersinin de doğru olduğunu kabul ederek, teoremin bir sonucu üzerinde duralım. En son bulduğumuz

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \theta_1 \sin \beta_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \theta_2} = 1$$

eşitliği varsa, üçgenin açılarını saat yönünde $\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \beta_2, \beta_1, \theta_2$ olacak şekilde bölen doğrular noktadadır. $\alpha_1, \beta_1, \theta_1$ açılarını kendi içerisinde, $\alpha_2, \beta_2, \theta_2$ açılarını kendi içerisinde yer değiştirdiğimizde oluşan doğrular yine noktadadır.

Şimdi teoremin tersini ispatlayalım.

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \theta_1 \sin \beta_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \theta_2} = 1$$

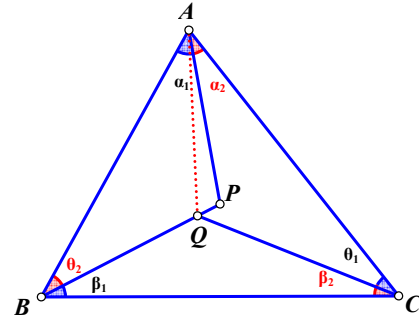
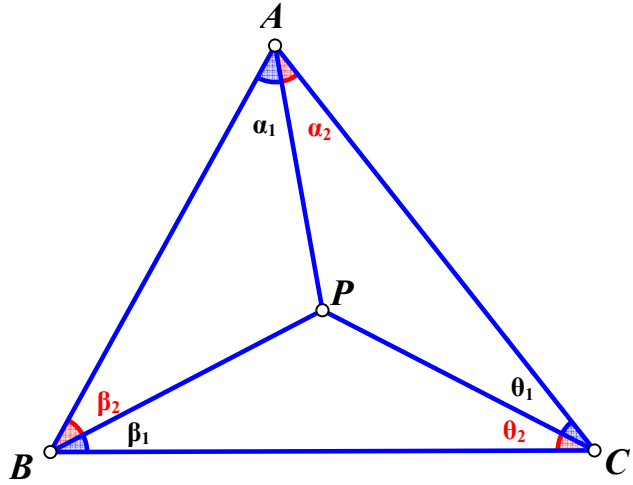
eşitliği varsa, şekilde P noktası ile Q noktası çakışık.

ABC üçgeninde Q noktası için Ceva teoreminin trigonometrik halini uygulayalım.

$$\frac{\sin \angle BAQ \sin \angle ACQ \sin \angle CBQ}{\sin \angle QAC \sin \angle QCB \sin \angle QBA} = 1 \Rightarrow \frac{\sin \angle BAQ}{\sin \angle QAC} \cdot \frac{\sin \theta_1 \sin \beta_1}{\sin \beta_2 \sin \theta_2} = 1$$

olacaktır. Soruda $\frac{\sin \alpha_1 \sin \theta_1 \sin \beta_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \theta_2} = 1$ eşitliği verildiği için, $\angle BAQ + \angle QAC = \angle BAC = \alpha_1 + \alpha_2$ ve

$\frac{\sin \angle BAQ}{\sin \angle QAC} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ olacaktır. $\angle QAP = x$ dersek,



$$\frac{\sin(\alpha_1 - x)}{\sin(\alpha_2 + x)} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

olacaktır.

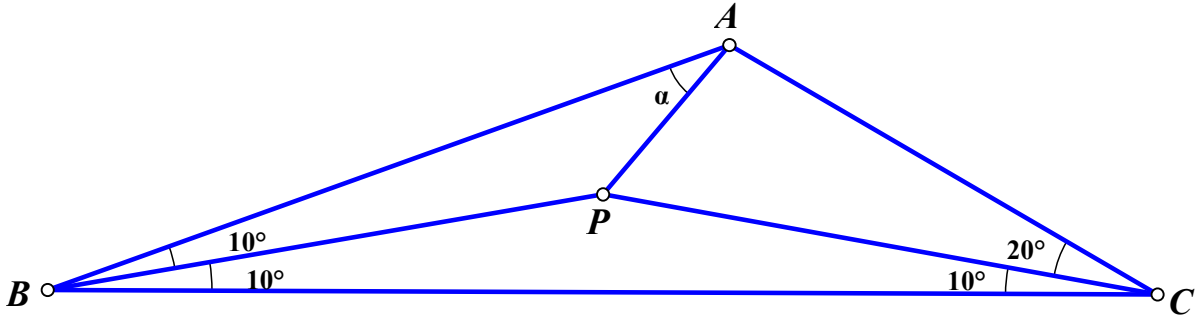
$$\frac{\sin(\alpha_1 - x)}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin(\alpha_2 + x)}{\sin \alpha_2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha_1 \cos x - \cos \alpha_1 \sin x}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_2 \cos x + \cos \alpha_2 \sin x}{\sin \alpha_2}$$

Önce bölme işlemlerini yaparsak,

$$\cos x + \cot \alpha_1 \sin x = \cos x - \cot \alpha_2 \sin x \Rightarrow \sin x \cdot (\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2) = 0$$

denkleminde ya $\sin x = 0$ ve $x = 0$, yani P ile Q noktasının çakışık olduğunu elde edeceğiz. Ya da $\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 = 0$ ise $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ$ iken sağlanır. Bu da üçgende mümkün değildir. Sonuç olarak, P ile Q noktaları çakışık.

