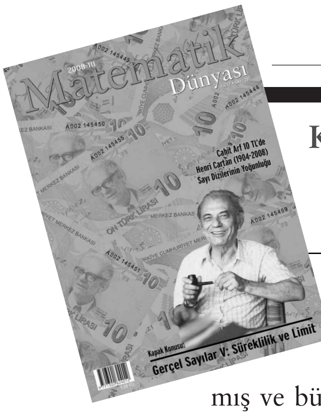


Kapak Konusu: Gerçel Sayılar V: Süreklilik ve Limit

Limit

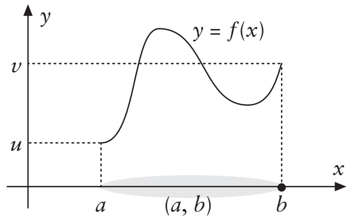
MD-2007-III sayısında bir $(x_n)_n$ dizisinin (n sonsuza giderken) limitini tanımlamış ve bütün bir sayının kapak konusunu bu kavrama ayırmıştık; yetmemiş, konuyu bir sonraki sayının kapak konusuna taşırmıştık.

Bu yazıda benzer bir limit kavramı tanıtacağız. Eğer f bir fonksiyonsa, "x, a'ya yaklaşırken $f(x)$'in limiti" ne demektir? Yani x, a'ya çok çok çok yaklaştığında, $f(x)$'in belli bir sayıya çok çok çok yakın olup olamayacağı, oluyorsa hangi sayıya çok çok çok yakın olacağı sorusunu irdeleyeceğiz.

Grafiği aşağıdaki gibi olan bir

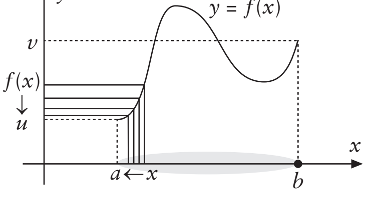
$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyon düşünelim. Bu fonksiyon (a, b) açık aralığında tanımlanmış ama a ve b noktalarında ta-



nımlanmamış, yani $f(a)$ ve $f(b)$ diye bir değer yok. Ama grafiğe bakınca görülüyor ki aslında $f(a)$'nın u olarak, $f(b)$'nin de v olarak tanımlanması gerekirmiş... Ne olmuşsa olmuş, bir aksilik olmuş ve f'nin a ve b'deki değerleri atlanmış...

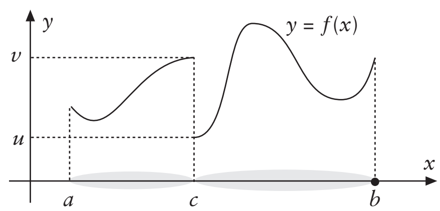
Neden yukardaki örnekte $f(a)$'nın u olarak tanımlanması gerektiğini düşünüyoruz? Çünkü (a, b) aralığındaki bir x sayısı a'ya çok çok yakınken $f(x)$ değeri de u'ya çok çok yakın oluyor. x'i, sanki bir film izliyormuş gibi, a'ya doğru hareket ettirdiğinizde, $f(x)$'in u'ya doğru hareket ettiğini ve x, a'ya yaklaştıkça $f(x)$'in de u'ya yaklaştığını göreceksiniz. Bu filmi aşağıda izleyebilirsiniz.



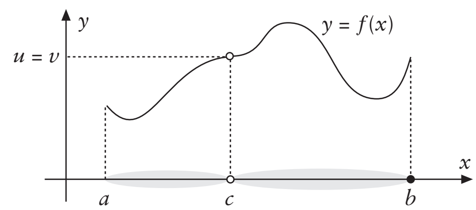
Bir başka örneğe bakalım. $a < c < b$ olsun.

$$f: [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R},$$

grafiği aşağıdaki gibi olan bir fonksiyon olsun. Fonksiyon c noktasında tanımlanmamış. Oysa fonksiyon c'nin solunda ve sağında tanımlanmış. x,



c'ye soldan yaklaştığında, $f(x)$ değeri v'ye yaklaşıyor; ama x, c'ye sağdan yaklaştığında, $f(x)$ değeri u'ya yaklaşıyor. $u \neq v$ olduğundan, bu durumda x, a'ya yaklaştığında, $f(x)$'in sabit bir sayıya yaklaştığını söyleyemiyoruz. Bu durumda f'nin c'de tanımlanmamış olması doğal karşılanabilir. Ama eğer $u = v$ olsaydı (yani fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi



olsaydı), o zaman f fonksiyonunun c'deki değerini doğal olarak $f(u)$ olarak tanımlayabilirdik.

Okur belki de yukardaki tartışmayla süreklilik arasında bir bağ olacağını tahmin etmiştir. Doğru tahmin!

Matematiksel Tanıma Giriş

Yukardaki bölümde limit kavramına sezgisel bir giriş yapmak istedik. Limitin tam matematiksel tanımına yine de hazır değiliz. Önce süreklilik kavramına biraz değişik bir gözle bakalım.

Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olmasının tanımını anımsayalım: Bir

$$f : A \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında ***sürekli*** olması için gereken koşul şudur:

Her $\varepsilon > 0$ *için öyle bir* $\delta > 0$ *olmalı ki,*

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan her $x \in A$ *için,*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlansın.

Edebi dile çevirecek olursak, bu tanım, x, a'ya çok yakın olduğunda, $f(x)$, $f(a)$'ya çok yakındır diyor. Koşul $x = a$ için hep doğru olduğundan, x'i a'dan değişik almanın bir mahsuru yok, öyle yapalım: Bir

$$f : A \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun bir $a \in A$ elemanında ***sürekli*** olması için gereken koşul şudur:

Her $\varepsilon > 0$ *için öyle bir* $\delta > 0$ *olmalı ki,*

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan her $x \in A \setminus \{a\}$ *için,*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

olsun.

Bu noktada bir artistlik yapacağız! Hem de en âlâsından! Sürekliliğin bu son tanımında a'yı illa f fonksiyonunun tanım kümesinde almayalım da, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir elemanı olarak alalım, bakalım başımıza neler gelecek? Başımıza pek bir şey gelmez, çünkü eğer $a \notin A$ ise $f(a)$'dan söz edemeyiz ve $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ eşitsizliği anlamsız olur, anlamsız olmaktan öte yazılamaz bile! Madem öyle, biz de tanımda $f(a)$ yerine $\mathbb{R}$'nin herhangi bir b elemanını koyarız! O zaman yukardaki koşul şöyle yazılır:

her $\varepsilon > 0$ *için öyle bir* $\delta > 0$ *olmalı ki,*

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan her $x \in A \setminus \{a\}$ *için,*

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

olsun.

f fonksiyonu ve a ve b noktalarıyla ilgili anlamlı bir koşul elde ettik. Koşul, sezgisel olarak şunu söylüyor: x, a'ya çok yaklaştığında ama a'dan değişik olduğunda, $f(x)$, b'ye çok yaklaşır. Koşulu şöyle de ifade edebiliriz: Eğer x'i a'ya yeterince yakın ama a'dan değişik alırsak, $f(x)$'i b'ye istediğimiz kadar yaklaştırabiliriz.

İşte "x, a'ya yakınsarken $f(x)$'in limiti b'dir"in tanımının yukardaki gibi olmasını istiyoruz.

Ama bu tanım teşebbüsünde küçük bir sorun var, o da şu: Eğer a noktası A kümesinin uzağındaysa, daha matematiksel olarak ifade edelim: a'nın belli bir ***komşuluğunda*** $A \setminus \{a\}$ kümesinde hiç eleman yoksa, daha anlaşılır biçimde ifade edelim: bir $\delta > 0$ için,

$$(a - \delta, a + \delta) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$$

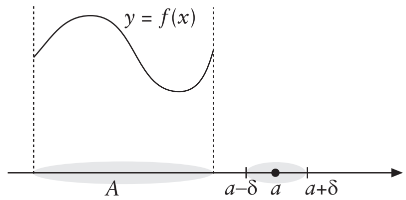
ise, gene bir başka deyişle, bir $\delta > 0$ için,

$$(a - \delta, a + \delta) \cap A \subseteq \{a\}$$

ise, o zaman,

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan bir $x \in A \setminus \{a\}$ elemanı bulunamayacağı için, yukardaki tanım teşebbüsüne göre, x, a'ya yakınsarken her b sayısı f'nin bir limiti olur. (Boşkümenin her elemanı her koşulu sağlar, dolayı-



Eğer bir $\delta > 0$ *için,* $(a-\delta, a+\delta) \cap A \subseteq \{a\}$ *oluyorsa her* b *sayısı* f*'nin* a*'da limiti olur.*

sıyla boşkümenin her x elemanı $|f(x) - b| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlar.) Bu yüzden tanımdaki a'nın her $\delta > 0$ için,

$$(a - \delta, a + \delta) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

koşulunu sağlaması gerekir ki her b sayısı limit olmasın ve "limit" denen şey biricik olsun ve bir işe yarasın.

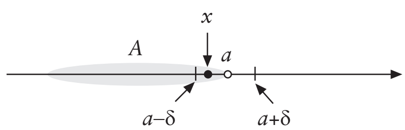
Yukardaki koşulu sağlayan bir a elemanına A'nın ***yoğunlaşma noktası*** denir. Limit kavramını ele almadan önce yoğunlaşma noktası kavramına göz atalım.

Yoğunlaşma Noktası

A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olsun. $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\delta > 0$ için,

$$(a - \delta, a + \delta) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

ise a'ya A'nın ***yoğunlaşma noktası*** adı verilir.



A'nın yoğunlaşma noktası A'da olabilir de olmayabilir de.

Örnekler.

1. $\mathbb{Z}$'nin yoğunlaşma noktası yoktur.

