

FAYDALI EŞİTSİZLİK (HELPFUL INEQUALITY)

Derleyen

Osman EKİZ

Eskişehir Fatih Fen Lisesi

Bahsedeceğimiz bu eşitsizlik oldukça kullanışlı olup problem çözümlerini epey kısaltmaktadır.. Faydalı eşitsizliğe geçmeden ileride işimize yarayacak bazı eşitsizlikler verelim.

Ayrıca LHS; Eşitsizliğin sol tarafı, RHS; eşitsizliğin sağ tarafı anlamında kullanılmıştır.

1. $x, y, z \in R$ için

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad (1)$$

tir.

Çözüm: $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0 \Rightarrow$
 $2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) \geq 0$ olduğundan istenen elde edilir. $x = y = z$ için eşitlik durumu elde edilir.

Şimdi bu eşitsizlik üzerinden farklı eşitsizlikler elde edelim

$x, y, z \in R^+$ için $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} \geq 1$ 'dir.

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 3(xy + yz + zx)$
 olup

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \quad (2)$$

olur.

Bu durumda $x, y, z \in R^+$ ise

$$\frac{(x + y + z)^2}{xy + yz + zx} \geq 3 \quad (3)$$

olur.

2.[Faydalı Eşitsizlik] $a, b \in R$ ve $x, y \in R^+$ için

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (4)$$

'dir.

$$\text{İspat: } (ay - bx)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy \Rightarrow \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{xy} \geq 2ab \Rightarrow$$

$$\frac{a^2y^2}{xy} + \frac{b^2x^2}{xy} \geq 2ab \Rightarrow a^2 \cdot \frac{y}{x} + b^2 \cdot \frac{x}{y} \geq 2ab \Rightarrow$$

$$a^2 + a^2 \cdot \frac{y}{x} + b^2 + b^2 \cdot \frac{x}{y} \geq a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a^2 \left(\frac{x+y}{x} \right) + b^2 \left(\frac{x+y}{y} \right) \geq (a+b)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \text{ olur.. } (ay - bx)^2 = 0 \Rightarrow ay = bx \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \text{ için eşitlik durumu}$$

elde edilir.

Şimdi Faydalı eşitsizliğin genel halini verelim.

3. [Faydalı Eşitsizliğin Genel Hali]. $a, b, c \in R$ ve $x, y, z \in R^+$ için

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \text{ 'dir. Çünkü; (4)' den dolayı}$$

$$\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \right) + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \text{ olacaktır. Benzer şekilde devam}$$

edilirse en genel haliyle $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n \in R^+$ için

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \quad (5)$$

eşitsizliği elde edilir.

4. Cauchy – Schwarz için bir ispat

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{(a_1b_1)^2}{b_1^2} + \frac{(a_2b_2)^2}{b_2^2} + \dots + \frac{(a_nb_n)^2}{b_n^2} \text{ olup (5)'den}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{(a_1 b_1)^2}{b_1^2} + \frac{(a_2 b_2)^2}{b_2^2} + \dots + \frac{(a_n b_n)^2}{b_n^2} \leq \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

olup içler dışlar çarpımından istenen elde edilir.

5. $x, y > 0$ için $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ 'dir.

Çözüm: 4'den $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{y}} + \frac{(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}} \geq \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

6. $x, y, z > 0$ ise $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (5)'den $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}$ olur.

7. Nesbitt Eşitsizliğini (5) yardımıyla ispatlayalım.

$a, b, c \in R^+$ için $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ 'dir.

İspat: (5)'den

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \text{ olur.}$$

(1)'den $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ olup $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow$

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2} \text{ (*) olup istenen elde edilir. } a=b=c \text{ için eşitlik durumu}$$

oluşur.

8. $a, b, c \in R^+$ için $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$ 'dir.

Çözüm: (5)'den $\frac{4}{2b+2c} + \frac{4}{2c+2a} + \frac{4}{2a+2b} \geq \frac{(2+2+2)^2}{4(a+b+c)} \Rightarrow$

$$2\left(\frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{a+b+c} \text{ olup istenen elde edilir.}$$

9. $a, b, x, y, z \in R^+$ için $\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}$ 'dir.

Çözüm: $\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} = \frac{x^2}{ayx+bzx} + \frac{y^2}{azy+bxy} + \frac{z^2}{axz+byz}$ olup

(5)'i kullanırsak

$$\frac{x^2}{ayx+bzx} + \frac{y^2}{azy+bxy} + \frac{z^2}{axz+byz} \geq \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)} \text{ olur. (2)'den}$$

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \text{ olup } \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{a+b} \text{ olup istenen el-}$$

de edilir.

10. $a, b, c \in R^+$ için $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$ 'dir.

Çözüm: $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{c+a}$

olup (5)'den

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{c+a} \geq \frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{4(a+b+c)} = a+b+c$$

olup istenen elde edilir. $a=b=c$ için eşitlik sağlanır.

11. $a, b, c \in R^+$ ve $ab+bc+ca = \frac{1}{3}$ için

$$\frac{a}{a^2-bc+1} + \frac{b}{b^2-ac+1} + \frac{c}{c^2-ab+1} \geq \frac{1}{a+b+c} \text{ 'dir.}$$

Çözüm: Eşitsizliğin solundaki terimler sırsıyla a, b, c ile genişletilip (5) kullanılırsa

$$\frac{a^2}{a^3 - abc + a} + \frac{b^2}{b^3 - abc + b} + \frac{c^2}{c^3 - abc + c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + a + b + c} \dots (*)$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + a + b + c} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + 1)}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2}{3}}{(a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{a+b+c} \dots (**)$$

elde edilir.