Örnek 5:



ABC üçgeninin iç bölgesinde $\angle ABP = \angle PBC = \angle PCB = 10^\circ$ ve $\angle PCA = 20^\circ$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. Buna göre $\angle BAP$ kaç derecedir?

Çözüm:

Ceva Teoreminin trigonometrik halini α dan başlayarak yazalım.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(130^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 1$$

Denkleminde biraz düzenleme ile

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(130^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = 1 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin(50^\circ + \alpha)} = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{2 \cdot \cos 10^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(50^\circ + 30^\circ)}$$

elde edilir. Buradan bariz şekilde $\alpha = 30^\circ$ elde edilir.

Bariz şekilde elde edemediğinizi varsayalım. Çapraz çarpım sonucu ile ters trigonometrik dönüşüm kullanarak,

$$\sin \alpha \cdot \sin 80^\circ = \sin 30^\circ \cdot \sin(50^\circ + \alpha) \Rightarrow$$

$$\cos(80^\circ + \alpha) - \cos(80^\circ - \alpha) = \cos(80^\circ + \alpha) - \cos(20^\circ + \alpha) \Rightarrow \cos(80^\circ - \alpha) = \cos(20^\circ + \alpha)$$

elde edilir. Son eşitlikten ya $80^\circ - \alpha = 20^\circ + \alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ elde edilecek, ya da $80^\circ - \alpha = -(20^\circ + \alpha) \Rightarrow \alpha \in \emptyset$ elde edilecek. Bu durumda cevap $\alpha = 30^\circ$ olacaktır.

Peki, ilk çözümdeki gibi bir benzetmenin sakıncası var mı? İnceleyelim.

B açısını $10^\circ - 10^\circ$ şeklinde bölen tek bir BP doğrusu var.

C açısını saat yönünde $20^\circ - 10^\circ$ şeklinde bölen tek bir CP doğrusu var.

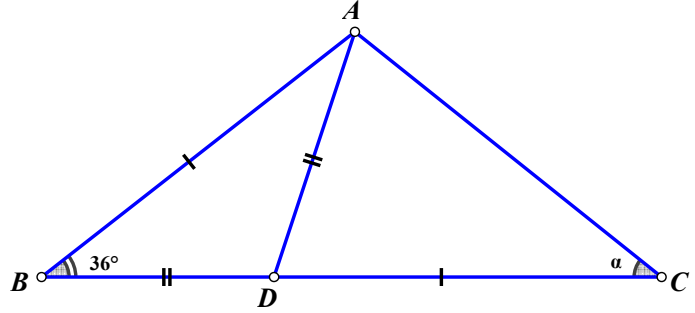
Bu iki doğru tek bir noktada kesişir. O da P noktası. Yani soruda verilen 4 açı P noktasının yerini belirtmek için yeterli. Bu durumda tek bir $\angle BAP = \alpha$ değeri vardır. Yukarıdaki

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(50^\circ + \alpha)} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(50^\circ + 30^\circ)}$$

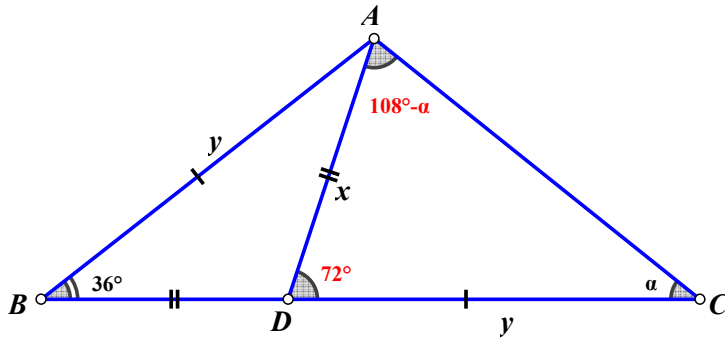
denklemini $\alpha = 30^\circ$ değerinin sağladığı aşikar. $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \angle PAC = 100^\circ$ olması da üçgen şartlarını bozmadığı için, $\alpha = 30^\circ$ tek cevaptır.