2. Sonlu bir kümenin yoğunlaşma noktası yoktur.

3. $A = \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ ve $A \cup \{0\}$ kümelerinin tek bir yoğunlaşma noktası vardır: 0.

4. $\{1/n + 1/m : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ kümesinin yoğunlaşma noktaları 0 ve bir $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sayısı için $1/n$ biçiminde yazılan sayılardır.

5. (0, 1) açık aralığının yoğunlaşma noktaları kümesi [0, 1] kapalı aralığıdır.

6. [0, 1] kapalı aralığının her noktası kendisinin bir yoğunlaşma noktasıdır. Bu kümenin başka da yoğunlaşma noktası yoktur.

7. $(0, 1) \cup (1, 2)$ kümesinin yoğunlaşma noktaları kümesi [0, 2] kapalı aralığıdır.

7. $\mathbb{Q}$'nün yoğunlaşma noktaları kümesi $\mathbb{R}$'dir.

8. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$'nün yoğunlaşma noktaları kümesi $\mathbb{R}$'dir.

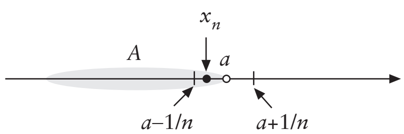
Yoğunlaşma noktası kavramı analizin en önemli kavramlarından biridir. İleride daha sık sözedeceğiz bu kavramdan. Bu sayıda ihtiyacımız olmayacak ama okurun kavramı daha iyi hissetmesi için, yoğunlaşma noktalarıyla ilgili önemli bir sonuç kanıtlayalım.

Önsav 1. *a'nın A'nın bir yoğunlaşma noktası olması için gerek ve yeter koşul, A'da a'ya yakınsayan ve terimleri birbirinden değişik olan bir dizinin bulunmasıdır.*

Kanıt: ($\Rightarrow$) Önce a'nın A'nın bir yoğunlaşma noktası olduğunu varsayalım. Demek ki, her pozitif n doğal sayısı için,

$$(a - 1/n,\ a + 1/n) \cap (A \setminus \{a\})$$

kümesinde bir x_n elemanı bulunur. O zaman elbette $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olur. Ama $(x_n)_n$ dizisinin terimle-



ri birbirinden değişik olmayabilir. Bu dizinin, birbirinden değişik terimleri olan bir altdizisini bulmak zor değildir.

Şöyle de kanıtlayabiliriz. Her $n \geq 0$ için,

$$0 < |x_{n+1} - a| < \frac{|x_n - a|}{2}$$

eşitsizliklerini sağlayan $x_n \in A$ elemanları bulabiliriz. Bunu şöyle yaparız: $x_0 \in A$ herhangi bir eleman olsun. x_n sayılarını tümevarımla bulacağız. x_n'nin bulunduğunu varsayalım. $\delta = |x_n - a|/2$ olsun. Tümevarım varsayımından dolayı $\delta > 0$'dır. a, A'nın bir yoğunlaşma noktası olduğundan,

$$(a - \delta,\ a + \delta) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

olur. Şimdi x_{n+1} elemanını bu kümeden seçelim. İstediğimiz koşul sağlanır.

Tümevarımla, her $n > i$ için,

$$0 < |x_n - a| < \frac{|x_i - a|}{2^{n-i}}$$

eşitsizliği kolaylıkla kanıtlanır. Demek ki x_n'ler birbirinden değişiktirler. $i = 0$ için,

$$0 < |x_n - a| < \frac{|x_0 - a|}{2^n}$$

elde edilir. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

olur.

Şimdi A'da a'ya yakınsayan terimleri değişik olan bir dizinin varlığını varsayalım. Böyle bir $(x_n)_n$ dizisi alalım. $\delta > 0$ herhangi bir sayı olsun.

$$(a - \delta,\ a + \delta) \cap (A \setminus \{a\})$$

kümesinin boş olmadığını kanıtlamamız gerekiyor. Ama bu kümede $(x_n)_n$ dizisinin bir terimi olmalı! Önsavımız kanıtlamıştır. □

Nihayet Limit Tanımı

Şimdi artık limit kavramının matematiksel tanımını verebiliriz.

Tanım: $A \subseteq \mathbb{R}$ bir gerçel sayılar kümesi olsun. $a \in \mathbb{R}$, A'nın bir yoğunlaşma noktası olsun. $b \in \mathbb{R}$ olsun. Ve nihayet $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$(a - \delta,\ a + \delta) \cap (A \setminus \{a\})$$

kümesindeki her x sayısının

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ varsa, o zaman, "x, a'ya giderken $f(x)$'in ***limiti*** b'dir" ya da "$f(x)$'in a'da limiti b'dir" denir. Yani x, a'ya giderken $f(x)$'in limitinin b olması için, her pozitif ε sayısı için öyle bir pozitif δ sayısı olmalı ki,

$$x \in (a - \delta,\ a + \delta) \cap (A \setminus \{a\})$$

koşulu,

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

eşitsizliğini gerektirmeli.