12.[IMO – 1995]. $a, b, c \in R^+$ ve $abc = 1$ için

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Çözüm: $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ için

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \text{ olur. (5)'den}$$

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \dots (*) \text{ olur. AGO'dan}$$

$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ ve $xyz = 1$ olduğundan $x + y + z \geq 3 \dots (**)$ olup (*) ve (**)'dan istenen elde edilir.

13. AÜMO – 2001. $x, y, z \in R^+$ ve $x + y + z = 1$ ise $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{25}{z}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm: (5)'den $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{25}{z} \geq \frac{(1+3+5)^2}{x+y+z} = 81$ olur. Eşitlik durumu $\frac{1}{x} = \frac{3}{y} = \frac{5}{z}$

için geçerlidir. Bu durumda $x = \frac{1}{9}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{5}{9}$ için eşitlik sağlanır.

14. AÜMO – 1998. $x, y, z \in R_0^+$ ve $x + y + z \leq 3$ ise $\frac{2}{1+x} + \frac{2}{1+y} + \frac{2}{1+z} \geq 3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (5)'den $\frac{2}{1+x} + \frac{2}{1+y} + \frac{2}{1+z} \geq \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2})^2}{3+x+y+z} \geq \frac{18}{3+3} = 3$ olur.

$x = y = z = 1$ için eşitlik durumu elde edilir.

15. Macaristan – 1996. $a, b \in R^+$ ve $a + b = 1$ için $\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$ tür.

Çözüm: (5)'den $\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b+2} = \frac{1}{3}$ olur. $a = b = \frac{1}{2}$ için eşitlik durumu elde edilir.

16. Rusya – 1992. $a, b > 1$ için $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$ dir.

Çözüm: (5)'den $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b-2}$ olup $\frac{(a+b)^2}{a+b-2} \geq 8$ olduğunu göstermeliyiz. Son eşitsizlik ise $[(a+b)-4]^2 \geq 0$ eşitsizliğine denk olup doğru olur. $a + b = 4$ için eşitlik durumu elde edilir.

17.[APMO – 1991]. $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i, b_i \in R^+$ için $\sum a_i = \sum b_i$ ise

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$$

Çözüm: (5)'den $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}{2 \sum_{i=1}^n a_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$ olur.

18. [Çek – Slovak – 1999]. $a, b, c \in R^+$ için $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$ dir.

Çözüm:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{ab+2ac} + \frac{b^2}{bc+2ba} + \frac{c^2}{ac+2bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \text{ olur.}$$

$$(2)'den \quad (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \quad \text{olup} \quad \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1 \text{ olur. } a=b=c \text{ için eşitlik durumu elde edilir.}$$

19. [Güney Afrika – 1995]. $a, b, c, d \in R^+$ için $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$ dir.

Çözüm: (5)'den $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d} = \frac{64}{a+b+c+d}$ olur.

20. $a, b \in R^+$ için $8(a^4 + b^4) \geq (a+b)^4$ dür.

Çözüm: 5'den $\frac{a^4}{1} + \frac{b^4}{1} \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2}$ ve Karesel orta – Aritmetik orta eşitsizliğinin

den $(a^2 + b^2) \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ olup $\frac{a^4}{1} + \frac{b^4}{1} \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq \frac{\left(\frac{(a+b)^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{(a+b)^4}{8} \Rightarrow$

$8(a^4 + b^4) \geq (a+b)^4$ olur. $a=b$ için eşitlik durumu elde edilir.

21. $x, y, z \in R^+$ için $\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geq \frac{1}{2}$ dir.

Çözüm:

(5)'den

$$LHS = \frac{x^2}{x^2 + 2yx + 3zx} + \frac{y^2}{y^2 + 2zy + 3xy} + \frac{z^2}{z^2 + 2xz + 3yz} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 5(xy + yz + zx)}$$

olur. Şimdi $\frac{(x+y+z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 5(xy + yz + zx)} \geq \frac{1}{2}$ olduğunu gösterelim. Son eşitsiz-

likte içler dışlar çarpımı yapıлып gerekli düzenlemeler yapılırsa (1)'deki $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ eşitsizliği elde edilir. Bu durumda istenen elde edilmiş olur.

22. [Moldova – 2007]. $x, y, z, w \in R^+$ için

$$\frac{w}{x+2y+3z} + \frac{x}{y+2z+3x} + \frac{y}{z+2w+3x} + \frac{z}{w+2x+3y} \geq \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

Çözüm:

$$LHS = \frac{w^2}{xw+2yw+3zw} + \frac{x^2}{xy+2zx+3xw} + \frac{y^2}{yz+2yw+3xy} + \frac{z^2}{zw+2xz+3yz} \quad \text{ve}$$

$$(5)'den \quad LHS \geq \frac{(x+y+z+w)^2}{4(wx+xy+yz+zw+wy+xz)} \quad \text{olur.}$$

$$\frac{(x+y+z+w)^2}{4(wx+xy+yz+zw+wy+xz)} \geq \frac{3}{2} \quad \text{eşitsizliği} \quad \text{düzenlenirse}$$

$$3(w^2+x^2+y^2+z^2) \geq 2(wx+xy+yz+zw+wy+xz) \quad \text{eşitsizliğine} \quad \text{denk} \quad \text{olur.}$$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ eşitsizliği altı kez kullanılırsa son eşitsizliğin doğruluğu gösterilebilir. O halde istenene elde edilmiş olur.

23. [Hrvatistan – 2004]. $x, y, z \in R^+$ için

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4} \text{ dür.}$$

$$\text{Çözüm: } LHS \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)} \text{ olur.}$$

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{4} \text{ eşitsizliği ise } x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \text{ eşit-}$$

sizliğine denk olduğundan istenen elde edilir.