Örnek 6:

ABC üçgeninde BC kenarı üzerindeki D noktası için $CD = AB$ ve $AD = BD$ eşitlikleri sağlanmaktadır. $\angle ABC = 36^\circ$ ise $\angle ACB = \alpha = ?$



Çözüm:



ABD üçgeninde Sinüs teoremi uygularsak,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{y}{x} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}$$

(Prensip olarak, 90° den büyük açıların sinüslerini $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ özdeşliğini kullanarak yazıyorum.)

ADC üçgeninde Sinüs teoreminden,

$$\frac{CD}{AD} = \frac{y}{x} = \frac{\sin(108^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$$

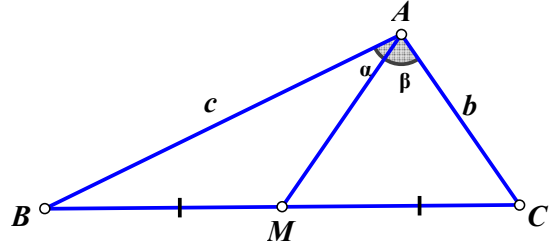
elde edilir. Bunları birleştirelim

$$\frac{\sin(108^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin(108^\circ - 36^\circ)}{\sin 36^\circ} \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

elde edilir.

Soru 1:

ABC üçgeninde $[AM]$ kenarortay ve $\angle BAM = \alpha$,
 $\angle MAC = \beta$ ise $\frac{AB}{AC}$ nedir? (α ve β cinsinden)

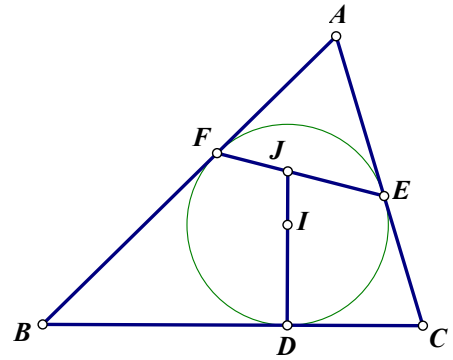


Soru 2:

ABC üçgeninde iç teğet çembere BC, AC, AB kenarlarına sırası ile D, E, F noktalarında dokunmaktadır. İç teğet çemberin merkezi I olmak üzere; $DI \cap EF = \{J\}$ ise

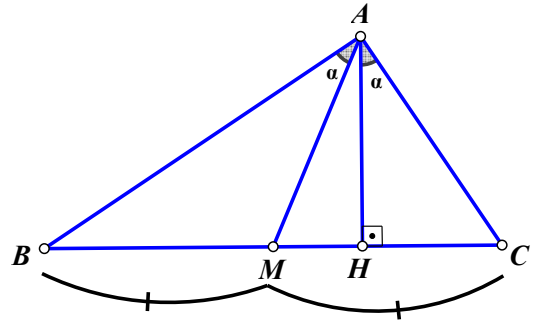
$$\frac{EJ}{JF} = \frac{AB}{AC}$$

olduğunu gösteriniz.



Soru 3:

ABC üçgeninde $[AM]$ kenarortay, $[AH]$ yüksekliktir.
 $\angle BAM = \angle HAC$ ise $\angle BAC$ kaç derecedir?



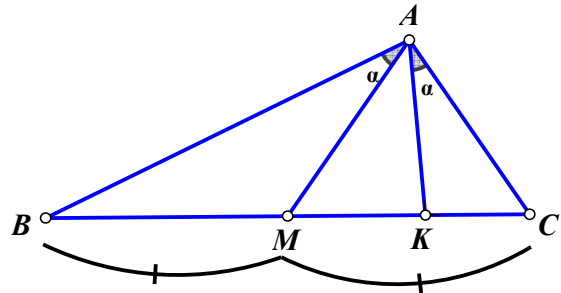
Soru 4:

Bir üçgende bir köşeden geçen kenarortay doğrusunun, o köşeden geçen açıortay doğrusuna göre simetriğine o köşeye ait kenarortaysı denir. ABC üçgeninde A köşesine ait kenarortaysı BC kenarını K de kesiyorsa,

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

olduğunu gösteriniz.

(Elde edilen bu bağıntı ile Öklid'in dik üçgende hangi bağıntısı özdeş?)