Bu koşul daha simgesel olarak şöyle yazılır:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in A\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Bir noktanın altını çizmek gerekir: "x, a'ya giderken" demek, "x, a'ya çok yaklaşırken ama x, a'ya eşit olmadan a'ya yaklaşırken" demektir; çünkü f fonksiyonu a'da tanımlı olmayabilir (olabilir de ama olmayabilir de). Örneğin $a = 0$ ve

$$f(x) = \frac{\exp x - 1}{x}$$

olabilir. Bu örnekte f fonksiyonu 0'da tanımlı değildir ama sayfa 50'de göreceğimiz üzere 0'da limiti vardır ve bu limit 1'dir.

Limitin - olduğunda, limit olmayabilir çünkü - biricik olduğunu kanıtlayalım:

Önsav 2. *x, a'ya giderken bir fonksiyonun limiti en fazla bir sayı olabilir. Yani x, a'ya giderken bir fonksiyonun iki değişik limiti olamaz.*

Kanıt: $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$, A'nın bir yoğunlaşma noktası olsun. Diyelim x, a'ya giderken f'nin limiti hem b hem de c oluyor. Kanıtın anafikri şu: x, a'ya çok yakınken, $f(x)$ hem b'ye hem de c'ye yakın olamaz. Nitekim $\varepsilon = |b - c|/2$ olsun. δ_b ve δ_c pozitif sayıları, her $x \in A$ için,

$$0 < |x - a| < \delta_b \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ve

$$0 < |x - a| < \delta_c \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

önermelerini sağlasınlar. $\delta = \min\{\delta_b, \delta_c\}$ olsun. a, A'nın bir yoğunlaşma noktası olduğundan, A'da

$$0 < |x - a| < \delta$$

eşitsizliklerini sağlayan bir x vardır. O zaman,

$$\begin{aligned}|b - c| &= |(b - f(x)) + (f(x) - c)|\\ &\le |b - f(x)| + |f(x) - c|\\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |b - c|\end{aligned}$$

olur ve bu bir çelişkidir. □

Yukardaki önsav sayesinde, x, a'ya giderken $f(x)$'in limiti b ise, b'nin biricik olduğunu biliyoruz; dolayısıyla, gönül rahatlığıyla

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

yazabiliriz.

Yazının girişinde yaptığımız tartışmadan şu önemli sonuç çıkar:

Teorem 3. *$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Eğer a, A'nın bir yoğunlaşma noktası değilse, o zaman f, a'da süreklidir. Eğer a, A'nın bir yoğunlaşma noktasıysa, f'nin a noktasında sürekli olması için $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ koşulu yeter ve gerek koşuldur.* □

Sayfa 40'taki teoremden ve Teorem 3'ten şu sonuçlar çıkar:

Sonuç 4. *$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.*

i. *f, a noktasında süreklidir.*

ii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

iii. *A'nın a'ya yakınsayan her $(x_n)_n$ dizisi için,*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$

eşitliği sağlanmalıdır. □

Sonuç 5. *$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.*

i. *f süreklidir.*

ii. *Her $a \in A$ için $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

iii. *A'da bir elemana yakınsayan A'nın her $(x_n)_n$ dizisi için,*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$$

eşitliği sağlanmalıdır.

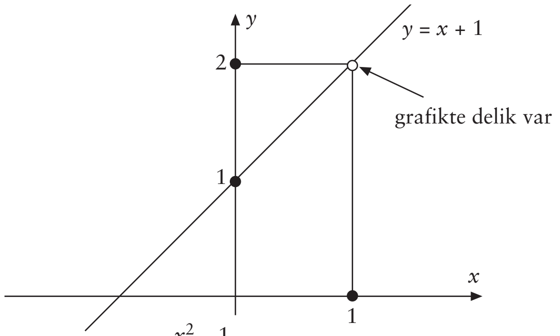
Örnek 1. Şu formülle tanımlanan fonksiyona bakalım:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

MD'yi dikkatli okuyan okur yukardaki cümlede bir eksiklik olduğunu anlamıştır: Bir fonksiyonu tanımlamak için fonksiyonun kuralını vermek yetmez, bir de ayrıca fonksiyonun tanım ve değer kümelerini de vermek gerekir. (Tanım kümesi değer kümesinden biraz daha önemlidir.) Bu formülle tanımlanan fonksiyonun tanım kümesi 1'i içermeyen herhangi bir sayı kümesi olabilir; çünkü fonksiyon 1'de tanımlı değildir. Biz, f fonksiyonunu $\mathbb{R} \setminus \{1\}$'den $\mathbb{R}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak göreceğiz. Bu fonksiyon aslında (kesirli ifadeyi sadeleştirerek),

$$f(x) = x + 1$$

formülüyle de verilebilirdi (ama $x \neq 1$ koşuluyla!) Fonksiyonun grafiği şöyle:



$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ fonksiyonunun grafiği

1 sayısı $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesinin bir yoğunlaşma noktasıdır. Dolayısıyla, her ne kadar fonksiyon 1'de tanımlı değilse de, x, 1'e giderken fonksiyonun limitini almaya çalışabiliriz:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x + 1).$$

En sondaki eşitlik, x, 1'e eşit olmadığından geçerli; bir önceki sayfada altını çizerek söylediğimizi anımsayın:

Bir noktanın altını çizmek gerekir: "x, a'ya giderken" demek, "x, a'ya çok yaklaşırken ama x, a'ya eşit olmadan, a'ya yaklaşırken" demektir; çünkü f fonksiyonu a'da tanımlı olmayabilir (olabilir de ama olmayabilir de), yani a sayısı f'nin tanım kümesinde olmayabilir.

Nitekim burada $a = 1$ ve bu sayı f'nin tanım kümesinde değil.

Yukardaki paragrafla - anlaşılır bir biçimde aslında - barışık olmayan okura şu eşitlik daha anlamlı gelecektir:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1).$$

Buradan devam edelim. $g(x) = x + 1$ formülüyle tanmlanan ve $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden g fonksiyonu, polinomyal bir fonksiyon olduğundan, süreklidir. Dolayısıyla, Sonuç 4'e göre, x, 1'e giderken $g(x)$'in limiti $g(1)$, yani $1 + 1 = 2$'dir. Sonuç olarak:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) = \lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = 2.$$

Yukardaki örnek belki kolaydı ve kolay bir örneği biraz fazla ayrıntısıyla açıklamış olabiliriz. Ama bunun yararlı olduğuna inanıyoruz.

Örnek 2. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+5} = \frac{2+3}{2+5} = \frac{5}{7}.$$

Bir başka önemli nokta daha: Çoğu zaman, yukardaki örnekte olduğu gibi bir fonksiyonun değil, bir ifadenin limiti alınır. Yani fonksiyonun tanım kümesi belirtilmez. Bu bazen soruna yol açabilir, çünkü fonksiyonun limiti fonksiyonun tanım kümesine göre de değişebilir. Örneğin,

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x > 0 \text{ ise} \\ -1 & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanmış bir fonksiyonun 0'daki limiti fonksiyonun tanım kümesine göre değişir. Tanım kümesi $(-\infty, 0)$ ise limit -1'dir, tanım kümesi $(0, \infty)$ ise limit 1'dir, tanım kümesi $\mathbb{R}$ ise limit yoktur. Ama tasalanmayın, genellikle bir ifadenin limitinin alınması istenildiğinde, bu tür anomalik durumlar olmayacak, limit tanım kümesine göre değişmeyecek.

Bir polinom sürekli bir fonksiyon verdiğinden, aşağıdaki sonuçlar kolaydır.

Sonuç 6. *$P(T) \in \mathbb{R}[X]$ bir polinomsa ve $a \in \mathbb{R}$ ise, $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$ olur.*

Sonuç 7. *$P(T)$, $Q(T) \in \mathbb{R}[X]$ iki polinomsa, $a \in \mathbb{R}$ ise ve $Q(a) \neq 0$ ise, o zaman*

$$\lim_{x \to a} P(x)/Q(x) = P(a)/Q(a)$$

olur.

Limit ve Toplamayla Çarpma

Bu bölümde limit almayla toplama ve çarpma gibi işlemler arasındaki ilişkileri irdeleyeceğiz. Her şey dilediğimiz ya da dilenmesi gerektiği gibi olacak,

$$\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$$

ve

$$(\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)g(x)$$

gibi eşitlikler, eşitliğin sol tarafındaki ifadeler anlamlı olduklarında, doğru olacaklar. (Bu, sağ taraftaki ifade de anlamlı olacak anlamına gelir.)

Not: Teorem 3'ten dolayı f ve g fonksiyonları, a'da sürekli olduğunda bu eşitlikler doğrudur.

Yazının devamında sürekli aynı şeyi tekrarlamamak için şu tanımları yapıyoruz: $A \subseteq \mathbb{R}$, bir gerçel sayılar kümesi. $a \in \mathbb{R}$, A'nın bir yoğunlaşma noktası ve f ve g, A'dan $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyon.

Teorem 8. *Eğer f ve g'nin a'da limitleri varsa o zaman $f + g$ ve fg fonksiyonlarının da a'da limitleri vardır ve*

$$\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} (f+g)(x)$$

ve

$$(\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x)) = \lim_{x\to a} (fg)(x)$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ve $\lim_{x\to a} f(x) = c$ olsun. Önce daha kolay olan toplamadan başlayalım. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. b, f'nin a'da limiti olduğundan, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki,

$$(a - \delta_1, a + \delta_1) \cap A$$

kümesinin her x sayısı

$$|f(x) - b| < \varepsilon/2$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca c, g'nin a'da limiti olduğundan, öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki,

$$(a - \delta_2, a + \delta_2) \cap A$$

kümesinin her x sayısı

$$|g(x) - c| < \varepsilon/2$$

eşitsizliğini sağlar. Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Elbette $\delta > 0$. Elbette $(a - \delta, a + \delta) \cap A$ kümesinin her x sayısı

$$|(f(x) + g(x)) - (b + c)| = |(f(x) - b) + (g(x) - c)| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur ve birinci eşitlik böylece kanıtlanmış olur.