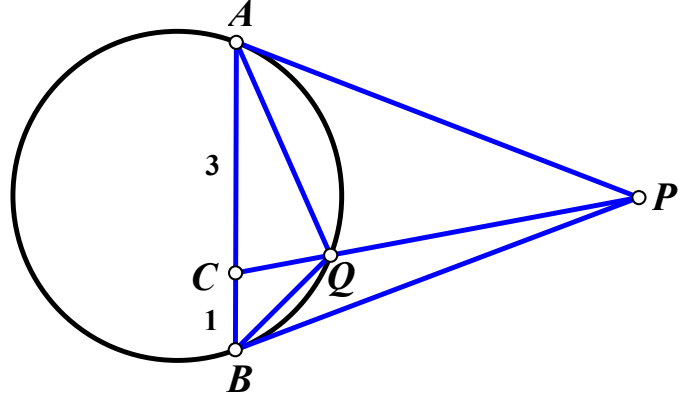


Soru 5:

Bir çembere dışındaki P noktasından çizilen teğetler, çembere A ve B noktalarında dokunuyor. $[AB]$ üzerinde bir C noktası alınıyor. $[PC]$ ile çember Q da kesiştiğine göre $AC = 3$ ve $BC = 1$ ise

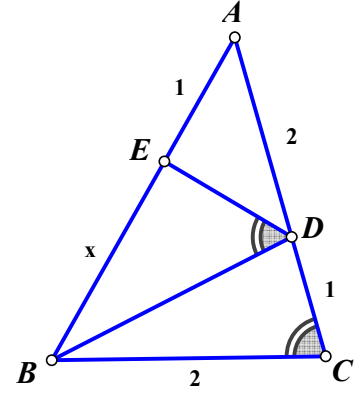
$$\frac{AQ}{QB}$$

nedir?



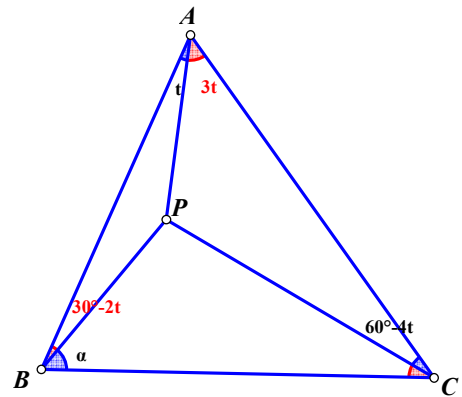
Soru 6:

ABC çeşitkenar üçgeninde AC kenarı üzerinde D , AB kenarı üzerinde E noktaları $\angle EDB = \angle BCD$ olacak şekilde alınıyor. $BC = AD = 2$ ve $AE = DC = 1$ ise, $EB = ?$



Soru 7:

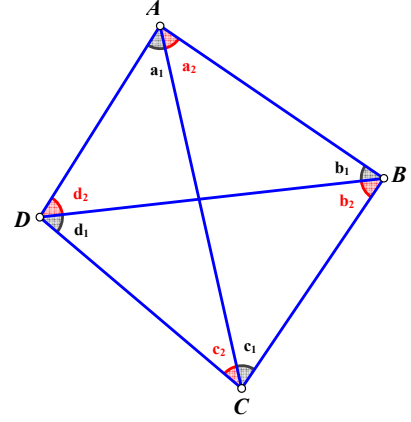
ABC üçgeninin iç bölgesinde $\angle BAP = t$, $\angle PAC = 3t$, $\angle ACP = 60^\circ - 4t$ ve $\angle PBA = 30^\circ - 2t$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. Buna göre $\angle CBP$ açısını t cinsinden bulunuz?



Soru 8:

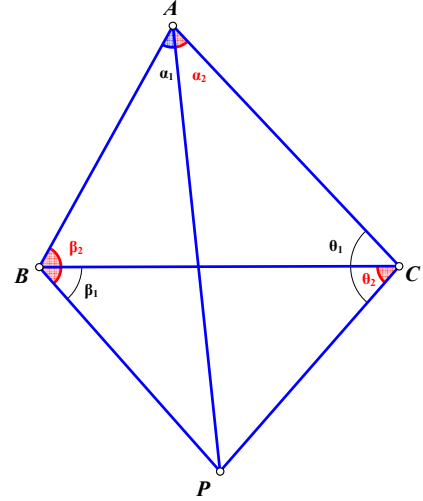
$ABCD$ dışbükey dörtgeninde
$$\frac{\sin \angle DAC \sin \angle ABD \sin \angle BCA \sin \angle CDB}{\sin \angle CAB \sin \angle DBC \sin \angle ACD \sin \angle BDA} = 1$$

olduğunu gösteriniz.



Soru 9:

Ceva Teoreminin trigonometric hali P noktası
üçgenin dışındayken de sağlanır mı?
$$\frac{\sin \angle BAP \sin \angle ACP \sin \angle CBP}{\sin \angle PAC \sin \angle PCB \sin \angle PBA} = 1$$



Soru 10:

$ABCD$ dışbükey dörtgeninde $\angle ABD = 20^\circ$,
 $\angle DBC = 60^\circ$, $\angle BCA = 50^\circ$ ve $\angle ACD = 30^\circ$ ise
 $\angle BDA = \alpha = ?$