Gelelim ikinci eşitliğe. Bu bizi birincisinden biraz daha fazla uğraştıracak. Resmi kanıtı daha sonraya bırakıp tartışalım. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $\delta > 0$ arıyoruz ki, $|x - a| < \delta$ ise,

$$|f(x)g(x) - bc| < \varepsilon$$

olsun. Bu $|f(x)g(x) - bc|$ ifadesiyle oynayıp

$$|f(x)g(x) - bc| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin geçerli olması için x'in a'nın ne kadar yakınında olması gerektiğini bulalım. Bunun için elbette f ve g'yi hesapların içine sokmalıyız. Hesaplara başlayalım:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - bc| &= |f(x)g(x) - f(x)c + f(x)c - bc|\\ &\le |f(x)g(x) - f(x)c| + |f(x)c - bc|\\ &= |f(x)||g(x) - c| + |f(x) - b||c|.\end{aligned}$$

En sağdaki

$$|f(x)||g(x) - c| + |f(x) - b||c|$$

ifadesinin ε'dan küçük olmasını istiyoruz. Toplanılan terimlerin her birini $\varepsilon/2$'den küçük yapabilirsek o zaman toplam ε'dan küçük olur. Bu ifadenin sağındaki $|f(x) - b||c|$ terimi bu açıdan bir sorun teşkil etmiyor, çünkü ne de olsa c, x'ten bağımsız sabit bir sayı ve f'nin a'daki limiti b olduğundan, $|f(x) - b|$ sayısı $\varepsilon/2|c|$'den küçük olacak biçimde seçebiliriz; o zaman, $|f(x) - b||c|$ terimi $\varepsilon/2$'den küçük olur. (Eğer $c = 0$ ise, $\varepsilon/2c$'de diye bir şey yoktur ama eğer $c = 0$ ise en sağdaki ifade zaten kaybolur. c'nin 0 olup olmamasıyla uğraşmak istemiyorsak x'i $|f(x) - b|$ sayısı $\varepsilon/2(|c|+1)$'den küçük olacak biçimde seçebiliriz.) Sağdaki $|f(x)||g(x) - c|$ terimi daha problematik çünkü, her ne kadar $|g(x) - c|$'yi küçültebilirsek de, eğer $|f(x)|$ sınırsız büyürse çarpımları çok küçük olmayabilir. Demek ki $f(x)$'in c civarında sınırlı olduğunu kanıtlamalıyız. Önce bunu kanıtlayalım, daha sonra teoremin resmi kanıtını veririz.

Teorem 9. *Eğer f'nin a'da limiti varsa o zaman f, a'nın bir komşuluğunda sınırlıdır; yani öyle bir $\delta > 0$ ve M vardır ki, eğer $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$ ise, $|f(x)| < M$ olur.*

Kanıt: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olsun. $\varepsilon = 1$ alalım. Limitin tanımından dolayı, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$ ise, $|f(x) - b| < \varepsilon = 1$ yani $b - 1 < f(x) < b + 1$ olur. Eğer

$$M = \max\{|b - 1|, |b + 1|$$

ise, bundan, $|f(x)| < M$ çıkar. □

Teorem 6'nın İkinci Kısmının Resmi Kanıtı: $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olduğundan, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, eğer $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap A$ ise,

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2(|c|+1)}$$

olur. Dolayısıyla bu durumda,

$$|f(x) - b||c| < \frac{\varepsilon}{2(|c|+1)}|c| = \frac{\varepsilon}{2}\frac{|c|}{|c|+1} \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

olur.

2) Ayrıca, gene $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olduğundan, Teorem 7'ye göre, öyle bir $\delta_2 > 0$ ve $M > 0$ vardır ki, eğer $x \in (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap A$ ise,

$$|f(x)| < M \qquad (2)$$

olur.

3) $\lim_{x\to a} g(x) = c$ olduğundan, öyle bir $\delta_3 > 0$ vardır ki, eğer $x \in (a - \delta_3, a + \delta_3) \cap A$ ise,

$$|g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (3)$$

olur.

4) Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$ ve

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$$

ise olsun. O zaman (1, 2, 3) eşitsizliklerinden dolayı,

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - bc| &= |f(x)g(x) - f(x)c + f(x)c - bc|\\ &\le |f(x)g(x) - f(x)c| + |f(x)c - bc|\\ &= |f(x)||g(x) - c| + |f(x) - b||c|\\ &\le M(\varepsilon/2M) + \varepsilon/2 = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

olur. Teorem 8 kanıtlanmıştır. □

Sonuç 10. *Eğer f'nin a'da limiti varsa ve $r \in \mathbb{R}$ herhangi bir gerçel sayıysa, o zaman rf fonksiyonunun da a'da limiti vardır ve*

$$\lim_{x\to a} rf(x) = r\lim_{x\to a} f(x)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Teorem 8'den $g(x) = r$ alarak çıkar. Bir başka kanıt: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olsun. Eğer $r = 0$ ise her şey ortada. Bundan böyle r'nin 0 olmadığını varsayalım. Limitin tanımına göre, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$ için $|f(x) - b| < \varepsilon/|r|$ olur, demek ki, $|rf(x) - rb| = |r||f(x) - b| < |r|\,\varepsilon/|r| = \varepsilon$ olur. Sonuç kanıtlanmıştır. □

Bu sonucun bariz bir sonucu:

$$\lim_{x\to a} -f(x) = -\lim_{x\to a} f(x);$$

tabii eğer sağdaki ifadenin anlamı varsa, yani sağdaki limit varsa...

Örnek 3. $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}\right)^2.$

Sayfa 45'teki Örnek 2'den ve Teorem 6'dan dolayı $(5/7)^2 = 25/49$ bulunur.

Teorem 8'e benzer bir sonuç $1/f$ fonksiyonu için de geçerlidir:

Teorem 10. *Eğer* $\lim_{x\to a} f(x)$ *varsa ve* 0 *değilse o zaman* $\lim_{x\to a} 1/f(x)$ *de vardır ve*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$$

eşitliği geçerli olur.

Bu teoremi kanıtlamadan önce Teorem 7'nin bir benzerini kanıtlamalıyız.

Teorem 11. *Eğer f'nin a'da limiti varsa ve bir $c \in \mathbb{R}$ için,*

$$\lim_{x\to a} f(x) > c$$

oluyorsa, o zaman öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$ ise, $f(x) > c$ olur.

Kanıt: $\lim_{x\to a} f(x) = b > c$ olsun. $\varepsilon = b - c > 0$ olsun. O zaman öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$ ise, $|f(x) - b| < \varepsilon$, demek ki,

$$c = b - \varepsilon < f(x)$$

olur. □

Elbette benzer teorem "<" eşitsizlik işareti için de geçerlidir. Teorem 10'un kanıtında yukardaki teoremi $c = 0$'a uygulayacağız.

Teorem 10'un Kanıtı: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olsun. Sonuç 8'e göre, gerekirse f yerine $-f$ alarak, b'nin pozitif olduğunu varsayabiliriz. $\varepsilon > 0$ olsun.

1) $\lim_{x\to a} f(x) = b > b/2$ olduğundan, Teorem 10'a göre öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, eğer

$$x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap A$$

ise, $f(x) > b/2$ olur.

2) Öte yandan, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olduğundan, öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki, eğer

$$x \in (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap A$$

ise, $|f(x) - b| < b^2\varepsilon/2$ olur.

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Eğer

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$$

ise, yukardaki iki paragrafı kullanarak,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - f(x)|}{|b||f(x)|} < \frac{|b - f(x)|}{b^2/2} < \frac{b^2\varepsilon/2}{b^2/2} = \varepsilon$$

buluruz. Bir teoremin daha sonuna geldik. □

Limit ve Sıralama

Bir önceki bölümde sıralamayla ilgili bir sonuç kanıtladık, daha doğrusu kanıtlamak zorunda kaldık: Bu bölümde de yardımımıza yetişecek olan Teorem 10. Buna eşitsizlikle ilgili başka sonuçlar da ekleyeceğiz. f, g, A ve a, bir önceki bölümdeki gibi olsunlar.

Eğer bir $\delta > 0$ için her $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$ elemanı $f(x) \le g(x)$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman "***a'nın bir komşuluğunda** $f \le g$*" denir.

Teorem 12. *Eğer* $\lim_{x\to a} f(x)$ *ve* $\lim_{x\to a} g(x)$ *varsa ve a'nın bir komşuluğunda $f \le g$ ise o zaman,*

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

olur.

Kanıt: a'nın bir komşuluğunda $f \le g$ olduğundan, tanım gereği, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$ için $f(x) \le g(x)$ olur.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

ve

$$\lim_{x\to a} g(x) = c$$

olsun. Bir an için, $b > c$ varsayımını yapalım.

$$d = \frac{b + c}{2}$$

olsun. O zaman,

$$\lim_{x\to a} g(x) = c < d < b = \lim_{x\to a} f(x)$$

olur. Teorem 10'a göre, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, eğer $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap A$ ise, $f(x) > d$ olur. Gene Teorem 11'e göre (daha doğrusu Teorem 11'in benzerine göre), öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki, eğer $x \in (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap A$ ise, $g(x) < d$ olur. Demek ki eğer $|x - a| < \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$ ise,

$$f(x) > d > g(x)$$

olur. Bu da $|x - a| < \delta$ iken $f(x) \le g(x)$ gerçeğiyle çelişir. □

Teorem 13 [Sandviç Teoremi]. *h, A'da tanımlı ve gerçel sayılarda değer alan bir fonksiyon olsun. Eğer* $\lim_{x\to a} f(x)$ *ve* $\lim_{x\to a} g(x)$ *varsa ve eşitlerse ve a'nın bir komşuluğunda $f \le h \le g$ ise o zaman,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

olur.

Kanıt: Eğer $\lim_{x\to a} (h(x) - f(x))$ limiti olduğunu ve bu limitin 0'a eşit olduğunu gösterirsek, o zaman

$$h(x) = (h(x) - f(x)) + f(x)$$

olduğundan, Teorem 6'ya göre,

$$\lim_{x\to a} h(x)$$

vardır ve

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} (h(x) - f(x)) + \lim_{x\to a} f(x) = 0 + \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

olur. Demek ki a'nın bir komşuluğunda

$$0 \le h - f \le g - f$$

eşitsizlikleri ve

$$\lim_{x\to a} (g(x) - f(x)) = 0$$

eşitliği varsayımlarından hareketle

$$\lim_{x\to a} (h(x) - f(x))$$

limitinin olduğunu ve 0'a eşit olduğunu kanıtlamamız gerekiyor. $h - f$ yerine h, $g - f$ yerine g yazalım ve

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$

eşitliğinden ve a'nın bir komşuluğunda

$$0 \le h \le g$$

eşitsizliklerinden hareketle,

$$\lim_{x\to a} h(x)$$

limitinin olduğunu ve 0'a eşit olduğunu kanıtlamamız gerekiyor.

$\varepsilon > 0$ olsun.

$\lim_{x\to a} g(x) = 0$ olduğundan öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, $(a - \delta_1, a + \delta_1) \cap A$ aralığındaki her x sayısı için,

$$-\varepsilon < g(x) < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

a'nın bir komşuluğunda $0 \le h \le g$ olduğundan öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki, $(a - \delta_2, a + \delta_2) \cap A$ kümesindeki her x sayısı için,

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

olur. Demek ki eğer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ise, her

$$x \in (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap A$$

için,

$$0 \le f(x) \le g(x) < \varepsilon,$$

yani $-\varepsilon \le f(x) < \varepsilon$ sağlanır. Demek ki $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. □

Alıştırmalar

1. Eğer $\lim_{x\to a} f(x)$ varsa o zaman

$$\lim_{x\to a} |f(x)|$$

limitinin de olduğunu ve

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlayın.

2. $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ ile $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ eşitliklerinin eşdeğer olduklarını kanıtlayın. (Birinin limiti varsa ve 0'a eşitse, diğerinin de vardır ve o da 0'a eşittir.) Ama bunun 0 dışında bir sayı için doğru olmadığını kanıtlayın.

Limit ve Bileşke

Bu son bölümde, limitle fonksiyonların bileşkesi arasındaki ilişkiyi irdeleyeceğiz.

Teorem 14. *$\lim_{x\to a} f(x) = b$ olsun ve f, a'nın bir komşuluğunda birebir olsun. $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, bir başka gerçel sayılar kümesi ve g, B'den $\mathbb{R}$'ye giden bir başka fonksiyon olsun. Eğer $\lim_{x\to b} g(x) = c$ ise*

$$\lim_{x\to a} g(f(x))$$

vardır ve c'ye eşittir.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim_{x\to b} g(x) = c$ olduğundan, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki her

$$x \in (b - \delta_1, b + \delta_1) \cap B \setminus \{b\}$$

için,

$$g(x) \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$$

olur. Ayrıca $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki her

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A \setminus \{a\}$$

için,

$$f(x) \in (b - \delta_1, b + \delta_1)$$

olur. f, a'nın bir komşuluğunda birebir olduğundan, f, a'nın bu komşuluğunda b değerini en fazla bir kez alabilir. $\delta > 0$ sayısını,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A \setminus \{a\}$$

ise $f(x) \ne b$ olacak kadar küçük seçebiliriz.

Şimdi $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A \setminus \{a\}$ ise, önce,

$$f(x) \in (b - \delta_1, b + \delta_1) \cap B \setminus \{b\}$$

olur; sonra da, ilk paragraftan dolayı

$$g(f(x)) \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$$

olur. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Teorem 15. *$\lim_{x\to a} f(x) = b$ olsun. $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, bir başka gerçel sayılar kümesi olsun. g, B'den $\mathbb{R}$'ye giden ve b'de sürekli olan bir başka fonksiyon olsun. O zaman $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$ olur.*

Kanıt: g sürekli olduğundan, $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(b)$ olur. □

Alıştırmalar

1. Eğer $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ise ve f, a'nın bir komşuluğunda birebirse, o zaman b'nin $f(A)$'nın bir yoğunlaşma noktası olduğunu kanıtlayın. (f, sabit b fonksiyonuysa bu yanlış).

2. $\{1/n + 1/m : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ kümesinin yoğunlaşma noktalarının 0 ve bir $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sayısı için $1/n$ biçiminde yazılan sayılar olduğunu kanıtlayın. ♦